Курош А.Г.

Теория групп

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 22.144
ББК 512.54
К 93

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-01-07053

Курош А. Г. **Теория групп.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 808 с. — ISBN 978-5-9221-1349-6.

Книга известного советского математика А. Г. Куроша, написанная в сороковых годах двадцатого века и давшая толчок к развитию теории групп советскими математиками. В книге рассматриваются общие свойства конечных групп, свойства абелевых групп, теоретико-групповые конструкции, разрешимые и нильпотентные группы, а также развитие теории и свойства бесконечных групп.

Издание предназначено алгебраистам, работающим в теории групп, а также студентам, аспирантам и научным работникам, интересующимся данной темой.

ISBN 978-5-9221-1349-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2011
© А. Г. Курош, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 13
Из введения к первому изданию 17

Часть первая
Основы теории групп

Глава первая. **Определение группы** 20
§ 1. Алгебраическая операция 20
§ 2. Изоморфизм. Гомоморфизм 24
§ 3. Группа 29
§ 3а. Аксиоматика Бэра и Леви 35
§ 4. Примеры групп 41

Глава вторая. **Подгруппы** 46
§ 5. Подгруппы 46
§ 6. Системы образующих. Циклические группы 49
§ 7. Возрастающие последовательности групп 55

Глава третья. **Нормальные делители** 61
§ 8. Разложения группы по подгруппе 61
§ 9. Нормальный делитель 66
§ 10. Связь нормальных делителей с гомоморфизмами и фактор-группами 73
§ 11. Классы сопряженных элементов и сопряженных подгрупп 81
§ 11а. Группы подстановок 86
§ 11б. Основные понятия теории колец 90

Глава четвертая. **Эндоморфизмы и автоморфизмы. Группы с операторами** 94
§ 12. Эндоморфизмы и автоморфизмы 94
§ 13. Голоморф. Совершенные группы 98
§ 14. Характеристические и вполне характеристические подгруппы 103
§ 15. Группы с операторами 110

Глава пятая. **Ряды подгрупп. Прямые произведения. Определяющие соотношения** 116
§ 16. Нормальные и композиционные ряды 116
§ 17. Прямые произведения 122
§ 18. Свободные группы. Определяющие соотношения 130

Часть вторая
Абелевы группы

Глава шестая. **Основы теории абелевых групп** 139
§ 19. Ранг абелевой группы. Свободные абелевы группы 139
§ 20. Абелевы группы с конечным числом образующих 147
§ 21. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы 153
§ 22. Абелевы группы с операторами 159
§ 22а. Теория Тейхмюллера 163

Глава седьмая. **Примарные и смешанные абелевы группы** 169
§ 23. Полные абелевы группы 169
§ 24. Прямые суммы циклических групп 176
§ 25. Сервантные подгруппы 181
§ 26. Примарные группы без элементов бесконечной высоты 186
§ 27. Ульмовские факторы. Теорема существования 193
§ 28. Теорема Ульма 199
§ 29. Смешанные абелевы группы 208

Глава восьмая. **Абелевы группы без кручения** 213
§ 30. Группы ранга 1. Типы элементов группы без кручения 213
§ 31. Вполне разложимые группы 218
§ 32. Другие классы абелевых групп без кручения 223
§ 32а. Поле p-адических чисел 228
§ 32б. Группы конечного ранга без кручения 235

§ 32в. Дополнения и приложения результатов предшествующего параграфа 242

Часть третья
Теоретико-групповые конструкции

Глава девятая. **Свободные произведения и свободные группы** . . 248
§ 33. Определение свободного произведения. 248
§ 34. Подгруппы свободного произведения 257
§ 35. Изоморфизм свободных разложений. Свободные произведения с объединенной подгруппой 266
§ 36. Подгруппы свободных групп 274
§ 37. Вполне характеристические подгруппы свободных групп. Тождественные соотношения 283
§ 37а. Локально свободные группы 289

Глава десятая. **Группы с конечным числом образующих** 297
§ 38. Общие свойства групп с конечным числом образующих 297
§ 39. Теорема Грушко. 304
§ 40. Теорема Грушко (окончание) 310
§ 41. Группы с конечным числом определяющих соотношений 316

Глава одиннадцатая. **Прямые произведения. Структуры** 324
§ 42. Предварительные замечания 324
§ 43. Структуры 329
§ 44. Дедекиндовы и вполне дедекиндовы структуры 334
§ 45. Прямые суммы во вполне дедекиндовых структурах 342
§ 46. Вспомогательные леммы 350
§ 47. Основная теорема 358
§ 47а. Прямое доказательство теоремы Шмидта. Некоторые другие теоремы 363
§ 47б. Группы с изоморфными структурами подгрупп 372

Глава двенадцатая. **Расширения групп** 382
§ 48. Системы факторов 382
§ 49. Расширения абелевых групп. Группы гомологий 387
§ 50. Вычисление второй группы гомологий 392
§ 51. Расширения некоммутативных групп. 398
§ 52. Частные случаи 405

Часть четвертая
Разрешимые и нильпотентные группы

Глава тринадцатая. **Условия конечности, силовские подгруппы и смежные вопросы** 409
§ 53. Условия конечности 409
§ 54. Силовские подгруппы. Центры p-групп 415
§ 55. Локальные свойства 425
§ 56. Нормальные и инвариантные системы 430

Глава четырнадцатая. **Разрешимые группы** 438
§ 57. Разрешимые и обобщенные разрешимые группы 438
§ 58. Локальные теоремы. Локально разрешимые группы 441
§ 59. Наложение условий конечности 448
§ 60. Силовские П-подгруппы разрешимых групп 452
§ 61. Конечные полупростые группы 460

Глава пятнадцатая. **Нильпотентные группы** 468
§ 62. Нильпотентные и конечные нильпотентные группы 468
§ 63. Обобщенные нильпотентные группы 475
§ 64. Связи с разрешимыми группами. S-группы. Наложение условий конечности 483
§ 65. Полные нильпотентные группы 489
§ 66. Группы с однозначным извлечением корня 498
§ 67. Локально нильпотентные группы без кручения 502
Заключение к первому изданию 513

Дополнение
Развитие теории бесконечных групп за 1952–1965 гг.

Предисловие 525

Часть первая. **Основы теории групп** 527
§ Д.1. Группы, подгруппы 527
Определение группы (527). Подгруппы (528). Системы образующих. Циклические группы (529).
§ Д.2. Гомоморфизмы. Нормальные делители 530

Гомоморфизмы (530). Прямые и обратные спектры (531). Разложения группы по подгруппе (532). Простые группы (533). Нормальные ряды (533). Достижимые подгруппы (534).

§ Д.3. Автоморфизмы. Характеристические подгруппы 535
Эндоморфизмы и автоморфизмы (535). Голоморф. Совершенные группы (536). Некоторые характеристические подгруппы (537). Вербальные и маргинальные подгруппы; гиперхарактеристические и ультрахарактеристические подгруппы (538). Обобщенные эндоморфизмы и автоморфизмы (540). Связка соответствий, почти-кольцо преобразований (541).

§ Д.4. Группы с мультиоператорами 542
Группы с полугруппой и с группой операторов (542). Мультиоператорные группы (543). Простейшие свойства мультиоператорных групп (544). Идеалы (544). Взаимный коммутант (545).

Часть вторая. **Теоретико-групповые конструкции** 547

§ Д.5. Прямые произведения 547
Простейшие свойства (547). Существование общего продолжения (548). Изоморфизмы прямых разложений (549). Теория Бэра (550). Другие теоремы об изоморфизмах прямых разложений (552).

§ Д.6. Полные прямые и подпрямые произведения 553
Полные прямые произведения (553). Подпрямые произведения (555).

§ Д.7. Свободные произведения 556
Теорема о подгруппах (556). Другие свойства свободных произведений (557). Связь прямых и свободных произведений (558). Полные свободные произведения (559). Случай операторных и мультиоператорных групп (560).

§ Д.8. Амальгамы групп 561
Свободные произведения с объединенной подгруппой (561). Вложения амальгам в группы (562).

§ Д.9. Свободные группы. 564
Подгруппы свободных групп (564). Нормальные делители свободных групп (565). Примитивные элементы (567). Автоморфизмы и эндоморфизмы свободных групп (567). Уравнения в свободных группах (568). Обобщения свободных групп (568).

§ Д.10. Многообразия и их свободные группы 569
Многообразия групп (569). Свободные группы многообразий (570). Структура многообразий (571). Полугруппа многообразий (572). Многообразия, порождаемые конечной группой (573). Дальнейшее изучение свободных групп многообразий (574).

§ Д.11. Точные операции в классе групп 576
Точные операции (576). Основные постулаты (577). Правильные операции (578). Вербальные произведения (579). Некоторые свойства нильпотентных и разрешимых произведений (580).

Поливербальные операции (581). Некоторые другие операции (583). Обобщения (583).

§ Д.12. Расширения. Сплетения 584
Расширения (584). Подобие расширений (585). Сплетения (585). Некоторые свойства стандартных сплетений (587).

§ Д.13. Некоторые другие конструкции 588
Полупрямые произведения (588). Общие произведения (589). Косые произведения (591). Факторизации (591). Факторизации в смысле Хайоша (593). Цепные произведения (593).

§ Д.14. Структуры подгрупп, структурные изоморфизмы 593
Постановка задач (593). Группы, структуры подгрупп которых обладают некоторыми заданными свойствами (594). Структурные изоморфизмы (595). Структурные изоморфизмы абелевых и нильпотентных групп (596). Группы с дуальными структурами подгрупп (597). Некоторые другие структуры, связанные с группой (597).

Часть третья. **Некоторые классы групп** 599

§ Д.15. Конечнопорожденные и конечноопределенные группы 599
Конечнопорожденные группы (599). Конечноопределенные группы (600). Подгруппы конечноопределенных групп (602). Алгоритмические исследования (602).

§ Д.16. Периодические группы 604
Проблема Бернсайда о периодических группах (604). Ограниченная проблема Бернсайда (604). Изучение бернсайдовых групп (605). Ослабленная проблема Бернсайда (605). Локально конечные группы (606). Универсальная счетная локально конечная группа (607). Локально нормальные группы (607). Дисперсивные группы (608).

§ Д.17. Группы с другими условиями конечности 608
Вступление (608). Группы с условием минимальности для подгрупп (609). Группы с условием минимальности для нормальных делителей (609). Другие условия минимальности (610). Нётеровы группы (611). Группы с конечными классами сопряженных элементов (612). Частные типы FC-групп (613). Группы с конечным числом классов сопряженных элементов (614). Финитно аппроксимируемые группы (614).

§ Д.18. Силовские подгруппы; p-группы 615
Силовские p-подгруппы (615). Силовские Π-подгруппы (617). Силовские и холловские базы (618). Регулярные p-группы (619).

§ Д.19. Группы без кручения. Полные группы. Покрытия 620
Π-полные группы, ΠR- и ΠD-группы (620). Свободные ΠD-группы (621). Другие результаты о полных группах (622). Пополнения (622). Уравнения в группах (623). Покрытия (624). Расщепления (625).

§ Д.20. Радикалы 626
Радикалы в классе всех групп (626). Минимальный радикальный класс над данным классом групп (628). Минимальный полупростой класс над данным классом групп (629). Некоторые примеры (629). Радикалы в данном классе групп (630). Другие подходы к понятию радикала (631).

§ Д.21. Свойства классов групп 632
Общие замечания (632). Простейшие свойства (632). Исследования Бэра (633). Функционалы, теоретико-групповые функции (634). Еще одна схема нильпотентности и разрешимости (635).

§ Д.22. Группы автоморфизмов, групповые пары 636
Групповые пары (636). Категория групповых пар (637). Стабильные группы автоморфизмов (638). Г-центральные ряды (638). Некоторые подгруппы группы автоморфизмов (639). Треугольные группы автоморфизмов (640).

Часть четвертая. **Разрешимые и нильпотентные группы** 641

§ Д.23. Обобщенные разрешимые группы 641
Некоторые общие свойства (641). Локально разрешимые группы (642). Группы, радикальные в смысле Плоткина (643). RN^*- и RI^*-группы (644). Возрастающие ряды коммутантов (645).

§ Д.24. Разрешимые группы 645
Разрешимые A_i-группы (645). Группы автоморфизмов разрешимых A_i-групп (646). Другие свойства нётеровых разрешимых групп (646). Двуступенно разрешимые группы (647). Свободные разрешимые группы (648). Полинильпотентные группы (649). Некоторые обобщения (651).

§ Д.25. Обобщенные нильпотентные группы 651
Локально нильпотентные группы (651). Локально нильпотентные группы без кручения (652). Группы с нормализаторным условием (653). ZA-группы (653). ZD-группы (654). Длины нижних и верхних центральных рядов (655). $\overline{Z}$-группы (656).

§ Д.26. Энгелевы группы 656
Энгелевы группы, энгелевы элементы (656). Связи энгелевости с нильпотентностью (657). Энгелевы элементы и локально нильпотентный радикал (657). Энгелевы и субинвариантные элементы (658). Квазинильпотентные группы, нильгруппы (659). Обобщения (660).

§ Д.27. Нильпотентные группы 661
Некоторые отдельные результаты (661). Конечнопорожденные нильпотентные группы (662). Свободные нильпотентные группы (663). Подгруппа Фраттини (664). Нильпотентность подгруппы Фраттини (665).

Часть пятая. **Абелевы группы** 667

§ Д.28. Основы теории абелевых групп 667
Введение (667). Прямые суммы циклических групп (667). Абелевы группы, близкие к прямым суммам циклических групп (669). Полные абелевы группы (670). Вполне разложимые группы (671). Системы образующих (671).

§ Д.29. Прямые слагаемые. Сервантные и высокие подгруппы 672
Прямые слагаемые (672). Сервантные подгруппы (673). Обобщения сервантности (674). Высокие подгруппы (675). Алгебраически компактные группы (676).

§ Д.30. Примарные абелевы группы 677
Базисные подгруппы (677). Примарные группы без элементов бесконечной высоты (679). Ульмовские инварианты (680). $\mathfrak{m}$-неразложимые группы (681).

§ Д.31. Абелевы группы без кручения 681
Группы конечного ранга без кручения (681). Неразложимые группы (683). Изоморфизмы прямых разложений (683). Вполне разложимые группы (684). Полные прямые суммы групп ранга 1 (685). Узкие группы (686). Другие вопросы (686).

§ Д.32. Смешанные абелевы группы 688
Расщепление смешанных абелевых групп (688). Условия расщепления данной группы (688). Смешанные группы ранга 1 (689).

§ Д.33. Операции Ext, Hom, тензорное умножение и Tor 690
Группа Ext (690). Другие результаты о группе Ext (691). B-группы, W-группы (691). F-группы, копериодические группы (692). Группа Hom (693). Тензорное произведение (694). Группа Гротендика абелевых групп без кручения конечного ранга (695). Группа Tor (695).

§ Д.34. Эндоморфизмы и автоморфизмы абелевых групп 696
Кольца эндоморфизмов (696). Группы эндоморфизмов (697). Группы автоморфизмов (698). Мощности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов (699).

§ Д.35. Другие направления в теории абелевых групп 699
Эпиморфные и эндоморфные образы (699). Некоторые теоремы о мощностях (700). Обобщения изоморфизма (700). Другие работы (701).

ДК. Дополнительные замечания при корректуре 702

Указатель литературы 705

Именной указатель 783

Предметный указатель 790

Готический алфавит 806

Предисловие к третьему изданию

Книга, третье издание которой предлагается сейчас вниманию читателя, на протяжении четверти века сопровождала развитие теории групп и в посильной мере ему содействовала. Работа над ее первым изданием была закончена автором в 1940 г., в следующем году прошли обе корректуры, и лишь обстоятельства военного времени задержали выход книги в свет до 1944 г. Во введении к первому изданию — значительная часть этого введения воспроизводится ниже — указаны цели, к которым стремился автор, работая над книгой.

В сороковых годах общая теория групп испытала бурное развитие. Особенно крупные успехи были достигнуты в теории абелевых групп, в теории прямых произведений, в теории разрешимых и нильпотентных групп и групп с различными условиями конечности. Весьма значительную роль играла в этом развитии советская теоретико-групповая школа — ее начало положено О. Ю. Шмидтом. Много сделали, в частности, молодые советские алгебраисты, учившиеся теории групп по первому изданию настоящей книги — напомню, что ее машинописный экземпляр с 1940 г. хранился в кабинете математики и механики Московского университета и был доступен для изучения.

Второе издание книги, законченное в 1952 г. и опубликованное в следующем 1953 г., отражало состояние, достигнутое теорией групп к началу пятидесятых годов. Это была по существу новая книга, с новой планировкой, со многими новыми разделами, с полной переработкой материала, переходившего из первого издания. Лишь то, что новая книга имела в своей основе старую и была к ней идейно очень близка, побудило автора сохранить для нее старое заглавие.

К этому же времени относится выход книги на международную арену. Именно, в 1953 г. в ГДР появился немецкий перевод первого издания. Позже вышли переводы второго издания: венгерский в 1955 г., английский (США) в двух томах в 1955 и 1956 гг., румынский в 1959 г., японский в двух томах в 1960 и 1961 гг., китайский в 1964 г. (первый том). Это позволило книге принять участие в развитии теории групп во многих странах мира.

Пятидесятые годы и первая половина шестидесятых годов явились периодом дальнейшего прогресса теории групп. Решены многие проблемы, остававшиеся открытыми долгие годы, иногда десятилетия, — отметим хотя бы проблему Бернсайда о периодических группах, а также алгоритмические проблемы о группах с конечным числом определяющих соотношений. Радикальную перестройку испытала теория абелевых групп. Очень много сделано в теории разрешимых

и нильпотентных групп. Оформились целые новые направления — назовем хотя бы теорию многообразий групп, теорию классов групп (т. е. абстрактных групповых свойств), теорию операций над группами, теорию групп автоморфизмов и групповых пар. Существенные изменения произошли и в основах теории групп, такие, например, как переход от операторных к мультиоператорным группам.

Интенсивность исследований по общей теории групп в этот период допускает количественную характеризацию. Именно, весьма полный указатель литературы из второго издания книги содержит примерно пятьсот названий. С другой стороны, за годы, прошедшие после завершения работы над вторым изданием, по общей теории бесконечных групп (т. е. без работ по конечным группам, по группам подстановок, по линейным группам, по лиевым и «алгебраическим» группам, по топологическим группам, по упорядоченным группам, по теории модулей и т. д.) опубликовано не менее 1300 работ (из них около трети — работы советских авторов).

В последние годы опубликовано несколько монографий, посвященных некоторым отдельным ветвям общей теории групп. Такие специальные монографии будут появляться и в дальнейшем, и это вполне закономерно. Все понимают, однако, необходимость иметь наряду с этим сводные сочинения, представляющие теорию групп в целом и позволяющие сохранить ее в качестве единой науки. Несколько книг общего характера появилось за эти годы в разных странах, каждая со своими достоинствами, но, к сожалению, ни одна из них не смогла полностью удовлетворить указанную потребность. В этом причина выхода в свет нового издания настоящей книги.

Автор хорошо понимает, что на самом деле следовало бы написать совсем новую книгу. Он понимает, однако, и то, что при том обилии материала, о котором было сказано выше, эта книга могла бы оказаться трехтомной и что он уже не может планировать работу такого объема. Это третье издание имеет поэтому весьма необычный вид.

Именно, в нем сохраняется весь текст второго издания с немногочисленными изменениями, типа исправления отдельных неточностей и опечаток или небольшой модернизации символики. Некоторым оправданием для такого воспроизведения старого текста служит то, что книга уже давно стала библиографической редкостью — ее не имеют у себя дома даже некоторые из молодых советских теоретико-групповиков.

Тем более является редкостью первое издание книги, вышедшее сравнительно небольшим тиражом. Однако, как было сказано автором в предисловии ко второму изданию, «увеличение объема книги, которого, к сожалению, избежать не удалось, заставило меня совсем опустить ряд мест старой книги, иногда целые параграфы, причем это были такие места, что включение их в свое время в книгу не может считаться ошибкой». Читатель второго издания неоднократно отсылался поэтому к соответствующим параграфам первого издания;

ссылаться на первое издание книги приходится, притом до настоящего времени, и другим авторам.

По этой причине в третьем издании в текст второго издания включен некоторый материал из первого издания. Иногда это целые параграфы; они получают при этом номер предшествующего им параграфа второго издания, сопровождаемый буквой а (иногда также б и в), и читатель без труда найдет эти параграфы по оглавлению. Некоторый материал из первого издания включен также в §§ 23, 26, 33, 35, 42, 44, 53, 54.

Таков сейчас основной текст книги. В книгу включено также «Заключение к первому изданию». За четверть века полностью исчерпалось, понятно, его значение как программной статьи, намечавшей пути дальнейшего развития теории групп, многое в нем сейчас представляется даже наивным, однако сопоставление программы, предложенной молодым в те годы автором, с действительным развитием науки может оказаться поучительным. В текст «Заключения» мы не вносим никаких изменений; лишь ссылки на параграфы первого издания дополняются номерами (в круглых скобках) соответствующих параграфов основного текста книги и, кроме того, в квадратных скобках указываются номера параграфов как основного текста, так и следующего далее «Дополнения», в которых читатель может найти информацию о дальнейшем развитии рассматриваемого вопроса.

«Дополнение», носящее заглавие «Развитие теории бесконечных групп за 1952–1965 гг.», может оказаться для специалистов наиболее полезным. Автор попытался дать в нем обзор развития общей теории групп за годы, прошедшие после завершения работы над вторым изданием книги. Говорится также и о некоторых более ранних работах, если автор находит неправильным, что они не получили во втором издании достаточного отражения. Понятно, что, с другой стороны, автор не мог с должной полнотой отразить в обзоре литературу, относящуюся к самым последним годам; это восполняется, впрочем, обзорами, публикуемыми в серии «Итоги науки».

План «Дополнения» не повторяет плана основного текста и скорее показывает, каков был бы план новой книги по теории групп, если бы автор такую книгу сейчас писал. «Дополнение» не содержит никаких доказательств; в нем приводятся, однако, все необходимые определения и формулируются некоторые результаты. Всего в «Дополнении» отмечается около тысячи ста работ, не входивших в указатель литературы во втором издании; некоторые из них, впрочем, лишь упоминаются. Все эти работы и только они дополнительно включены в указатель литературы. Как обычно, ссылки на этот указатель даются в тексте указанием фамилии автора и номера (в квадратных скобках) цитируемой работы.

В основном тексте сделаны многочисленные отсылки к «Дополнению». При этом отсылка вида [См. Д.12.3.] означает: «Смотри Дополнение, § 12, пункт 3».

В тексте «Дополнения», если не говорить о предисловии к нему, почти не упоминаются результаты, относящиеся к теории конечных групп. В предисловии ко второму изданию книги автор говорит: «Во время работы над первым изданием передо мною стояла задача доказать, что теория групп — это не только теория конечных групп, и поэтому книга не содержала почти ничего, относящегося специально к конечным группам. Сейчас эта задача может считаться уже исчерпанной. Возникла, наоборот, новая задача — напомнить, что теория конечных групп является важной составной частью общей теории групп. Хотя книга пополнена теперь некоторым материалом, относящимся к конечным группам, все же эта последняя задача в ней не решена». Исключительно большое число работ, публикуемых по различным вопросам теории конечных групп, не позволило автору попытаться решать эту задачу во время работы над «Дополнением» к третьему изданию, хотя он понимал, что угрожающее теории групп распадение на отдельные изолированные ветви было бы несколько задержано, если бы ветвь, отделившаяся первой, вновь стала органической составной частью единой теории.

В теории групп сделано за последние годы очень много, теоретико-групповые исследования ведутся весьма интенсивно, и автор затруднился бы, пожалуй, повторить сейчас сказанные им во введении к первому изданию слова о том, что «общая теория групп еще не прошла через вершину своего развития». Несомненно, однако, что теория групп еще долго будет оставаться основным поставщиком новых идей и испытательным полигоном для более общих алгебраических теорий, таких, например, как теория универсальных алгебр и теория категорий. Следует ожидать поэтому, что в ближайшие годы интенсивность теоретико-групповых исследований останется весьма высокой. Автор будет рад, если настоящая книга в ее новом издании еще некоторое время сможет быть полезной алгебраистам, работающим в теории групп.

Автор приносит искреннюю благодарность всем, кто оказал ему помощь и поддержку во время работы над этим третьим изданием книги, в первую очередь А. П. Мишиной, А. Л. Шмелькину и Е. Г. Шульгейферу. Особо благодарен он О. Н. Головину, взявшему на себя большой труд редактирования книги и этим доставившему автору удовольствие вновь иметь его своим сотрудником — напомню, что Олег Николаевич был, в частности, редактором первого издания этой книги.

Москва, ноябрь 1966 г. *А. Курош*

Из введения к первому изданию

Теория групп имеет большую и содержательную историю. Возникшая в связи с теорией Галуа и для нужд этой теории, она развивалась сперва в качестве теории конечных групп подстановок (Коши, Жордан, Силов). Довольно скоро обнаружилось, однако, что для большинства вопросов, интересовавших эту теорию, не является существенным тот специальный материал — подстановки, — который использовался для построения групп, и что на самом деле речь идет об изучении свойств одной только алгебраической операции, определенной в множестве, состоящем из конечного числа элементов произвольной природы. Это открытие, представляющееся в настоящее время тривиальным, оказалось в действительности весьма плодотворным и привело к созданию общей теории конечных групп. Правда, переход от групп подстановок к произвольным конечным группам не вызвал по существу расширения запаса изучаемых объектов, однако он перевел теорию на аксиоматические основы, придав ей стройность и прозрачность и облегчив этим ее дальнейшее развитие.

Расцвет теории конечных групп относится к концу прошлого и первым десятилетиям нашего столетия. В это время были получены основные результаты этой теории, намечены основные направления, созданы основные методы; вообще, теория конечных групп трудами своих крупнейших деятелей (Фробениус, Гёльдер, Бернсайд, Шур, Миллер) приобрела в это время то лицо, все существенные черты которого она донесла до наших дней [1]). В дальнейшем стало ясным, однако, что конечность групп является слишком сильным и не всегда естественным ограничением. Особенно важно, что это ограничение очень скоро привело к конфликту с потребностями соседних отделов математики: различные части геометрии, теория автоморфных функций, топология все чаще и чаще стали встречаться с алгебраическими образованиями, подобными группам, но бесконечными, и стали предъявлять к теории групп требования, удовлетворять которые теория конечных групп была не в состоянии. Вместе с тем с точки зрения самой алгебры, частью которой теория групп является, вряд ли можно было считать нормальным положение, при котором оставались за пределами теории такие простейшие и важнейшие группы, как, например, аддитивная группа

[1]) В годы, предшествовавшие выходу третьего издания настоящей книги, теория конечных групп испытала новый бурный подъем — см. предисловие к Дополнению.

целых чисел. Конечная группа должна была поэтому стать частью общего понятия группы, а теория конечных групп — главой в общей теории «бесконечных» (т. е. не обязательно конечных) групп.

Впервые в мировой литературе изложение основ теории групп без предположения, что рассматриваемые группы конечны, было сделано в книге О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» (Киев, 1916), книге, и сейчас остающейся настольной для всех советских алгебраистов. Широкое развитие общей теории групп началось, однако, несколько позже и было связано с той радикальной перестройкой и тем переходом на теоретико-множественные основы, которые совершила алгебра в 20-х годах нашего века (Э. Нётер). В частности, именно отсюда пришли в теорию групп такие новые для нее понятия, как системы операторов и условия обрыва цепочек.

В дальнейшем работа в общей теории групп становилась все более бурной и разносторонней, и к настоящему времени эта часть математики превратилась в широкую и богатую содержанием науку, занимающую одно из первых мест в современной алгебре. Понятно, что это развитие общей теории групп не могло игнорировать успехи, уже достигнутые в теории конечных групп. Наоборот, многое при этом развитии возникало из соответствующих частей теории конечных групп, причем руководящим было стремление заменить конечность группы теми естественными ограничениями, при которых данная теорема или данная теория еще остаются справедливыми и за пределами которых они теряют силу. Очень часто, впрочем, вопрос, простой и окончательно решенный в случае конечных групп, превращался в широко развитую и далекую от завершения теорию; такова, например, теория абелевых групп, одна из важнейших частей современной теории групп. Вместе с тем возникли и некоторые новые отделы, существенным образом связанные с рассмотрением бесконечных групп, — теория свободных групп, теория свободных произведений. Наконец, в некоторых случаях — прежде всего в вопросе о задании группы определяющими соотношениями — впервые удалось достигнуть четкости и строгости, недоступных теории групп на предшествующем этапе ее развития.

Теория групп далека еще от завершения. Многочисленность стоящих перед нею конкретных проблем, а также наличие направлений, по которым работа началась лишь в самое последнее время, позволяют считать, что общая теория групп еще не прошла через вершину своего развития. Вполне своевременно, тем не менее, систематизировать уже накопившийся богатый материал и этим дать широким кругам математиков представление об основных направлениях современной теории групп, о ее методах, о ее крупнейших достижениях и, наконец, о стоящих перед нею очередных проблемах и о путях, по которым ее необходимо в ближайшее время развивать.

Настоящая книга не претендует, понятно, на полный охват всей теории групп, однако в ней представлены почти все основные части

этой науки в объеме, достаточном для того, чтобы показать читателю богатство ее содержания и разнообразие методов.

От читателя не требуется предварительного знакомства с основными понятиями теории групп. Владение основным курсом высшей алгебры потребуется лишь для некоторых исходных примеров групп — матриц, подстановок, корней из единицы. Знакомство читателя с теорией чисел также может ограничиться лишь элементами теории сравнений. С другой стороны, от читателя требуется свободное владение основами теории множеств в объеме первых четырех глав книги Хаусдорфа «Теория множеств» (Москва, 1937). В частности, многие конструкции и доказательства существенным образом используют трансфинитную индукцию.

Москва, октябрь 1940 г.

Часть первая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП

Глава первая

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППЫ

§ 1. Алгебраическая операция

Уже в курсе высшей алгебры читатель встречался с множествами, в которых определены алгебраические операции. Основную роль играли в этом курсе поля и кольца, т. е. множества с двумя операциями — сложением и умножением. Весьма часто, однако, в различных приложениях встречаются множества, в которых определена (или в данный момент рассматривается) лишь одна алгебраическая операция. Напомним определение этого понятия.

Пусть дано некоторое множество M. Мы говорим, что в M определена *бинарная алгебраическая операция*, если всяким двум (различным или одинаковым) элементам множества M, взятым в определенном порядке, по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенный третий элемент, принадлежащий к этому же множеству [1]).

Требование однозначности операции и требование ее выполнимости для любой пары элементов входят, следовательно, в определение алгебраической операции. С другой стороны, в этом определении содержится указание на порядок, в котором берутся элементы множества M при выполнении операции. Иными словами, не исключается возможность

[1]) Множество M с одной бинарной алгебраической операцией принято теперь называть *группоидом*.

того, что паре элементов a, b из M и паре b, a будут поставлены в соответствие различные элементы из M, т. е. что рассматриваемая операция будет *некоммутативной*.

Можно указать многочисленные примеры числовых множеств с одной операцией, удовлетворяющих данному выше определению. Мы предоставим читателю построение таких примеров и лишь отметим, что нашему определению не удовлетворяют, например, множество отрицательных целых чисел относительно умножения, множество нечетных чисел относительно сложения, а также множество всех действительных чисел, если в качестве операции рассматривается деление — последнее ввиду невыполнимости деления на нуль.

Хорошо известны также различные примеры алгебраических операций, производимых не над числами. Таковы сложение векторов n-мерного векторного пространства, векторное умножение векторов трехмерного евклидова пространства, умножение квадратных матриц порядка n, сложение действительных функций действительного переменного, умножение этих же функций и т. д. Примером алгебраической операции, очень важным для дальнейшего, будет *умножение подстановок*. Подстановка n-й степени является, как известно, взаимно однозначным отображением системы первых n натуральных чисел на себя. Результат последовательного выполнения двух подстановок n-й степени снова будет некоторой подстановкой n-й степени, называемой *произведением* первой из заданных подстановок на вторую. Так, если даны при $n = 3$ подстановки

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

то их произведением будет подстановка

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Алгебраическая операция в множестве подстановок n-й степени определена. Легко видеть, что она является некоммутативной; так, для данных выше подстановок a и b произведение b на a будет иметь вид

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При изучении множеств с одной алгебраической операцией мы будем, как правило, употреблять мультипликативную терминологию и символику: операцию будем называть *умножением*, а результат применения операции к паре элементов a, b — *произведением* ab этих элементов. В некоторых случаях будет удобнее, однако, использовать аддитивную запись, т. е. называть операцию *сложением* и говорить о *сумме* $a + b$ элементов a, b.

Мы уже отметили, что в определение алгебраической операции не включено требование ее *коммутативности*, т. е. справедливости для любых элементов a, b из множества M равенства

$$ab = ba.$$

Примерами некоммутативных операций будут умножение квадратных матриц порядка n при $n \geqslant 2$, умножение подстановок степени n, притом не только при $n = 3$, как показано выше, но и при всех $n \geqslant 3$, а также векторное умножение векторов трехмерного евклидова пространства. Вычитание чисел также можно считать примером некоммутативной операции.

Определение алгебраической операции не содержит также требования, чтобы эта операция была *ассоциативной*, т. е. чтобы для любых элементов a, b, c из множества M выполнялось равенство [1])

$$(ab)c = a(bc).$$

Примером неассоциативной операции служит векторное умножение векторов трехмерного пространства; неассоциативно и вычитание целых чисел. С другой стороны, умножение матриц, как известно, ассоциативно. Ассоциативным является и умножение подстановок, как вытекает из следующего более общего результата.

Пусть дано некоторое множество S, конечное или бесконечное. Рассмотрим всевозможные *однозначные отображения множества S в себя*, т. е. отображения, каждое из которых ставит в соответствие всякому элементу из S вполне определенный элемент этого же множества, хотя, быть может, разные элементы из S отображаются в один и тот же элемент и, с другой стороны, в S могут существовать элементы, в которые ничто не отображается. *Если умножением таких отображений мы назовем их последовательное выполнение, то получим в множестве отображений ассоциативную алгебраическую операцию.*

В самом деле, пусть даны три однозначных отображения множества S в себя — φ, ψ и χ. Пусть, далее, a — произвольный элемент из S и пусть при отображении φ он переходит в элемент b, который, в свою очередь, переводится отображением ψ в элемент c, а этот, наконец, при отображении χ переходит в элемент d. Тогда отображение $\varphi\psi$ переводит элемент a в элемент c, т. е. при отображении $(\varphi\psi)\chi$ a переходит в d. Однако отображение $\psi\chi$ переводит элемент b в элемент d, а поэтому и при отображении $\varphi(\psi\chi)$ a также переходит в d. Этим доказано, что отображения $(\varphi\psi)\chi$ и $\varphi(\psi\chi)$ совпадают.

Посмотрим, какие следствия можно вывести из справедливости для операции, заданной в некотором множестве M, закона ассоциативности. Из определения алгебраической операции следует существование

[1]) Множество с одной ассоциативной операцией называется *полугруппой*.

и единственность произведения для любых д в у х элементов из M, взятых в определенном порядке. Это не дает возможности, однако, говорить в общем случае о произведении трех элементов — произведение элементов a, b и c, взятых в указанном порядке, может, вообще говоря, зависеть от того, умножается ли произведение a на b на элемент c или a умножается на произведение b на c. Наличие закона ассоциативности позволяет однозначным образом говорить о произведении трех элементов из M: элемент $(ab)c$, равный элементу $a(bc)$, будет просто обозначаться через abc. Понятно, что произведение трех элементов будет меняться, вообще говоря, при перестановке сомножителей.

Более того, ассоциативность операции позволяет говорить однозначным образом о *произведении любого конечного числа элементов* из M, взятых в определенном порядке, т. е. позволяет доказать *независимость окончательного результата от первоначального распределения скобок*. Докажем это для случая n множителей ($n > 3$), предполагая, что для меньшего числа множителей это уже доказано. Пусть дана упорядоченная система из n элементов множества M:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

в которой некоторым образом распределены скобки, указывающие на порядок, в каком должна выполняться операция. Совершая последовательно указанные скобками перемножения, мы в качестве последнего шага должны будем выполнить умножение произведения первых i элементов $a_1a_2 \ldots a_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) на произведение $a_{i+1} \ldots a_n$. Так как эти произведения состоят из меньшего числа множителей и поэтому, по предположению, однозначно определены, то нам остается доказать возможность перехода от произведения $(a_1a_2 \ldots a_i)(a_{i+1}a_{i+2} \ldots a_n)$ к произведению $(a_1a_2 \ldots a_j)(a_{j+1} \ldots a_n)$, $j \neq i$. Это достаточно проделать, очевидно, для случая $j = i+1$ и достигается это простым применением закона ассоциативности: если

$$a_1a_2 \ldots a_i = b, \quad a_{i+2}a_{i+3} \ldots a_n = c,$$

то

$$b(a_{i+1}c) = (ba_{i+1})c.$$

Понятно, что этим путем мы не получаем права говорить о произведении бесконечного множества элементов из M.

Множество M, в котором задана алгебраическая операция, обладает иногда *единицей*, т. е. таким элементом 1, что

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

для всех a из M. *В M может существовать лишь один элемент с этим свойством*: если есть еще вторая единица $1'$, то произведение $1 \cdot 1'$ будет равно и $1'$, и 1, откуда $1' = 1$. В случае аддитивной записи единица будет называться *нулем* и обозначаться символом 0.

Примерами множеств с алгебраической операцией, не обладающих единицей (или нулем), служит множество натуральных чисел относительно операции сложения, множество четных чисел относительно операции умножения, а также множество векторов трехмерного евклидова пространства относительно операции векторного умножения. С другой стороны, умножение квадратных матриц порядка n обладает единицей — ею служит, как известно, единичная матрица. Существует единица и для умножения подстановок степени n — легко видеть, что это будет тождественная подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Вообще в множестве всех однозначных отображений некоторого множества S в себя, с последовательным выполнением отображений в качестве умножения, единицей служит тождественное отображение множества S на себя.

Введем, наконец, понятие *обратной операции*. Мы знаем из курса высшей алгебры, что во всяком кольце вычитание является операцией, обратной сложению, а во всяком поле, если ограничиться лишь элементами, отличными от нуля, деление — операцией, обратной умножению. Следуя этим примерам, в случае произвольного множества M с одной операцией (не обязательно коммутативной) естественно поставить такой вопрос: существуют ли для данных элементов a и b такие элементы x и y, что

$$ax = b, \quad ya = b. \tag{1}$$

Эти уравнения могут и не быть разрешимыми в множестве M. С другой стороны, каждое из этих уравнений может иметь в M много различных решений. Будем говорить, что *для операции, заданной в M, существует обратная операция*, если при любых a и b каждое из уравнений (1) обладает решением, притом единственным; в некоммутативном случае решения этих двух уравнений не обязаны, понятно, совпадать.

Примером операции, при которой уравнения (1) могут обладать многими различными решениями, служит умножение во всяком кольце с делителями нуля, в частности в кольце функций и в кольце матриц. Простейшими примерами операций, при которых уравнения (1) не всегда разрешимы, являются операция сложения в множестве натуральных чисел, а также операция умножения в кольце целых чисел и даже в поле действительных чисел — последнее ввиду невозможности деления на нуль.

§ 2. Изоморфизм. Гомоморфизм

Пусть даны два множества M и M', в каждом из которых определено по одной алгебраической операции; будем считать, что в обоих

множествах эти операции названы умножением. Множества M и M' называются *изоморфными* относительно этих операций, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, обладающее следующим свойством: если элементам a и b из M соответствуют в множестве M' элементы a' и b' и если

$$ab = c, \quad a'b' = c',$$

то элементу c множества M должен быть отнесен при рассматриваемом соответствии элемент c', а не какой-нибудь другой элемент множества M'. Само такое взаимно однозначное соответствие называется *изоморфным соответствием* или *изоморфизмом* между M и M'. Изоморфизм множеств M и M' будет записываться символом

$$M \simeq M'.$$

Примеры изоморфных множеств с одной операцией могут быть указаны без всяких затруднений. Так, множество четных чисел можно взаимно однозначно отобразить на множество чисел, кратных числу 3, если всякому четному числу $2k$ отнести число $3k$, лежащее во втором множестве. Это отображение будет, очевидно, изоморфным относительно сложения, которое определено в каждом из двух рассматриваемых множеств.

Сравним, далее, операцию умножения, производимую в множестве положительных действительных чисел, с операцией сложения, производимой в множестве всех действительных чисел. Мы придем к взаимно однозначному отображению первого из этих множеств на второе, если всякому положительному действительному числу поставим в соответствие его логарифм по основанию 10. Равенство

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b$$

показывает, что это отображение является изоморфным.

Ряд примеров изоморфных множеств можно найти также в курсе высшей алгебры. Напомним один из них: множество линейных преобразований n-мерного векторного пространства над некоторым полем P, причем умножением линейных преобразований считается их последовательное выполнение, изоморфно множеству квадратных матриц порядка n над полем P с умножением матриц в качестве алгебраической операции. Этот изоморфизм зависит, как известно, от выбора базы в векторном пространстве. Таким образом, если множества M и M', каждое с одной операцией, изоморфны, то изоморфное соответствие между ними можно установить, вообще говоря, многими различными способами.

Всякое множество с операцией изоморфно, очевидно, самому себе: для этого достаточно взять тождественное отображение множества на себя. Отношение изоморфизма является, далее, симметричным — из $M_1 \simeq M_2$ следует $M_2 \simeq M_1$ — и транзитивным — из $M_1 \simeq M_2$ и $M_2 \simeq M_3$ следует $M_1 \simeq M_3$.

Из определения изоморфизма следует, что изоморфные множества имеют одинаковую мощность, в частности, если они конечны, то состоят из одинакового числа элементов.

Изоморфные множества с операциями отличаются друг от друга природой своих элементов и, быть может, названием операции и символикой, употребляемой для ее обозначения. Они неразличимы, однако, с точки зрения свойств операций — все, что может быть доказано для некоторого множества с операцией на основании свойств этой операции, но без использования конкретной природы элементов множества, автоматически переносится на все множества, изоморфные с данным. Изоморфные множества мы будем поэтому считать в дальнейшем лишь различными экземплярами множества с одной и той же операцией и этим выделим алгебраическую операцию в качестве истинного объекта изучения. Лишь при построении примеров нам придется говорить о конкретных множествах и об операциях, определение которых зависит от свойств элементов этих множеств. Впрочем, позже — в главе 5 — мы научимся задавать конкретные примеры операций без всяких предположений о природе тех элементов, над которыми производятся операции.

Понятие изоморфизма не является понятием, специфичным для алгебры. В действительности всякая математическая наука умеет по некоторым признакам идентифицировать изучаемые ею объекты, выделяя этим те свойства этих объектов, которые составляют предмет данной науки. Читателю для уяснения этого достаточно представить себе, как создается одно из основных математических понятий — понятие целого числа.

Мы получим обобщение понятия изоморфного отображения, если в его определении откажемся от требования взаимной однозначности. Пусть даны множества M и M', каждое с одной операцией — умножением. Рассмотрим отображение φ множества M на множество M', ставящее в соответствие каждому элементу a из M вполне определенный *образ* $a' = a\varphi$ в M', в то время как всякий элемент из M' обладает хотя бы одним, но, вообще говоря, многими различными *прообразами* в M. Это отображение называется *гомоморфным*, если для любых a и b, содержащихся в M, из

$$a\varphi = a', \quad b\varphi = b'$$

вытекает

$$(ab)\varphi = a'b'.$$

Будем говорить также, что множество M' является *гомоморфным образом* множества M [1]).

[1]) Некоторая новая терминология, связанная с понятием гомоморфизма, указана в Д.2.1.

Нельзя считать, понятно, тождественными два множества, одно из которых гомоморфно отображается на другое. Таким образом, понятие гомоморфизма играет менее принципиальную роль, чем понятие изоморфизма, но в дальнейшем развитии теории эта роль также весьма велика. Укажем некоторые примеры гомоморфных отображений.

Пусть M — множество всех целых чисел со сложением в качестве алгебраической операции, M' — множество, состоящее из чисел 1 и -1; это второе множество рассматривается относительно умножения, которое в нем, очевидно, определено. Относя всякому четному числу число 1, всякому нечетному — число -1, мы получим гомоморфное отображение M на M'; действительно, правилу «четное плюс нечетное равно нечетному» соответствует равенство $1 \cdot (-1) = -1$, и т. д.

Пусть теперь M — множество всех векторов на плоскости, выходящих из начала координат, M' — множество тех векторов из M, которые лежат на оси абсцисс, причем в обоих случаях роль алгебраической операции играет сложение векторов. Мы получим гомоморфное отображение множества M на множество M', если всякому вектору из M поставим в соответствие его проекцию на ось абсцисс; действительно, проекция суммы равна, как известно, сумме проекций слагаемых.

Если множество M с одной операцией гомоморфно отображается на множество M', в частности, если эти два множества изоморфны, то *из справедливости в M закона ассоциативности или закона коммутативности вытекает справедливость соответствующего закона и в M'*. Пусть, например, операция в M коммутативна. Если a' и b' — произвольные элементы из M', элемент a — один из прообразов элемента a' в M, b — один из прообразов элемента b', то при рассматриваемом гомоморфизме элементу ab соответствует элемент $a'b'$, элементу ba — элемент $b'a'$, а поэтому из равенства $ab = ba$ и единственности образа при гомоморфном отображении вытекает равенство $a'b' = b'a'$. По этому же образцу проходит доказательство и в том случае, когда операция в M ассоциативна.

Далее, *если множество M обладает единицей* 1, *то ее образ служит единицей для множества M'*. Действительно, обозначим образ единицы через e'. Если a' — произвольный элемент из M', a — один из его прообразов, то из равенств $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ и гомоморфизма отображения вытекают равенства $a'e' = e'a' = a'$. Этим доказано, что e' на самом деле служит единицей для множества M'.

Заметим, что если множество M обладает обратной операцией, то в общем случае этого нельзя утверждать относительно его гомоморфного образа M', а именно нельзя доказать единственность решения каждого из уравнений (1) предыдущего параграфа, хотя и можно доказать разрешимость этих уравнений.

Действительно, если a' и b' — элементы из M', а и b — соответственно их некоторые прообразы в M, т. е. $a\varphi = a'$, $b\varphi = b'$, и если элемент c удовлетворяет уравнению $ax = b$ в M, то ввиду

гомоморфности отображения φ элемент $c' = c\varphi$ будет удовлетворять уравнению $a'x = b'$ в M'.

Отметим, с другой стороны, что из справедливости в M' законов ассоциативности или коммутативности, из наличия в M' единицы или из выполнимости в M' обратной операции не вытекают соответствующие утверждения для множества M.

Существует некоторый способ обозрения всех гомоморфных образов данного множества M с одной операцией. С этой целью введем следующие понятия. Пусть дано разбиение множества M на непересекающиеся подмножества, которые мы назовем *классами* и будем обозначать буквами A, B, ... Это разбиение множества M на непересекающиеся классы называется *правильным*, если из того, что элементы a_1 и a_2 лежат в одном классе A, а элементы b_1 и b_2 — в одном классе B, вытекает, что произведения a_1b_1 и a_2b_2 также принадлежат к одному и тому же классу C [1]).

Из этого определения следует, что класс C вполне определяется заданием самих классов A и B — произведение любого элемента из A на любой элемент из B содержится в C. Если мы назовем класс C *произведением* класса A на класс B, то в множестве $\overline{M}$ всех классов нашего правильного разбиения будет определена алгебраическая операция. Назовем множество $\overline{M}$ с этой операцией *фактор-множеством* множества M по рассматриваемому правильному разбиению.

Множество M гомоморфно отображается на фактор-множество $\overline{M}$. Действительно, достаточно поставить в соответствие каждому элементу из M тот класс, в котором этот элемент содержится, и воспользоваться определением умножения в множестве $\overline{M}$. Это гомоморфное отображение множества M на фактор-множество $\overline{M}$ называется *естественным*.

Фактор-множествами множества M по его различным правильным разбиениям по существу исчерпываются все гомоморфные образы этого множества. Точнее, справедлива следующая теорема.

Если M' — произвольный гомоморфный образ множества M, а φ — гомоморфное отображение M на M', то существует такое правильное разбиение множества M на непересекающиеся классы, что множество M' изоморфно фактор-множеству $\overline{M}$, построенному по этому разбиению. Больше того, существует такое изоморфное отображение ψ множества M' на множество $\overline{M}$, что результат последовательного выполнения отображений φ и ψ совпадает с естественным гомоморфным отображением M на $\overline{M}$.

Для доказательства заметим, что мы получим разбиение множества M на непересекающиеся классы, если будем относить в один класс все элементы, образы которых при отображении φ совпадают. Это разбиение является правильным: если элементы a_1 и a_2 лежат в одном классе,

[1]) Правильные разбиения принято теперь называть *конгруенциями*.

т. е. $a_1\varphi = a_2\varphi = a'$, и это же имеет место для элементов b_1 и b_2, т. е. $b_1\varphi = b_2\varphi = b'$, то ввиду гомоморфности отображения φ

$$(a_1b_1)\varphi = (a_2b_2)\varphi = a'b',$$

т. е. элементы a_1b_1 и a_2b_2 на самом деле принадлежат к одному классу. Это позволяет в множестве $\overline{M}$ всех классов полученного разбиения определить умножение указанным выше способом, т. е. превратить $\overline{M}$ в фактор-множество. Между всеми элементами множества M' и всеми классами (т. е. элементами множества $\overline{M}$) существует взаимно однозначное соответствие ψ — всякому элементу из M' нужно поставить в соответствие класс, состоящий из всех прообразов этого элемента. Соответствие ψ является изоморфным: если элементам a' и b' из множества M' отнесены соответственно классы A и B и если в этих классах выбрано по элементу — a из A и b из B, то AB будет тем классом, который содержит элемент ab. Однако

$$(ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi) = a'b',$$

т. е. элементу $a'b'$ отображение ψ ставит в соответствие класс AB. Для окончания доказательства берем произвольный элемент a из M. Пусть $a\varphi = a'$, $a'\psi = A$. Так как элемент a является одним из прообразов элемента a', то a содержится в A, т. е. результат последовательного выполнения отображений φ и ψ действительно совпадает с естественным гомоморфным отображением M на $\overline{M}$. Теорема доказана.

§ 3. Группа

Дальнейшее изучение множеств с одной произвольной операцией было бы малоплодотворным занятием, так как это понятие весьма широко и поэтому бедно содержанием. Исторически, ввиду потребностей приложений как в самой математике, так и за ее пределами, выделился и стал детально изучаться один специальный тип множеств с одной операцией, а именно *группы*. Это понятие является одним из самых основных понятий современной математики и соединяет близость к операциям над числами с исключительно широкой областью применимости.

Непустое множество G с одной бинарной алгебраической операцией называется *группой*, если выполняются следующие условия:

1) операция в G ассоциативна;

2) в G выполнима обратная операция.

Операция в группе G не обязана быть коммутативной. Если же она коммутативна, то группа G называется *коммутативной*, или *абелевой*, по имени Абеля, изучавшего один тип уравнений, теория которых связана с теорией коммутативных групп. Понятно, что операции в этом классе групп особенно близки к привычным нам операциям

над числами; в дальнейшем изложении будет уделено много места детальному изучению свойств абелевых групп.

Если в произвольной группе G коммутативный закон выполняется для двух данных элементов a и b, то эти элементы называются *перестановочными*.

Если группа G состоит из конечного числа элементов, то она называется *конечной группой*, а число элементов в ней — *порядком* группы. В следующем параграфе будет показано существование конечных групп любого порядка, а также групп любой бесконечной мощности.

Для случая конечных групп можно в условии 2) *из определения группы оставить лишь требование единственности решений обоих уравнений*

$$ax = b, \quad ya = b, \tag{1}$$

т. е. вывести отсюда, как следствие, существование решений этих уравнений. Действительно, пусть множество G с одной операцией и с однозначностью решений уравнений (1), если эти решения существуют, конечно и состоит из n элементов. Пусть, далее, даны элементы a и b из G. Умножая элемент a справа на элемент x из G, т. е. беря произведение ax и заставляя x пробегать все элементы из G, мы получим, ввиду сделанных предположений, n различных элементов из G, т. е. снова все элементы из G; существует, следовательно, такой элемент x_0, что ax_0 равно заданному b. Существование решения для первого из уравнений (1) доказано. Существование решения для второго из этих уравнений доказывается аналогичным путем.

Подобное ослабление условия 2) в бесконечном случае недопустимо, как показывает пример множества целых положительных чисел с операцией сложения. Эта операция здесь всегда выполнима, однозначна и ассоциативна; обратная же операция — вычитание — однозначна, но не всегда выполнима.

Переходим к установлению простейших следствий из определения группы. Берем в группе G произвольный элемент a. Из условия 2) следует существование и единственность в G элемента e_a, удовлетворяющего условию $ae_a = a$, т. е. играющего при умножении на него элемента a справа роль единицы. В действительности элемент e_a обладает этим свойством по отношению ко всем элементам группы: если b есть любой другой элемент группы G и если y есть элемент группы, удовлетворяющий равенству $ya = b$, — его существование следует из условия 2), — то, умножая обе части равенства $ae_a = a$ слева на y и применяя к левой части равенства закон ассоциативности, мы получим $be_a = b$. Этим доказано существование и единственность в группе G *правого единичного элемента* e', обладающего по отношению ко всем элементам x из G свойством $xe' = x$.

Таким же путем можно доказать существование и единственность в группе G и *левого единичного элемента* e'', удовлетворяющего условию $e''x = x$ для всех x из G.

На самом деле элементы e' и e'' совпадают, как показывают равенства $e''e' = e'$ и $e''e' = e''$. *Этим доказано существование и единственность во всякой группе G элемента e, удовлетворяющего условию*

$$xe = ex = x$$

для всех элементов x из G. Этот элемент является *единицей* группы G (см. § 1) и будет обозначаться символом 1. Единица перестановочна, как мы видим, с любым элементом группы.

Из условия 2) следует, далее, существование и единственность при заданном элементе a таких элементов a' и a'', которые удовлетворяют условиям $aa' = 1$, $a''a = 1$. В действительности элементы a' и a'' совпадают: из

$$a''aa' = a''(aa') = a'' \cdot 1 = a''$$

и

$$a''aa' = (a''a)a' = 1 \cdot a' = a'$$

следует $a'' = a'$. Этот элемент мы будем обозначать через a^{-1} и называть *обратным* элементу a. Для всякого элемента a группы G существует, следовательно, в G однозначно определенный обратный элемент a^{-1}, удовлетворяющий условиям

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Из последних равенств следует, что *обратным для элемента a^{-1} будет сам элемент a*, т. е. $(a^{-1})^{-1} = a$, и что всякий элемент перестановочен со своим обратным. Легко проверить, далее, что *обратным для произведения нескольких элементов будет произведение элементов, обратных сомножителям и взятых притом в обратном порядке, т. е.*

$$(a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1} \dots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

Обратным элементом для единицы будет сама единица.

Понятие обратного элемента позволяет записать в явном виде те элементы x и y, которые удовлетворяют, ввиду условия 2), равенствам $ax = b$ и $ya = b$ при заданных элементах a и b. Действительно, непосредственная проверка показывает, что

$$x = a^{-1}b, \quad y = ba^{-1}.$$

Отсюда следует, что в некоммутативном случае x и y могут быть отличными друг от друга элементами группы. В случае абелевых групп это, само собой разумеется, невозможно.

Существование и единственность обратных элементов выведены нами при помощи условия 2), но на самом деле они могут заменить это условие. Сейчас мы зто покажем, причем не будем даже предполагать единственности единицы и обратных элементов и ограничимся предположением их одностороннего (например, правостороннего)

существования. Такое ослабление условия 2) облегчает иногда проверку того, является ли группой данное множество с операцией.

Если G есть множество с ассоциативной операцией, то условие 2) *следует из условий*

$2'$) в G существует по крайней мере один *правосторонний единичный элемент* e, обладающий свойством

$$ae = a \quad \text{для всех} \quad a \quad \text{из} \quad G,$$

и $2''$) среди правосторонних единичных элементов в G существует такой элемент e_0, что для всякого a из G существует в G по крайней мере один *правосторонний обратный элемент* a^{-1}, обладающий свойством

$$aa^{-1} = e_0.$$

Доказательство. Пусть a^{-1} есть один из правосторонних обратных элементов для a. Умножая слева обе части равенства $aa^{-1} = e_0$ на e_0, получаем $e_0aa^{-1} = e_0e_0 = e_0$, откуда

$$e_0aa^{-1} = aa^{-1}.$$

Умножая обе части этого равенства справа на один из правосторонних обратных элементов для a^{-1}, мы получаем $e_0ae_0 = ae_0$, откуда следует $e_0a = a$. Элемент e_0 оказывается и левосторонним единичным элементом для G.

Если теперь e_1 есть произвольный правосторонний единичный элемент, e_2 — произвольный левосторонний единичный элемент, то из равенств

$$e_2e_1 = e_1 \quad \text{и} \quad e_2e_1 = e_2$$

следует $e_1 = e_2$. Этим доказана единственность единичного элемента e.

Умножая обе части равенства $aa^{-1} = e$ слева на a^{-1}, мы получаем

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}.$$

Умножая обе части этого равенства справа на один из правосторонних обратных элементов для a^{-1}, мы получаем $a^{-1}a = e$, т. е. элемент a^{-1} будет и левосторонним обратным для a. Если теперь a_1^{-1}, a_2^{-1} будут соответственно произвольными правосторонним и левосторонним обратными элементами для a, то из равенств

$$a_2^{-1}aa_1^{-1} = (a_2^{-1}a)a_1^{-1} = a_1^{-1},$$
$$a_2^{-1}aa_1^{-1} = a_2^{-1}(aa_1^{-1}) = a_2^{-1},$$

следует $a_1^{-1} = a_2^{-1}$, т. е. следует единственность обратного элемента.

Справедливость условия 2) доказывается теперь без всяких затруднений. Для того чтобы удовлетворить уравнениям

$$ax = b, \quad ya = b,$$

достаточно положить $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$. Единственность этого решения, например для первого уравнения, следует из того, что если $ax_1 = ax_2$, то, умножая слева на a^{-1}, мы получаем $x_1 = x_2$.

Заметим, что единственность решений уравнений (1) позволяет производить *левосторонние* и *правосторонние сокращения*: если

$$ab_1 = ab_2 \quad \text{или} \quad b_1a = b_2a,$$

то $b_1 = b_2$.

Если группа G гомоморфно (в частности изоморфно) отображается на множество G' с одной операцией, то G' также будет группой.

Действительно, из доказанного в предшествующем параграфе вытекает, что операция в G' ассоциативна, что уравнения (1) обладают в G' решениями и что образ единицы группы G служит единицей для множества G'. Таким образом, в G' выполняются условия $2'$) и $2''$), а поэтому, как доказано выше, G' будет группой.

В частности, фактор-множество группы G по любому ее правильному разбиению само будет группой. Мы будем говорить поэтому в дальнейшем о *фактор-группе* группы G по ее правильному разбиению.

Доказанная в конце предшествующего параграфа теорема превращается теперь в следующую очень важную теорему о гомоморфизмах для групп:

Если φ — гомоморфное отображение группы G на группу G', то существует такое правильное разбиение группы G, что группа G' изоморфно отображается на фактор-группу $\overline{G}$ группы G по этому разбиению. Больше того, изоморфизм ψ группы G' на группу $\overline{G}$ можно подобрать так, что результат последовательного выполнения отображений φ и ψ совпадает с естественным гомоморфизмом группы G на фактор-группу $\overline{G}$.

Относительно гомоморфных отображений сделаем еще одно замечание.

Если гомоморфизм φ группы G на группу G' переводит элемент a из G в элемент a' из G',

$$a\varphi = a',$$

то образом элемента a^{-1} служит элемент a'^{-1}:

$$a^{-1}\varphi = a'^{-1}.$$

В самом деле, мы знаем, что $1\varphi = 1'$. Если теперь положим $a^{-1}\varphi = b'$, то $1\varphi = (aa^{-1})\varphi = a\varphi \cdot a^{-1}\varphi = a'b'$, т. е. $a'b' = 1'$, откуда $b' = a'^{-1}$.

Порядки элементов. Произведение n элементов, равных элементу a группы G, называется n-й *степенью* элемента a и обозначается через a^n. *Отрицательные степени* элемента a можно определить или как элементы группы G, обратные положительным степеням

элемента a, или же как произведения нескольких множителей, равных элементу a^{-1}. В действительности эти определения совпадают:

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n.$$

Для доказательства достаточно взять произведение $2n$ множителей, из которых первые n равны a, а остальные равны a^{-1}, и произвести все сокращения. Отрицательные степени элемента a мы будем обозначать через a^{-n}. Условимся, наконец, понимать под a^0 элемент 1.

Легко проверить, что при любых положительных, отрицательных или нулевых показателях n и m имеют место равенства

$$a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n = a^{n+m},$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Первое из этих равенств показывает, что степени одного и того же элемента перестановочны между собою.

Если все степени элемента a являются различными элементами группы, то a называется *элементом бесконечного порядка*. Пусть, однако, среди степеней элемента a имеются равные, например, $a^k = a^l$ при $k \neq l$; это, в частности, всегда имеет место в случае конечных групп. Если $k > l$, то $a^{k-l} = 1$, т. е. существуют положительные степени элемента a, равные единице. Пусть a^n есть наименьшая положительная степень элемента a, равная единице, т. е.

1) $$a^n = 1, \quad n > 0,$$

2) $$\text{если } a^k = 1, \quad k > 0, \quad \text{то} \quad k \geqslant n.$$

В этом случае говорят, что a есть *элемент конечного порядка*, а именно *порядка* n.

Если элемент a имеет порядок n, то все элементы

$$1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$$

являются, как легко видеть, различными. *Всякая другая степень элемента* a, *положительная или отрицательная*, *равна одному из этих элементов*. Действительно, если $k = nq + r$, $0 \leqslant r < n$, то $a^k = (a^n)^q \times \times a^r = a^r$. Отсюда следует, что если a имеет порядок n и $a^k = 1$, то k должно делиться на n.

Всякая группа обладает одним-единственным элементом первого порядка — это будет элемент 1. Обратным для элемента a конечного порядка n будет, очевидно, элемент a^{n-1}.

Все элементы конечной группы имеют конечный порядок; в § 4 будет показано, что существуют и бесконечные группы с элементами лишь конечного порядка. Всякая группа, все элементы которой имеют конечный порядок, называется *периодической*. Существуют, с другой стороны, группы, порядок всех элементов которых, кроме единицы, бесконечен; такие группы принято называть *группами без кручения*. Наконец, группу естественно назвать *смешанной*, если она содержит

как элементы бесконечного порядка, так и отличные от единицы элементы конечных порядков.

Если бы для группы G была выбрана *аддитивная* запись, то потребовалось бы некоторое изменение терминологии и обозначений. Так, как уже отмечено в § 1, вместо единицы мы говорили бы о нуле группы и обозначали бы его символом 0. Кроме того, элемент, обратный элементу a, мы называли бы *противоположным* элементом и обозначали бы через $-a$, а вместо степеней элемента a говорили бы о *кратных* этого элемента и записывали бы их через ka.

§ 3а. Аксиоматика Бэра и Леви

В § 3 было показано, что группа может быть определена несколькими различными способами. Различные вопросы аксиоматического характера, связанные с определением группы, — вопрос о возможно более слабых аксиомах, достаточных для определения группы, вопрос о независимости этих аксиом и т. д. — интересовали в начале 20-го столетия многих, преимущественно американских, математиков (Мур, Хантингтон, Диксон). Исследования на эту тему появлялись и позже, появляются иногда и в наше время. Наиболее полными и окончательными являются результаты Бэра и Леви [1], излагаемые в настоящем параграфе. [См. Д.1.1.]

Определение группы, данное в начале § 3, состоит в действительности из семи аксиом: из трех аксиом существования — произведения и обоих частных, трех соответствующих аксиом единственности и аксиомы ассоциативности. Эти аксиомы формулируются независимо друг от друга следующим образом.

В множестве G некоторые (упорядоченные) тройки элементов a, b, c связаны соотношением

$$a = bc, \tag{1}$$

которое выражается словами так: a есть произведение b на c, b — левостороннее частное элементов a и c, c — правостороннее частное элементов a и b. Множество G есть *группа*, если выполняются следующие условия:

E_a. При данных b и c существует *хотя бы одно* a, удовлетворяющее условию (1).

E_b. При данных a и c существует *хотя бы одно* b, удовлетворяющее условию (1).

E_c. При данных a и b существует *хотя бы одно* c, удовлетворяющее условию (1).

U_a. При данных b и c существует *не более одного* a, удовлетворяющего условию (1).

U_b. При данных a и c существует *не более одного* b, удовлетворяющего условию (1).

U_c. При данных a и b существует *не более одного* c, удовлетворяющего условию (1).

A. Если в G существуют как элементы вида $(a_1a_2)a_3$, так и элементы вида $a_1(a_2a_3)$, то оба эти произведения определяют *одно и то же* множество элементов.

Формулировка аксиомы ассоциативности A не содержит никаких утверждений существования или единственности. Эта формулировка допускает, в частности, возможность того, что одно из произведений $(a_1a_2)a_3$, $a_1(a_2a_3)$ определено в G, а другое нет.

Некоторая часть данной выше системы из семи аксиом называется *полной системой*, если ее достаточно для определения группы, т. е. если все остальные аксиомы могут быть из нее выведены. Полная система аксиом называется *минимальной*, если никакая ее истинная часть не является полной. Нашей задачей является установление всех минимальных полных систем групповых аксиом.

Первые шесть из данных выше аксиом удобно для дальнейшего расположить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} E_a & E_b & E_c \\ U_a & U_b & U_c \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть Σ есть некоторая полная система аксиом. Тогда Σ обладает следующими свойствами 1–4:

1. Σ *содержит аксиому ассоциативности* A.

Действительно, берем множество из трех элементов a, b, c и определяем умножение в нем с помощью таблицы

	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

Как обычно, произведение элемента x на элемент y стоит на пересечении строки элемента x и столбца элемента y. Во всякой строке и во всяком столбце таблицы каждый из элементов a, b и c встречается ровно по одному разу, поэтому все аксиомы, входящие в матрицу (2), выполнены. Аксиома ассоциативности не имеет, однако, места: $(ab)c = c$, но $a(bc) = b$.

2. Σ *содержит по крайней мере по одной аксиоме из каждой строки и каждого столбца матрицы* (2).

Независимость аксиом любой строки или любого столбца матрицы (2) от остальных аксиом показывают следующие примеры операций, определенных в множестве из двух элементов a, b:

	a	b
a	—	—
b	—	—

	a	b
a	(a, b)	(a, b)
b	(a, b)	(a, b)

	a	b
a	a	a
b	b	b

	a	b
a	a	b
b	a	b

	a	b
a	—	(a, b)
b	(a, b)	—

Здесь символ (a, b) указывает, что результатом операции являются оба элемента a и b, символ — указывает на отсутствие произведения.

Во всех пяти примерах выполняется аксиома A; в первом примере выполняются, далее, аксиомы U_a, U_b, U_c, во втором — E_a, E_b, E_c, в третьем — E_a, E_b, U_a, U_b, в четвертом — E_a, E_c, U_a, U_c, в пятом — E_b, E_c, U_b, U_c, в то время как остальные аксиомы не выполняются.

3. Σ *содержит не менее двух аксиом из первой строки матрицы* (2).

Неполноту системы аксиом A, E_a, U_a, U_b и U_c показывает пример сложения натуральных чисел. Неполноту всякой системы аксиом, содержащей из первой строки матрицы (2) лишь одну аксиому E_b, показывает конструируемый ниже пример.

Рассмотрим сперва множество всех упорядоченных пар натуральных чисел. Это множество будет упорядочено по типу натурального ряда, если из двух пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) предшествующей считается та, у которой максимальный из ее элементов меньше, чем максимальный из элементов другой пары; пары с одинаковыми максимальными элементами — их при данном максимальном элементе будет лишь конечное число — упорядочиваются произвольным образом. Примером такой упорядоченности множества пар будет

$$(1, 1), (2, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), \ldots.$$

Упорядоченные таким способом пары нумеруем с помощью натуральных чисел в их обычном порядке, но начиная с числа 2. Число, поставленное в соответствие паре (i, j), обозначаем через $[i, j]$. В данном выше примере будет

$$[1, 1] = 2, \quad [1, 2] = 3, \quad [2, 1] = 4, \quad [2, 2] = 5, \ldots.$$

Легко убедиться, что при любых i и j имеют место строгие неравенства

$$[i, j] > i, \quad [i, j] > j. \tag{3}$$

Искомый пример устраиваем теперь следующим образом. Берем некоторое счетное множество, состоящее из элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

и полагаем

$$a_{[i,\,j]}a_i = a_j. \tag{4}$$

При таком определении умножения не будут выполняться аксиомы E_a, так как элемент a_1 никогда не будет левым множителем, и E_c, так как уравнение $a_\alpha x = a_\beta$ неразрешимо при $\alpha \leqslant \beta$. Легко видеть, однако, что аксиомы E_b, U_a, U_b, U_c выполняются. Справедливость аксиомы A следует из замечания, что произведения $a_\alpha(a_\beta a_\gamma)$ и $(a_\alpha a_\beta)a_\gamma$ не могут в нашем примере существовать одновременно. Действительно, никакой элемент не может быть левым множителем более чем в одном произведении. Отсюда следует, что если произведения $a_\alpha(a_\beta a_\gamma)$ и $a_\alpha a_\beta$ существуют, то должно быть $a_\beta a_\gamma = a_\alpha$; это невозможно, однако, ввиду (3) и (4).

Неполнота системы аксиом, содержащей из первой строки матрицы (2) лишь одну аксиому E_c, доказывается на основании симметрии между левым и правым делениями.

4. Σ *содержит или обе аксиомы существования деления* E_b *и* E_c, *или же обе аксиомы единственности деления* U_b *и* U_c.

Ввиду доказанного выше свойства 2 мы можем ограничиться доказательством неполноты или системы аксиом A, E_a, E_b, U_a, U_c, или же системы A, E_a, E_c, U_a, U_b. Сделаем это для первой системы; доказательство для второй системы получится из соображений симметрии.

Пусть B есть некоторое счетное бесконечное множество. Через M обозначим множество всех таких бесконечных подмножеств B' из B, для которых дополнение $B \setminus B'$ также бесконечно. Каждое из подмножеств B' является счетным и допускает поэтому взаимно однозначные отображения на множество B, притом многими различными способами. Множество всех таких отображений при всех B' из M обозначим через Ф. В множестве Ф следующим образом определяется алгебраическая операция: если даны элементы φ_1 и φ_2 из Ф, отображающие на B соответственно множества B'_1 и B'_2 из M, то в B'_1 содержится подмножество B'_{12}, которое при φ_1 отображается на B'_2 и поэтому при последовательном выполнении отображений φ_1 и φ_2 отображается на B. Это взаимно однозначное отображение B'_{12} на B мы обозначаем через φ_{12} и считаем его произведением φ_1 на φ_2,

$$\varphi_{12} = \varphi_1\varphi_2.$$

Отображение φ_{12} принадлежит к множеству Ф, так как множество B'_{12} принадлежит к M. Действительно, дополнение $B \setminus B'_{12}$ содержит дополнение $B \setminus B'_1$ и поэтому бесконечно; само B'_{12} также бесконечно.

При таком определении операции в множестве Ф выполняются, очевидно, аксиомы E_a и U_a. Легко доказать и ассоциативность этой операции. Докажем справедливость аксиом E_b и U_c. Пусть даны произвольные элементы φ_2 и φ_{12} из Ф, отображающие на B соответственно B'_2 и B'_{12}. Если b есть произвольный элемент из B, то через b_2 и b_{12} обозначим элементы соответственно из B'_2 и B'_{12}, отображающиеся в b

при φ_2 и φ_{12}. Выбираем далее некоторое такое подмножество B'_1, что $B'_{12} \subset B'_1 \subset B$ и оба дополнения $B'_1 \setminus B'_{12}$ и $B \setminus B'_1$ бесконечны. Если через φ_1 мы обозначим такое взаимно однозначное отображение B'_1 на B, при котором всякий элемент b_{12} отображается на b_2, а дополнение $B'_1 \setminus B'_{12}$ некоторым образом взаимно однозначно отображается на $B \setminus B'_2$, то φ_1 принадлежит к Φ и имеет место равенство $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_{12}$. Отсюда следует справедливость аксиомы E_b; одновременно мы видим, что аксиома U_b не выполняется.

Пусть теперь даны произвольные элементы φ_1 и φ_{12} из Φ, отображающие на B множества B'_1 и B'_{12}. Отображение φ_2, удовлетворяющее уравнению $\varphi_1 \cdot x = \varphi_{12}$, может существовать лишь в том случае, если B'_{12} содержится в B'_1. Отсюда следует, что аксиома E_c не будет выполняться. Пусть, однако, φ_2 существует. Если в данный элемент b из B при φ_{12} отображается элемент b_{12}, а при φ_1 элемент b_{12} отображается в элемент b_2, то при φ_2 в элемент b должен отображаться элемент b_2. Этим доказана справедливость в Φ аксиомы U_c. Доказательство свойства 4 закончено.

Доказанные выше свойства 1–4 в совокупности оказываются эквивалентными полноте системы аксиом. Это показывает теорема:

Всякая система аксиом со свойствами 1–4 *является полной.*

Доказательство основано на следующих трех леммах.

Лемма 1. *Система аксиом* A, U_a, E_b, E_c *является полной.*

Пусть даны произвольные элементы d и d' из рассматриваемого множества G. Тогда существуют, ввиду E_b и E_c, такие элементы e, f и g, что $ed = d$, $ef = d'$, $dg = f$. Отсюда следует, что

$$d' = e(dg), \quad f = (ed)g.$$

Оба выражения, стоящие в правых частях, существуют и ввиду U_a однозначно определены. Поэтому, на основании аксиомы A, $f = d'$, откуда $ed' = d'$. Элемент d' является произвольным элементом множества G, поэтому элемент e служит для G левой единицей.

Существуют, далее, ввиду E_b и E_c, такие элементы d^{-1}, h и k, что $d^{-1}d = e$, $d^{-1}h = d'$, $dk = h$. Отсюда следует, что

$$d' = d^{-1}(dk), \quad k = ek = (d^{-1}d)k,$$

откуда, снова ввиду U_a и A, мы получаем $k = d'$, т. е. $dd' = h$. Этим доказано существование произведения для любых двух элементов, т. е. справедливость аксиомы E_a. Наличие левой единицы и левых обратных элементов позволяет доказать U_b и U_c так же, как было сделано в § 3.

Лемма 2. *Всякая система аксиом, содержащая* A, E_a, E_b, U_c *и или* E_c, *или* U_b, *является полной.*

Ввиду отсутствия аксиомы U_a произведение двух данных элементов b и c из рассматриваемого множества G может иметь много значений. Условимся поэтому обозначать символом bc совокупность всех этих

значений, а наличие в произведении b на c элемента a записывать символом

$$bc \ni a.$$

Если A_1 и A_2 являются произвольными подмножествами из G, то A_1A_2 будет обозначать множество всех элементов из G, получающихся в результате умножения каждого элемента из A_1 на каждый элемент из A_2. Очевидно, что

(α) из $A_1 \supseteq A_2$, $A_3 \supseteq A_4$ следует $A_1A_3 \supseteq A_2A_4$.

Из аксиомы U_c вытекает далее

(β) из $aB \ni d$, $ac \ni d$ следует $B \ni c$.

Из (β) следует, что если $ab \supseteq ac$, то $b = c$.

Приступаем к доказательству леммы. Выбираем произвольный элемент d и докажем существование такого элемента e, что $de \ni d$. Это очевидно, если наша система аксиом содержит аксиому E_c. Если же содержится аксиома U_b, то поступаем следующим образом: ввиду E_b существует такое e, что $ed \ni d$; отсюда по (α) $ded \supseteq dd$, а поэтому ввиду U_b $de \ni d$.

Если f есть некоторый другой элемент, то $def \supseteq df$, откуда по (β) $ef \ni f$. Ввиду E_b существует такой элемент g, что $gf \ni d$, откуда

$$gfe \supseteq de \ni d.$$

Отсюда ввиду (β) следует, что $fe \ni f$, т. е. элемент e является одновременно левой и правой единицей для всех элементов из G. Из аксиомы U_c следует единственность элемента e.

Пусть теперь $ee \ni h$. Из $eh \ni h$, согласно U_c, получаем $h = e$, т. е. $ee = e$. Если далее $ef \ni k$, то $ef = eef \supseteq ek$, откуда ввиду следствия из (β) $k = f$, т. е. $ef = f$ для всех f. Мы не можем пока, однако, заменить знаком равенства включение $fe \ni f$. Ввиду аксиомы E_b существует такой элемент f^{-1}, что $f^{-1}f \ni e$. Отсюда $f^{-1}ff^{-1} \supseteq ef^{-1} = f^{-1}$, а так как $f^{-1}e \ni f^{-1}$, то по (β) будет

$$ff^{-1} \ni e.$$

Следовательно, элемент f^{-1} однозначно определен заданием элемента f. Заменяя f через f^{-1}, мы получаем

$$f^{-1}(f^{-1})^{-1} \ni e,$$

а так как $f^{-1}f \ni e$, то из (β) следует $(f^{-1})^{-1} = f$.

Если теперь $ff^{-1} \ni l$, то $ff^{-1}l^{-1} \supseteq ll^{-1} \ni e$, откуда, по ($\beta$), учитывая, что $ff^{-1} \ni e$, получаем

$$f^{-1}l^{-1} \ni f^{-1}.$$

Аксиома U_c дает поэтому

$$l^{-1} = e, \quad l^{-1}l = el.$$

Отсюда и из $l^{-1}l \ni e = ee$ следует, по (β), $l = e$, т. е. $ff^{-1} = e$ для всех f. Заменяя f через f^{-1}, получаем

$$f^{-1}f = e.$$

Если теперь $bc \ni a$, то

$$c = ec = b^{-1}bc \supseteq b^{-1}a.$$

Элемент a будет поэтому ввиду U_c однозначно определен заданием элементов b и c, т. е. аксиома U_a доказана. Существование единицы и обратных элементов позволяет теперь закончить доказательство леммы 2 ссылкой на § 3.

Симметрия между левым и правым делениями позволяет считать доказанной и следующую лемму.

Лемма 3. *Всякая система аксиом, содержащая* A, E_a, E_c, U_b *и или* E_b, *или* U_c, *является полной.*

Доказательство достаточности свойств 1–4 полноты системы аксиом достигается теперь без всяких затруднений. Действительно, всякая система аксиом со свойствами 1–4 должна содержать хотя бы одну из следующих пяти подсистем:

$$A, \begin{pmatrix} & E_b & E_c \\ U_a & & \end{pmatrix}; \quad A, \begin{pmatrix} E_a & E_b & E_c \\ & U_b & \end{pmatrix}; \quad A, \begin{pmatrix} E_a & E_b & E_c \\ & & U_c \end{pmatrix};$$

$$A, \begin{pmatrix} E_a & E_b & \\ & U_b & U_c \end{pmatrix}; \quad A, \begin{pmatrix} E_a & & E_c \\ & U_b & U_c \end{pmatrix}.$$

Полнота каждой из этих пяти систем легко следует из лемм 1–3. Одновременно мы видим, что эти системы являются минимальными полными системами. Доказано, следовательно, что *из семи аксиом, составляющих определение группы, можно устроить пять различных минимальных полных систем.* Наиболее любопытна, конечно, первая из этих систем, показывающая, что существование произведения есть следствие единственности произведения, существования обоих частных и ассоциативного закона.

Другой подход к рассмотренным здесь вопросам см. в работе Лоренцена [1].

§ 4. Примеры групп

В этом параграфе будут указаны простейшие примеры групп, на которые в дальнейшем придется часто ссылаться. Проверка выполненности всех требований, входящих в определение группы, в большинстве случаев предоставлена читателю.

1. Все целые числа, положительные и отрицательные, образуют группу по операции сложения — *аддитивную группу целых чисел.* Эта группа является абелевой. Роль единичного элемента играет в ней

число нуль. Все элементы этой группы, кроме нуля, имеют бесконечный порядок, т. е. это группа без кручения.

2. Аналогичным способом можно получить *аддитивные группы всех рациональных, всех действительных и всех комплексных чисел.*

3. Группу по сложению образуют все четные числа. Эта *аддитивная группа четных чисел* изоморфна аддитивной группе целых чисел (пример 1); действительно, соответствие, переводящее всякое четное число $2k$ в целое число k, будет изоморфным. Группой по сложению является также совокупность целых чисел, кратных данному числу n. Множество нечетных чисел уже не будет группой по операции сложения, так как эта операция выводит нас за пределы указанного множества. Не будет группой по сложению и множество всех неотрицательных целых чисел ввиду невозможности неограниченно выполнять обратную операцию — вычитание.

4. Целые числа не образуют группы по умножению, так как обратная операция — деление — не всегда выполнима. Не образуют группы по умножению и все рациональные числа ввиду невозможности деления на нуль. Все отличные от нуля рациональные числа уже образуют группу по умножению — *мультипликативную группу рациональных чисел*. Единицей этой группы будет число 1. Входящее в эту группу число -1 имеет порядок 2, порядок всех остальных отличных от единицы элементов бесконечен.

5. Можно говорить также о *мультипликативной группе положительных* (отличных от нуля) *рациональных чисел*. Эту группу можно следующим образом гомоморфно отобразить на аддитивную группу целых чисел: всякое положительное рациональное число α можно записать в виде

$$\alpha = 2^n \alpha',$$

где числитель и знаменатель числа α' взаимно просты с числом 2, а целое число n больше, равно или меньше нуля. Отображение $\alpha \to n$ будет искомым гомоморфизмом. Заметим, что отрицательные рациональные числа группы по умножению уже не образуют.

6. Все отличные от нуля (или все положительные) действительные числа и все отличные от нуля комплексные числа также образуют группы по умножению. Напомним, что, как показано в § 2, мультипликативная группа положительных действительных чисел изоморфна аддитивной группе всех действительных чисел.

7. Числа 1 и -1 при операции умножения чисел составляют группу — конечную группу второго порядка. На эту группу, как указано в § 2, гомоморфно отображается аддитивная группа целых чисел. На нее же можно гомоморфно отобразить и мультипликативную группу всех действительных чисел — достаточно всякому положительному числу поставить в соответствие число 1, всякому отрицательному — число -1.

8. Все комплексные числа, являющиеся корнями из единицы степени n, образуют по умножению конечную группу порядка n. *Этим доказано существование конечных групп любого порядка*. При $n = 2$ получается группа предыдущего примера. Напоминаем, что все корни из единицы степени n являются степенями одного из них, так называемого примитивного корня n-й степени из единицы.

9. Группу по умножению образуют также комплексные числа, являющиеся корнями каких-либо степеней из единицы; это *группа всех корней из единицы*. Она бесконечная, но периодическая.

10. Все комплексные числа, равные по абсолютной величине единице, образуют группу по умножению. Эта группа изоморфна *группе вращений окружности*. Рассматриваем множество всех вращений окружности против часовой стрелки около ее центра. Вращение на угол 2π считаем совпадающим с вращением на нулевой угол и вообще идентифицируем всякие два вращения, отличающиеся друг от друга на угол, кратный 2π. В этом множестве вращений следующим образом определяем групповую операцию: суммой двух вращений считаем результат их последовательного выполнения; суммой вращений на углы α и β будет, очевидно, вращение на угол $\alpha + \beta$ при $\alpha + \beta < 2\pi$ и на угол $\alpha + \beta - 2\pi$ при $a + \beta \geqslant 2\pi$. Легко проверить, что получается группа. Изоморфное отображение этой группы на указанную выше мультипликативную группу комплексных чисел, по абсолютной величине равных единице, достигается установлением соответствия между вращением на угол α и комплексным числом с аргументом α.

Все рассмотренные выше группы были коммутативными. Переходим теперь к примерам некоммутативных групп.

11. Все подстановки из n символов с определенным в § 1 умножением подстановок в качестве групповой операции составляют группу S_n — *симметрическую группу степени* n. Это — конечная группа порядка $n!$ Она некоммутативна при $n \geqslant 3$. Действительно, в § 1 доказана ассоциативность умножения подстановок и отмечено, что единицей служит тождественная подстановка; обратной же для подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

будет подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

12. Как известно из курса высшей алгебры [1]), все подстановки степени n разделяются при $n > 1$ на четные и нечетные, причем

[1]) См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. 6, § 3, где можно найти также неоднократно используемые в дальнейшем разложения подстановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.

тех и других будет по $\frac{1}{2}n!$ Одно из возможных определений таково: подстановка называется *четной*, если она разлагается в произведение четного числа транспозиций, и *нечетной* — в противоположном случае. Отсюда вытекает, что *произведение двух четных подстановок четно*. Так как тождественная подстановка является, очевидно, четной и подстановка, обратная для четной, сама четна, то мы приходим к группе всех четных подстановок степени n, обозначаемой через A_n; она называется *знакопеременной группой степени* n. Это конечная группа порядка $\frac{1}{2}n!$, некоммутативная при $n \geqslant 4$.

Нечетные подстановки степени n уже не составляют группы, ибо произведение двух нечетных подстановок дает подстановку четную. Теперь легко проверить, что существует гомоморфное отображение симметрической группы S_n на группу второго порядка, указанную в примере 7: всякой четной подстановке нужно поставить в соответствие число 1, всякой нечетной — число -1.

13. Берем некоторое множество M и рассматриваем всевозможные взаимно однозначные отображения его на самого себя. Так как последовательное выполнение двух таких отображений снова дает взаимно однозначное отображение множества M на себя, то мы имеем дело с операцией в множестве этих отображений. Ее ассоциативность показана в § 1, единицей служит тождественное отображение, для всякого отображения существует обратное, а поэтому мы получаем *группу S_M всех взаимно однозначных отображений множества M на себя*. Если множество M конечно и состоит из n элементов, то наша группа превращается в симметрическую группу степени n. Понятно, что если множества M и M' имеют одинаковую мощность, то группы S_M и $S_{M'}$ изоморфны.

Этот пример важен потому, что в приложениях группы чаще всего появляются как *группы преобразований*, т. е. группы взаимно однозначных отображений некоторого множества M на себя с последовательным выполнением отображений в качестве их умножения. Правда, обычно рассматриваются не все такие отображения, а лишь некоторые, обладающие данным дополнительным свойством α или, короче, *α-преобразования*. Для того чтобы все α-преобразования множества M составляли группу, достаточно, очевидно, выполнения следующих двух условий:

1) произведение двух α-преобразований должно обладать свойством α;
2) отображение, обратное к α-преобразованию, должно обладать свойством α.

Этим замечанием следует пользоваться при рассмотрении дальнейших примеров, каждый из которых является группой всех α-преобразований некоторого множества M при некотором свойстве α. В частности, умножение в этих примерах всегда следует

понимать как последовательное выполнение отображений.

14. Берем бесконечное множество мощности $\mathfrak{m}$ и рассматриваем лишь такие взаимно однозначные отображения этого множества на себя, каждое из которых действительно перемещает лишь некоторое конечное, хотя, быть может, произвольно большое, число символов. Эти отображения составляют периодическую группу мощности $\mathfrak{m}$, называемую *симметрической группой мощности* $\mathfrak{m}$. Так как к рассматриваемым здесь отображениям можно применить данное выше определение четности подстановки, — для этого нужно рассматривать лишь действительно переставляемые символы, — то аналогичным путем мы получим *знакопеременную группу мощности* $\mathfrak{m}$.

15. Рассмотрим n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел (или вообще над произвольным полем). *Невырожденные линейные преобразования* этого пространства составляют по умножению группу, некоммутативную при $n \geqslant 2$; из курса высшей алгебры известно, что между невырожденными линейными преобразованиями и *невырожденными квадратными матрицами* порядка n существует взаимно однозначное соответствие, переводящее произведение преобразований в произведение соответствующих матриц. Наша группа изоморфна, следовательно, *мультипликативной группе невырожденных матриц порядка* n. Заметим, что каждая из этих групп гомоморфно отображается на мультипликативную группу отличных от нуля действительных чисел: следует поставить в соответствие каждой матрице ее определитель и учесть, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.

16. *Движения* трехмерного евклидова пространства составляют группу. Это же справедливо и для тех движений, которые оставляют неподвижной данную точку, т. е. являются *вращениями* около этой точки.

17. Те вращения евклидова пространства, при которых отображается на себя данный куб с центром в неподвижной точке, составляют группу. Эта *группа вращений куба* конечна, так как ее элементам взаимно однозначно соответствуют некоторые подстановки в множестве вершин куба, и, как легко проверяется, некоммутативна. Аналогичным путем определяются также группы вращений других правильных многогранников.

Глава вторая

ПОДГРУППЫ

§ 5. Подгруппы

Подмножество H группы G называется *подгруппой* этой группы, если оно само является группой относительно операции, определенной в группе G.

Для установления того, является ли (непустое) подмножество H группы G подгруппой в G, достаточно проверить:

1) содержится ли в H произведение двух любых элементов из H;

2) содержит ли H вместе со всяким своим элементом и обратный к нему элемент.

Действительно, из справедливости закона ассоциативности в группе G следует его справедливость для элементов из H, а из непустоты множества H и свойств 2) и 1) следует принадлежность к H единицы группы G.

В случае конечных и вообще периодических групп проверка свойства 2) является излишней. Действительно, если к H принадлежит элемент a порядка n, то в H должны содержаться, ввиду свойства 1), все положительные степени элемента a, а поэтому и элемент a^{n-1}, обратный для a. Пример аддитивной группы целых чисел и содержащегося в ней множества положительных чисел показывает необходимость проверки свойства 2) в общем случае.

Мы подчеркиваем, что содержащееся в определении подгруппы требование к подмножеству группы G быть группой относительно групповой операции, определенной в G, нельзя заменить определением, по которому подгруппой группы G называлось бы всякое подмножество группы G, само являющееся группой. Так, множество положительных рациональных чисел является группой относительно умножения и содержится, как подмножество, в аддитивной группе всех рациональных чисел, но не будет, конечно, подгруппой этой группы.

Отношение «H есть подгруппа в G» транзитивно: если H есть подгруппа в G, а G — подгруппа в $\overline{G}$, то H также будет подгруппой в $\overline{G}$.

Подмножество группы G, состоящее из одного элемента 1, будет, очевидно, подгруппой этой группы. Эта подгруппа называется *единичной подгруппой* группы G и обозначается символом E. С другой стороны, сама группа G будет своей подгруппой. Всякая подгруппа, отличная от всей группы, называется *истинной подгруппой* этой группы.

Многие из групп, указанных в § 4, являются подгруппами других групп, также там указанных. Так, аддитивная группа четных чисел является подгруппой аддитивной группы всех целых чисел, а последняя, в свою очередь, есть подгруппа аддитивной группы рациональных чисел. Все эти группы, как и вообще все аддитивные группы чисел, являются подгруппами аддитивной группы комплексных чисел. Мультипликативная группа положительных рациональных чисел и группа по умножению, составленная из чисел 1 и -1, являются подгруппами мультипликативной группы всех отличных от нуля рациональных чисел. Знакопеременная группа степени n есть подгруппа симметрической группы этой же степени. Все группы α-преобразований некоторого множества M, в частности рассмотренные в примерах 14–17 § 4, являются подгруппами в группе S_M всех взаимно однозначных отображений множества M на себя.

Первый из примеров, приведенных в предшествующем абзаце, показывает, что истинная подгруппа некоторой группы может быть изоморфной самой группе — изоморфизм аддитивных групп целых и четных чисел был установлен в § 4. Понятно, что никакая конечная группа не может быть изоморфной со своей истинной подгруппой.

При гомоморфном, в частности при изоморфном, отображении φ группы G на группу $\overline{G}$ подгруппа A группы G будет отображаться на некоторое подмножество $\overline{A}$ группы G. Отображение φ будет для A гомоморфным (в частности, изоморфным), а поэтому, как доказано в § 3, *множество* $\overline{A}$ будет группой относительно операции, определенной в группе G, т. е. *будет подгруппой этой группы*. Можно сказать, что данное гомоморфное отображение группы G *порождает* гомоморфные отображения всех ее подгрупп.

Если даны группы G и G' и если группа G' изоморфна некоторой подгруппе H группы G, то говорят, что группа G' изоморфно отображается *в группу* G или что группа G' *может быть вложена* в группу G. В частном случае, когда H совпадает с G, говорят об отображении *на группу* G. Здесь следует учесть, однако, что группа G' может быть изоморфно отображена на H, вообще говоря, многими различными способами. Больше того, подгруппа H не обязана быть единственной подгруппой группы G, изоморфной группе G'; все подгруппы группы G, изоморфные с G', будут изоморфны между собою, но они являются различными подмножествами группы G, и поэтому внутри G их необходимо различать. Всякое изоморфное отображение группы G' на одну из изоморфных ей подгрупп группы G дает лишь одно из возможных вложений группы G' в группу G. [См. Д. 1.2.]

Рассмотрим, например, симметрическую группу S_n степени n. Если i есть один из переставляемых символов $1, 2, \ldots, n$, то все подстановки из группы S_n, оставляющие на месте символ i, составляют в S_n подгруппу, изоморфную группе S_{n-1} — симметрической группе степени $n-1$. Можно сказать поэтому, что *симметрическая группа степени* $n-1$ *может быть вложена в симметрическую группу степени* n;

мы видим вместе с тем, что группа S_n содержит несколько различных подгрупп, изоморфных группе S_{n-1}.

Если даны две группы A и B и если каждая из них изоморфна некоторой истинной подгруппе другой, то отсюда не следует изоморфизм самих этих групп, как это можно было бы наперед думать. Отсюда следует лишь, что каждая из этих групп изоморфна своей истинной подгруппе, что уже не является для нас неожиданным. Действительно, если

$$A \simeq B' \subset B$$

и если подгруппа B' при заданном изоморфном отображении группы B в группу A отображается на подгруппу A'', то A'' будет изоморфна с самой группой A.

Следующая теорема показывает, что подгруппами конечных симметрических групп исчерпываются по существу все конечные группы.

Теорема Кэли. *Всякая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы степени n.*

Действительно, пусть группа G имеет порядок n и пусть элементы этой группы, записанные в определенном порядке, будут

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{1}$$

Если b есть произвольный элемент группы G, то все произведения $a_i b = a_{\beta_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ различны между собою, т. е. система

$$a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \ldots, a_{\beta_n} \tag{2}$$

снова содержит все элементы группы G и отличается от (1) лишь расположением элементов. Элементу b ставится теперь в соответствие подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Этим каждому из элементов группы G ставится в соответствие вполне определенная подстановка n-й степени. Двум различным элементам соответствуют различные подстановки, так как из $a_1 b = a_1 b'$ следовало бы $b = b'$. Найдем подстановку, соответствующую произведению bc, где c снова есть некоторый элемент группы G. Если элементу c соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

т. е. $a_{\beta_i} c = a_{\gamma_i}$, то из

$$a_i(bc) = a_{\beta_i} c = a_{\gamma_i}$$

следует, что элементу bc соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

являющаяся, очевидно, произведением подстановки (3) на подстановку (4). Этим доказано, что группа G изоморфно отображается в группу S_n. Подгруппа группы S_n, соответствующая группе G, обладает, очевидно, следующими свойствами: порядок этой подгруппы равен числу перемещаемых символов; всякая подстановка, в нее входящая, кроме единичной, действительно перемещает каждый из символов. Такие подгруппы симметрических групп называются *регулярными*.

Из теоремы Кэли и из очевидного утверждения, что *конечная группа может обладать лишь конечным числом подгрупп*, следует, что *существует лишь конечное число неизоморфных конечных групп данного порядка* n. Следовательно, *множество всех неизоморфных конечных групп*, являясь суммой счетного множества конечных множеств, *счетно*.

Теорема Кэли может быть перенесена и на бесконечные группы: *всякая группа мощности* $\mathfrak{m}$ *изоморфна некоторой подгруппе группы* $S_{\mathfrak{m}}$ *всех взаимно однозначных отображений множества мощности* $\mathfrak{m}$ *на себя* (см. § 4, пример 13). Действительно, доказательство сохраняется полностью. Дополнительных рассмотрений требует лишь утверждение, что после умножения всех элементов группы справа на элемент b снова будут получены все элементы этой группы; это сразу следует, однако, из аксиомы существования левого частного. [См. Д.1.2.]

Понятие подгруппы является основным в теории групп. Все содержание теории связано в большей или меньшей степени с вопросами о наличии в группе подгрупп с теми или иными специальными свойствами, о группах, которые могут быть вложены в данную группу, о тех или иных свойствах, характеризующих взаимное расположение подгрупп в группе, о способах построения группы по ее подгруппам и т. п. Выделение тех или иных специальных типов групп также связано преимущественно с понятием подгруппы.

§ 6. Системы образующих. Циклические группы

Пересечение любых двух подгрупп H и F группы G не может быть пустым, так как всякая подгруппа группы G содержит элемент 1. *Это пересечение будет в действительности подгруппой группы* G: если D есть пересечение подгрупп H и F, $D = H \cap F$, и если элементы a и b принадлежат к D, то их произведение и обратные к ним элементы содержатся как в H, так и в F, а поэтому также принадлежат к D.

Если дано не две, а вообще произвольное конечное или даже бесконечное множество подгрупп группы G, то произведение любых двух элементов из пересечения всех этих подгрупп лежит в каждой из них, а поэтому и в их пересечении. Это же верно и для обратных элементов. *Пересечение любого множества подгрупп группы* G *само является*, *следовательно*, *подгруппой этой группы*. Так, пересечением всех подгрупп группы G будет, очевидно, единичная подгруппа E.

Пусть M — произвольное непустое подмножество группы G. Пересечение всех подгрупп группы G, содержащих все элементы множества M, — одной из этих подгрупп является, конечно, сама группа G, — называется подгруппой, *порожденной* множеством M, и обозначается символом $\{M\}$. Она содержится, очевидно, во всякой подгруппе группы G, содержащей целиком множество M.

Если подмножество M состоит из одного элемента a, то порожденная им подгруппа $\{a\}$ называется *циклической подгруппой* элемента a. К подгруппе $\{a\}$ принадлежат, конечно, все степени элемента a; но эти степени сами составляют подгруппу, так как произведение элементов a^n и a^m равно a^{n+m}, а обратным для элемента a^n является элемент a^{-n} (см. § 3). Отсюда следует, что *циклическая подгруппа $\{a\}$ состоит из всех степеней элемента a*. Это показывает, что циклическая подгруппа $\{a\}$ будет счетной, если a есть элемент бесконечного порядка, и конечной при конечном порядке элемента a; в этом последнем случае порядок подгруппы $\{a\}$ равен порядку элемента a.

Группа, совпадающая с одной из своих циклических подгрупп, т. е. состоящая из степеней одного из своих элементов, называется *циклической группой*. Элемент, из степеней которого составлена данная циклическая группа, называется *образующим элементом* этой группы. Всякая циклическая группа, очевидно, коммутативна.

Примером бесконечной циклической группы служит аддитивная группа целых чисел — ее образующим элементом является число 1, примером конечной циклической группы порядка n — мультипликативная группа корней n-й степени из единицы, $n = 1, 2, \ldots$. Следующая теорема показывает, что этими примерами исчерпываются по существу все циклические группы.

Все бесконечные циклические группы изоморфны между собой; *изоморфны между собой также все конечные циклические группы данного порядка n.*

Действительно, бесконечная циклическая группа с образующим элементом a взаимно однозначно отображается на аддитивную группу целых чисел, если всякому элементу a^k ставится в соответствие число k; изоморфизм этого отображения следует из того, что при перемножении степеней элемента a показатели складываются. Аналогичным путем получается изоморфное отображение всякой циклической группы порядка n на группу корней n-й степени из единицы.

Эта теорема позволяет говорить в дальнейшем просто о *бесконечной циклической группе* или о *циклической группе порядка n.*

Всякая подгруппа циклической группы сама циклическая.

Действительно, пусть $G = \{a\}$ есть циклическая группа с образующим элементом a, бесконечная или конечная порядка n, и пусть H будет отличная от E подгруппа из G. Пусть, далее, наименьшая положительная степень элемента a, содержащаяся в H, есть a^k. Тогда $\{a^k\} \subseteq H$. Допустим, что в H содержится также элемент a^l, $l \neq 0$ и l не делится на k. Тогда, если $(k, l) = d$, $d > 0$, есть общий наибольший

делитель чисел k и l, то существуют такие целые числа u и v, что $ku + lv = d$, и, следовательно, в H должен содержаться элемент

$$(a^k)^u (a^l)^r = a^d;$$

но так как $d < k$, то мы приходим в противоречие с выбором элемента a^k. Следовательно, $H = \{a^k\}$.

В бесконечной циклической группе с образующим элементом a в качестве образующего элемента можно взять также элемент a^{-1}; циклическая подгруппа, порожденная любой другой степенью элемента a, отлична от всей группы. *В циклической группе $\{a\}$ порядка n в качестве образующего элемента можно взять элемент a^k, $0 \leqslant k < n$, тогда и только тогда, если k и n взаимно просты.* Действительно, если $(k, n) = 1$, то существуют такие u и v, что

$$ku + nv = 1.$$

Тогда

$$(a^k)^u = a^{1-nv} = a \cdot a^{-nv} = a.$$

Если, с другой стороны, при некотором k будет $(a^k)^s = a$, то разность показателей $ks - 1$ должна делиться на n (см. § 3):

$$ks - 1 = nq,$$

откуда $ks - nq = 1$, т. е. $(k, n) = 1$.

Если M — снова произвольное подмножество группы G, то, как и в случае циклических подгрупп, легко указать закон, по которому элементы подгруппы $\{M\}$ изображаются через элементы множества M. Подгруппа $\{M\}$ должна содержать положительные и отрицательные степени всех элементов из M, а поэтому и всевозможные произведения любого конечного числа этих степеней, взятых в произвольном порядке. Но все элементы группы G, представимые в виде произведения конечного числа степеней элементов из M, — хотя бы и многими различными способами, — сами образуют, очевидно, подгруппу группы G, содержащую все элементы из M. Этим доказано, что *подгруппа, порожденная множеством M, состоит из всех элементов группы, равных произведениям конечного числа степеней элементов множества M.*

Если, в частности, дано некоторое множество подгрупп группы G и если M есть теоретико-множественная сумма этих подгрупп, т. е. множество, состоящее из элементов группы G, входящих хотя бы в одну из заданных подгрупп, то подгруппа $\{M\}$ является минимальной подгруппой группы G, содержащей все эти подгруппы. Эта подгруппа $\{M\}$ называется *подгруппой, порожденной заданными подгруппами*, и обозначается символом $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in N$, если заданы подгруппы A_α, где α пробегает некоторое множество индексов N; в частности, если заданы лишь две подгруппы A и B, то подгруппа $\{M\}$ обозначается символом $\{A, B\}$, и т. д. Из сказанного выше следует, что *подгруппа*,

порожденная некоторым множеством подгрупп группы G, состоит из всех элементов группы, равных произведениям конечного числа элементов, взятых в заданных подгруппах.

Если подгруппа $\{M\}$, порожденная в группе G некоторым ее подмножеством M, совпадает с самой группой G, то множество M называется системой образующих элементов или просто *системой образующих* этой группы. Всякая группа обладает системами образующих — достаточно взять множество всех элементов группы или множество всех элементов, кроме 1. Из сказанного выше о подгруппе, порожденной некоторым множеством, следует, что *множество M тогда и только тогда будет системой образующих группы G, если всякий элемент из G может быть записан хотя бы одним способом в виде произведения конечного числа степеней элементов из M.*

Пусть

$$G = \{M\};$$

система образующих M называется *неприводимой*, если никакая ее истинная подсистема уже не является для G системой образующих. [См. Д.1.3.]

Примеры. 1. Всякая циклическая группа обладает системой образующих, состоящей из одного элемента, а именно, из образующего элемента этой группы. Обратно, всякая группа с одним образующим элементом является циклической. Заметим, что в циклической группе можно обычно выбрать также неприводимые системы образующих, состоящие более чем из одного элемента. Так, систему образующих для аддитивной группы целых чисел составляют, например, числа 2 и 3.

2. В § 4 было отмечено, что всякая подстановка n-й степени является произведением транспозиций. Отсюда следует, что одной из систем образующих симметрической группы n-й степени будет множество всех транспозиций, содержащихся в этой группе. Симметрическая группа n-й степени может быть порождена также двумя образующими элементами:

$$a = (1\ 2), \quad b = (1\ 2 \dots n).$$

Действительно,

$$b^{-k} a b^k = (k+1,\, k+2), \quad k \leqslant n-2.$$

Если теперь $i < j - 1$, то

$$(j,\, j-1) \dots (i+2,\, i+1)(i,\, i+1)(i+1,\, i+2) \dots (j-1,\, j) = (ij),$$

т. е. подгруппа $\{a, b\}$ содержит все транспозиции и поэтому совпадает со всей симметрической группой.

3. Числа

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \dots,\ \frac{1}{n!},\ \dots$$

составляют систему образующих для аддитивной группы рациональных чисел R. Легко видеть, что всякое бесконечное подмножество

этого множества также будет системой образующих для R. Больше того, можно доказать, что *аддитивная группа рациональных чисел R не имеет ни одной неприводимой системы образующих*. Действительно, пусть M есть некоторая система образующих для R и пусть a есть произвольный элемент из M. Обозначим через H подгруппу, порожденную множеством M', состоящим из всех элементов множества M, кроме a; множество M' не может быть пустым, так как иначе все рациональные числа были бы кратными числу a, что невозможно. Если b есть произвольный элемент из M', то из свойств рациональных чисел следует существование такого целого числа k, отличного от нуля, что число ka будет уже кратным числу b, и поэтому будет содержаться в подгруппе H. Число $\frac{1}{k}a$, принадлежащее к группе R, может быть записано в виде суммы конечного числа рациональных чисел, кратных некоторым числам из M, т. е. может быть представлено в виде

$$\frac{1}{k}a = sa + h,$$

где s есть некоторое целое число, равное, быть может, нулю, а h — некоторый элемент из подгруппы H. Отсюда

$$a = s(ka) + kh,$$

т. е. a содержится в H и поэтому $H = R$. Множество M' является, следовательно, системой образующих для группы R.

4. Мультипликативная группа положительных рациональных чисел обладает неприводимой системой образующих, состоящей из всех простых чисел.

Если группа G обладает системой образующих, состоящей из конечного числа элементов, то G называется *группой с конечным числом образующих*. Таковы, очевидно, все конечные и все циклические группы. Пример бесконечной циклической группы показывает, что из конечности числа образующих не следует конечность самой группы.

Всякая система образующих группы с конечным числом образующих содержит конечное подмножество, являющееся неприводимой системой образующих этой группы.

Так как конечная система образующих всегда может быть сделана неприводимой путем удаления лишних элементов, то нужно лишь доказать, что при наших предположениях всякая бесконечная система образующих содержит конечное подмножество, также являющееся системой образующих для рассматриваемой группы. Пусть G есть группа с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

и пусть M есть некоторая другая система образующих этой группы. Всякий элемент a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, записывается в виде произведения степеней конечного числа элементов из M. Выбирая для каждого a_i одну из таких записей и собирая те элементы из M, которые входят

в эти записи для $i = 1, 2, \ldots, n$, мы получим конечное подмножество M' из M, порожденная которым подгруппа $\{M'\}$ содержит все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и поэтому совпадает с G.

Заметим, что различные неприводимые системы образующих группы с конечным числом образующих могут содержать, вообще говоря, различное число элементов (см. пример 1).

Всякий гомоморфный образ группы с конечным числом образующие сам является группой с конечным числом образующих. Действительно, если $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и если гомоморфизм φ отображает группу G на группу $\overline{G}$, то элементы

$$a_1\varphi, a_2\varphi, \ldots, a_n\varphi \tag{1}$$

составляют для $\overline{G}$ систему образующих. В самом деле, если $\overline{a}$ — произвольный элемент из группы $\overline{G}$ и a — один из его прообразов в группе G, то $\overline{a}$ так же записывается через степени элементов (1), как a — через степени элементов $a_1, a_2, \ldots, a^n$. Некоторые из элементов (1) могут, конечно, совпадать, т. е. мы получим для группы $\overline{G}$ *систему образующих с повторениями*. Эти повторения можно было бы исключить. Мы условимся, однако, и в будущем допускать к рассмотрению системы образующих с повторяющимися элементами.

Всякая бесконечная группа с конечным числом образующих является счетной.

Действительно, если элементы $a_1, a_2, \ldots, a^n$ являются образующими для группы G, то всякий элемент этой группы может быть записан в виде произведения

$$a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \ldots a_{i_s}^{\alpha_s}$$

(вообще говоря, многими различными способами); всякое i_k есть одно из чисел $1, 2, \ldots, n$, причем возможно, что $i_k = i_l$ при $k \neq l$. Будем называть *длиной* этого произведения сумму абсолютных величин показателей:

$$h = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_s|.$$

Легко видеть, что существует лишь конечное число произведений степеней образующих элементов $a_1, a_2, \ldots, a^n$ данной длины h. Множество всех произведений степеней этих элементов будет, следовательно, суммой счетного множества конечных множеств, т. е. счетным, а поэтому и группа G будет не более чем счетной.

Примеры 3 и 4 настоящего параграфа показывают, что существуют счетные группы, не имеющие конечных систем образующих. Группы с конечным числом образующих составляют, следовательно, класс групп, промежуточный между конечными и счетными группами.

Всякая подгруппа группы с конечным числом образующих будет, конечно, не более чем счетной. В гл. 9 мы встретим, однако, примеры групп с конечным числом образующих, некоторые подгруппы которых не обладают конечными системами образующих. Группы с конечным числом образующих будут специально изучаться в гл. 10.

Заметим, что таким же путем, как выше, можно доказать, что *если группа G обладает бесконечной системой образующих* (*без повторений*) *мощности* $\mathfrak{m}$, *то и сама группа имеет мощность* $\mathfrak{m}$.

§ 7. Возрастающие последовательности групп

Пусть в группе G даны подгруппы

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$

составляющие *возрастающую последовательность*, т. е. такие, что всякая подгруппа A_n содержится в подгруппе A_{n+1}, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Теоретико-множественная сумма B этой возрастающей последовательности подгрупп сама является подгруппой группы G и поэтому будет подгруппой, порожденной подгруппами A_n.*

Действительно, всякий элемент b из множества B лежит в некоторой подгруппе A_n (и вообще во всех A_k при $k \geqslant n$). Тогда в A_n, а следовательно и в B, лежит и элемент b^{-1}. Если в B взяты элементы b_1 и b_2, лежащие соответственно в A_n и A_k, то пусть, например, $n \leqslant k$. Тогда в подгруппе A_k лежат оба элемента b_1 и b_2, следовательно, в этой подгруппе, а поэтому и в B, содержится и произведение $b_1 b_2$. Этим доказано, что множество B является подгруппой группы G.

Вместо счетной последовательности подгрупп, упорядоченной по типу натурального ряда, можно было бы взять произвольное множество подгрупп A_α, обладающее тем свойством, что из всяких двух подгрупп A_α и A_β, входящих в это множество, одна непременно содержится в другой [1]). Теоретико-множественная сумма этих подгрупп снова будет подгруппой группы G; это доказывается дословным повторением рассуждений, проведенных в предшествующем абзаце.

В дальнейших частях книги будет неоднократно использоваться следующая теорема.

Если в группе G дано подмножество M и подгруппа A, пересечение которых есть подмножество D, то в G существует хотя бы одна подгруппа, содержащая A, имеющая с M пересечение D и не содержащаяся ни в какой большей подгруппе с этими двумя свойствами.

Пусть элементы группы G вполне упорядочены:

$$1 = a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots.$$

Полагаем $A_0 = A$. Пусть для всех $\beta < \alpha$ уже выбраны в G подгруппы A_β, образующие возрастающую последовательность и такие,

[1]) Это множество подгрупп будет, следовательно, упорядоченным, если предшествующей считать ту из подгрупп A_α, A_β, которая содержится в другой. Это упорядоченное множество подгрупп не обязано быть, конечно, вполне упорядоченным.

что пересечение каждой из них с M есть D. Если B_α есть сумма возрастающей последовательности подгрупп A_β, $\beta < \alpha$, то в качестве A_α выбираем подгруппу $\{B_\alpha, a_\alpha\}$, если пересечение этой подгруппы с M есть D, и подгруппу B_α в противоположном случае. Сумма $\overline{A}$ возрастающей последовательности всех подгрупп A_α есть искомая подгруппа: пересечение $\overline{A}$ с M равно, очевидно, D; если элемент a_γ лежит вне $\overline{A}$, то пересечение подгруппы $\{\overline{A}, a_\gamma\}$ с M отлично от D, ибо уже $\{B_\gamma, a_\gamma\} \cap M \neq D$.

Отсюда следует, в частности, что если в группе G существуют подгруппы, имеющие с множеством M пустое пересечение, то среди всех таких подгрупп найдется хотя бы одна максимальная.

Может случиться, что объединение (т. е. теоретико-множественная сумма) возрастающей последовательности подгрупп

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$$

группы G совпадает с самой этой группой. Укажем некоторые примеры такого рода.

1. Аддитивная группа рациональных чисел R является объединением следующей возрастающей последовательности своих циклических подгрупп:

$$\{1\} \subset \left\{\frac{1}{2}\right\} \subset \left\{\frac{1}{6}\right\} \subset \ldots \subset \left\{\frac{1}{n!}\right\} \subset \ldots.$$

2. Пусть G — мультипликативная группа положительных рациональных чисел, а

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

все простые числа, перенумерованные в порядке возрастания. Если

$$A_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

— это будет совокупность тех рациональных чисел, в числитель и знаменатель несократимой записи которых входят лишь простые числа из системы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, — то группа G будет объединением возрастающей последовательности подгрупп A_n, $n = 1, 2, \ldots$.

3. Пусть S_ω — счетная симметрическая группа, т. е. группа всех таких взаимно однозначных отображений счетного множества $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на себя, каждое из которых действительно перемещает лишь некоторое конечное число символов. Подгруппа S_n этой группы, составленная из тех отображений, которые оставляют на месте каждый из символов $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, изоморфна, очевидно, симметрической группе n-й степени, а группа S_ω совпадает с объединением подгрупп S_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

С другой стороны, справедлива теорема:

Группа с конечным числом образующих не может быть суммой возрастающей последовательности своих истинных подгрупп.

Пусть группа G имеет конечную систему образующих,

$$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

и пусть она совпадает с суммой возрастающей последовательности своих истинных подгрупп

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_k \subset \ldots .$$

Каждый из элементов a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, как и вообще всякий элемент из G, принадлежит к некоторой подгруппе H_{k_i} и поэтому ко всем подгруппам H_k при $k \geqslant k_i$. Если $l = \max(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, то в подгруппе H_l содержатся уже все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$; порожденная последними подгруппа не может, следовательно, совпадать с G.

Это доказательство сохраняется и в том случае, если в группе с конечным числом образующих дана возрастающая последовательность истинных подгрупп, упорядоченная произвольным образом.

Сумма возрастающей последовательности счетных подгрупп и, в частности, подгрупп с конечным числом образующих будет, конечно, счетной. Обратно, *всякая счетная группа является суммой возрастающей последовательности подгрупп с конечным числом образующих*.

Пусть, действительно, элементы счетной группы G, перенумерованные произвольным образом, будут

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots .$$

Если H_n есть подгруппа группы G, порожденная элементами $g_1, g_2, \ldots \ldots, g_n$,

$$H_n = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\},$$

то подгруппы H_n будут группами с конечным числом образующих, вложенными друг в друга, — возможность равенства $H_n = H_{n+1}$ не исключена, — а группа G будет суммой этой возрастающей последовательности подгрупп.

Перейдем теперь к изложению одной конструкции, которая иногда позволяет говорить о *возрастающей последовательности данных групп*, не являющихся заранее подгруппами некоторой объемлющей группы.

Пусть даны группы

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots \tag{1}$$

и для каждого n дано изоморфное отображение φ_n группы G_n в группу G_{n+1} (т. е. на некоторую подгруппу последней),

$$g_n\varphi_n = g_{n+1}, \quad g_n \in G_n, g_{n+1} \in G_{n+1}. \tag{2}$$

Группы (1) и изоморфизмы (2) позволяют следующим образом построить новую вполне определенную группу $\overline{G}$.

Назовем *нитью* всякую последовательность элементов

$$\gamma = g_k, g_{k+1}, \ldots, g_n, \ldots \tag{3}$$

со следующими свойствами: 1) $k \geqslant 1$, 2) $g_n \in G_n$, 3) в случае, если $k > 1$, элемент g_k не является образом никакого элемента из группы G_{k-1} при изоморфизме φ_{k-1}, 4) g_{n+1} есть образ элемента g_n при изоморфизме φ_n, т. е. $g_n\varphi_n = g_{n+1}$, $n = k, k+1, \ldots$. Если даны две нити

$$\gamma' = g'_k, g'_{k+1}, \ldots, g'_n, \ldots,$$
$$\gamma'' = g''_l, g''_{l+1}, \ldots, g''_n, \ldots$$

и если $k \neq l$, то последовательность элементов

$$g'_m g''_m, g'_{m+1} g''_{m+1}, \ldots, g'_n g''_n, \ldots, \tag{4}$$

где $m = \max(k, l)$, также будет нитью. Действительно,

$$(g'_n g''_n)\varphi_n = g'_n\varphi_n \cdot g''_n\varphi_n = g'_{n+1} g''_{n+1},$$

а элемент $g'_m g''_m$ не есть образ никакого элемента при изоморфизме φ_{m-1}, так как один из множителей является таковым, а другой нет. Нить (4) мы назовем *произведением* заданных нитей и обозначим через $\gamma'\gamma''$. Если же $k = l$, то элемент $g'_m g''_m$ может уже обладать прообразом в группе G_{m-1} при изоморфизме φ_{m-1}. В этом случае последовательность (4) может быть дополнена до нити присоединением к ее началу нескольких элементов, причем это дополнение вполне однозначно. Полученная таким путем нить будет считаться произведением $\gamma'\gamma''$.

Ассоциативность определенного нами умножения нитей следует из ассоциативности операций в группах G_n. Единичным элементом будет нить, состоящая из единичных элементов всех групп G_n. Обратной для нити (3) будет нить

$$g_k^{-1}, g_{k+1}^{-1}, \ldots, g_n^{-1}, \ldots.$$

Множество всех нитей будет, следовательно, группой относительно определенного выше умножения. Эту группу, которую мы обозначим через $\overline{G}$, можно назвать *предельной группой* для последовательности групп (1) относительно изоморфизмов (2). Можно сказать также, что группы (1) образуют в силу изоморфизмов (2) *возрастающую последовательность* и что $\overline{G}$ есть *сумма* или *объединение* этой возрастающей последовательности. Действительно, соберем все те нити, которые содержат какой-либо элемент из группы G_s, т. е. такие, которые начинаются в группах G_k при $k \leqslant s$. Эти нити составляют в группе $\overline{G}$ подгруппу $\overline{G}_s$, изоморфную группе G_s. Подгруппы

$$\overline{G}_1, \overline{G}_2, \ldots, \overline{G}_n, \ldots \tag{5}$$

вложены друг в друга таким же способом, как вкладывались друг в друга группы (1) изоморфизмами (2); теоретико-множественной суммой возрастающей последовательности подгрупп (5) будет вся группа $\overline{G}$.

Группа $\overline{G}$ однозначно определяется заданием групп (1) и изоморфизмов (2). Ограничиться заданием только групп (1) невозможно. Действительно, аддитивная группа рациональных чисел R является объединением счетной возрастающей последовательности бесконечных циклических групп — см. выше, пример 1. Это же верно, однако, и для аддитивной группы двоичных дробей R_2, так как эта группа является суммой возрастающей последовательности своих подгрупп

$$\{1\} \subset \left\{\frac{1}{2}\right\} \subset \left\{\frac{1}{4}\right\} \subset \ldots \subset \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \subset \ldots.$$

Группы R и R_2 не изоморфны, так как, например, в группе R_2 нет элемента x, удовлетворяющего уравнению $3x = 1$, тогда как в группе R такое уравнение разрешимо. Это показывает, что сумма возрастающей последовательности групп зависит не только от самих этих групп, но и от способа, по которому каждая из них вложена в следующую.

Только что изложенная конструкция может быть без труда перенесена на случай множества групп, имеющего произвольную мощность и упорядоченного произвольным образом. Нужно лишь предположить, что для всякой пары групп G_α, G_β из этого множества, из которых первая предшествует второй, определено изоморфное отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ группы G_α в группу G_β и что если изоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\varphi_{\beta\gamma}$, а поэтому и $\varphi_{\alpha\gamma}$, определены, то $\varphi_{\alpha\gamma}$ совпадает с результатом последовательного выполнения изоморфизмов $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\varphi_{\beta\gamma}$. Детальное проведение этого построения предоставляется читателю. [См. Д.2.2.]

Используем нашу конструкцию для построения одной группы, играющей в дальнейшем, особенно в теории абелевых групп, очень большую роль. Если дано простое число p, то всякая циклическая группа порядка p^n обладает одной-единственной циклической подгруппой порядка p^{n-1}. Для каждого n существуют, следовательно, изоморфные отображения циклической группы порядка p^{n-1} в циклическую группу порядка p^n; фиксируя одно из этих отображений для каждого n, мы получаем возможность говорить о возрастающей последовательности циклических групп порядков p^n, $n = 1, 2, \ldots$. Сумма этой последовательности называется *группой типа* p^∞ [1]. Легко проверить, что группа типа p^∞ изоморфна мультипликативной группе корней из единицы, степени которых являются степенями числа p.

Так как циклическая группа $\{a\}$ порядка p^n обладает для всякого k, меньшего n, единственной циклической подгруппой порядка p^k, а именно $\{a^{p^{n-k}}\}$, то и группа P типа p^∞ обладает для всякого k, $k = 1, 2, \ldots$, единственной циклической подгруппой порядка p^k и совпадает с объединением возрастающей последовательности этих подгрупп. Пусть это будут подгруппы $\{a_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$; дополнительно положим $a_0 = 1$. Если теперь U — произвольная истинная подгруппа группы P, то она не может содержать всех a_k. Пусть a_{n+1} —

[1] Иногда эта группа называется также *квазициклической*.

первый из образующих элементов, лежащих вне U. *Тогда подгруппа U совпадает с циклической подгруппой* $\{a^n\}$. Действительно, если бы в U содержался элемент a_k при $k > n+1$, то содержалась бы вся циклическая подгруппа $\{a_k\}$, а поэтому и элемент a_{n+1}. Если же в U содержится некоторый элемент b, лежащий вне $\{a_n\}$, то можно указать такое k, $k > n$, что

$$b \notin \{a_{k-1}\}, \quad b \in \{a_k\}.$$

Тогда, однако, будет справедливо равенство

$$\{b\} = \{a_k\},$$

т. е. элемент a_k окажется лежащим в U.

Этим доказано, что *всякая истинная подгруппа группы типа p^∞ является конечной циклической группой некоторого порядка p^n.*

Из результатов гл. 7 будет следовать, что группы типа p^∞ (для всех простых p) являются единственными бесконечными абелевыми группами, все истинные подгруппы которых конечны. Поставленный О. Ю. Шмидтом вопрос о том, существуют ли бесконечные некоммутативные группы с этим свойством, остается пока открытым. [См. Д.16.5.]

Глава третья

НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

§ 8. Разложения группы по подгруппе

Если в группе G даны подмножества M и N, то под *произведением* MN этих *множеств* мы будем понимать множество всех элементов группы G, равных произведению некоторого элемента из M на некоторый элемент из N [1]). Если одно из множеств M, N состоит из одного элемента a, то мы получаем определение *произведения* aN *элемента на множество* или *произведения* Ma *множества на элемент*.

Умножение подмножеств является ассоциативным,

$$(MN)P = M(NP),$$

но, вообще говоря, не является коммутативным. Если для двух данных множеств M и N имеет место равенство

$$MN = NM$$

(это показывает, что для любых двух элементов a и b, $a \in M$, $b \in N$, существуют такие элементы a' и a'' из M и b' и b'' из N, что $ab = b'a'$, $ba = a''b''$), то множества M и N называются *перестановочными*. Частным случаем этого будет *перестановочность элемента и подгруппы*, *перестановочность двух подгрупп* и т. д.

Заметим, что если A и B подгруппы группы G, то множество AB не обязано быть подгруппой, т. е. *произведение* AB *множеств*, *являющихся подгруппами*, *отлично*, *вообще говоря*, *от определенной в* § 6 *подгруппы* $\{A, B\}$. Можно утверждать лишь, что

$$AB \subseteq \{A, B\}.$$

Подгруппа $\{A, B\}$, *порожденная подгруппами* A *и* B *в группе* G, *тогда и только тогда совпадает с произведением* AB *этих подгрупп*, *если подгруппы* A *и* B *перестановочны*.

Действительно, если

$$AB = \{A, B\},$$

[1]) Элемент может быть равным и нескольким различным произведениям такого вида; это не дает нам оснований, однако, считать этот элемент входящим в множество MN несколько раз.

то при любых a из A и b из B содержащийся в $\{A, B\}$ элемент ba должен быть равным некоторому элементу $a'b'$, $a' \in A$, $b' \in B$, т. е. $BA \subseteq AB$. Докажем, что элемент ab содержится, в свою очередь, в произведении BA. Действительно, используя уже доказанное включение, мы получаем

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a''b'', \quad a'' \in A, \quad b'' \in B,$$

откуда $ab = b''^{-1}a''^{-1}$, т. е. $BA \supseteq AB$ и поэтому $BA = AB$.

Обратно, если A и B перестановочны, то всякое произведение трех элементов вида a_1ba_2 или b_1ab_2 может быть, очевидно, записано в виде $a'b'$, — в первом случае нужно заменить ba_2 через некоторое равное ему, ввиду перестановочности A и B, произведение a'_2b' и положить затем $a_1a'_2 = a'$; во втором случае нужно заменить b_1a через $a'b'_1$ и затем положить $b'_1b_2 = b'$. Если уже доказано, что всякое произведение n множителей, $n \geqslant 3$, взятых из A и B поочередно, содержится в AB, и если дано произведение такого же рода, но состоящее из $n+1$ множителей, то заменяем произведение первых n множителей некоторым равным ему произведением $a'b'$ и снова приходим к случаю трех множителей. Этим доказано, что всякий элемент из подгруппы $\{A, B\}$ содержится в множестве AB.

Подгруппы абелевой группы всегда, конечно, перестановочны. Перестановочными будут также такие подгруппы A и B некоторой (конечной или бесконечной) симметрической группы, что всякий символ, перемещаемый хотя бы одной подстановкой одной из подгрупп A, B, остается на месте при всех подстановках, входящих в другую подгруппу, — действительно, перестановочными будут сами элементы этих подгрупп. Читателю предлагается доказать, далее, перестановочность циклических подгрупп, порожденных подстановками (123) и (12) в симметрической группе 3-й степени, и неперестановочность циклических подгрупп, порожденных в этой же группе подстановками (12) и (23).

Для дальнейшего заметим, что если A — подгруппа группы G, то имеет место равенство

$$AA = A.$$

Ясно, в самом деле, что $AA \subseteq A$, но уже произведение A на 1 дает все A.

Умножение подмножеств группы находит важное приложение в разложениях группы по подгруппе, играющих фундаментальную роль во всей теории групп.

Пусть в группе G дана подгруппа H. Если a есть произвольный элемент из G, то произведение aH называется *левосторонним смежным классом группы G по подгруппе H, определенным элементом a*. Понятно, что элемент a содержится в классе aH, так как подгруппа H содержит единицу.

Если b есть произвольный элемент из класса aH, то левосторонние смежные классы aH и bH совпадают, т. е. *всякий левосторонний смежный класс определяется любым из своих элементов*. Действительно, если $b = ah_0$, $h_0 \in H$, то

$$bh' = a(h_0h') \quad \text{и} \quad ah'' = b(h_0^{-1}h''), \quad h', h'' \in H.$$

Мы будем говорить также, что любой элемент левостороннего смежного класса является *представителем* этого класса.

Отсюда следует, что *два любых левосторонних смежных класса группы G по подгруппе H или совпадают, или же не имеют ни одного общего элемента*, т. е. их пересечение пусто. Мы получаем, что вся группа G распадается на непересекающиеся левосторонние смежные классы по подгруппе H. Это разложение называется *левосторонним разложением группы G по подгруппе H*. Одним из смежных классов этого разложения будет сама подгруппа H: если элемент a содержится в H, то $aH = H$.

Заметим, что элементы a и b тогда и только тогда лежат в одном левостороннем смежном классе группы G по подгруппе H, если произведение $a^{-1}b$ содержится в H.

Понятие левостороннего разложения иллюстрируют следующие примеры.

1. Если G есть аддитивная группа целых чисел и H — подгруппа чисел, делящихся на 4, то числа a и b тогда и только тогда будут лежать в одном левостороннем смежном классе группы G по подгруппе H, если при делении на 4 они дают один и тот же остаток. Левостороннее разложение G по H состоит, следовательно, из четырех смежных классов: самого H и множеств чисел, дающих при делении на 4 остаток 1, остаток 2 и остаток 3.

2. Если G есть симметрическая группа 3-й степени и $H = \{(12)\}$, то левостороннее разложение G по H состоит из трех смежных классов: самой подгруппы H, состоящей из элементов 1 и (12), класса $(13) \cdot H$, состоящего из элементов (13) и (132), и класса $(23) \cdot H$, состоящего из элементов (23) и (123).

3. Если G есть группа невырожденных матриц n-го порядка с действительными элементами, а H — подгруппа матриц, определитель которых равен 1, то мы получим левостороннее разложение G по H, собирая в один смежный класс матрицы с равными определителями.

Если в произвольной группе G в качестве подгруппы H берется сама группа G, то разложение состоит из одного-единственного смежного класса, а если H есть единичная подгруппа E, то всякий элемент группы составляет отдельный смежный класс.

Вместо левостороннего разложения можно было бы получить *правостороннее разложение группы G по подгруппе H*, называя *правосторонним смежным классом G по H* всякое множество Ha, $a \in G$. Все, сказанное выше о левосторонних разложениях, переносится и на правосторонние разложения. В частности, одним из правосторонних

смежных классов будет само H. Элементы a и b тогда и только тогда будут лежать в одном правостороннем смежном классе по подгруппе H, если $ba^{-1} \in H$.

В случае абелевых групп нет необходимости, конечно, различать левостороннее и правостороннее разложения. В некоммутативном случае эти разложения могут оказаться различными. Так, правостороннее разложение симметрической группы 3-й степени по подгруппе $H = \{(12)\}$ отлично от приведенного выше, в примере 2, левостороннего разложения и состоит из следующих трех смежных классов: самого H, класса $H \cdot (13)$, куда входят элементы (13) и (123), и класса $H \cdot (23)$, состоящего из элементов (23) и (132). Можно утверждать, однако, что *оба разложения всякой группы G по произвольной подгруппе H состоят из равного числа смежных классов* (в бесконечном случае это значит, что *множества левосторонних и правосторонних смежных классов по данной подгруппе имеют одинаковую мощность*). Действительно, множество элементов, обратных к элементам из левостороннего смежного класса aH, совпадает с правосторонним смежным классом Ha^{-1},

$$(aH)^{-1} = Ha^{-1};$$

этим между множествами левосторонних и правосторонних смежных классов устанавливается взаимно однозначное соответствие. [См. Д.2.3.]

Число смежных классов в каждом из разложений группы G по подгруппе H (в бесконечном случае мощность множества этих классов) называется *индексом* подгруппы H в группе G. Если число смежных классов конечно, то H называется *подгруппой конечного индекса*.

В конечных группах и только в них все подгруппы имеют конечный индекс; действительно, индекс единичной подгруппы произвольной группы совпадает с мощностью самой группы. Все подгруппы бесконечной циклической группы, отличные от единичной подгруппы, являются подгруппами конечного индекса, причем эта группа для всякого натурального числа n обладает одной и только одной подгруппой индекса n; доказательство этого утверждения опирается на доказанную в § 6 теорему о подгруппах циклических групп.

Существуют, с другой стороны, группы, все истинные подгруппы которых имеют бесконечный индекс. Такова, например, аддитивная группа рациональных чисел R. Действительно, если H есть истинная подгруппа группы R, то в н е H можно найти такой элемент a, что pa уже содержится в H, p — некоторое простое число. Числа

$$a, \frac{1}{p}a, \frac{1}{p^2}a, \ldots, \frac{1}{p^n}a, \ldots$$

все лежат вне H и принадлежат к различным смежным классам группы R по подгруппе H. В самом деле, если

$$\frac{1}{p^n}\,a = \frac{1}{p^k}\,a + h, \quad h \in H, \quad n > k,$$

то

$$a = p^{n-k}a + p^n h,$$

т. е. a само содержится в H вопреки предположению.

Теорема Пуанкаре. *Пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса само имеет конечный индекс.*

Эту теорему достаточно доказать, очевидно, для случая двух подгрупп. Пусть подгруппы H и F имеют в группе G конечный индекс и пусть D есть пересечение этих подгрупп. Элементы a и b тогда и только тогда лежат в одном левостороннем смежном классе по D, если $a^{-1}b \in D$, т. е. если $a^{-1}b \in H$ и $a^{-1}b \in F$. Мы получим, следовательно, все левосторонние смежные классы группы G по подгруппе D, если возьмем все непустые пересечения левосторонних классов по H с левосторонними классами по F. Из конечности индексов подгрупп H и F следует конечность числа этих пересечений и поэтому конечность индекса D в G. Можно утверждать даже, что *индекс D в группе G не больше произведения индексов H и F в этой группе.*

Для случая конечных групп понятие разложения группы по подгруппе приводит к следующей важной теореме:

Теорема Лагранжа. *Порядок и индекс подгруппы конечной группы являются делителями порядка самой группы.*

Действительно, если конечная группа G имеет порядок n, а ее подгруппа H — порядок k и индекс j, то каждый из левосторонних смежных классов группы G по подгруппе H состоит из k элементов, откуда

$$n = kj.$$

Так как порядок элемента совпадает с порядком его циклической подгруппы, то из теоремы Лагранжа следует, что *порядок всякого элемента конечной группы является делителем порядка группы.*

Из теоремы Лагранжа следует также, что *всякая группа, порядок которой есть простое число, будет циклической.* Действительно, эта группа должна совпадать с циклической подгруппой, порожденной любым ее отличным от 1 элементом.

Теорема Лагранжа является частным случаем следующей теоремы, относящейся к произвольным группам:

Если H и F являются подгруппами конечного индекса группы G, причем H содержится в F, и если n и j являются индексами соответственно H и F в группе G, то индекс k подгруппы H в F также конечен и

$$n = kj.$$

Действительно, если два элемента лежат в одном левостороннем смежном классе группы G по подгруппе H, то тем более они лежат в одном левостороннем смежном классе по подгруппе F. Всякий левосторонний смежный класс группы G по F распадается поэтому на несколько полных левосторонних смежных классов группы G по H. Отсюда следует уже конечность индекса H в F. Если F состоит из k левосторонних классов по H, то всякий класс aF, $a \in G$, также состоит из k таких классов; мы получим эти классы, умножая слева на a все левосторонние смежные классы по H, входящие в F. Этим теорема доказана полностью.

Если G конечная группа и $H = E$, то мы получаем теорему Лагранжа.

В некоторых вопросах теории групп используется разложение группы по двойному модулю, обобщающее разложение группы в смежные классы по подгруппе. Пусть в группе G даны произвольные подгруппы H и K. Если a есть элемент из G, то произведение HaK содержит, очевидно, элемент a; это произведение мы будем называть классом по двойному модулю (H, K), порожденным элементом a. Если элемент b содержится в классе HaK, т. е. $b = hak$, то $a = h^{-1}bk^{-1}$, т. е. $a \in HbK$. Наконец, из $b \in HaK$, $c \in HbK$ следует $c \in HaK$. Этим доказано, что группа G распадается на непересекающиеся классы по модулю (H, K). Полученное нами разложение группы G превращается, очевидно, при $K = E$ в правостороннее разложение G по подгруппе H, а при $H = E$ в левостороннее разложение G по подгруппе K.

Очевидно, что класс HaK вместе со всяким своим элементом содержит и весь порожденный им правосторонний смежный класс по H. Между правосторонними смежными классами по H, содержащимися в классе HaK, и правосторонними смежными классами группы K по пересечению $D = a^{-1}Ha \cap K$ можно следующим образом установить взаимно однозначное соответствие: классу Hak_0, $k_0 \in K$, ставится в соответствие класс Dk_0. В самом деле, если $Hak_0 = Hak_1$, $k_1 \in K$, то $k_1 = a^{-1}ha \cdot k_0$, $h \in H$, откуда $a^{-1}ha \in D$, т. е. $k_1 \in D \cdot k_0$. С другой стороны, если $k' \in K$, то класс Dk' будет соответствовать классу Hak', входящему в HaK. Если, далее, $Dk' = Dk''$, то существует такое $h \in H$, что $k'' = a^{-1}ha \cdot k'$, т. е. $ak'' = hak'$, откуда $Hak'' = Hak'$. Таким образом, *из конечности индекса подгруппы $a^{-1}Ha \cap K$ в K следует конечность числа правосторонних смежных классов по H, составляющих класс HaK, и наоборот, причем эти два числа совпадают.*

§ 9. Нормальный делитель

Мы знаем из предыдущего параграфа, что некоммутативные группы могут обладать подгруппами, по которым левостороннее разложение отлично от правостороннего. Во всякой группе, однако, оба разложения по единичной подгруппе (и по самой группе) непременно совпадают.

Пример 3 предшествующего параграфа приводит, как легко проверить, к менее тривиальному случаю совпадения обоих разложений.

Подгруппа H группы G называется *нормальным делителем* этой группы или *инвариантной подгруппой*, если левостороннее разложение группы G по подгруппе H совпадает с правосторонним.

Иными словами, H будет нормальным делителем в G, если определяемые элементом a из G смежные классы по H — левосторонний и правосторонний — при всяком a совпадают:

$$aH = Ha.$$

Это показывает, что *подгруппа H группы G тогда и только тогда будет нормальным делителем этой группы, если она перестановочна с любым элементом группы G, т.е. если для всякого элемента a из G и всякого h из H можно найти в H такие элементы h' и h'', что*

$$ah = h'a, \quad ha = ah''. \tag{1}$$

Понятие нормального делителя можно было бы определить и многими иными способами; каждый раз мы будем пользоваться тем из этих определений, которое в данном случае наиболее удобно. Сейчас мы укажем два из них; позже будут даны и некоторые другие.

Элементы a и b группы G называются *сопряженными* в этой группе, если в G можно найти хотя бы один такой элемент g, что

$$b = g^{-1}ag.$$

Иногда говорят также, что b получается из a *трансформированием* элементом g.

Так как второе из равенств (1) может быть переписано в виде

$$a^{-1}ha = h''$$

и так как элементы a и h были произвольными элементами соответственно из G и из H, то мы получаем следующее свойство нормального делителя:

Нормальный делитель H группы G вместе со всяким своим элементом h содержит и все элементы, сопряженные с h в группе G.

Это свойство можно было бы принять в качестве определения нормального делителя, причем часто удобно пользоваться его следующей более общей формой:

Если в группе G с системой образующих M дана подгруппа H, порождаемая множеством элементов N, и если трансформирование любого элемента из N элементами из M и элементами, им обратными, не выводит за пределы подгруппы H, то H будет нормальным делителем в G.

В самом деле, легко проверить, что

$$g^{-1}(h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\dots h_n^{\alpha_n})g = (g^{-1}h_1g)^{\alpha_1}(g^{-1}h_2g)^{\alpha_2}\dots(g^{-1}h_ng)^{\alpha_n},$$
$$(g_1g_2)^{-1}h(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}hg_1)g_2.$$

Однако всякий элемент из G имеет вид

$$g = g_1g_2\dots g_k,$$

где $g_i \in M$ или $g_i^{-1} \in M$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, а всякий элемент из H имеет вид

$$h = h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\dots h_n^{\alpha_n},$$

где $h_i \in N$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Поэтому всегда $g^{-1}hg \in H$, что и требовалось доказать.

Понятно, что упоминание в формулировке этой теоремы об элементах, обратных к элементам из M, будет излишним в том случае, когда все элементы из M имеют конечные порядки.

Если U есть некоторая подгруппа группы G, а g — произвольный элемент этой группы, то множество $g^{-1}Ug$, состоящее, очевидно, из всех элементов, получающихся из элементов подгруппы U трансформированием элементом g, само будет подгруппой. Действительно, если элементы u_1 и u_2 принадлежат к U, то

$$(g^{-1}u_1g)(g^{-1}u_2g) = g^{-1}(u_1u_2)g \tag{2}$$

и

$$(g^{-1}u_1g)^{-1} = g^{-1}u_1^{-1}g.$$

Подгруппа $g^{-1}Ug$ называется подгруппой, *сопряженной* с U в группе G. Говорят также, что она получена из подгруппы U *трансформированием* элементом g. Так как из $g^{-1}u_1g = g^{-1}u_2g$ следует $u_1 = u_2$, то, ввиду (2), можно утверждать, что отображение

$$u \to g^{-1}ug, \quad u \in U,$$

есть изоморфное отображение подгруппы U на подгруппу $g^{-1}Ug$.

Из сказанного выше об элементах, сопряженных с элементами нормального делителя, следует, что *все подгруппы группы G, сопряженные с нормальным делителем H этой группы, должны целиком содержаться в H*. На самом деле можно утверждать даже больше. Если бы подгруппа $g^{-1}Hg$ была истинным подмножеством нормального делителя H, т. е. если бы в H существовал элемент h_0, не входящий в $g^{-1}Hg$, то элемент gh_0g^{-1}, сопряженный с элементом h_0, лежал бы вне H. Так как, с другой стороны, всякая подгруппа группы G, совпадающая со своими сопряженными подгруппами, содержит, очевидно, вместе со всяким своим элементом и все элементы, с ним сопряженные, то мы приходим к следующему результату:

Нормальные делители группы G и только они совпадают со всеми сопряженными с ними подгруппами группы G.

Переходим к установлению некоторых простейших следствий из определения нормального делителя.

Всякая подгруппа индекса 2 является нормальным делителем группы, так как оба разложения группы по этой подгруппе совпадают. Так, знакопеременная группа n-й степени, имеющая в симметрической группе n-й степени индекс 2, будет нормальным делителем этой группы.

Пересечение любого множества нормальных делителей группы G само является нормальным делителем этой группы.

Действительно, если подгруппа D есть пересечение заданных нормальных делителей, то всякий элемент, сопряженный с некоторым элементом из D, должен содержаться во всех этих нормальных делителях, а поэтому и в их пересечении.

Это свойство нормальных делителей позволяет так же, как в § 6 для случая подгрупп, говорить о нормальном делителе группы G, *порожденном* данным подмножеством M этой группы, — это будет пересечение всех нормальных делителей, содержащих M.

Нормальный делитель, порожденный любым множеством нормальных делителей группы G, совпадает с подгруппой, порожденной этим множеством нормальных делителей.

Действительно, если заданы нормальные делители H_α (α пробегает некоторое множество индексов), то всякий элемент из подгруппы $\{H_\alpha\}$ может быть записан в виде

$$h_1 h_2 \dots h_k,$$

где всякое h_i содержится в некотором H_{α_i}, $i = 1, 2, \dots, k$. Если $g \in G$, то

$$g^{-1}(h_1 h_2 \dots h_k)g = (g^{-1}h_1 g)(g^{-1}h_2 g)\dots(g^{-1}h_k g);$$

но так как $g^{-1}h_i g \in H_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, то мы получаем, что всякий элемент, сопряженный с некоторым элементом из подгруппы $\{H_\alpha\}$, сам содержится в этой подгруппе.

Отсюда следует, что *сумма возрастающей последовательности нормальных делителей группы G сама будет нормальным делителем этой группы*. Это легко доказать и непосредственно.

Всякий нормальный делитель, будучи перестановочным с любым элементом группы, тем более перестановочен с любой подгруппой этой группы. Отсюда следует, ввиду § 8, что *подгруппа $\{H, F\}$, порожденная нормальным делителем H группы G и произвольной подгруппой F этой группы, совпадает с произведением HF*. Иными словами, всякий элемент из подгруппы $\{H, F\}$ может быть записан в виде произведения hf, где $h \in H$, $f \in F$. Подгруппа $\{H, F\}$ совпадает при этих предположениях также и с FH.

Если H есть нормальный делитель группы G, а подгруппа F этой группы целиком содержит H,

$$H \subset F \subset G,$$

то *H будет нормальным делителем и группы F*. Действительно, к H принадлежит всякий элемент вида $f^{-1}hf$, где $h \in H$, $f \in F$. Заметим, однако, что если H есть нормальный делитель группы G, а K есть нормальный делитель H, то хотя K и будет подгруппой группы G, но не обязательно нормальным делителем G, т. е. *свойство быть нормальным делителем не является транзитивным*. Позже мы встретим много относящихся сюда примеров.

Всякая подгруппа абелевой группы является нормальным делителем. Существуют, однако, и некоммутативные группы, всякая подгруппа которых является нормальным делителем. Все такие некоммутативные группы называются *гамильтоновыми* и их полное описание можно найти в работе Бэра [2]. Оказалось, в частности, что всякая гамильтонова группа содержит подгруппу, изоморфную следующей группе K; эта группа называется *группой кватернионов* и сама является гамильтоновой. Обозначим через K подгруппу, порожденную в симметрической группе 8-й степени подстановками

$$a = (1234)(5678) \quad \text{и} \quad b = (1537)(2846).$$

Легко проверяются соотношения

$$a^4 = 1, \tag{3}$$
$$b^4 = 1, \tag{4}$$
$$a^2 = b^2, \tag{5}$$
$$aba = b. \tag{6}$$

Отсюда имеем

$$bab = a^3(aba)b = a^3b^2 = a^5 = a, \tag{7}$$
$$a^3b = b^2ab = ba, \tag{8}$$
$$b^3a = a^2ba = ab. \tag{9}$$

Так как $a^2 \cdot a = a \cdot a^2$ и $b^2 \cdot b = b \cdot b^2$, то, пользуясь (5), можно путем перестановок (и, следовательно, не изменяя числа сомножителей) всякое произведение степеней элементов a и b представить как произведение чередующихся первых степеней этих элементов, быть может, умноженное слева на a^3 или b^3. Однако, пользуясь (6), (7), (8) или (9), можно уменьшить число сомножителей во всяком таком произведении, если только оно не совпадает с одним из следующих

восьми:

$$1, \quad a, \quad b, \quad ab = (1836)(2745), \quad ba = (1638)(2547),$$
$$a^2 = b^2 = (13)(24)(57)(68), \quad a^3 = (1432)(5876), \quad b^3 = (1735)(2648);$$

но все эти произведения представляют собой различные элементы.

Таким образом, группа K является некоммутативной группой 8-го порядка.

Всякая подгруппа группы, отличная от E и самого K, должна, по теореме Лагранжа, иметь порядок 2 или 4. В действительности, в K имеется единственная подгруппа порядка 2, а именно $\{a^2\}$, и три подгруппы порядка 4, а именно $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{ab\}$. Трансформируя образующие элементы всех указанных циклических подгрупп как элементом a, так и элементом b, мы обнаружим, используя (3)–(7), что все эти подгруппы являются нормальными делителями в K.

Простые группы. Нормальными делителями всякой группы являются она сама и ее единичная подгруппа. Группа, не имеющая других нормальных делителей, кроме этих двух, называется *простой*. Простые группы составляют класс групп, в некотором смысле противоположный гамильтоновым группам.

Абелева группа будет простой тогда и только тогда, если она циклическая и если всякий ее элемент, отличный от 1, является для нее образующим. Сделанное в § 6 замечание об образующих элементах циклических групп позволяет поэтому утверждать, что *абелева группа будет простой тогда и только тогда, если она циклическая и порядок ее есть простое число*.

Существуют, однако, и некоммутативные простые группы, как конечные, так и бесконечные. Так, например, имеет место следующая теорема, играющая большую роль в теории Галуа:

Знакопеременная группа n-й степени A_n является при $n \geqslant 5$ простой.

Предварительно докажем следующие две леммы:

Лемма 1. *Если $n \geqslant 3$, то подгруппа, порожденная множеством содержащихся в группе A_n тройных циклов, совпадает со всей этой группой*.

Действительно, всякая четная подстановка является произведением четного числа транспозиций, но произведение двух различных транспозиций равно некоторому тройному циклу или произведению тройных циклов: если α, β, γ, ... — переставляемые символы, то

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\gamma), \quad (\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma)(\alpha\delta\gamma).$$

Всякий же тройной цикл является, очевидно, четной подстановкой.

Лемма 2. *Всякий нормальный делитель группы A_n, $n \geqslant 5$, содержащий хотя бы один тройной цикл, совпадает со всей группой A_n.*

Пусть нормальный делитель H группы A_n содержит тройной цикл $(\alpha\beta\gamma)$ и пусть $(\overline{\alpha\beta\gamma})$ — любой другой тройной цикл из A_n. Если символы δ и ε отличны от α, β и γ, то подстановка n-й степени

$$a = \begin{pmatrix} \dots & \alpha & \dots & \beta & \dots & \gamma & \dots & \delta & \dots & \varepsilon & \dots \\ \dots & \overline{\alpha} & \dots & \overline{\beta} & \dots & \overline{\gamma} & \dots & \delta' & \dots & \varepsilon' & \dots \end{pmatrix},$$

которую можно сделать четной, транспонируя, если нужно, символы δ' и ε' во второй строке, такова, что

$$a^{-1}(\alpha\beta\gamma)a = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}).$$

Нормальный делитель H содержит, следовательно, все тройные циклы из группы A_n и поэтому, по лемме 1, совпадает с этой группой [1]).

Переходим к доказательству теоремы. Пусть группа A_n обладает отличным от E нормальным делителем H и пусть среди элементов из H имеются такие, разложение которых в циклы содержит хотя бы один цикл длины $\geqslant 4$. Пусть h есть один из таких элементов:

$$h = (\alpha\beta\gamma\delta\dots)\dots,$$

где многоточие вне скобок заменяет все остальные циклы. Тогда к H принадлежит также сопряженный с h в группе A_n элемент

$$h' = (\alpha\gamma\beta)h(\alpha\beta\gamma) = (\beta\gamma\alpha\delta\dots)\dots,$$

а поэтому и элемент $h^{-1}h' = (\alpha\beta\delta)$. Поэтому, ввиду леммы 2, $H = A_n$.

Пусть теперь в разложение некоторого элемента h из H входят лишь тройные и, быть может, двойные циклы. Мы будем считать, что тройных циклов не менее, чем два, так как иначе h^2 было бы просто тройным циклом и можно было бы непосредственно применить лемму 2. Если

$$h = (\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma')\dots,$$

то в H содержится также элемент

$$h' = (\beta'\alpha'\gamma)h(\gamma\alpha'\beta') = (\alpha\beta\alpha')(\gamma\gamma'\beta')\dots,$$

а поэтому и элемент

$$hh' = (\alpha\alpha'\gamma\beta\gamma')\dots,$$

содержащий цикл длины 5, и мы возвращаемся к предыдущему случаю.

Пусть, наконец, разложение в циклы некоторого элемента h из нормального делителя H состоит лишь из циклов длины 2; последних будет, конечно, четное число. Если $h = (\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)$, то в H будет содержаться и элемент

$$h' = (\gamma\beta_1\alpha_1)h(\alpha_1\beta_1\gamma) = (\beta_1\gamma)(\alpha_2\beta_2),$$

[1]) Непосредственной проверкой можно убедиться, что лемма 2 верна и при $n < 5$.

где γ — произвольный символ, отличный от символов, действительно переставляемых подстановкой h. К подгруппе H принадлежит теперь и элемент $hh' = (\alpha_1\gamma\beta_1)$ и поэтому $H = A_n$. Если

$$h = (\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)(\alpha_3\beta_3)(\alpha_4\beta_4)\dots,$$

то к H принадлежит и элемент

$$h' = (\beta_1\alpha_2)(\beta_2\alpha_3)h(\beta_2\alpha_3)(\beta_1\alpha_2) = (\alpha_1\alpha_2)(\beta_1\alpha_3)(\beta_2\beta_3)(\alpha_4\beta_4)\dots,$$

а поэтому и элемент $hh' = (\alpha_1\alpha_3\beta_2)(\alpha_2\beta_3\beta_1)$; это возвращает нас к рассмотренному выше случаю. Теорема доказана полностью [1]).

Предположение $n \geqslant 5$ является существенным. Правда, знакопеременная группа 3-й степени является циклической порядка 3 и поэтому простой, однако *знакопеременная группа 4-й степени не простая* — легко проверить, что содержащиеся в ней подстановки (12)(34), (13)(24) и (14)(23) составляют вместе с 1 нормальный делитель группы A_4. Этот нормальный делитель является абелевой, но не циклической, группой 4-го порядка.

Доказанная выше теорема показывает, что существует бесконечно много простых некоммутативных конечных групп. Такие группы, впрочем, далеко не исчерпываются знакопеременными. В § 61 будут указаны некоторые результаты, относящиеся к далеко еще не исчерпанному вопросу о полном обозрении всех конечных простых групп [2]).

В проведенном выше доказательстве теоремы нигде не использовалась конечность группы A_n. Можно утверждать, следовательно, что *счетная знакопеременная группа и вообще знакопеременные группы любой бесконечной мощности* (см. § 4, пример 14) *являются простыми*. Это показывает, что существуют простые группы любой бесконечной мощности. [См. Д.2.4.]

§ 10. Связь нормальных делителей с гомоморфизмами и фактор-группами

Как вытекает из определения нормального делителя, левосторонние смежные классы группы G по нормальному делителю H одновременно являются и правосторонними, и обратно. Это позволяет говорить просто о смежных классах группы G по нормальному делителю H и о *разложении G в смежные классы* по этому нормальному делителю.

[1]) Некоторые доказательства этой теоремы, очень близкие по существу к изложенному в тексте, начинаются с выбора в H отличного от единицы элемента, оставляющего на месте возможно больше символов. Простейшее из доказательств этого рода можно найти в работе Бауэра [1].

[2]) Ко времени подготовки третьего издания в этом вопросе произошли существенные продвижения.

Разложение группы G в смежные классы по нормальному делителю H является правильным разбиением этой группы.

Действительно, пусть даны два смежных класса группы G по нормальному делителю H. Если в этих смежных классах произвольным образом выбраны представители a и b, т. е. если сами классы могут быть записаны в виде aH и bH, то ввиду ассоциативности умножения подмножеств в группе и на основании равенств $Hb = bH$ и $HH = H$ мы получим

$$aH \cdot bH = abHH = abH.$$

Справедливо и обратное утверждение:

Если дано произвольное правильное разбиение группы G, то тот класс этого разбиения, который содержит единицу, будет нормальным делителем группы G, а все остальные классы — смежными классами группы G по этому нормальному делителю.

Пусть A будет класс данного правильного разбиения, содержащий элемент 1. Если a_1 и a_2 — два любых элемента из A, то произведение a_1a_2 должно лежать, в силу определения правильного разбиения, в одном классе с произведением $1 \cdot 1 = 1$, а поэтому

$$a_1a_2 \in A.$$

Если, далее, a — произвольный элемент из класса A, то произведение $aa^{-1} = 1$ должно лежать в одном классе с произведением $1 \cdot a^{-1} = a^{-1}$, откуда

$$a^{-1} \in A.$$

Этим доказано, что A — подгруппа группы G. Если, далее, a — произвольный элемент из A, b — произвольный элемент из G, то произведение $b^{-1}ab$ должно содержаться в одном классе с произведением $b^{-1} \cdot 1 \cdot b = 1$, т. е.

$$b^{-1}ab \in A.$$

Класс A будет, следовательно, даже нормальным делителем в G.

Пусть, наконец, B будет произвольный класс из данного правильного разбиения. Если b — элемент из B, то при любом элементе a из A произведение ba будет лежать в одном классе с произведением $b \cdot 1 = b$, т. е. весь смежный класс bA содержится в B. Если теперь c — любой другой элемент из класса B, то, так как b и c лежат в одном классе правильного разбиения, это же верно для произведений $b^{-1}c$ и $b^{-1}b = 1$, т. е. $b^{-1}c \in A$, откуда

$$c \in bA.$$

Мы пришли к равенству

$$B = bA,$$

заканчивающему доказательство теоремы.

Эти результаты устанавливают *взаимно однозначное соответствие между всеми правильными разбиениями группы G и всеми*

нормальными делителями этой группы и позволяют не различать в дальнейшем правильных разбиений группы и ее разложений в смежные классы по нормальному делителю. В частности, если A — тот класс данного правильного разбиения группы G, в котором содержится единица, то мы будем теперь говорить не о фактор-группе группы G по этому правильному разбиению, а о *фактор-группе по нормальному делителю* A и обозначать ее символом G/A.

Мы предлагаем читателю соответствующим образом изменить формулировку теоремы о гомоморфизмах для групп (§ 3). Эта теорема устанавливает теперь тесную связь между нормальными делителями группы и ее гомоморфными отображениями. Именно эта связь с гомоморфизмами сделала понятие нормального делителя одним из самых основных в теории групп. Мы приходим, в частности, к новому определению нормального делителя. Назовем *ядром* гомоморфного отображения φ группы G на группу G' совокупность тех элементов из G, которые отображаются при φ в единицу группы G'. Из теоремы о гомоморфизмах и результатов настоящего параграфа вытекает следующее утверждение:

Нормальные делители группы G и только они служат ядрами гомоморфизмов этой группы.

Если некоторая группа G гомоморфно отображается на группу G' и если U — подгруппа из G, то она также испытывает гомоморфное отображение, а поэтому ее образ при этом отображении будет подгруппой в G'. Обратно, если U' — произвольная подгруппа из G', то ее *полный прообраз* U в G, т. е. множество всех элементов из G, отображающихся при рассматриваемом гомоморфизме φ в подгруппу U', *будет подгруппой в G*. Действительно, если a и b — элементы из U, т. е. $a\varphi = a' \in U'$, $b\varphi = b' \in U'$, то

$$(ab)\varphi = a'b',$$

а так как $a'b' \in U'$, то элемент ab должен лежать в U. Далее,

$$(a^{-1})\varphi = a'^{-1},$$

но $a'^{-1} \in U'$, а поэтому $a^{-1} \in U$. Наше утверждение доказано. Дополнительно заметим, что из того, что подгруппа U' содержит единицу группы G', следует, что *ее полный прообраз U целиком содержит ядро гомоморфизма φ*. Это соответствие между подгруппами групп G и G' обладает рядом важных дополнительных свойств, которые собраны в следующей теореме о соответствии между подгруппами при гомоморфном отображении; в ней в силу теоремы о гомоморфизмах мы будем говорить о фактор-группе и об естественном гомоморфизме группы на эту фактор-группу.

Соответствие, относящее всякой подгруппе фактор-группы $\overline{G} = G/H$ ее полный прообраз в группе G при естественном гомоморфизме G на $\overline{G}$, является взаимно однозначным соответствием между всеми подгруппами группы $\overline{G}$ и теми подгруппами группы G,

которые содержат нормальный делитель H. Соответствующие подгруппы обладают при этом равными индексами в своих группах. Если, наконец, одна из этих подгрупп будет нормальным делителем, то это же верно и для другой, причем фактор-группы групп G и $\overline{G}$ по этим нормальным делителям изоморфны.

Доказательство. Если $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ — различные подгруппы из $\overline{G}$, то в одной из них, например в $\overline{U}_1$, можно найти элемент $\overline{a}$, не лежащий в другой. В этот элемент отображаются при естественном гомоморфизме некоторые элементы из G, а поэтому полные прообразы наших двух подгрупп в группе G не могут совпасть. Пусть, с другой стороны, U — произвольная подгруппа группы G, содержащая H, $\overline{U}$ — ее образ в $\overline{G}$, а U_0 — полный прообраз подгруппы $\overline{U}$ в G. Ясно, что $U \subseteq U_0$. Однако, если a_0 — элемент из U_0, то в U содержится такой элемент a, что a_0 и a лежит в одном и том же смежном классе по H, а так как $H \subseteq U$, то и $a_0 \in U$, т. е. $U_0 = U$. Этим доказана взаимная однозначность рассматриваемого соответствия.

Если теперь U, содержащая H, и $\overline{U}$ являются произвольными соответствующими друг другу подгруппами групп G и $\overline{G} = G/H$, то при a и b из группы G элемент $a^{-1}b$ тогда и только тогда лежит в U, если смежный класс

$$a^{-1}bH = a^{-1}H \cdot bH$$

принадлежит к $\overline{U}$. Это показывает, что левосторонние смежные классы группы G по подгруппе U взаимно однозначно соответствуют левосторонним смежным классам $\overline{G}$ по $\overline{U}$, откуда следует, что подгруппы U и $\overline{U}$ имеют соответственно в группах G и $\overline{G}$ равные индексы.

Если, далее, $\overline{U}$ является нормальным делителем $\overline{G}$, то последовательное выполнение естественных гомоморфизмов G на $\overline{G}$ и $\overline{G}$ на $\overline{G}/\overline{U}$ дает гомоморфное отображение группы G на последнюю фактор-группу. Ядро этого гомоморфизма составляют те элементы из G, которые при отображении G на $\overline{G}$ отображались в $\overline{U}$, т. е. элементы, составляющие подгруппу U. Отсюда следует, что U есть нормальный делитель группы G и

$$G/U \simeq \overline{G}/\overline{U}.$$

Если, с другой стороны, U есть нормальный делитель группы G, содержащий H, и $\overline{U}$ соответствующая ему подгруппа в $\overline{G}$, то при любых $\overline{u} \in \overline{U}$ и $\overline{g} \in \overline{G}$ элемент (т. е. смежный класс по H) $\overline{g}^{-1}\overline{u}\overline{g}$ будет состоять из элементов группы G, принадлежащих к U, и поэтому содержится в $\overline{U}$. Отсюда следует, что $\overline{U}$ является нормальным делителем в $\overline{G}$. Этим теорема полностью доказана.

В § 4 указан ряд примеров гомоморфных отображений групп. Читатель без труда найдет ядра этих гомоморфизмов и построит соответствующие фактор-группы. Сейчас мы разыщем фактор-группы циклических групп, бесконечной и конечных.

Пусть дано гомоморфное отображение φ циклической группы $A = \{a\}$ на некоторую группу B. Если

$$a\varphi = b,$$

то, очевидно, все элементы из B будут степенями элемента b, т. е. $B = \{b\}$. Иными словами, *все фактор-группы циклических групп сами будут циклическими группами*.

Пусть, в частности, A — бесконечная циклическая группа, рассматриваемая как аддитивная группа целых чисел. Мы получим гомоморфное отображение группы A на циклическую группу B порядка n с образующим элементом b, если образом целого числа k будем считать элемент b^k. Числа k и l тогда и только тогда будут отображаться в один и тот же элемент циклической группы B, если разность $k - l$ делится на n, т. е. если, как говорят, числа k и l *сравнимы между собой по модулю* n (обозначение: $k \equiv l (\mathrm{mod}\, n)$). В аддитивной группе целых чисел этому гомоморфному отображению соответствует разложение на классы по подгруппе чисел, кратных числу n; это будут *классы чисел, сравнимых между собою по модулю* n [1]). Используя результат § 6 о подгруппах циклических групп и заставляя n пробегать все натуральные числа, мы получим, что *все циклические группы и только они являются фактор-группами бесконечной циклической группы* (т. е. аддитивной группы целых чисел), причем фактор-группы по различным подгруппам этой группы [2]) будут неизоморфными.

Если же $A = \{a\}$ — конечная циклическая группа порядка s и t — делитель числа s, т. е. $s = tq$, то подгруппа $\{a^t\}$ этой группы имеет порядок q, а поэтому фактор-группа по ней будет циклической порядка t. Так как, с другой стороны, порядок фактор-группы конечной группы совпадает с индексом соответствующего нормального делителя, т. е. всегда является делителем порядка группы, то мы получаем, что *фактор-группами конечной циклической группы порядка* s *являются те и только те циклические группы, порядки которых делят* s.

Найдем теперь фактор-группы группы P типа p^∞. В § 7 было показано, что все истинные подгруппы этой группы исчерпываются следующими подгруппами, составляющими возрастающую последовательность:

$$E \subset \{a_1\} \subset \{a_2\} \subset \ldots \subset \{a_n\} \subset \ldots,$$

причем эти подгруппы имеют соответственно порядки $1, p, p^2, \ldots$ $\ldots, p^n, \ldots$. Рассмотрим фактор-группу группы P по подгруппе $\{a_n\}$.

[1]) См. в § 8 частный случай этого для $n = 4$ (пример 1).

[2]) Мы говорим о подгруппах вместо нормальных делителей, потому что рассматриваемая группа абелева.

Эта фактор-группа является объединением возрастающей последовательности фактор-групп $\{a^k\}/\{a_n\}$, $k = n+1, n+2, \ldots$, которые, как вытекает из сказанного выше, будут циклическими порядка p^{k-n}, $k = n+1, n+2, \ldots$. Фактор-группа $P/\{a_n\}$ сама оказалась, следовательно, группой типа p^∞. Мы видим, что *группа типа p^∞ изоморфна со всеми своими фактор-группами по истинным подгруппам*.

Пусть даны группы A и B. Группа G называется *расширением* группы A при помощи группы B, если в G можно найти нормальный делитель A', изоморфный A, фактор-группа по которому изоморфна B,

$$A' \simeq A, \quad G/A' \simeq B.$$

Заметим, что *заданием групп A и B расширение G не определяется однозначно*, как показывают следующие примеры.

1. В циклической группе $\{a\}$ 4-го порядка подгруппа $\{a^2\}$ будет циклической 2-го порядка, а фактор-группа по ней также будет циклической 2-го порядка. Если же мы возьмем нециклическую абелеву группу V 4-го порядка, содержащуюся, как указано в предыдущем параграфе, в знакопеременной группе A_4, то любая ее циклическая подгруппа имеет порядок 2, а фактор-группа группы V по этой подгруппе также будет циклической 2-го порядка. Перед нами, следовательно, два неизоморфных расширения циклической группы 2-го порядка при помощи этой же группы.

2. Циклическая группа 6-го порядка имеет одну-единственную циклическую подгруппу 3-го порядка и фактор-группа по ней является циклической группой 2-го порядка; но симметрическая группа 3-й степени S_3 имеет нормальный делитель A_3, также являющийся циклической группой 3-го порядка, причем фактор-группа S_3/A_3 снова будет циклической порядка 2.

Расширения групп будут подвергнуты детальному изучению в гл. 12.

Большую роль в дальнейшем будет играть следующая теорема.

Теорема об изоморфизме. *Если A и B — подгруппы группы G, причем A является нормальным делителем в подгруппе $\{A, B\}$, то пересечение $A \cap B$ будет нормальным делителем в B и*

$$\{A, B\}/A \simeq B/(A \cap B).$$

Действительно, из нормальности A в $\{A, B\}$ следует $\{A, B\} = AB$. Всякий смежный класс этого произведения по подгруппе A содержит, следовательно, элементы из B, т. е. имеет с B непустое пересечение. Отсюда следует, что при естественном гомоморфном отображении группы $\{A, B\}$ на фактор-группу $\{A, B\}/A$ подгруппа B будет гомоморфно отображаться на всю эту фактор-группу. Поэтому, ввиду теоремы о гомоморфизмах, фактор-группа $\{A, B\}/A$ будет изоморфной фактор-группе группы B по нормальному делителю, составленному из всех элементов этой группы, отображающихся в единицу. Это будут,

однако, элементы из пересечения $A \cap B$ и только они. Теорема доказана.

Еще раз подчеркнем, что в теореме об изоморфизме содержится такое утверждение, легко доказываемое, впрочем, и непосредственно:

Пересечение нормального делителя и подгруппы является нормальным делителем в этой подгруппе.

Воспользуемся этим утверждением для доказательства следующей теоремы:

Сумма возрастающей последовательности простых групп сама является простой группой.

В самом деле, если группа G является суммой возрастающей последовательности своих истинных подгрупп

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots,$$

являющихся простыми группами, и если H есть истинный нормальный делитель группы G, отличный от E, то существует такой индекс k, что пересечение $H \cap U_k$ отлично как от E, так и от самой подгруппы U_k. Это пересечение будет, однако, как сказано выше, нормальным делителем группы U_k, что противоречит ее простоте.

Теорема об изоморфизме является частным случаем следующей теоремы, называемой леммой Цасенхауза [1]:

Если в группе G даны подгруппы A, A', B и B', причем A' нормальный делитель в A, B' нормальный делитель в B, то $A'(A \cap B')$ будет нормальным делителем в $A'(A \cap B)$, $B'(B \cap A')$ — нормальным делителем в $B'(B \cap A)$, а соответствующие фактор-группы изоморфны,

$$A'(A \cap B)/A'(A \cap B') \simeq B'(B \cap A)/B'(B \cap A').$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$C = A \cap B, \quad D = (A \cap B')(B \cap A').$$

Ясно, что $D \subseteq C$. Так как, далее, B' — нормальный делитель в B, а C — подгруппа в B, то

$$C \cap B' = A \cap B \cap B' = A \cap B'$$

будет нормальным делителем в C. Это же верно, ввиду симметрии предположений об A и B, и для пересечения $B \cap A'$, а поэтому и для D, так как произведение нормальных делителей само является нормальным делителем. Можно говорить, следовательно, о фактор-группе C по D; обозначим ее через H,

$$H = C/D.$$

С другой стороны, A' — нормальный делитель в A, поэтому произведение $A'(A \cap B) = A'C$ является подгруппой. Произвольный элемент этого произведения имеет вид $a'c$, где $a' \in A'$, $c \in C$. Поставим ему

в соответствие смежный класс (т. е. элемент группы H) Dc. Если элемент $a'c$ обладает другой записью этого же вида,

$$a'c = a'_1 c_1,$$

то

$$a'^{-1}_1 a' = c_1 c^{-1} \in (A' \cap C) \subseteq (A' \cap B) \subseteq D,$$

а поэтому

$$c_1 = (a'^{-1}_1 a')c \in Dc.$$

Мы получаем однозначное отображение группы $A'C$ в группу H, даже на всю группу H, так как всякий элемент c из C отображается при этом в свой смежный класс Dc. Это отображение гомоморфно: так как A' — нормальный делитель в $A'C$, то

$$a'_1 c_1 \cdot a'_2 c_2 = a'_3 (c_1 c_2), \quad \text{где} \quad a'_3 \in A'.$$

К ядру этого гомоморфизма заведомо принадлежит подгруппа $A'(A \cap B')$ — мы знаем, что $A \cap B' \subseteq D$. С другой стороны, если элемент $a'c$ отображается при нашем гомоморфизме в D, то $c \in D$, т. е. $c = uv$, где $u \in (B \cap A')$, $v \in (A \cap B')$, но тогда

$$a'c = (a'u)v = a'_1 v \in A'(A \cap B').$$

Ядро рассматриваемого гомоморфизма совпадает, следовательно, с подгруппой $A'(A \cap B')$. Это, по теореме о гомоморфизмах, приводит к изоморфизму

$$A'(A \cap B)/A'(A \cap B') \simeq H.$$

По соображениям симметрии имеет место и изоморфизм

$$B'(B \cap A)/B'(B \cap A') \simeq H.$$

Отсюда вытекают все утверждения теоремы.

Теорема об изоморфизме получается из леммы Цасенхауза при $A \supseteq B$, $B' = E$.

Для случая подгрупп A и B группы G, ни одна из которых не предполагается инвариантной в $\{A, B\}$, теорема об изоморфизме могла бы превратиться в некоторое высказывание об индексах A в $\{A, B\}$ и $A \cap B$ в B. В общем случае можно лишь утверждать, что *первый из этих индексов не меньше второго*. Действительно, повторяя рассуждения, применявшиеся при доказательстве теоремы об изоморфизме, мы получим, что всякий правосторонний смежный класс подгруппы B по подгруппе $A \cap B$ является пересечением с B некоторого правостороннего смежного класса $\{A, B\}$ по A. Возможно, однако, что некоторые правосторонние смежные классы $\{A, B\}$ по A имеют с B пустое пересечение, как показывает пример симметрической группы 3-й степени, если в качестве A и B берутся две из ее циклических подгрупп второго порядка. Пользуясь доказанным в § 8 предложением, что $\{A, B\} = AB$ тогда и только тогда, если A и B перестановочны,

нетрудно показать, что каждый смежный класс $\{A, B\}$ по A имеет с B непустое пересечение в том и только в том случае, если A и B перестановочны. Иными словами, предполагая индексы конечными, мы получаем теорему:

Индексы подгруппы A в подгруппе $\{A, B\}$ и пересечения $A \cap B$ в подгруппе B равны тогда и только тогда, если подгруппы A и B перестановочны.

§ 11. Классы сопряженных элементов и сопряженных подгрупп

Если M есть некоторое подмножество группы G, то множество всех элементов из G, перестановочных с M, составляет подгруппу группы G, называемую *нормализатором* множества M в группе G. Действительно, если $aM = Ma$ и $bM = Mb$, то

$$(ab)M = aMb = M(ab);$$

умножая, далее, обе стороны равенства $aM = Ma$ слева и справа на a^{-1}, мы получим

$$Ma^{-1} = a^{-1}M.$$

Это общее определение позволяет говорить, в частности, о нормализаторе подгруппы или отдельного элемента. Из перестановочности элемента с самим собою и из перестановочности подгруппы с каждым из своих элементов следует, что *нормализатор элемента a* (*нормализатор подгруппы A*) *содержит этот элемент a* (*содержит эту подгруппу*). Нормализатор подгруппы A является, очевидно, максимальной подгруппой группы G, в которой A будет нормальным делителем. Отсюда следует, что *нормализатор подгруппы A тогда и только тогда совпадает со всей группой G, если A есть нормальный делитель этой группы*. Возможен, с другой стороны, и такой случай, когда подгруппа совпадает со своим нормализатором; такова, например, циклическая подгруппа элемента (12) в симметрической группе 3-й степени.

Нормализатор элемента a в группе G содержится, очевидно, в нормализаторе циклической подгруппы $\{a\}$, но не обязательно с ним совпадает. Пример такого несовпадения дает хотя бы элемент (123) в симметрической группе 3-й степени. Во всяком случае, нормализатор элемента a содержит подгруппу $\{a\}$ в качестве своего нормального делителя.

Понятие нормализатора будет играть вспомогательную роль при установлении некоторых очень важных свойств сопряженных элементов и сопряженных подгрупп, которым посвящен настоящий параграф.

Если элемент b группы G сопряжен с элементом a, т. е. $b = g^{-1}ag$, то $a = gbg^{-1}$, т. е. a получается из b трансформированием элементом g^{-1}. Всякий элемент a сопряжен с самим собою, так как $a = 1^{-1}a1$. Наконец, если $b = g_1^{-1}ag_1$, $c = g_2^{-1}bg_2$, то

$$c = (g_1g_2)^{-1}a(g_1g_2),$$

т. е. свойство сопряженности элементов транзитивно. Отсюда следует, что всякая группа G распадается на непересекающиеся множества сопряженных между собою элементов или, как говорят, на *классы сопряженных элементов*. Все элементы, входящие в один класс сопряженных элементов, имеют, очевидно, один и тот же порядок.

Одно из приведенных в § 9 определений нормального делителя может быть теперь высказано следующим образом: нормальный делитель есть подгруппа группы G, содержащая вместе со всяким своим элементом и весь класс сопряженных с ним элементов и поэтому состоящая из нескольких полных классов сопряженных элементов группы G. Заметим, что всякое подмножество группы, состоящее из нескольких полных классов сопряженных элементов этой группы, называется *инвариантным множеством*.

Сейчас будут указаны некоторые основные свойства классов сопряженных элементов.

Число элементов, сопряженных с элементом a в группе G, равно индексу нормализатора N элемента a в этой группе.

Действительно, если $b = g^{-1}ag$, то при всяком n из N будет $(ng)^{-1}a(ng) = b$. Если, с другой стороны, $g_1^{-1}ag_1 = b$, то $(gg_1^{-1})^{-1}a(gg_1^{-1}) = a$, т. е. $gg_1^{-1} \in N$, а поэтому элементы g и g_1 лежат в одном правостороннем смежном классе по N. Между правосторонними смежными классами группы G по подгруппе N и элементами, сопряженными с a, существует, следовательно, взаимно однозначное соответствие.

Отсюда следует, в частности, что *элемент a группы G тогда и только тогда лежит в конечном классе сопряженных элементов, если нормализатор этого элемента имеет в G конечный индекс*. Так как индекс подгруппы в конечной группе является делителем порядка группы (теорема Лагранжа, см. § 8), то из доказанной выше теоремы следует также, что *число элементов в классе сопряженных элементов конечной группы является делителем порядка этой группы*.

Следующее предложение есть частный случай теоремы, доказанной в начале § 9.

Подгруппа, порожденная некоторым классом сопряженных элементов группы G или вообще некоторым инвариантным множеством A, является нормальным делителем в G.

Отсюда без труда следует, что нормальный делитель, порожденный в группе G некоторым множеством M, является подгруппой, порожденной в G множеством $\overline{M}$, состоящим из всех элементов, сопряженных с элементами из M.

Произведение K_1K_2 двух классов сопряженных элементов K_1 и K_2 группы G состоит из нескольких классов сопряженных элементов, т. е. является инвариантным множеством. Действительно, если $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2$, то

$$g^{-1}(a_1a_2)g = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g),$$

т. е. элемент, сопряженный с элементом из K_1K_2, сам содержится в этом произведении.

Заметим, наконец, что *если K есть класс сопряженных элементов группы G, то K^{-1}*, т. е. совокупность элементов, обратных к элементам из K, *также будет классом сопряженных элементов* и что вообще *множество s-х степеней всех элементов из K будет при любом s классом сопряженных элементов группы G.* Действительно, если $a_2 = g^{-1}a_1g$, то $a_2^s = g^{-1}a_1^sg$, а из $b = g_1^{-1}a_1^sg_1$ следует $b = (g_1^{-1}a_1g_1)^s$, то есть b есть s-я степень элемента, сопряженного с элементом a_1.

Во всякой группе G элемент 1 составляет отдельный класс сопряженных элементов. Группа G может обладать и другими элементами, составляющими отдельные классы сопряженных элементов; это будут, очевидно, элементы, перестановочные со всеми элементами группы, или, как говорят, *инвариантные элементы* группы. Инвариантный элемент можно определить также как элемент, нормализатор которого совпадает со всей группой.

Множество Z всех инвариантных элементов группы G будет, как легко видеть, подгруппой группы G. Эта подгруппа, называемая *центром* группы G, будет даже нормальным делителем в G, так как каждый ее элемент составляет отдельный полный класс сопряженных элементов группы G. Нормальным делителем в G будет также всякая подгруппа центра. Абелевы группы и только они совпадают со своим центром. Бывают, с другой стороны, и такие группы, центр которых состоит лишь из 1. Такие группы носят не вполне точное, но очень удобное название *групп без центра*. К ним принадлежат, например, симметрические группы S_n при $n \geqslant 3$ и, конечно, все некоммутативные простые группы.

Известная теорема из курса высшей алгебры показывает, что центр группы невырожденных матриц n-го порядка с элементами из некоторого поля состоит из всех *скалярных* матриц n-го порядка, т. е. из матриц, все элементы которых, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, а элементы главной диагонали равны между собою.

Заметим, что фактор-группа группы G по ее центру не обязана быть группой без центра. Так, центр группы кватернионов (см. § 9) есть циклическая группа второго порядка, а фактор-группа по ней будет даже абелевой. Необходимо отметить, однако, что *фактор-группа*

некоммутативной группы по ее центру не может быть циклической. Действительно, если фактор-группа G/Z циклическая, то в смежном классе по Z, являющемся образующим элементом этой циклической группы, выбираем некоторый элемент a_0. Подгруппа, порожденная этим элементом вместе с элементами из Z, совпадает со всей группой G. Из перестановочности между собой всех названных элементов следует, однако, коммутативность самой группы G.

Подобно тому, как группа распадается на классы сопряженных элементов, так множество всех подгрупп группы G распадается на непересекающиеся *классы сопряженных подгрупп*. Заметим, что *если K есть класс сопряженных элементов группы G, то множество нормализаторов всех элементов из K будет классом сопряженных подгрупп* [1]).

Действительно, если a и b — элементы из K и если N_a и N_b — их нормализаторы в G, то из $b = g^{-1}ag$ и $x \in N_a$, т. е. $ax = ax$, следует

$$b(g^{-1}xg) = g^{-1}(ax)g = (g^{-1}xg)b,$$

т. е.

$$g^{-1}N_a g \subseteq N_b. \tag{1}$$

Но из $a = gbg^{-1}$ этим же путем получаем $gN_b g^{-1} \subseteq N_a$, т. е.

$$N_b \subseteq g^{-1}N_a g. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$N_b = g^{-1}N_a g.$$

Если теперь некоторая подгруппа F сопряжена с N_a,

$$F = g_1^{-1}N_a g_1,$$

то F будет нормализатором для элемента $g_1^{-1}ag_1$. Теорема доказана.

Переходим к установлению некоторых основных свойств классов сопряженных подгрупп.

Число различных подгрупп, сопряженных с подгруппой A группы G (т. е. мощность множества таких подгрупп), равно индексу нормализатора N подгруппы A. Действительно, как и в случае сопряженности элементов, трансформирование подгруппы A двумя различными элементами из G тогда и только тогда приводит к одной и той же сопряженной с A подгруппе, если эти элементы лежат в одном правостороннем смежном классе по N.

Отсюда следует, в частности, что нормализаторы всех подгрупп, сопряженных с A, имеют в G один и тот же индекс. Так как, далее, если $B = g^{-1}Ag$, то нормализатором подгруппы B будет подгруппа $g^{-1}Ng$, и так как отображение $x \to g^{-1}xg$, $x \in N$, является

[1]) Нормализаторы двух различных элементов из K могут, конечно, оказаться совпадающими.

изоморфным отображением N на $g^{-1}Ng$, при котором A отображается на B, то индексы A в N и B в $g^{-1}Ng$ равны. Вместе с предшествующим замечанием это приводит к утверждению, что индексы подгрупп A и B в группе G также равны между собой, т. е. *сопряженные подгруппы обладают одинаковыми индексами в самой группе*. Если эти индексы конечны, то никакая из двух различных, но сопряженных между собою подгрупп не может содержать целиком другую. Это вполне возможно, однако, в общем случае, причем если $g^{-1}Ag$ отлично от подгруппы A и содержится в A, то $g^{-2}Ag^2$ будет истинной подгруппой в $g^{-1}Ag$, $g^{-3}Ag^3$ — истинной подгруппой в $g^{-2}Ag^2$ и т. д. С другой стороны, само A будет в этом случае истинной подгруппой в gAg^{-1}, последнее — истинной подгруппой в g^2Ag^{-2} и т. д.

Рассмотрим, например, группу G всех взаимно однозначных отображений на себя множества всех целых чисел (положительных и отрицательных). В этой группе берем множество M, состоящее из транспозиций

$$(12),\ (23),\ \ldots,\ (n,\ n+1),\ \ldots,\quad n>0,$$

и обозначаем через A порожденную этими транспозициями подгруппу. Если через g будет обозначено отображение, переводящее всякое k в $k+1$, т. е., при записи в циклах,

$$g=(\ldots,\ -k,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \ldots),$$

то

$$g^{-1}(n,\ n+1)g=(n+1,\ n+2),$$

откуда следует, что подгруппа A будет сопряжена в группе G со своей истинной подгруппой, порожденной всеми элементами множества M, кроме (12).

Пересечение всех подгрупп, составляющих класс сопряженных подгрупп в группе G, является нормальным делителем.

Действительно, трансформируя элементом g все подгруппы, составляющие заданный класс сопряженных подгрупп, мы трансформируем одновременно их пересечение D. Трансформирование класса сопряженных подгрупп лишь переставляет, однако, эти подгруппы между собой, т. е. при любом g из G подгруппа $g^{-1}Dg$ совпадает с подгруппой D, что доказывает теорему. Заметим, что это пересечение D может, конечно, оказаться единичной подгруппой E.

Доказанная теорема приводит к следующему важному результату.

Если группа G обладает подгруппой конечного индекса, то в ней есть и нормальный делитель конечного индекса.

Доказательство. Если подгруппа H имеет в G конечный индекс, то, как доказано выше, все подгруппы, сопряженные с H, также будут подгруппами конечного индекса. Из конечности индекса подгруппы H следует конечность индекса ее нормализатора, а поэтому и конечность числа сопряженных с нею подгрупп. Пересечение всех этих подгрупп будет, как доказано выше, нормальным делителем

группы G и, вместе с тем, оно имеет, ввиду теоремы Пуанкаре (см. § 8), конечный индекс в G.

Мы закончим настоящий параграф введением понятия, очень близкого к понятию нормализатора. Если M есть некоторое подмножество группы G, то множество всех элементов, перестановочных с каждым элементом из M, будет подгруппой группы G, называемой *централизатором* множества M в группе G. Централизатор отдельного элемента совпадает с его нормализатором, вообще же централизатор множества M содержится в нормализаторе этого множества. Централизатор подгруппы не обязан содержать, конечно, эту подгруппу. Централизатором множества всех элементов группы будет центр группы.

Централизатор множества M совпадает, очевидно, с пересечением нормализаторов всех элементов из M. Отсюда без труда следует, что *централизатор нормального делителя и вообще всякого инвариантного множества группы является нормальным делителем этой группы*. Действительно, нормализаторы всех элементов нормального делителя составляют несколько полных классов сопряженных подгрупп [1]), а поэтому пересечение этих нормализаторов должно быть само нормальным делителем. Применяя эту теорему к произвольной подгруппе и ее нормализатору, мы получаем, что *централизатор всякой подгруппы будет нормальным делителем в нормализаторе этой подгруппы*.

§ 11а. Группы подстановок

В § 5 уже было доказано, что всякая группа мощности $\mathfrak{m}$ изоморфна подгруппе группы $S_{\mathfrak{m}}$ всех взаимно однозначных отображений некоторого множества мощности $\mathfrak{m}$ на себя. Отсюда следует, что мы могли бы ограничиться при построении теории групп изучением подгрупп конечных симметрических групп и групп $S_{\mathfrak{m}}$ при бесконечных $\mathfrak{m}$. Это, однако, в большинстве случаев не только не облегчило бы исследований, но даже излишне усложнило бы их. Тем не менее подгруппы симметрических групп находят иногда такие приложения, при которых существенную роль играют свойства этих подгрупп, характеризующие их положение в симметрических группах и связанные с тем, что элементы этих подгрупп являются подстановками. Некоторые из этих свойств будут в самых общих чертах указаны в настоящем параграфе.

Пусть дано некоторое множество M. Назовем всякое взаимно однозначное отображение множества M на себя по аналогии с подстановками конечных множеств *подстановкой* в множестве M, а всякую подгруппу группы всех взаимно однозначных отображений M на себя *группой подстановок* над множеством M. Если множество M конечно

[1]) См. доказанную в этом параграфе теорему о связи между классами сопряженных элементов и сопряженных подгрупп.

и состоит из n элементов, то группы подстановок над M, иными словами, подгруппы симметрической группы n-й степени, будут называться группами подстановок *степени* n.

Если P есть группа подстановок над множеством M, то множество M следующим образом распадается на непересекающиеся классы — *системы транзитивности* группы P: элементы a и b из M тогда и только тогда будут отнесены в один класс, если в группе P содержится хотя бы одна подстановка, переводящая a в b; рефлексивность, симметричность и транзитивность этой связи между a и b непосредственно следуют из того, что P является группой. Каждый элемент множества M, остающийся на месте при всех подстановках из группы P, составляет, очевидно, отдельную систему транзитивности для P.

Группа подстановок P над множеством M называется *транзитивной* над M, если P обладает одной-единственной системой транзитивности, совпадающей, очевидно, с M, т. е. если всякий элемент множества M может быть переведен некоторой подстановкой из группы P в любой другой элемент этого множества. Группа, обладающая более чем одной системой транзитивности, называется *интранзитивной*.

Пусть группа P транзитивна над M, и пусть P_a есть множество всех подстановок из P, оставляющих на месте элемент a из M. P_a будет истинной подгруппой группы P. Если подстановка σ из P переводит элемент a в элемент b, то этим же свойством обладают все подстановки из правостороннего смежного класса $P_a\sigma$. Если, с другой стороны, подстановка τ из P также переводит a в b, то произведение $\sigma\tau^{-1}$ оставляет элемент a на месте, т. е. принадлежит к подгруппе P_a, а поэтому τ содержится в смежном классе $P_a\sigma$. Так как благодаря транзитивности группы P элемент a может быть переведен в любой другой элемент из M, то мы получаем взаимно однозначное соответствие между всеми элементами множества M и правосторонними смежными классами группы P по подгруппе P_a. Если множество M конечно, т. е. если группа P имеет конечную степень, то *индекс подгруппы P_a в P будет конечным и равным степени группы P*. Отсюда на основании теоремы Лагранжа мы получаем теорему:

Порядок транзитивной группы подстановок конечной степени делится на эту степень.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что если подстановка σ из P переводит элемент a в элемент b, то имеет место равенство

$$P_b = \sigma^{-1} P_a \sigma,$$

т. е., ввиду транзитивности группы P, подгруппы P_a для всех a из M будут между собою сопряженными. Они будут составлять даже полный класс сопряженных подгрупп в группе P.

Группа подстановок P над множеством M называется *k раз транзитивной* (k — некоторое натуральное число), если всякую упорядоченную систему из k элементов множества M можно некоторой

подстановкой из P перевести в любую другую упорядоченную систему из k элементов этого множества. Так, симметрическая группа степени n является n раз транзитивной. Знакопеременная группа степени n будет $n-2$ раза транзитивной. Действительно, существуют ровно две подстановки степени n, переводящие заданные $n-2$ символа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ соответственно в символы $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{n-2}}$; эти подстановки получаются одна из другой выполнением одной транспозиции, и поэтому одна из них является четной. Понятно, что k раз транзитивная группа является и l раз транзитивной для всех $l < k$.

Транзитивная группа подстановок P над множеством M называется *импримитивной*, если множество M можно так разложить на непересекающиеся истинные подмножества M_α, хотя бы одно из которых содержит не менее двух элементов (эти подмножества M_α называются *системами импримитивности* группы P), чтобы выполнялось следующее требование: если элемент a из любой системы импримитивности M_1 переводится подстановкой σ из P в элемент b, содержащийся в системе импримитивности M_2, то всякий элемент из M_1 переводится подстановкой a в некоторый элемент из M_2. Если такое разложение множества M невозможно, то группа P называется *примитивной*.

Если M_1 и M_2 — две произвольные системы из заданного разложения множества M в системы импримитивности группы P и если a_1 и a_2 элементы из этих систем, то, ввиду транзитивности группы, в P существует подстановка σ, переводящая a_1 в a_2 и поэтому отображающая M_1 на некоторое подмножество из M_2. На самом деле M_1 будет отображаться на все M_2, так как иначе при подстановке σ^{-1} система M_2 отображалась бы на множество, содержащее M_1 в качестве истинной части, а это привело бы нас в противоречие с определением систем импримитивности. Отсюда следует, в частности, что *все системы импримитивности M_α имеют одинаковую мощность*, т. е. в конечном случае состоят из одинакового числа элементов.

Мы видим, что всякая подстановка из группы P лишь переставляет системы импримитивности M_α, т. е. порождает некоторую подстановку в множестве этих систем. Все эти перестановки над множеством систем M_α составляют, очевидно, группу, изоморфную фактор-группе группы P по нормальному делителю, состоящему из всех тех подстановок из P, которые оставляют каждый элемент множества M внутри той системы M_α, в которой он содержится. Этот нормальный делитель может, конечно, оказаться состоящим из одного единичного элемента.

Все разложения множества M в системы импримитивности транзитивной группы P можно получить следующим образом: пусть P_a, как выше, будет подгруппа группы P, составленная из подстановок, оставляющих на месте элемент a из M. Если Q есть некоторая истинная подгруппа группы P, содержащая P_a в качестве истинной подгруппы,

$$P_a \subset U \subset P,$$

то разлагаем группу P на правосторонние смежные классы по подгруппе Q и собираем вместе элементы множества M, в которые элемент a переводится подстановками, входящими в один правосторонний смежный класс группы P по Q. Это дает разложение множества M на непересекающиеся истинные (ввиду $Q \neq P$) подмножества, каждое из которых содержит (ввиду $P_a \neq Q$) не менее двух элементов. Легко проверить, что это есть разложение множества M в системы импримитивности группы P: два правосторонних смежных класса группы P по P_a, лежащие в одном правостороннем классе P по Q, остаются при умножении справа на некоторый элемент из P снова в одном правостороннем классе по Q.

Таким образом, всякая подгруппа, промежуточная между P и P_a, порождает некоторое разложение множества M на системы импримитивности группы P. Этим путем могут быть получены все такие разложения: если дано некоторое разложение множества M в системы импримитивности группы P и если элемент a лежит в системе M_1, то множество Q всех подстановок из P, оставляющих элемент a внутри системы M_1, будет подгруппой группы P, промежуточной между P и P_a и отличной от этих групп. Разложение множества M, соответствующее подгруппе Q, приводит к заданным системам импримитивности.

Группа P будет, следовательно, примитивной тогда и только тогда, если подгруппа P_a является ее максимальной истинной подгруппой. В этом случае множество M допускает лишь тривиальные разложения на непересекающиеся подмножества, переставляющиеся при подстановках из P: разложение на отдельные элементы и разложение, имеющее само M в качестве единственного класса.

Заметим, что *k раз транзитивная группа не может быть при $k > 1$ импримитивной*. Действительно, допустив противное, мы найдем, что если элементы a и b лежат в одной системе импримитивности, а элемент c содержится в некоторой другой системе, то группа не может содержать подстановки, переводящей пару элементов a, b в пару a, c.

Истинное подмножество M_0 из M тогда и только тогда будет системой импримитивности для транзитивной группы P, если M_0 содержит не менее двух элементов и если всякая подстановка σ из P, оставляющая один символ из M_0 в этом подмножестве, отображает все подмножество M_0 на себя или в себя.

Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности разбиваем элементы из M на классы, относя в один класс символы a и b тогда и только тогда, если существует в P подстановка σ, переводящая оба эти символа в M_0. Рефлексивность этого разбиения множества M на классы следует из транзитивности группы P, симметричность очевидна. Транзитивность этого разбиения доказывается так: если символы a и b переводятся в M_0 подстановкой σ, символы b и c — подстановкой τ, то символ $b\sigma$, принадлежащий к M_0, остается при подстановке $\sigma^{-1}\tau$ в этом подмножестве. По определению M_0 символ $a\sigma$

также остается при подстановке $\sigma^{-1}\tau$ в M_0, т. е. $(a\sigma)\sigma^{-1}\tau = a\tau \in M_0$. Существует, следовательно, подстановка из P, одновременно переводящая символы a и c в M_0. Получено разбиение множества M на непересекающиеся классы, одним из которых будет M_0: если подстановка σ переводит a и b в M_0 и $a \in M_0$, то, так как

$$a = (a\sigma)\sigma^{-1} \in M_0,$$

по определению M_0 будет

$$(b\sigma)\sigma^{-1} \in M_0,$$

т. е. символ b содержится в M_0. Мы получаем искомое разложение множества M в системы импримитивности группы P.

Всякий отличный от E нормальный делитель примитивной группы подстановок транзитивен.

Действительно, пусть H есть интранзитивный нормальный делитель группы подстановок P над M, и пусть M_0 есть система транзитивности для H, содержащая не менее двух символов; M_0, по предположению, отлично от M. Если подстановка σ из P оставляет символ a из M_0 в множестве M_0, то для всякого τ из H подстановка $\sigma^{-1}\tau\sigma$, принадлежащая к H, переводит символ $a\sigma$ в символ $a\tau\sigma$, который, следовательно, также принадлежит к M_0. Для всякого символа b из M_0 существует такое τ_0 в H, что $b = a\tau_0$, поэтому $b\sigma$ содержится в M_0. Применяя доказанную выше теорему, получаем, что M_0 есть система импримитивности для группы P.

§ 11б. Основные понятия теории колец

Объектами изучения в основных алгебраических теориях являются, наряду с группами, также кольца. Теория колец, весьма богатая содержанием и уже выросшая в большую самостоятельную науку, не имеет прямого отношения к настоящей книге. Нам придется, однако, в некоторых местах книги пользоваться понятием кольца и понятиями, с ним связанными. Изложению этих понятий и их простейших свойств и посвящен настоящий параграф.

Пусть в абелевой группе R, записанной аддитивно, определена вторая алгебраическая операция — умножение. R будет называться *кольцом*, если это умножение *дистрибутивно* относительно сложения,

$$a(b+c) = ab + ac,$$
$$(b+c)a = ba + ca,$$

и *ассоциативным кольцом*, если дополнительно умножение ассоциативно. Если умножение в кольце R и коммутативно, то R называется *ассоциативно-коммутативным* или просто *коммутативным кольцом*. В дальнейшем коммутативность умножения в кольце не будет,

вообще говоря, предполагаться, хотя все кольца, с которыми нам придется встречаться, будут ассоциативными.

Абелева группа, с которой мы начинали определение кольца, называется *аддитивной группой* кольца, ее нулевой элемент 0 — *нулем* кольца.

Простейшим примером коммутативного кольца является *кольцо целых чисел* относительно операций сложения и умножения чисел. Это кольцо будет обозначаться в дальнейшем символом C. Примером некоммутативного, но ассоциативного кольца может служить *кольцо матриц*: если мы возьмем множество всех квадратных матриц данного порядка n с целочисленными элементами (или, например, с элементами, являющимися действительными числами) и сохраним обычное определение умножения матриц, а суммой двух матриц назовем матрицу, элементы которой получаются сложением соответственных элементов заданных матриц, то получится, как легко проверить, кольцо.

Кольца R_1 и R_2 называются *изоморфными*, если существует такое изоморфное отображение аддитивной группы первого кольца на аддитивную группу второго, при котором произведение двух элементов из R_1 переходит в произведение соответственных элементов из R_2. В общей теории колец изоморфные кольца не считаются различными.

Из определения кольца следуют равенства

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

где a есть любой элемент из данного кольца. В самом деле, $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, откуда ввиду однозначности вычитания в аддитивной группе кольца $a \cdot 0 = 0$.

Если, однако, произведение двух элементов кольца равно нулю, $ab = 0$, то нельзя, вообще говоря, утверждать, что один из множителей равен нулю. Так, в кольце матриц элементы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

отличны от нуля, но их произведение равно нулю. Отличные от нуля элементы кольца, произведение которых равно нулю, называются *делителями нуля*, а само кольцо — при наличии среди его элементов делителей нуля — *кольцом с делителями нуля*. Примеры коммутативных колец с делителями нуля будут даны ниже.

Элемент e кольца R называется *единицей* этого кольца, если он при любом a из R удовлетворяет условиям

$$ae = ea = a.$$

Пример кольца четных чисел показывает, что не всякое кольцо обладает единицей.

Коммутативное кольцо с единицей называется *полем*, если в нем для всякого отличного от нуля элемента a существует *обратный элемент* a^{-1}, удовлетворяющий условию

$$aa^{-1} = e.$$

Поле не имеет делителей нуля, так как из $ab = 0$ и $b \neq 0$ следует после умножения на b^{-1}, что $a = 0$. Мы получаем, что все отличные от нуля элементы поля составляют по умножению абелеву группу — *мультипликативную группу поля*. Примерами полей являются поле рациональных, поле действительных и поле комплексных чисел.

Подмножество R' кольца R называется *подкольцом* в R, если оно само является кольцом относительно операций, заданных в кольце R. Аддитивная группа подкольца R' будет, очевидно, подгруппой аддитивной группы кольца R.

Подкольцо A кольца R называется *левосторонним идеалом* в R, если оно выдерживает умножение слева на элементы из R, т. е. если при любых a из A и r из R произведение ra лежит в A. Аналогично определяются *правосторонние* и *двусторонние идеалы*. В случае коммутативных колец можно говорить, очевидно, просто об идеалах. Двусторонними идеалами всякого кольца являются как само это кольцо, так и *нулевой идеал*, состоящий лишь из одного нуля.

Пересечение любого множества левосторонних (или правосторонних, или двусторонних) идеалов кольца R само является левосторонним (соответственно правосторонним или двусторонним) идеалом этого кольца. Пересечение двух идеалов A и B обозначается через $A \cap B$.

Пусть в кольце R даны левосторонние идеалы A и B. Рассмотрим сумму аддитивных групп этих двух идеалов. Эта сумма состоит из элементов вида $a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Если r — любой элемент из R, то

$$r(a + b) = ra + rb,$$

а так как $ra \in A$, $rb \in B$, то $r(a + b)$ входит в рассматриваемую сумму. Это показывает, что сумма идеалов A и B сама будет левосторонним идеалом в R. Эта сумма идеалов будет обозначаться через (A, B). Аналогичным образом определяется сумма правосторонних (или двусторонних) идеалов.

Если дан двусторонний идеал D кольца R, то в фактор-группе R/D аддитивной группы кольца R по подгруппе D можно следующим образом определить умножение: произведением смежных классов $a + D$ и $b + D$ считаем смежный класс $ab + D$. Это произведение не зависит от выбора элементов a и b в их смежных классах: если

$$a' = a + d_1, \quad b' = b + d_2, \quad d_1, d_2 \in D,$$

то

$$a'b' = ab + (ad_2 + d_1b + d_1d_2),$$

причем выражение в скобках принадлежит к идеалу D. Легко проверить, что фактор-группа R/D при таком определении умножения оказывается кольцом. Это кольцо называется *фактор-кольцом* кольца R по идеалу D.

Так, в кольце целых чисел C множество чисел, делящихся на n, будет идеалом. Действительно, разность чисел, делящихся на n, а также произведение числа, делящегося на n, на любое целое число снова делятся на n. Фактор-кольцо кольца C по этому идеалу будет обозначаться через C_n. Это кольцо является конечным; его аддитивная группа циклическая порядка n. Если n — число составное, то кольцо C_n обладает делителями нуля. Действительно, если $n = pq$, то классы, порожденные числами p и q, отличны от нулевого, но их произведение равно нулевому классу, т. е. идеалу, порожденному числом n. Если же число n простое, то, как легко проверить, кольцо C_n не только не имеет делителей нуля, но даже и будет полем.

Некоторые сведения из теории колец, относящиеся к кольцам главных идеалов, будут дополнительно даны в § 22а. При этом, например, левосторонний идеал A кольца R называется *главным*, если в A можно найти такой элемент a, что A совпадает с пересечением всех левосторонних идеалов кольца R, содержащих элемент a.

Глава четвертая

ЭНДОМОРФИЗМЫ И АВТОМОРФИЗМЫ. ГРУППЫ С ОПЕРАТОРАМИ

§ 12. Эндоморфизмы и автоморфизмы

Всякое гомоморфное отображение группы G в себя, т. е. на некоторую свою подгруппу, называется *эндоморфизмом* этой группы. К числу эндоморфизмов группы принадлежат ее *автоморфизмы*, т. е. изоморфные отображения на себя. Тривиальным примером автоморфизма будет тождественное отображение группы на себя, так называемый *тождественный автоморфизм*, при котором каждый элемент группы остается на месте. Отображение аддитивной группы целых чисел на себя, переводящее число n в число $-n$, дает пример нетождественного автоморфизма.

Всякая группа обладает *нулевым эндоморфизмом*, отображающим всякий элемент группы в ее единицу. Среди других эндоморфизмов группы могут быть и такие, которые отображают группу на себя, хотя не являются автоморфизмами. Это будет иметь место для групп, изоморфных с одной из своих истинных фактор-групп, — существование таких групп показано в § 10, — и, следовательно, бесконечных. Эндоморфизмом группы будет также всякий изоморфизм между группой и ее подгруппой; примеры таких эндоморфизмов, не являющихся автоморфизмами, можно найти в аддитивной группе целых чисел.

Всякая подгруппа H группы G испытывает при эндоморфизме этой группы гомоморфное, а при автоморфизме — даже изоморфное отображение. Отсюда вытекает, что образом этой подгруппы при эндоморфизме (в частности, при автоморфизме) χ будет также подгруппа этой группы, которую мы условимся обозначать через $H\chi$. Образом самой группы G при эндоморфизме χ будет, следовательно, подгруппа $G\chi$.

Если группа G задана системой образующих $M = (a_\alpha)$, то всякий эндоморфизм χ этой группы вполне определяется указанием образов $a_\alpha\chi$ всех образующих элементов. Если, в частности, χ — автоморфизм группы G, то множество образов всех элементов из M при автоморфизме χ также будет системой образующих для G.

Если в группе G выбран некоторый элемент a, то отображение, переводящее всякий элемент x этой группы в элемент $a^{-1}xa$, т. е. трансформирование всей группы элементом a, будет автоморфизмом

группы G. Действительно, из $a^{-1}xa = a^{-1}ya$ следует $x = y$, т. е. отображение взаимно однозначно. Равенство

$$x = a^{-1}(axa^{-1})a$$

показывает, что при этом отображении всякий элемент группы будет образом некоторого элемента. Наконец, из

$$a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = a^{-1}(xy)a$$

следует изоморфизм рассматриваемого отображения. Такой автоморфизм группы G называется ее *внутренним автоморфизмом*. Все автоморфизмы группы, не являющиеся внутренними, носят название *внешних*. Тождественный автоморфизм принадлежит к внутренним, — можно считать, что он получается трансформированием группы единичным элементом. Для случая абелевой группы это будет единственный внутренний автоморфизм. В общем случае внутренний автоморфизм, порожденный элементом a, тогда и только тогда совпадает с тождественным, если элемент a принадлежит к центру группы, так как равенства $a^{-1}xa = x$ для всех x из G равносильны с перестановочностью элемента a со всеми элементами группы.

При внутреннем автоморфизме группы всякий класс сопряженных элементов отображается на себя. Существуют, однако, группы, даже конечные, обладающие внешними автоморфизмами с этим же свойством.

Циклические группы 1-го и 2-го порядков обладают лишь одним автоморфизмом, а именно тождественным. *Эти группы являются, однако, единственными, не имеющими иных автоморфизмов, кроме тождественного*. В самом деле, всякая некоммутативная группа непременно обладает нетождественными внутренними автоморфизмами. Если, далее, группа G абелева, причем не все ее элементы, отличные от единицы, имеют порядок 2, то нетождественным автоморфизмом будет отображение, переводящее всякий элемент a этой группы в обратный ему элемент a^{-1}, так как благодаря коммутативности операции справедливо равенство

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

Наконец, существование нетождественных автоморфизмов у нециклических абелевых групп с элементами лишь 2-го порядка вытекает из полного описания строения этих групп, которое будет дано в § 24.

Группы автоморфизмов. Эндоморфизмы группы G являются некоторыми отображениями этой группы в себя. Можно говорить, следовательно, об *умножении* эндоморфизмов в смысле их последовательного выполнения: если даны эндоморфизмы χ и η группы G, то их *произведением* $\chi\eta$ будет такое отображение, что для всякого элемента a из G

$$a(\chi\eta) = (a\chi)\eta.$$

Произведение эндоморфизмов само является эндоморфизмом. Действительно,

$$(ab)(\chi\eta) = [(ab)\chi]\eta = (a\chi \cdot b\chi)\eta = (a\chi)\eta \cdot (b\chi)\eta = a(\chi\eta) \cdot b(\chi\eta).$$

Произведение автоморфизмов будет при этом, очевидно, само автоморфизмом.

Ассоциативность умножения эндоморфизмов вытекает из результатов § 1. Роль единицы играет введенный выше тождественный автоморфизм. Не следует думать, однако, что эндоморфизмы группы G сами составляют группу относительно таким образом определенного умножения, — неоднозначность прообраза при гомоморфном отображении не позволяет определить для каждого эндоморфизма ему обратный. *Обратные отображения существуют, понятно, лишь для автоморфизмов*, причем они также будут автоморфизмами.

Мы видим, что множество Φ всех автоморфизмов группы G само является группой. Эта *группа автоморфизмов* группы G будет подгруппой в группе $S(G)$ всех взаимно однозначных отображений группы G на себя.

Внутренние автоморфизмы группы G составляют подгруппу в группе всех автоморфизмов, так как последовательное трансформирование группы G элементами a и b равносильно трансформированию элементом ab. Мы получим, вместе с тем, гомоморфное отображение группы G на группу Φ' ее внутренних автоморфизмов, если всякому элементу группы G поставим в соответствие порожденный этим элементом внутренний автоморфизм. Как уже было отмечено выше, в единицу группы Φ' отобразятся при этом элементы центра Z группы G и только они, т. е. *группа внутренних автоморфизмов группы G изоморфна фактор-группе группы G по ее центру*,

$$\Phi' \simeq G/Z.$$

Отсюда следует, в частности, что *элементы a и b группы G тогда и только тогда порождают один и тот же внутренний автоморфизм, если они содержатся в одном смежном классе по центру группы.*

Группа внутренних автоморфизмов является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов. Пусть, действительно, даны автоморфизм φ группы G и внутренний автоморфизм α, порожденный элементом a. Тогда для всякого элемента x из G будет

$$x(\varphi^{-1}\alpha\varphi) = [a^{-1}(x\varphi^{-1})a]\varphi = (a^{-1})\varphi \cdot (x\varphi^{-1})\varphi \cdot a\varphi = (a\varphi)^{-1}x(a\varphi),$$

т. е. автоморфизм $\varphi^{-1}\alpha\varphi$ сам является внутренним и порождается элементом $a\varphi$.

Разыскание группы всех автоморфизмов заданной группы G представляет обычно большие трудности. В большинстве случаев свойства самой группы G не переносятся на ее группу автоморфизмов. Так, *группа автоморфизмов абелевой группы может оказаться*

некоммутативной, — например, группой автоморфизмов нециклической группы 4-го порядка, с которой мы встретились в § 9, будет симметрическая группа 3-й степени. Существуют, с другой стороны, *некоммутативные группы с абелевыми группами автоморфизмов. Группа автоморфизмов некоммутативной группы G не может быть, однако, циклической*, так как уже группа внутренних автоморфизмов, будучи изоморфной фактор-группе группы G по центру, не будет циклической (см. § 11), тогда как подгруппы циклических групп всегда циклические (см. § 6).

Можно утверждать, понятно, что *группа автоморфизмов конечной группы порядка n сама будет конечной*. Она будет подгруппой симметрической группы n-й степени и поэтому ее порядок будет делителем числа $n!$, даже делителем числа $(n-1)!$, так как при всех автоморфизмах единичный элемент группы остается на месте. Более точные границы для порядка группы автоморфизмов конечной группы можно найти в работах Биркгофа и Холла [1] и Ляпина [1].

Группа автоморфизмов бесконечной группы также может оказаться конечной, — в бесконечной циклической группе можно лишь двумя способами выбрать образующий элемент, а так как свойство элемента циклической группы быть образующим сохраняется при автоморфизмах, то группа автоморфизмов бесконечной циклической группы будет конечной 2-го порядка. Группа автоморфизмов мультипликативной группы положительных рациональных чисел имеет уже мощность континуума — любое взаимно однозначное отображение множества всех простых чисел на себя приводит к некоторому автоморфизму этой группы.

Группы автоморфизмов неизоморфных групп могут быть изоморфными. Так, выше уже указано, что группа автоморфизмов бесконечной циклической группы является циклической 2-го порядка. Но такова же, как легко видеть, и группа автоморфизмов циклической группы 3-го порядка. Существуют, с другой стороны, группы, не являющиеся группами автоморфизмов ни для каких групп. Таковы, например, *все конечные циклические группы нечетных порядков*. Они не могут быть, как уже сказано выше, группами автоморфизмов для некоммутативных групп, у абелевых же групп, отличных от циклической группы 2-го порядка, их группы автоморфизмов непременно обладают элементами 2-го порядка и поэтому, если они конечны, имеют четный порядок.

К числу свойств группы, сохраняющихся и для ее группы автоморфизмов, принадлежит отсутствие центра:

Если группа G есть группа без центра, то ее группа автоморфизмов Φ также не имеет центра.

Действительно, пусть φ есть автоморфизм группы G, отличный от тождественного, и пусть a есть такой элемент из G, что $a\varphi = a' \neq a$. Если бы автоморфизм φ принадлежал к центру группы Φ, то он был бы перестановочным с внутренним автоморфизмом, производимым

в группе G элементом a, т. е. для любого элемента g из G было бы $a^{-1}(g\varphi)a = (a^{-1}ga)\varphi = a'^{-1}(g\varphi)a'$. Так как элемент $g\varphi$ вместе с g пробегает всю группу G, то мы получаем, что элементы a и a' производят в группе G один и тот же внутренний автоморфизм, что противоречит отсутствию центра в группе G. [См. Д.3.1 и § Д.22.]

§ 13. Голоморф. Совершенные группы

Трансформирование группы G ее элементом a превращает всякую подгруппу H этой группы в сопряженную с нею подгруппу $a^{-1}Ha$ (см. § 9) и, следовательно, отображает всякий нормальный делитель на себя. Эту инвариантность нормального делителя относительно всех внутренних автоморфизмов группы можно было бы принять в качестве еще одного определения нормального делителя. Отображение на себя, которое испытывает нормальный делитель H группы G при трансформировании элементом a этой группы, будет автоморфизмом, но уже, вообще говоря, внешним. Иными словами, если одна группа является нормальным делителем другой, то внутренние автоморфизмы большей группы порождают некоторые автоморфизмы в меньшей группе. Возникает вопрос, можно ли включить любую данную группу G в качестве нормального делителя в некоторую другую группу так, чтобы все автоморфизмы группы G были следствиями внутренних автоморфизмов этой большей группы? Утвердительный ответ на этот вопрос достигается следующим путем.

В § 5 было доказано, что мы получаем изоморфное отображение группы G в группу $S(G)$ всех взаимно однозначных отображений группы G на себя, если каждому элементу a этой группы поставим в соответствие отображение, переводящее всякий элемент x группы G в элемент xa. Подгруппа $\overline{G}$ группы $S(G)$, на которую группа G этим путем изоморфно отобразится, может считаться тождественной с самой группой G. Необходимо, однако, различать элементы группы G как переставляемые символы и как элементы из $S(G)$; мы условимся поэтому обозначать элемент из $\overline{G}$, соответствующий элементу a группы G, через $\overline{a}$.

Нормализатор Γ подгруппы $\overline{G}$ в группе $S(G)$ называется *голоморфом* группы G. Из определения нормализатора следует, что группа Γ содержит $\overline{G}$ в качестве нормального делителя. Мы хотим теперь показать, что все автоморфизмы группы $\overline{G}$ являются следствиями внутренних автоморфизмов группы Γ.

Мы знаем, что группа Φ автоморфизмов группы G является подгруппой группы $S(G)$. Мы докажем сейчас, что *группа* Φ *содержится даже в* Γ, т. е. что всякий автоморфизм φ, рассматриваемый как элемент группы $S(G)$, перестановочен с подгруппой $\overline{G}$. Пусть $\overline{a}$ есть произвольный элемент из $\overline{G}$; посмотрим, какое отображение группы G дает произведение $\varphi^{-1}\overline{a}\varphi$. При автоморфизме φ^{-1} элемент x из G

переходит в $x\varphi^{-1}$, отображение $\overline{a}$ превращает этот элемент в произведение $x\varphi^{-1}\cdot a$, а автоморфизм φ дает

$$(x\varphi^{-1}\cdot a)\varphi = (x\varphi^{-1})\varphi\cdot a\varphi = x\cdot a\varphi.$$

Мы видим, что произведение $\varphi^{-1}\overline{a}\varphi$ совпадает с элементом $\overline{a\varphi}$ подгруппы $\overline{G}$; это доказывает, что автоморфизм φ принадлежит к голоморфу Γ.

Одновременно мы получаем, заставляя $\overline{a}$ пробегать все элементы подгруппы $\overline{G}$, что трансформирование $\overline{G}$ элементом φ дает в $\overline{G}$ отображение, совпадающее с автоморфизмом φ группы G, т. е. что *все автоморфизмы группы $\overline{G}$ являются следствиями внутренних автоморфизмов голоморфа Γ* [1]).

Найдем теперь централизатор Z группы $\overline{G}$ в группе $S(G)$. Пусть отображение ζ принадлежит к Z, т. е. для любого $\overline{a}$ из $\overline{G}$

$$\overline{a}\zeta = \zeta\overline{a}. \tag{1}$$

Образ единицы группы G при отображении ζ будет некоторым элементом из G, который нам будет удобно обозначить через s^{-1},

$$1\zeta = s^{-1}.$$

Так как

$$1(\overline{a}\zeta) = (1\cdot a)\zeta = a\zeta, \quad 1(\zeta\overline{a}) = (s^{-1})\overline{a} = s^{-1}a,$$

то ввиду (1)

$$a\zeta = s^{-1}a \tag{2}$$

для всех a из G.

Обратно, при любом s из G отображение ζ группы G на себя, определяемое равенством (2), будет принадлежать к Z. Действительно, его взаимная однозначность очевидна. Если же b — произвольный элемент группы G, то

$$a(\overline{b}\zeta) = (ab)\zeta = s^{-1}(ab),$$
$$a(\zeta\overline{b}) = (a\zeta)b = (s^{-1}a)b,$$

т. е. $\overline{b}\zeta = \zeta\overline{b}$.

Таким образом, *все элементы из* Z *исчерпываются отображениями вида* (2) *при всевозможных s из G*. Различным элементам s соответствуют при этом различные отображения ζ, т. е. это соответствие между группами G и Z взаимно однозначное. *Оно является даже изоморфным*: если ζ и η — элементы из Z, s и t — соответствующие элементы из G, т. е. для всех a из G

$$a\zeta = s^{-1}a, \quad a\eta = t^{-1}a,$$

[1]) Это дает нам решение поставленного выше вопроса. Читатель, предпочитающий иметь дело не с группой $\overline{G}$, а с исходным экземпляром группы G, может в множестве Γ элементы из $\overline{G}$ заменить соответствующими им элементами из G и перенести на вновь полученное множество групповую операцию из Γ.

то

$$a(\zeta\eta) = (a\zeta)\eta = (s^{-1}a)\eta = t^{-1}s^{-1}a = (st)^{-1}a.$$

Подгруппа Z содержится в голоморфе Γ группы G, притом, как показано в конце § 11, даже в качестве нормального делителя. С другой стороны, G также является нормальным делителем в Γ. Поэтому

$$\{\mathrm{Z}, \overline{G}\} = \mathrm{Z}\overline{G}.$$

В подгруппе $\mathrm{Z}\overline{G}$ *группы* Γ *содержится вся группа внутренних автоморфизмов* Φ' *группы* G. Действительно, тривиальное равенство

$$s^{-1}ax = (s^{-1}a)s \tag{3}$$

показывает, что трансформирование группы G элементом s равно, как элемент из $S(G)$, произведению элемента из Z, соответствующего элементу s, на элемент $\overline{s}$ из $\overline{G}$. Из равенства (3) следует также, что *подгруппа* Z *содержится в произведении подгрупп* Φ' *и* $\overline{G}$, а поэтому

$$\mathrm{Z}\overline{G} = \Phi'\overline{G}. \tag{4}$$

Голоморф Γ *совпадает с произведением подгрупп* Φ *и* $\overline{G}$ *группы* $S(G)$,

$$\Gamma = \Phi\overline{G}.$$

Пусть, действительно, τ есть произвольный элемент из Γ. Благодаря его перестановочности с $\overline{G}$ трансформирование $\overline{G}$ элементом τ порождает в $\overline{G}$ некоторый автоморфизм, который, как доказано выше, можно было бы получить трансформированием некоторым элементом φ из Φ. Элемент $\tau\varphi^{-1}$ будет, следовательно, перестановочным с каждым элементом из $\overline{G}$, т. е. будет принадлежать к подгруппе Z и, следовательно, ввиду (4), к $\Phi'\overline{G}$. Элемент τ лежит поэтому в произведении $(\Phi'\overline{G})\Phi = \Phi\overline{G}$. [См. Д.3.2.]

Совершенные группы. Группа G называется *совершенной*, если она без центра и всякий ее автоморфизм является внутренним. Совершенная группа изоморфна, следовательно, с группой всех своих автоморфизмов. Следующая т е о р е м а (Гёльдер [2]) указывает важные примеры совершенных групп.

Конечная симметрическая группа S_n *является совершенной, если* $n \geqslant 3$ *и* $n \neq 6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что группа S_n будет при $n \geqslant 3$ группой без центра. Рассмотрим автоморфизмы этой группы. Сначала заметим, что элементами 2-го порядка в S_n будут те и только те подстановки, которые разлагаются в произведение независимых циклов длины 2, т. е. независимых транспозиций. Пусть

$$a = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)\dots(\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}), \quad 2 \leqslant 2k \leqslant n,$$

будет один из таких элементов; все α_i, $i = 1, 2, \dots, 2k$, различны. Докажем, что *класс элементов, сопряженных с элементом* a

в группе S_n, состоит из всех подстановок, разложимых в произведение k независимых транспозиций.

В самом деле, если $b = (\beta_1\beta_2)(\beta_3\beta_4)\dots(\beta_{2k-1}\beta_{2k})$ любая из таких подстановок (все β_i, $i = 1, 2, \dots, 2k$, снова различны), то b получается из a трансформированием любой подстановкой вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{2k} & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{2k} & \dots \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Обратно, в виде (5) может быть записана любая подстановка из S_n, а поэтому трансформирование этой подстановкой элемента a приводит к элементу вида b.

Обозначим через C_k класс сопряженных между собою элементов 2-го порядка, являющихся произведениями k независимых транспозиций. В частности, класс C_1 состоит из всех транспозиций $(\alpha_1\alpha_2)$.

Любой автоморфизм группы сохраняет порядки элементов и отображает класс сопряженных элементов снова на полный класс сопряженных элементов. Если, следовательно, φ — произвольный автоморфизм группы S_n, то он должен отображать класс C_1 на один из классов C_k, $k \geqslant 1$. Покажем, что *если $n \neq 6$, то класс C_1 может отображаться при автоморфизме φ лишь на себя самого.*

Это ясно при $n = 3$, так как тогда в классе C_1 собраны все элементы второго порядка группы S_3. Пусть $n \geqslant 4$. Класс C_1 состоит из

$$\frac{n(n-1)}{2} \tag{6}$$

различных элементов. Если же $k \geqslant 2$, то класс C_k, состоящий из всех элементов вида $(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)\dots(\alpha_{2k-1}\alpha_{2k})$, содержит ровно

$$\frac{n(n-1)\dots(n-2k+2)(n-2k+1)}{k!\,2^k} \tag{7}$$

элементов: число 2^k появляется в знаменателе потому, что в каждой из транспозиций можно переставлять символы, а число $k!$ потому, что можно произвольно переставлять сами транспозиции. Если класс C_1 отображается при автоморфизме φ на класс C_k, $k \geqslant 2$, то эти классы должны состоять из равного числа элементов. Приравнивая друг другу числа (6) и (7), мы придем к равенству

$$(n-2)(n-3)\dots(n-2k+2)(n-2k+1) = k!\,2^{k-1}. \tag{8}$$

Так как $n \geqslant 2k$, то при $k = 2$ это равенство не может быть справедливым ни для одного n. *При $k = 3$ оно выполняется, если $n = 6$.* Если же $k \geqslant 4$, то левая часть равенства (8) будет на самом деле всегда больше его правой части — достаточно проверить это при $n = 2k$, дающем для левой части наименьшее значение.

Дальше мы считаем, что $n \neq 6$. *Если α — один из переставляемых символов, то существует такой символ α', что все транспозиции,*

содержащие α, *отображаются при автоморфизме* φ *на совокупность всех транспозиций, содержащих* α'.

В самом деле, выше доказано, что образом транспозиции при φ будет транспозиция. Если

$$(\alpha\beta)\varphi = (\beta'\beta''), \quad (\alpha\gamma)\varphi = (\gamma'\gamma''),$$

то при $n = 3$ символы β', β'', γ', γ'' не могут быть различными, т. е. для этого случая утверждение доказано. Если же $n \geqslant 4$ и все символы β', β'', γ', γ'' различны, то произведением транспозиций $(\alpha\beta)$ и $(\alpha\gamma)$ будет элемент 3-го порядка $(\alpha\beta\gamma)$, тогда как произведение их образов будет элементом 2-го порядка. Если, далее,

$$(\alpha\beta)\varphi = (\alpha'\beta'),$$
$$(\alpha\gamma)\varphi = (\alpha'\gamma'),$$
$$(\alpha\delta)\varphi = (\beta'\gamma'),$$

то произведение

$$(\alpha\beta)(\alpha\delta)(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\delta\gamma)$$

имеет порядок 4, тогда как произведение образов

$$(\alpha'\beta')(\beta'\gamma')(\alpha'\gamma') = (\beta'\gamma')$$

— порядок 2. Мы доказали, что образы при автоморфизме φ всех транспозиций вида $(\alpha\beta)$ при данном α содержат общий переставляемый символ α'. Этими образами исчерпываются все транспозиции, содержащие символ α', так как иначе при обратном автоморфизме φ^{-1} мы придем в противоречие с уже полученными результатами.

Отображение $\alpha \to \alpha'$ *будет, следовательно*, взаимно однозначным отображением множества всех переставляемых символов на себя, т. е. *некоторой подстановкой из группы* S_n. Обозначим эту подстановку через s, так что $\alpha' = \alpha s$. Если теперь $(\alpha\beta)$ — произвольная транспозиция, то ее образ при автоморфизме φ должен быть транспозицией, содержащей как символ αs, так и символ βs, т. е.

$$(\alpha\beta)\varphi = (\alpha s, \beta s).$$

Справа стоит, однако, образ транспозиции $(\alpha\beta)$ при трансформировании подстановкой s. Таким образом, *автоморфизм* φ *совпадает с внутренним автоморфизмом, порождаемым элементом* s, на всех транспозициях, а поэтому и на всех элементах группы S_n, которые, как известно, являются произведениями транспозиций. Теорема доказана.

В работе Шрейера и Улама [3] доказывается, что для любого бесконечного множества M группа S_M всех взаимно однозначных отображений множества M на себя будет совершенной. Некоторые примеры совершенных групп можно найти в работе Гольфанда [3], посвященной автоморфизмам голоморфов некоторых групп. [См. Д.3.2.]

§ 14. Характеристические и вполне характеристические подгруппы

Элементы a и b группы G называются *равнотипными*, если можно указать автоморфизм φ этой группы, переводящий a в b:

$$a\varphi = b.$$

Равнотипные элементы имеют, конечно, одинаковый порядок. Вся группа распадается на непересекающиеся *классы равнотипных элементов*, каждый из которых будет инвариантным множеством группы G. Класс равнотипных элементов группы G будет классом элементов, сопряженных в голоморфе этой группы. Это позволяет перенести на классы равнотипных элементов многие из результатов, полученных в § 11 для классов сопряженных элементов.

Соответственно определяются *равнотипные подгруппы и классы равнотипных подгрупп группы G. Равнотипные подгруппы непременно изоморфны и, кроме того, имеют одинаковые индексы*: если подгруппы A и B и автоморфизм φ таковы, что $A\varphi = B$, то для всякого g из G смежный класс Ag отображается при автоморфизме φ на смежный класс $B(g\varphi)$. Так как $g\varphi$ есть произвольный элемент группы G, то этим установлено взаимно однозначное соответствие между правосторонними смежными классами по подгруппам A и B. Наше утверждение без труда следует также из замечания, что класс равнотипных подгрупп будет классом сопряженных подгрупп в голоморфе группы G.

Подобно тому, как были выделены нормальные делители, т. е. подгруппы, совпадающие со всеми своими сопряженными подгруппами, мы выделяем теперь подгруппы, совпадающие со всеми своими равнотипными подгруппами, т. е. отображающиеся на себя при в с е х автоморфизмах группы. Такие подгруппы называются *характеристическими*. Они принадлежат, очевидно, к числу нормальных делителей группы.

Характеристическая подгруппа H группы G будет нормальным делителем во всякой группе $\overline{G}$, содержащей группу G в качестве нормального делителя. Действительно, всякий внутренний автоморфизм группы $\overline{G}$ порождает некоторый автоморфизм группы G и отображает поэтому подгруппу H на себя. Обратно, из определения голоморфа непосредственно следует, что *если подгруппа H группы G является нормальным делителем в голоморфе этой группы, то она характеристична в G.*

Подгруппы H группы G, которые отображаются в себя (т. е. на себя или на свою подгруппу) при в с е х эндоморфизмах χ этой группы,

$$H\chi \subseteq H,$$

называются *вполне характеристическими* (или *вполне инвариантными*); они играют по отношению к эндоморфизмам ту же роль, какую по отношению к автоморфизмам играют характеристические подгруппы, а по отношению к внутренним автоморфизмам — нормальные делители.

Всякая вполне характеристическая подгруппа является характеристической.

Действительно, если подгруппа A вполне характеристична в G, то при всех автоморфизмах этой группы она отображается в себя. Если бы при некотором автоморфизме φ подгруппа A отображалась на свою истинную подгруппу, то при автоморфизме φ^{-1} она превращалась бы в подгруппу, бóльшую, чем она сама, что противоречит предположению.

Свойства подгруппы быть характеристической или вполне характеристической являются транзитивными в отличие от свойства быть нормальным делителем: *если группа A характеристична* (*вполне характеристична*) *в группе B, а B — в группе C, то A будет характеристической* (*вполне характеристической*) *и в C.* Действительно, всякий автоморфизм (эндоморфизм) группы C изоморфно отображает группу B на себя (гомоморфно в себя) и поэтому отображает на себя (в себя) группу A.

Отметим, с другой стороны, что если $A \subset B \subset C$ и A характеристично (вполне характеристично) в C, то в B подгруппа A может уже не быть характеристической (вполне характеристической).

Пересечение любого множества характеристических (*вполне характеристических*) *подгрупп группы G и подгруппа, порожденная этим множеством, сами будут характеристическими* (*вполне характеристическими*) *подгруппами группы G.*

Первое из этих утверждений очевидно, а второе доказывается следующим образом: если даны вполне характеристические подгруппы A_α (α пробегает некоторое множество индексов) и если они порождают подгруппу B, то всякий элемент b из B имеет вид:

$$b = a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_k}, \quad a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}.$$

Если χ — произвольный эндоморфизм группы G, то

$$b\chi = a_{\alpha_1}\chi \cdot a_{\alpha_2}\chi \dots a_{\alpha_k}\chi;$$

но из $a_{\alpha_i}\chi \in A_{\alpha_i}$ следует $b\chi \in B$. Если же A_α — характеристические подгруппы и χ — произвольный автоморфизм группы G, то мы снова получим, что $B\chi \subseteq B$. Если бы, однако, имело место строгое включение, то при обратном автоморфизме χ^{-1} подгруппа B отображалась бы на бóльшую подгруппу.

Вполне характеристическими и поэтому характеристическими подгруппами всякой группы являются она сама и ее единичная подгруппа. Группа, не имеющая других характеристических подгрупп, называется *элементарной*. Таковы, конечно, все простые группы. Элементарной

группой будет также, например, уже несколько раз встречавшаяся нам нециклическая группа 4-го порядка. [См. Д.3.2.]

Все подгруппы циклической группы вполне характеристичны. Действительно, если при эндоморфизме χ образующий элемент a этой циклической группы переходит в a^k, $a\chi = a^k$, то

$$(a^s)\chi = (a\chi)^s = a^{ks},$$

т. е. циклическая подгруппа элемента a^s отображается в себя.

Центр группы является ее характеристической подгруппой, так как элемент, перестановочный со всеми элементами группы, переходит при автоморфизмах в элементы с этим же свойством: если $ax = xa$ для всех $x \in G$, то для всякого автоморфизма φ будет $a\varphi \cdot x\varphi = x\varphi \cdot a\varphi$; но элемент $x\varphi$ пробегает вместе с x всю группу G.

Весьма важно заметить, однако, что *центр группы не всегда вполне характеристичен*. Рассмотрим, например, группу G всех невырожденных матриц 2-го порядка с рациональными элементами. Если a — такая матрица, то ее определитель будет отличным от нуля рациональным числом и поэтому может быть записан в виде $\frac{s}{t}\,2^{n(a)}$, где числа s и t нечетны, а число $n(a)$ больше, равно или меньше нуля. Из того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, вытекает равенство

$$n(ab) = n(a) + n(b).$$

Определим отображение φ группы G в себя, относя всякой матрице a из G матрицу

$$a\varphi = \begin{pmatrix} 1 & n(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

также принадлежащую к G. Равенства

$$(ab)\varphi = \begin{pmatrix} 1 & n(ab) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n(a)+n(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & n(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\varphi \cdot b\varphi$$

показывают, что φ будет эндоморфизмом группы G. Однако

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. матрица, принадлежащая к центру группы G, переходит в матрицу, лежащую вне центра.

В качестве примеров вполне характеристических подгрупп любой группы G можно указать на *подгруппу, порожденную n-ми степенями всех элементов группы* при некотором натуральном n, и на *подгруппу, порожденную всеми элементами конечных порядков*. Действительно, при всяком эндоморфизме образ n-й степени элемента a

равен n-й степени образа этого элемента, а всякий элемент конечного порядка отображается снова в элемент конечного порядка.

Коммутаторы. Весьма важный пример вполне характеристических подгрупп связан со следующим понятием, которое и само по себе играет очень большую роль: если в произвольной группе G даны элементы a и b, то элемент этой группы

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$$

называется *коммутатором* заданных элементов. Коммутатор равен единице тогда и только тогда, если элементы a и b перестановочны, в общем же случае он в некотором смысле характеризует неперестановочность этих элементов, так как $ab = ba \cdot [a, b]$.

Следующие свойства коммутаторов проверяются непосредственным подсчетом (a, b, c — произвольные элементы группы):

$$[a, b][b, a] = 1, \quad \text{откуда} \quad [a, b]^{-1} = [b, a]. \tag{1}$$

$$[a, b^{-1}] = b[b, a]b^{-1}, \quad [a^{-1}, b] = a[b, a]a^{-1}. \tag{2}$$

$$[ab, c] = b^{-1}[a, c]b[b, c]. \tag{3}$$

$$[a, bc] = [a, c]c^{-1}[a, b]c. \tag{4}$$

На коммутирование можно смотреть как на новую операцию, определенную в множестве элементов группы. Эта операция не будет в общем случае ассоциативной, т. е. равенство

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] \tag{5}$$

не всегда справедливо. Для ответа на вопрос, когда в группе G выполняется равенство (5), определим следующий класс групп, более широкий, чем абелевы группы.

Группа G называется *метабелевой*, если коммутатор любой пары ее элементов лежит в центре [1]).

С метабелевыми группами мы встретимся в гл. 15. Их особая роль в связи с операцией коммутирования выясняется в следующих двух теоремах (Леви [6]).

I. *В метабелевых группах и только в них операция коммутирования элементов ассоциативна.*

В самом деле, в метабелевой группе равенство (5) всегда выполняется, так как обе его части равны единице. Пусть, обратно, дана группа G, в которой равенство (5) справедливо при любых a, b и c. Полагая $c = b$, мы получим $[[a, b], b] = 1$, откуда ввиду (2) и (1)

$$[a, b]^{-1} = [a, b^{-1}]. \tag{6}$$

[1]) Эти группы теперь предпочитают называть *нильпотентными группами класса* 2. [См. Д.24.4.]

Так как элементы a и b произвольны, заменим их в (6) соответственно на b и a^{-1}, а затем применим (1). Мы получим:

$$[a, b]^{-1} = [a^{-1}, b]. \tag{7}$$

Из любого из равенств (6), (7) вытекает, наконец, равенство

$$[a, b] = [a^{-1}, b^{-1}]. \tag{8}$$

Снова считая теперь элементы a, b, c произвольными, преобразуем левую и правую части справедливого в G равенства (5), применяя, когда это будет нужно, формулы (6), (7), (8) и (1):

$$[[a, b], c] = [[a, b]^{-1}, c^{-1}] = [a, b]c[a, b]^{-1}c^{-1} = [a^{-1}, b^{-1}]c[a^{-1}, b]c^{-1};$$
$$[a, [b, c]] = [a^{-1}, [b, c]^{-1}] = a[b, c]a^{-1}[b, c]^{-1} = a[c^{-1}, b]a^{-1}[b, c^{-1}].$$

Приравнивая полученные результаты, мы после легких преобразований придем к равенству

$$ba^{-1}b^{-1}cab^{-1}a^{-1}c^{-1}bab^{-1}cbc^{-1} = 1.$$

Отсюда

$$[b^{-1}c, a]b^{-1}[a, b^{-1}c]b = 1$$

или, ввиду (1),

$$[[a, b^{-1}c], b] = 1.$$

Однако элементы a, $b^{-1}c$, b являются вместе с a, b, c произвольными элементами группы. Этим доказано, что коммутатор любой пары элементов группы G перестановочен со всяким элементом этой группы, т. е. что группа G метабелева.

II. *В метабелевых группах и только в них коммутирование связано с умножением законами дистрибутивности, т. е.*

$$[ab, c] = [a, c][b, c], \tag{3'}$$
$$[a, bc] = [a, b][a, c]. \tag{4'}$$

Действительно, правые части равенств (3) и (3′) тогда и только тогда равны друг другу, если

$$b^{-1}[a, c]b = [a, c]$$

при любых a, b, c, т. е. если группа G метабелева.

Коммутант. Подгруппа G' группы G, порожденная множеством коммутаторов всех пар элементов этой группы, называется *коммутантом* группы G. *Коммутант является вполне характеристической и, следовательно, характеристической подгруппой.* Действительно, при всяком эндоморфизме χ группы G коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ любых двух элементов a, b превращается в элемент

$$(a^{-1}b^{-1}ab)\chi = (a\chi)^{-1} \cdot (b\chi)^{-1}a\chi \cdot b\chi,$$

также являющийся коммутатором.

Значение коммутанта связано со следующей теоремой.

Фактор-группа по коммутанту абелева; *обратно*, *коммутант содержится во всяком нормальном делителе*, *фактор-группа по которому абелева*.

Действительно, если a и b — элементы группы G, то

$$aG' \cdot bG' = abG' = ba[a, b]G' = baG' = bG' \cdot aG',$$

так как элемент $[a, b]$ содержится в коммутанте G'. Если, с другой стороны, фактор-группа G/N абелева, то коммутатор любой пары элементов из G содержится в N, т. е. $G' \subseteq N$.

Из первой части этой теоремы следует на основании установленной в § 10 связи между нормальными делителями группы и фактор-группы, что *всякая подгруппа группы G, содержащая коммутант этой группы, будет в ней нормальным делителем*.

Определение коммутанта и доказанная выше теорема позволяют дать еще две новые формулировки для определения метабелевой группы:

Группа G тогда и только тогда метабелева, если ее коммутант лежит в ее центре.

Группа G тогда и только тогда метабелева, если ее фактор-группа по центру абелева.

Коммутант группы G тогда и только тогда совпадает с E, если эта группа абелева, т. е. если она совпадает со своим центром. Эта связь между коммутантом и центром не допускает, однако, естественного, на первый взгляд, обращения: из совпадения центра группы с единичной подгруппой не следует совпадение коммутанта с самой группой. Так, симметрическая группа S_n будет при $n \geqslant 3$ группой без центра; *ее коммутантом является*, *однако*, *знакопеременная группа A_n*. Это устанавливается для $n = 3$ и 4 непосредственной проверкой, а для $n \geqslant 5$ доказывается следующим образом: фактор-группа S_n/A_n является циклической 2-го порядка, поэтому абелевой. Отсюда, на основании доказанного выше, следует, что коммутант группы S_n содержится в A_n. Его совпадение с A_n следует теперь из некоммутативности группы S_n и простоты группы A_n. Точно так же из совпадения коммутанта со всей группой не следует совпадение центра с единичной подгруппой, — иллюстрирующим примером, который мы оставляем, впрочем, без детального рассмотрения, может служить мультипликативная группа матриц порядка $n > 1$ с комплексными элементами и с определителями, равными $+1$.

Непосредственно из определения коммутанта вытекает следующее замечание: *коммутант подгруппы всегда содержится в коммутанте группы*.

Пусть G' — коммутант группы G. Коммутант G'' группы G' называется *вторым коммутантом* группы G. Продолжая далее, мы получим убывающую последовательность подгрупп, называемую *цепью коммутантов* группы G. Эта цепь может, вообще говоря, продолжаться

трансфинитно, если α-й *коммутант* $G^{(\alpha)}$ группы G будет для непредельного порядкового числа α определен как коммутант группы $G^{(\alpha-1)}$, а для предельного α — как пересечение всех $G^{(\beta)}$ при $\beta < \alpha$. Существует такое порядковое число τ, мощность которого не больше мощности самой группы G, что

$$G^{(\tau)} = G^{(\tau+1)},$$

т. е. цепь коммутантов стабилизируется. Мальцев [7] показал, что для любого τ существуют группы, цепь коммутантов которых стабилизируется именно на этом τ.

Все последовательные коммутанты группы G вполне характеристичны. Для доказательства нужно воспользоваться тем, что свойство полной характеристичности транзитивно и сохраняется при пересечении.

Пусть A и B — произвольные подмножества группы G. Назовем *взаимным коммутантом* $[A, B]$ *этих подмножеств* подгруппу, порожденную всеми коммутаторами вида $[a, b]$, где $a \in A$, $b \in B$. Таким образом,

$$G' = [G, G].$$

Пользуясь этим понятием, построим еще одну убывающую последовательность, состоящую из вполне характеристических подгрупп группы G, а именно ее *нижнюю центральную цепь*. Это будет последовательность

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_\alpha \supseteq \ldots,$$

где

$$G_\alpha = [G_{\alpha-1}, G],$$

а при предельном α G_α является пересечением всех G_β, $\beta < \alpha$. Таким образом, $G_1 = [G, G]$, т. е. совпадает с коммутантом G' группы G; $G_2 = [G_1, G]$, т. е. G_2 является взаимным коммутантом подгруппы G' с самой группой G, и т. д. Эта цепь снова стабилизируется на некотором порядковом числе σ, причем для всякого σ существует группа, нижняя центральная цепь которой стабилизируется именно на этом σ (Мальцев [7]).

Все члены нижней центральной цепи группы G вполне характеристичны. Пусть это уже доказано для всех G_β при $\beta < \alpha$. Если число α предельное, то нужно воспользоваться тем, что пересечение вполне характеристических подгрупп само вполне характеристично. Если же число $\alpha - 1$ существует, то подгруппа G_α порождается коммутаторами вида $[a, g]$, где $a \in G_{\alpha-1}$, $g \in G$. Однако, если φ — произвольный эндоморфизм группы G, то

$$[a, g]\varphi = [a\varphi, g\varphi];$$

но $a\varphi \in G_{\alpha-1}$, $g\varphi$ — элемент группы G, а поэтому

$$[a\varphi, g\varphi] \in G_\alpha,$$

т. е. $G_\alpha\varphi \subseteq G_\alpha$.

Понятие нижней центральной цепи позволяет дать еще один вариант определения метабелевой группы:

Группа G тогда и только тогда метабелева, если второй член G_2 ее нижней центральной цепи равен единице.

Действительно, равенство $[G', G] = E$ равносильно тому, что коммутант содержится в центре.

Различные свойства взаимных коммутантов пар подгрупп и некоторые обобщения этого понятия читатель найдет в работах Ф. Холла [2] и Головина [3]. [См. Д.3.3.]

§ 15. Группы с операторами

Нормальные делители, характеристические и вполне характеристические подгруппы группы G играют сходные роли относительно группы внутренних автоморфизмов группы G, группы всех автоморфизмов этой группы и, наконец, множества всех ее эндоморфизмов. Естественным обобщением этого было бы выделение любого множества V эндоморфизмов группы G и изучение *V-характеристических подгрупп*, т. е. подгрупп, отображающихся в себя при всех эндоморфизмах из V. Мы будем пользоваться иногда этим приемом; однако для различных приложений — в теории колец, в линейной алгебре и т. д. — большее значение имеет его дальнейшее обобщение, заключающееся в изучении групп с операторами.

Пусть даны: группа G и множество Σ некоторых символов σ, τ, ... Группа G называется *группой с областью операторов* Σ, а символы из Σ — *операторами* для этой группы, если всякому символу σ из Σ поставлен в соответствие некоторый эндоморфизм группы G, т. е. если всякому элементу a из G соответствует элемент $a\sigma$ этой же группы, причем

$$(ab)\sigma = a\sigma \cdot b\sigma.$$

Различным операторам из Σ может соответствовать при этом один и тот же эндоморфизм, т. е. при $\sigma \neq \tau$ может быть $a\sigma = a\tau$ для всех a из G. В этом и заключается то обобщение, которое приносится изучением групп с операторами по сравнению с изучением групп, в которых просто выделены некоторые множества эндоморфизмов.

Группы G и $\overline{G}$ с одной и той же областью операторов Σ называются *операторно изоморфными*, если они изоморфны и если этот изоморфизм может быть установлен таким образом, что для всяких двух соответствующих друг другу элементов a из G и $\overline{a}$ из $\overline{G}$ и всякого σ из Σ элементы $a\sigma$ и $\overline{a}\sigma$ также соответствуют друг другу.

При изучении групп с операторами тождественными будут считаться лишь операторно изоморфные группы. Всякая группа в обычном смысле слова может дать, следовательно, произвольно много различных операторных групп. Это расщепление понятия группы противоречит, на первый взгляд, той общности, которой мы достигли, выделив понятие групповой операции в качестве истинного объекта изучения. Мы увидим, однако, что во многих важных теоретико-групповых теоремах утверждается изоморфизм некоторых групп (или подгрупп), причем для случая групп с операторами этот изоморфизм оказывается операторным. Понятно, что, формулируя и доказывая эти теоремы для групп с операторами, мы достигаем большей общности, а для получения соответствующих теорем для групп без операторов достаточно положить множество операторов пустым.

Пусть дана группа G с областью операторов Σ и пусть V_Σ есть множество эндоморфизмов группы G, соответствующих операторам из Σ. V_Σ-характеристические подгруппы группы G называются *допустимыми подгруппами* этой группы относительно области операторов Σ. Иными словами, подгруппа H группы G допустима, если она вместе с элементом a содержит и элементы $a\sigma$ для всех σ из Σ, т. е. если

$$H\sigma \subseteq H.$$

Всякий оператор из Σ порождает, следовательно, некоторый эндоморфизм в каждой допустимой подгруппе. *Допустимые подгруппы группы G можно считать поэтому операторными группами с той же областью операторов Σ.* Допустимыми при в с я к о м множестве операторов будут вполне характеристические подгруппы и только они, тогда как, например, центр группы будет, как показано в предшествующем параграфе, не всегда допустимым.

П р и м е р ы. 1. Если в качестве операторов группы берутся все ее внутренние автоморфизмы, то допустимыми подгруппами будут нормальные делители. Допустимыми при всех автоморфизмах группы, взятых в качестве ее операторов, будут характеристические подгруппы, а если областью операторов группы является множество всех ее эндоморфизмов, то допустимыми будут лишь вполне характеристические подгруппы.

2. Пусть дано кольцо R, быть может, некоммутативное. Аддитивная группа кольца R испытывает, как легко проверить, эндоморфизм, если все элементы кольца будут умножаться с п р а в а на некоторый определенный элемент a из R. Само кольцо R будет, следовательно, областью операторов для своей аддитивной группы, причем допустимыми подгруппами будут правосторонние идеалы. Умножение всех элементов кольца с л е в а на элемент a из R также приводит к эндоморфизму аддитивной группы этого кольца. Элементы кольца R составляют, следовательно, еще одну область операторов для его аддитивной группы; допустимыми при ней будут левосторонние идеалы. Объединение этих двух множеств операторов, — всякий элемент кольца придется брать,

очевидно, в двух экземплярах, — дает такую область операторов, при которой допустимыми будут двусторонние идеалы кольца.

3. Всякое векторное пространство V над полем P является операторной абелевой группой с полем P в качестве области операторов. Действительно, требование

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha,$$

где $a, b \in V$, $\alpha \in P$, входит в определение векторного пространства. Допустимыми подгруппами будут линейные подпространства.

4. Всякая абелева группа может считаться операторной группой с кольцом целых чисел C в качестве области операторов. Эндоморфизм, соответствующий числу n, есть отображение элемента a в элемент a^n (или, при аддитивной записи, в элемент na). Действительно, для абелевой группы имеет место равенство

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Допустимой при этом множестве операторов будет всякая подгруппа.

Введение операторов приводит к выделению из всех подгрупп рассматриваемой группы ее допустимых подгрупп и к выделению среди всех изоморфных отображений этой группы ее операторных изоморфизмов. Если мы рассматриваем группу G с областью операторов Σ и если V_Σ есть множество эндоморфизмов группы G, соответствующих операторам из Σ, то группу G можно естественным образом рассматривать и как группу с областью операторов V_Σ, причем из определения допустимых подгрупп следует, что допустимыми относительно Σ и V_Σ будут одни и те же подгруппы группы G. Это замечание позволит нам, если это будет нужно, предполагать *множество операторов подмножеством множества всех эндоморфизмов группы*. Впрочем, лишь данное выше общее определение области операторов позволило нам считать всякое кольцо областью операторов для его аддитивной группы (пример 2). Действительно, кольцо может обладать отличными от нуля элементами, произведение которых на любой элемент кольца равно нулю.

Многие из понятий и некоторые из теорем, введенных и доказанных нами выше для групп без операторов, могут быть перенесены на случай операторных групп. Мы укажем здесь те понятия и результаты, на которые будем опираться в дальнейшем изложении; детальное проведение доказательств предоставляется читателю.

Пусть дана группа G с областью операторов Σ. О допустимых подгруппах этой группы можно утверждать следующее:

Пересечение любого множества допустимых подгрупп само является допустимой подгруппой. Пересечение всех допустимых подгрупп, содержащих данное подмножество M группы G, будет называться *допустимой подгруппой*, *порожденной* множеством M. Если множество M состоит из одного элемента a, то мы получим *допустимую циклическую подгруппу* элемента a, отличную,

вообще говоря, от циклической подгруппы $\{a\}$. *Подгруппа, порожденная любым множеством допустимых подгрупп, и сумма возрастающей последовательности допустимых подгрупп также будут допустимыми подгруппами.*

Если допустимая подгруппа, порожденная множеством M, совпадает с самой группой G, то M есть *система образующих для G относительно области операторов* Σ. Заметим, что группа может обладать относительно заданной области операторов конечной системой образующих, хотя, как группа в обычном смысле слова, она не есть группа с конечным числом образующих. Так, n-мерное векторное пространство V над полем P обладает, как операторная группа, системой из n образующих — ею служит любая база пространства, — хотя при несчетном поле P и группа V будет несчетной и поэтому, как группа без операторов, не может обладать конечной системой образующих.

Если даны группы

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$$

с одной и той же областью операторов Σ и если для каждого n установлено операторно изоморфное отображение φ_n группы G_n в группу G_{n+1}, то *предельная группа* $\overline{G}$ для этих групп (см. § 7) также будет операторной группой с областью операторов Σ, а группы G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ будут операторно изоморфными некоторым допустимым подгруппам группы $\overline{G}$.

Нормальный делитель операторной группы, являющийся ее допустимой подгруппой, называется *допустимым нормальным делителем*. Пересечение любого множества допустимых нормальных делителей и подгруппа, порожденная этим множеством, сами будут допустимыми нормальными делителями. Группа, не имеющая иных допустимых нормальных делителей, кроме себя самой и единичной подгруппы, называется *простой* (относительно заданной области операторов). Эта группа может не быть, конечно, простой, если ее рассматривать без операторов.

Если даны группы G и G' с одной и той же областью операторов Σ, то, по аналогии с операторным изоморфизмом, гомоморфное отображение группы G на группу G' называется *операторным гомоморфизмом*, если для всякого a из G и его образа a' в G' и для всякого оператора σ из Σ образом элемента $a\sigma$ при этом гомоморфизме будет элемент $a'\sigma$. Нормальный делитель группы G, отображающийся в единицу $1'$ группы G' при этом гомоморфизме, будет допустимым, так как из $1'\sigma = 1'$ для всех σ из Σ следует, что этот нормальный делитель вместе со всяким элементом a содержит и все элементы $a\sigma$.

Пусть, наоборот, операторная группа G с областью операторов Σ гомоморфно отображается на некоторую группу G' и пусть нормальный делитель H группы G, отображающийся в единицу группы G' при этом гомоморфизме, является допустимым. Тогда операторы Σ могут быть следующим образом *перенесены* на группу G': если даны элемент a'

из G' и оператор σ из Σ, то берем один из прообразов a элемента a' в группе G и образ элемента $a\sigma$ обозначаем через $a'\sigma$. Легко видеть, что допустимость нормального делителя H делает элемент $a'\sigma$ независимым от выбора элемента a. Мы получаем, в частности, что *всякая фактор-группа операторной группы по допустимому нормальному делителю также будет операторной группой с той же самой областью операторов, причем естественное гомоморфное отображение группы на эту фактор-группу будет операторным гомоморфизмом.*

Теперь читатель без труда докажет, что всякая группа G', на которую группа G операторно гомоморфно отображается, будет операторно изоморфна фактор-группе группы G по некоторому допустимому нормальному делителю, т. е. докажет для операторных групп теорему о гомоморфизмах.

Если H есть допустимый нормальный делитель группы G, то при соответствии, существующем между подгруппами группы G, содержащими H, и подгруппами фактор-группы G/H, *допустимые подгруппы будут соответствовать допустимым же.* Доказательство этого утверждения непосредственно следует из изложенного выше способа перенесения операторов на фактор-группу.

Теорема об изоморфизме также сохраняется для операторных групп:

Если A и B — допустимые подгруппы операторной группы G, причем A является нормальным делителем в подгруппе $\{A, B\}$, то пересечение $A \cap B$ будет допустимым нормальным делителем в B и фактор-группы $\{A, B\}/A$ и $B/(A \cap B)$ операторно изоморфны.

Доказательство этой теоремы такое же, как в случае групп без операторов. Операторный изоморфизм получается как следствие применения теоремы о гомоморфизмах для операторных групп.

На группы с операторами может быть перенесена и лемма Цассенхауза. В ее формулировке снова нужно говорить о допустимых подгруппах и об операторном изоморфизме.

Операторным эндоморфизмом группы G с областью операторов Σ называется всякое операторно гомоморфное отображение группы G на себя или в себя. Иными словами, эндоморфизм χ будет операторным, если для всякого элемента a из G и всякого оператора σ из Σ имеет место равенство

$$(a\sigma)\chi = (a\chi)\sigma. \tag{1}$$

Частным случаем понятия операторного эндоморфизма является понятие *операторного автоморфизма*, т. е. операторно изоморфного отображения группы G на себя.

Из определения операторного эндоморфизма непосредственно следует теорема, в которой перестановочность следует понимать в смысле коммутативности умножения эндоморфизмов:

Эндоморфизм χ группы G тогда и только тогда будет операторным относительно области операторов Σ, если он перестановочен

со всеми эндоморфизмами, соответствующими операторам из Σ, *т. е. со всеми эндоморфизмами из множества* V_Σ.

Для доказательства достаточно заменить в равенстве (1) оператор σ соответствующим ему эндоморфизмом. В качестве примера укажем, что операторными эндоморфизмами векторного пространства V над полем P являются линейные преобразования, так как требования

$$(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi, \quad (a\alpha)\varphi = (a\varphi)\alpha,$$

где $a, b \in V$, $\alpha \in P$, φ — линейное преобразование, составляют определение линейного преобразования.

Из этой теоремы без труда следуют все свойства операторных эндоморфизмов и автоморфизмов. Так, *произведение двух операторных эндоморфизмов само будет операторным*. Нулевой эндоморфизм всегда операторный. Заметим, далее, что единичный (тождественный) автоморфизм, будучи перестановочен со всеми эндоморфизмами, будет операторным и что автоморфизм, обратный операторному автоморфизму, сам операторный. Вместе со сделанным выше замечанием о произведении операторных эндоморфизмов и автоморфизмов это позволяет говорить о *группе операторных автоморфизмов* операторной группы. Она представляет собою подгруппу в группе всех автоморфизмов.

Заметим, наконец, что *образом допустимой подгруппы* H *операторной группы* G *при операторном эндоморфизме* χ *будет допустимая же подгруппа*, так как для всякого оператора σ $(H\chi)\sigma = (H\sigma)\chi \subseteq H\chi$. Это следует, впрочем, и из теоремы о гомоморфизмах. В частности, образом самой группы G при операторном эндоморфизме будет ее допустимая подгруппа. [См. § Д.4.]

Глава пятая

РЯДЫ ПОДГРУПП. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 16. Нормальные и композиционные ряды

В теории групп и ее приложениях большую роль играют некоторые системы вложенных друг в друга подгрупп данной группы, системы, подчиненные тем или иным дополнительным условиям. В настоящем параграфе изучаются свойства таких упорядоченных систем или «рядов» подгрупп. Результаты, здесь получающиеся, найдут в дальнейшем многочисленные применения.

Конечная система вложенных друг в друга подгрупп группы G

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k = E, \tag{1}$$

начинающаяся с самой группы G и оканчивающаяся единичной подгруппой, называется *нормальным рядом* этой группы, если всякая подгруппа G_i есть истинный нормальный делитель подгруппы G_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, k$. В частности, подгруппа G_1 будет нормальным делителем группы G, G_2 — нормальным делителем подгруппы G_1, хотя не обязательно нормальным делителем самой группы G, и т. д.

Всякая группа обладает, очевидно, нормальными рядами, — достаточно взять, например, ряд $G \supseteq E$. Если H есть нормальный делитель группы G, отличный от G и от E, то ряд

$$G \supset H \supset E$$

также будет нормальным. Можно сказать, иными словами, что *во всякой группе можно найти нормальный ряд, проходящий через заданный нормальный делитель этой группы.*

Фактор-группы

$$G/G_1, G_1/G_2, \ldots, G_{k-1}/E$$

называются *факторами* нормального ряда (1). Число этих факторов, т. е. для ряда (1) число k, называется *длиною* ряда (1).

Нормальный ряд

$$G \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_l = E \tag{2}$$

называется *уплотнением* нормального ряда (1), если всякая подгруппа G_i из (1) совпадает с одной из подгрупп F_j, т. е. если все подгруппы,

входящие в (1), встречаются и в ряду (2). В частности, всякий нормальный ряд будет уплотнением для себя самого. Длины нормального ряда (1) и его уплотнения (2) связаны, очевидно, неравенством $k \leqslant l$.

Два нормальных ряда некоторой группы называются *изоморфными*, если их длины равны и если их факторы можно так поставить во взаимно однозначное соответствие, что соответствующие факторы будут изоморфными группами. В этом определении не предполагается, что при указанном соответствии сохраняется взаимное расположение факторов. Так, в циклической группе $G = \{a\}$ шестого порядка, $a^6 = 1$, нормальные ряды $G \supset \{a^2\} \supset E$ и $G \supset \{a^3\} \supset E$ изоморфны, так как их факторами будут одна циклическая группа второго и одна третьего порядка, хотя расположение факторов в этих двух рядах различное.

Все данные выше определения сохраняются и в случае групп с операторами. В определении нормального ряда нужно будет, конечно, говорить о допустимых подгруппах и допустимых нормальных делителях, а в определении изоморфизма рядов — об операторном изоморфизме факторов. Все дальнейшее содержание настоящего параграфа излагается в предположении, что *изучаемые группы обладают некоторым* (*быть может пустым*) *множеством операторов*.

Основную роль в теории нормальных рядов играет следующая теорема [1]):

Теорема Шрейера. *Всякие два нормальных ряда произвольной группы обладают изоморфными уплотнениями*.

Пусть, в самом деле, в группе G даны нормальные ряды

$$C = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = E, \tag{3}$$

$$G = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_l = E. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$H_{ij} = H_i \cdot (H_{i-1} \cap F_j), \quad F_{ij} = F_j \cdot (F_{j-1} \cap H_i),$$

где H_{ij} и F_{ij} — подгруппы, так как, например, H_i является нормальным делителем, а $H_{i-1} \cap F_j$ — подгруппой в H_{i-1}. Тогда для $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$ имеют место включения:

$$H_{i-1} = H_{i0} \supseteq H_{i,\,j-1} \supseteq H_{ij} \supseteq H_{il} = H_i,$$
$$F_{j-1} = F_{0j} \supseteq F_{i-1,\,j} \supseteq F_{ij} \supseteq F_{kj} = F_j.$$

Ввиду леммы Цасенхауза (§ 10 и § 15) подгруппа H_{ij} будет нормальным делителем в $H_{i,\,j-1}$, подгруппа F_{ij} — нормальным делителем в $F_{i-1,\,j}$, а соответствующие фактор-группы изоморфны,

$$H_{i,\,j-1}/H_{ij} \simeq F_{i-1,\,j}/F_{ij}. \tag{5}$$

[1]) О. Шрейер [5]. Цасенхауз [1] дал доказательство, изложенное в тексте.

Если мы вставим в ряд (3) между подгруппами H_{i-1} и H_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, все подгруппы H_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, l-1$, то будет получено уплотнение ряда (3), являющееся, вообще говоря, *нормальным рядом с повторениями*, так как подгруппы $H_{i,j-1}$ и H_{ij} могут случайно оказаться равными. Соответственным образом с помощью подгрупп F_{ij} устраивается уплотнение ряда (4). Эти уплотнения будут ввиду (5) изоморфными. Для окончания доказательства остается из этих уплотнений исключить повторения. Однако если $H_{i,j-1} = H_{ij}$, т. е. $H_{i,j-1}/H_{ij} = E$, то ввиду (5) будет $F_{i-1,j} = F_{ij}$, а поэтому, не нарушая изоморфизма полученных нами уплотнений для рядов (3) и (4), можно одновременно исключить из них все повторения. Теорема Шрейера доказана.

Нормальный ряд, не имеющий отличных от него самого уплотнений (без повторений), называется *композиционным рядом*. Иными словами, ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k = E$$

будет композиционным рядом группы G, если всякая подгруппа G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, является *максимальным* истинным нормальным делителем подгруппы G_{i-1}. Все факторы композиционного ряда будут, очевидно, простыми группами. Обратно, всякий нормальный ряд, все факторы которого простые группы, не может быть далее уплотнен, т. е. является композиционным. Поэтому всякий нормальный ряд, изоморфный с некоторым композиционным рядом, сам будет композиционным рядом.

Непосредственно из теоремы Шрейера следуют теоремы:

Теорема Жордана–Гёльдера. *Если группа G обладает композиционными рядами, то всякие два композиционных ряда этой группы изоморфны.*

Действительно, изоморфные уплотнения для данной пары композиционных рядов будут совпадать с этими рядами.

Если группа G обладает композиционными рядами, то всякий нормальный ряд этой группы содержится в некотором композиционном ряду и имеет поэтому длину, не превосходящую длины композиционных рядов группы G.

Для доказательства достаточно применить теорему Шрейера к данному нормальному ряду и к одному из композиционных рядов группы.

Для сокращения условимся называть в дальнейшем общую длину композиционных рядов группы, обладающей такими рядами, *композиционной длиной* этой группы, а факторы любого композиционного ряда — *композиционными факторами* группы.

Композиционные ряды существуют далеко не во всякой группе. Так, уже в бесконечной циклической группе всякий нормальный ряд обладает уплотнением, отличным от него самого. Действительно, подгруппа, стоящая в этом ряду на предпоследнем месте, будет бесконечной циклической, и поэтому между нею и единичной подгруппой

можно вставить дополнительное звено. Вообще абелева группа без операторов, обладающая композиционным рядом, будет непременно конечной, так как композиционными факторами этой группы могут быть лишь циклические группы простых порядков. Композиционными рядами обладает, понятно, вообще всякая конечная группа. Далее, для всякой простой группы G, — а существование бесконечных простых групп было доказано в § 9, — единственным композиционным рядом будет ряд $G \supset E$. Мы докажем сейчас одно простое необходимое и достаточное условие существования в группе композиционного ряда. Сперва несколько новых определений.

Будем называть подгруппу H группы G *достижимой подгруппой*, если она содержится в каком-либо нормальном ряду этой группы. Иными словами, достижимыми подгруппами группы G будут все нормальные делители этой группы, все их нормальные делители и т. д. Понятно, что нормальный делитель достижимой подгруппы сам является достижимой подгруппой. [См. Д.2.6.]

Убывающая последовательность подгрупп группы G,

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots, \tag{6}$$

называется *убывающей нормальной цепью* группы G, если всякая подгруппа H_n, $n = 1, 2, \ldots$, есть истинный нормальный делитель подгруппы H_{n-1}. Убывающая нормальная цепь может быть или счетной, упорядоченной по типу натурального ряда, или же конечной. В последнем случае говорят, что цепь *обрывается*. Примером обрывающейся нормальной цепи служит всякий нормальный ряд. Примером бесконечной убывающей нормальной цепи служит следующая последовательность подгрупп бесконечной циклической группы $G = \{a\}$:

$$G \supset \{a^2\} \supset \{a^4\} \supset \ldots \supset \{a^{2^n}\} \supset \ldots.$$

Возрастающая последовательность подгрупп группы G,

$$E = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots, \tag{7}$$

называется *возрастающей нормальной цепью* этой группы, если всякая подгруппа F_n, $n = 0, 1, \ldots$, есть истинный нормальный делитель подгруппы F_{n+1} и если все подгруппы F_n достижимы в G [1]). Возрастающая нормальная цепь может быть или бесконечной, — такие цепи можно найти, например, в аддитивной группе рациональных чисел, — или конечной, т. е. обрывающейся.

Группа G тогда и только тогда обладает композиционным рядом, если обрываются все ее убывающие и все возрастающие нормальные цепи.

[1]) Последнее требование в случае убывающих нормальных цепей выполняется автоматически.

Пусть, в самом деле, группа G обладает композиционным рядом и пусть k есть ее композиционная длина. Если бы группа G обладала бесконечной убывающей нормальной цепью (6), то при $n \geqslant k$ нормальный ряд

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset E,$$

составленный из первых звеньев ряда (6) и единичной подгруппы, имел бы длину, превосходящую число k. Это противоречит, однако, теореме Шрейера. Допустим, далее, что группа G обладает бесконечной возрастающей нормальной цепью (7). Тогда берем $n \geqslant k$ и строим нормальный ряд группы G, содержащий подгруппу F_n:

$$G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{s-1} \supset F_n \supset \ldots \supset E, \quad s \geqslant 1.$$

Такой ряд существует, так как F_n, по условию, достижимая подгруппа. Тогда ряд

$$G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{s-1} \supset F_n \supset F_{n-1} \supset \ldots \supset F_2 \supset F_1 \supset E$$

будет нормальным, причем длина его больше числа k, что снова противоречит теореме Шрейера.

Пусть теперь в группе G обрываются все возрастающие и убывающие нормальные цепи. Из обрыва возрастающих цепей следует, что *во всякой достижимой подгруппе H группы G можно найти хотя бы один максимальный истинный нормальный делитель этой подгруппы*. Действительно, если бы всякий истинный нормальный делитель подгруппы H содержался в некотором большем истинном нормальном делителе этой подгруппы, то мы получили бы бесконечную возрастающую цепь нормальных делителей подгруппы H, которая была бы возрастающей нормальной цепью для G.

Искомый композиционный ряд строится теперь следующим образом: в группе G выбираем максимальный истинный нормальный делитель H_1. Пусть уже выбраны подгруппы

$$H_0 = G, H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

каждая из которых есть максимальный истинный нормальный делитель в предыдущей; подгруппа H_n будет, очевидно, достижимой в G. Тогда, если $H_n \neq E$, то в качестве H_{n+1} выбираем один из максимальных нормальных делителей подгруппы H_n. Ввиду обрыва убывающих нормальных цепей мы после конечного числа шагов дойдем до подгруппы E, т. е. получим композиционный ряд группы G. Теорема доказана.

Если группа обладает композиционными рядами, то что можно сказать об ее подгруппах? Пример счетной знакопеременной группы (см. § 4) показывает, что *группа с композиционными рядами может содержать подгруппу, не имеющую композиционных рядов*. Действительно, названная группа является простой (см. § 9), т. е. обладает композиционным рядом, но ее подгруппа, порожденная

подстановками $b_n = (4n-3, 4n-2)(4n-1, 4n)$, $n = 1, 2, \ldots$, будет бесконечной и абелевой — последнее ввиду перестановочности между собою всех элементов b_n — и поэтому не может обладать композиционными рядами.

Однако *всякая достижимая подгруппа H группы G с композиционными рядами сама обладает композиционными рядами*. В самом деле, подгруппа H входит в некоторый нормальный ряд группы G, который при сделанных предположениях может быть уплотнен до композиционного ряда. Отрезок этого ряда между H и единичной подгруппой будет композиционным рядом для H. Отсюда следует также, что *если H есть истинная достижимая подгруппа группы G, то композиционная длина группы H меньше композиционной длины группы G, а композиционные факторы группы H составляют часть системы композиционных факторов самой группы G*. Если, с другой стороны, H есть нормальный делитель в G, то отрезок композиционного ряда, содержащего H, заключенный между G и H, приводит к композиционному ряду фактор-группы G/H. Отсюда следует, что *всякая фактор-группа G/H группы G с композиционными рядами сама обладает композиционными рядами*; *ее композиционная длина равна разности композиционных длин групп G и H, а ее композиционные факторы вместе с композиционными факторами группы H составляют систему композиционных факторов группы G*.

Некоторые заключения относительно произвольных подгрупп группы с композиционными рядами можно получить из следующей теоремы, относящейся к произвольным группам:

Если в группе G задан нормальный ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k = E, \tag{8}$$

то всякая подгруппа F группы G обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны подгруппам некоторых различных факторов ряда (8).

Действительно, если $F_i = F \cap G_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, то, применяя лемму Цасенхауза для случая $A = F$, $A' = E$, $B = G_{i-1}$, $B' = G_i$, мы получим, что F_i есть нормальный делитель в F_{i-1} и

$$F_{i-1}/F_i \simeq G_i F_{i-1}/G_i.$$

Но $G_{i-1} \supseteq G_i F_{i-1} \supseteq G_i$, т. е. фактор-группа F_{i-1}/F_i изоморфна подгруппе фактор-группы G_{i-1}/G_i. Ряд

$$F = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_k = E$$

будет, следовательно, после удаления из него возможных повторений искомым нормальным рядом для F.

Теоремы Шрейера и Жордана–Гёльдера и следствия из них были получены выше для групп с произвольной областью операторов. Если к области операторов будут присоединены все внутренние автоморфизмы, то допустимыми подгруппами останутся лишь нормальные

делители. Понятие композиционного ряда превращается в этом случае в понятие главного ряда: ряд подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = E$$

называется *главным рядом* группы G, если всякое H_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, является максимальным нормальным делителем группы G, содержащимся в H_{i-1} в качестве истинной подгруппы. Доказанное выше условие существования композиционного ряда приводит в рассматриваемом случае к теореме:

Группа G тогда и только тогда обладает главным рядом, если обрываются все ее убывающие и все возрастающие цепи нормальных делителей.

Эти цепи будут в дальнейшем называться соответственно убывающими и возрастающими *инвариантными цепями* группы G.

Теорема Жордана–Гёльдера приводит в рассматриваемом случае к следующей теореме.

Если группа обладает главными рядами, то всякие два главных ряда этой группы изоморфны.

Установленная выше связь между композиционными рядами группы и ее достижимых подгрупп на случай главных рядов не переносится. Действительно, если группа G обладает главными рядами и если мы берем главный ряд, проходящий через заданный нормальный делитель H, то отрезок этого ряда между H и E может уже не быть главным рядом для H, так как в H существуют, вообще говоря, нормальные делители, не являющиеся нормальными делителями для G.

Если область операторов содержит все автоморфизмы (или все эндоморфизмы) группы G, то понятие композиционного ряда превращается в понятие *характеристического* (соответственно *вполне характеристического*) *ряда*, т. е. ряда подгрупп группы G, каждая из которых является максимальной характеристической (вполне характеристической) подгруппой группы G, содержащейся в предыдущей в качестве истинной подгруппы. Из теоремы Жордана–Гёльдера в этом случае следует теорема:

Если группа G обладает характеристическими (вполне характеристическими) рядами, то всякие два характеристических (вполне характеристических) ряда этой группы изоморфны.

Дальнейшее развитие результатов этого параграфа читатель найдет в § 56. [См. Д.2.5.]

§ 17. Прямые произведения

Одним из важнейших понятий общей теории групп, основным, в частности, для такого ее раздела, как теория абелевых групп, является понятие прямого произведения или (в случае аддитивной записи групповой операции) прямой суммы. В настоящем параграфе будет

дано определение и указаны простейшие свойства этого понятия, а его более глубокой теории посвящается особая гл. 11.

Группа G называется *прямым произведением* своих подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$, если выполнены следующие три требования:

1) Подгруппы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ являются нормальными делителями группы G.

2) Группа G порождается подгруппами $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

3) Пересечение всякой подгруппы H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, с подгруппой, порожденной всеми группами H_j, $j \neq i$, равно E.

Это определение можно заменить следующим, ему эквивалентным: группа G есть прямое произведение своих подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$, если

1′) Элементы из любых двух подгрупп H_i и H_j, $i \neq j$, перестановочны между собою.

2′) Всякий элемент g из G однозначно записывается в виде произведения

$$g = h_1 h_2 \ldots h_n,$$

где $h_i \in H_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Докажем, что второе определение следует из первого. Для доказательства условия 1′ берем элементы $a \in H_i$, $b \in H_j$, $i \neq j$. Тогда по условию 1 имеем $aba^{-1} \in H_j$, $ba^{-1}b^{-1} \in H_i$, т. е. коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$ содержится в пересечении $H_i \cap H_j$, которое, по условию 3, равно E. Для доказательства условия 2′ заметим, что возможность записать элемент g из G в виде произведения $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ следует из условия 2 и из уже доказанного условия 1′. Единственность такой записи следует из того, что если допустить, что

$$g = h_1 h_2 \ldots h_n = h_1' h_2' \ldots h_n',$$

причем, например, $h_1 \neq h_1'$, то мы получим, снова используя 1′, равенство

$$h_1'^{-1} h_1 = (h_2' \ldots h_n')(h_2 \ldots h_n)^{-1} = (h_2' h_2^{-1}) \ldots (h_n' h_n^{-1}),$$

противоречащее условию 3.

Наоборот, первое определение прямого произведения следует из второго. Действительно, условие 2 содержится в условии 2′. Для доказательства условия 3 предположим, что, например, пересечение подгруппы H_1 с подгруппой, порожденной подгруппами $H_2, \ldots, H_n$, содержит отличный от единицы элемент c. Этот элемент содержится в H_1, и вместе с тем может быть записан, ввиду 1′, в виде произведения $h_2 \ldots h_n$, что, однако, противоречит условию 2′. Для доказательства условия 1 берем элемент $\overline{h}_i$ из H_i и произвольный элемент g из G. Ввиду 2′ будет $g = h_1 h_2 \ldots h_i \ldots h_n$, а тогда ввиду 1′

$$g^{-1} \overline{h}_i g = h_i^{-1} \overline{h}_i h_i \in H_i.$$

Проверка того, является ли данная группа G прямым произведением своих подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$, заметно облегчается возможностью заменить в первом определении условие 3 более слабым условием

3_0) Пересечение подгруппы H_i, $i = 2, \ldots, n$, с подгруппой, порожденной подгруппами $H_1, \ldots, H_{i-1}$, равно E.

Для доказательства достаточно показать, что уже из условий 1, 2 и 3_0 следуют условия $1'$ и $2'$. Так как из 3_0 мы сразу получаем, что $H_i \cap H_j = E$ при $i \neq j$, то условие $1'$ доказано и остается доказать однозначность, входящую в формулировку условия $2'$. Если для элемента g найдены две различные записи,

$$g = h_1 h_2 \ldots h_n = h'_1 h'_2 \ldots h'_n$$

и если $h_k \neq h'_k$, но $h_{k+1} = h'_{k+1}, \ldots, h_n = h'_n$, $k \leqslant n$, то мы получаем равенство

$$h'^{-1}_k h_k = (h'_1 h_1^{-1})(h'_2 h_2^{-1}) \ldots (h'_{k-1} h_{k-1}^{-1}),$$

противоречащее условию 3_0.

Если группа G разлагается в прямое произведение подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$, то эти подгруппы будут называться *прямыми множителями*, входящими в данное разложение, а само разложение будет записываться в виде

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n.$$

Определение прямого произведения дано нами для случая разложений с конечным числом прямых множителей. Это понятие употребляется, однако, и в том случае, когда *множество прямых множителей бесконечно*, причем это делается на основании следующего определения: группа G называется прямым произведением некоторого множества своих подгрупп H_α (α пробегает заданное множество индексов) и записывается в виде

$$G = \prod_\alpha H_\alpha,$$

если G порождается этими подгруппами и если подгруппа, порожденная в группе G любым конечным числом подгрупп H_α, будет их прямым произведением. Из этого определения сразу следует перестановочность элементов из различных подгрупп H_α и возможность однозначно (с точностью до порядка множителей) записать любой элемент из G в виде произведения конечного числа элементов, взятых в некоторых из подгрупп H_α. Легко видеть, далее, что каждая подгруппа H_α будет нормальным делителем в G: если g есть произвольный элемент из G, то $g = h_{\alpha_1} h_{\alpha_2} \ldots h_{\alpha_k}$, а так как подгруппы $H_\alpha, H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots, H_{\alpha_k}$ составляют, по предположению, в группе G прямое произведение, то $g^{-1} H_\alpha g = H_\alpha$. Таким же способом доказывается, что пересечение любой подгруппы H_α с подгруппой, порожденной всеми подгруппами $H_{\alpha'}$, $\alpha' \neq \alpha$, равно E.

Пользуясь этими замечаниями, можно было бы указать несколько новых определений прямого произведения бесконечного множества подгрупп, эквивалентных данному выше, определений, не требующих предварительного рассмотрения случая конечного числа множителей. Так, в соответствии с одним из определений, данных выше для случая конечного числа множителей, читатель без труда докажет, что группа G будет прямым произведением своих подгрупп H_α в том и только в том случае, если: 1) элементы из двух различных подгрупп H_α перестановочны между собою и 2) всякий элемент из G однозначно (с точностью до порядка множителей) записывается в виде произведения конечного числа элементов, взятых из подгрупп H_α.

Укажем простейшие свойства прямого произведения, непосредственно следующие из его определения:

I. *Если*

$$G = \prod_\alpha H_\alpha, \tag{1}$$

и если множители H_α *сами разложены в прямое произведение* [1]),

$$H_\alpha = \prod_\beta H_{\alpha\beta},$$

то группа G *будет прямым произведением всех подгрупп* $H_{\alpha\beta}$, *взятых по всем* α *и* β. Это новое прямое разложение группы G называется *продолжением* разложения (1).

II. *Если* (1) *есть прямое разложение группы* G, *то можно получить ее новое прямое разложение, разбивая произвольным образом множество подгрупп* H_α *на непересекающиеся подмножества и заменяя подгруппы* H_α, *входящие в каждое из этих подмножеств, их произведением.*

III. *Если в каждом из прямых множителей* H_α *разложения* (1) *выбрано по подгруппе* H'_α, $E \subseteq H'_\alpha \subseteq H_\alpha$, *то подгруппа, порожденная в группе* G *всеми подгруппами* H'_α, *будет прямым произведением этих подгрупп.*

Если $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, то любой элемент g из группы G записывается в виде $g = h_1 h_2 \ldots h_n$, где $h_i \in H_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Однозначно определенный элемент h_i называется *компонентой* элемента g в прямом множителе H_i. Следует заметить, что компонента элемента g в H_i зависит от заданного прямого разложения: если будет дано другое прямое разложение группы G, также содержащее H_i в качестве одного из прямых множителей, то компонента элемента g в H_i может уже быть отличной от h_i. Понятие компоненты элемента сохраняется и для прямых произведений с бесконечным числом множителей, однако

[1]) Некоторые из H_α могут, конечно, остаться в действительности неразложенными.

следует помнить, что в этом случае каждый элемент обладает при данном прямом разложении лишь конечным числом отличных от 1 компонент.

Если $G = \prod_\alpha H_\alpha$ и если F есть произвольная подгруппа группы G, то множество F_α компонент всех элементов подгруппы F в прямом множителе H_α само будет подгруппой. Она называется *компонентой* подгруппы F в H_α. Если F есть нормальный делитель группы G, то F_α будет нормальным делителем в H_α и поэтому даже в G. Последнее вытекает из следующего общего свойства прямых произведений:

IV. *Если A есть прямой множитель группы G, то всякий нормальный делитель A' подгруппы A будет нормальным делителем и в G.*

В самом деле, в G существует такая подгруппа B, что $G = A \times B$. Если g есть произвольный элемент из G и $g = ab$, $a \in A$, $b \in B$, то

$$g^{-1}A'g = a^{-1}A'a = A'.$$

Из перестановочности элементов, принадлежащих к различным прямым множителям данного прямого произведения, вытекает, что *при перемножении элементов прямого произведения перемножаются их соответственные компоненты*. Поэтому, в частности, *компонента коммутатора двух элементов прямого произведения равна коммутатору соответственных компонент этих элементов*. Отсюда вытекает

V. *Коммутант прямого произведения равен прямому произведению коммутантов сомножителей.*

С другой стороны, из сказанного выше о компоненте коммутатора двух элементов следует, что компоненты перестановочных элементов прямого произведения перестановочны между собой, а поэтому

VI. *Центр прямого произведения равен прямому произведению центров сомножителей.*

Действительно, если элемент z принадлежит к центру группы $G = \prod_\alpha A_\alpha$, то компонента z_α элемента z в A_α будет перестановочной с компонентой любого элемента группы G, т. е. со всяким элементом из A_α.

Если F есть подгруппа прямого произведения, то F содержится в прямом произведении своих компонент, в общем случае с этим произведением не совпадая. Совпадение получится в том случае, если все компоненты подгруппы F содержатся в F, т. е. совпадают с пересечениями F и соответствующих прямых множителей. Можно доказать даже следующее свойство.

VII. *Если $G = A \times B$ и компонента подгруппы F в A совпадает с пересечением $F \cap A$, то компонента F в B совпадает с пересечением $F \cap B$ и F является прямым произведением этих двух пересечений.*

Действительно, если $f \in F$ и $f = ab$, то $b = a^{-1}f \in F$, так как по условию $a \in F$.

Отсюда следует

VII′. *Если $G = A \times B$ и подгруппа F содержит прямой множитель A, то $F = A \times (F \cap B)$.*

Отметим, наконец, свойство

VIII. *Если $G = A \times B$, то прямой множитель B изоморфен с фактор-группой G/A.*

Действительно, если Ag есть смежный класс группы G по подгруппе A и $g = ab$, то $b \in Ag$, т. е. всякий смежный класс по A содержит один и, очевидно, только один элемент из B.

Мы говорили до сих пор о разложении некоторой группы в прямое произведение ее подгрупп. В дальнейшем мы будем говорить часто о *прямом произведении некоторых данных групп*. Пусть, например, даны группы A и B. Множество всевозможных пар (a, b), где a есть элемент из A, b — элемент из B, превращается в группу при следующем определении операции:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

Эта группа будет, как легко проверить, прямым произведением своих подгрупп A', состоящей из пар вида $(a, 1)$, и B', состоящей из пар вида $(1, b)$ [1]. Указанные подгруппы соответственно изоморфны заданным группам A и B, а поэтому построенная нами группа может и будет в дальнейшем называться прямым произведением групп A и B. Эта конструкция без труда переносится на случай любого конечного числа заданных групп. Перенесение ее на случай бесконечного множества групп осуществляется следующим образом: если дано произвольное множествогрупп A_α, то элементами прямого произведения этих групп будут системы элементов a_α, по одному из каждой группы A_α, причем все эти элементы, кроме конечного числа, должны быть единицами соответствующих групп. Определение умножения этих систем таково же, как в случае конечного числа прямых множителей.

Изложенный нами способ образования новой группы из заданных групп путем построения прямого произведения последних найдет в дальнейшем многочисленные применения.

В указанной сейчас конструкции прямого произведения бесконечного множества групп можно было бы, понятно, отказаться от требования, чтобы лишь конечное число компонент было отлично от единицы, и рассматривать произвольные системы элементов, взятых по одному в каждой из данных групп A_α. Полученная группа называется *полным прямым произведением* данных групп; любопытные свойства

[1] В паре $(a, 1)$ элемент 1 есть, понятно, единица группы B, в паре $(1, b)$ — единица группы A.

этой группы указаны в работе Граева [1]. Следует отметить, однако, что для полного прямого произведения нельзя дать «внутреннего» определения, аналогичного тому, которое дано выше для обычного прямого произведения. [См. Д.6.1.]

Эти два типа прямых произведений объединяются в следующей конструкции *прямого произведения с отмеченными подгруппами*: в каждой из данных групп A_α предполагается отмеченной некоторая подгруппа B_α, $E \subseteq B_\alpha \subseteq A_\alpha$, и рассматриваются такие системы элементов, взятых по одному в каждой из групп A_α, что лишь конечное число этих элементов лежит вне соответствующих подгрупп B_α, а умножение, как и выше, производится покомпонентно. Эта конструкция, введенная Виленкиным [1], существенно используется в теории топологических абелевых групп.

Группа, которая не может быть разложена в прямое произведение своих истинных подгрупп, называется *неразложимой*, или, точнее, *неразложимой в прямое произведение*, так как позже мы встретимся и с другими видами произведений. *К числу неразложимых групп принадлежат, очевидно, все простые группы. Неразложимость аддитивной группы рациональных чисел, а также и аддитивной группы целых чисел, т. е. бесконечной циклической группы*, вытекает из того, что для любых двух рациональных чисел существует отличное от нуля общее кратное, а поэтому пересечение любых двух отличных от нуля подгрупп каждой из этих групп само отлично от нуля.

Если дана циклическая группа $\{a\}$ порядка p^m, где p — простое число, то все отличные от E подгруппы этой группы будут циклическими подгруппами элементов a, a^p, a^{p^2}, …, $a^{p^{m-1}}$. Иными словами, если даны две любые подгруппы нашей группы, то одна из них непременно будет содержать другую. Отсюда следует *неразложимость циклической группы порядка p^m, а также группы типа p^∞*.

С другой стороны, *всякая циклическая группа составного порядка разлагается в прямое произведение циклических групп, порядки которых являются степенями различных простых чисел*.

Пусть, в самом деле, циклическая группа $\{a\}$ имеет порядок

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s},$$

где $s \geqslant 2$, а $p_1, p_2, \dots, p_s$ — различные простые числа. Введем обозначение

$$q_i = p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_s^{m_s}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Элемент a^{q_i} имеет порядок $p_i^{m_i}$. Пересечение циклической подгруппы $\{a^{q_i}\}$ с произведением всех циклических подгрупп $\{a^{q_j}\}$ для $j \neq i$ равно E, так как порядки всех элементов названного произведения взаимно просты с числом p_i. Произведение подгрупп $\{a^{q_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, s$, в группе $\{a\}$ будет, следовательно, прямым, совпадающим в действительности с самой группой $\{a\}$, так как порядок прямого произведения равен произведению порядков прямых множителей.

Другими примерами разложимых групп служат аддитивная группа комплексных чисел, разлагающаяся в прямую сумму аддитивных групп действительных и чисто мнимых чисел, а также группа по умножению отличных от нуля действительных чисел, разлагающаяся в прямое произведение мультипликативной группы положительных действительных чисел и циклической группы второго порядка, порожденной числом -1. Мультипликативная группа положительных рациональных чисел разлагается в прямое произведение счетного множества бесконечных циклических групп, порождаемых различными простыми числами. Отметим также, что уже много раз встречавшаяся нам нециклическая абелева группа 4-го порядка является прямым произведением двух циклических групп 2-го порядка.

Понятие прямого произведения применяется и к группам с операторами. В этом случае следует ограничиваться, конечно, лишь такими разложениями группы в прямые произведения, все прямые множители которых допустимы относительно рассматриваемой области операторов. Если, с другой стороны, даны группы A_α с одной и той же областью операторов Σ, то прямое произведение G этих групп также можно считать операторной группой с этой же областью операторов, полагая при

$$g = a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_k}, \quad g \in G, \quad a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i},$$

что

$$g\omega = a_{\alpha_1}\omega \cdot a_{\alpha_2}\omega \dots a_{\alpha_k}\omega,$$

где $\omega \in \Sigma$. Из этого равенства следует, в частности, что *компонента допустимой подгруппы сама является допустимой подгруппой*.

Мы узнаем позже (см. § 26), что существуют разложимые группы, которые не могут быть разложены в прямое произведение неразложимых групп, и поэтому возникает вопрос об условиях, при которых группа обладает такими разложениями. С другой стороны, группа может допускать много различных таких разложений. Это приводит к вопросу об условиях единственности разложения группы в прямое произведение неразложимых множителей. Далее, два прямых разложения данной группы называются *изоморфными*, если между множителями этих разложений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие множители являются изоморфными группами. Вопрос об условиях для того, чтобы в данной группе всякие два прямых разложения с неразложимыми множителями были изоморфными или, более обще, чтобы два любых прямых разложения обладали изоморфными продолжениями, явился предметом многочисленных исследований. Все эти вопросы будут рассматриваться в гл. 11, а также для различных классов абелевых групп в гл. 6–8.

§ 18. Свободные группы. Определяющие соотношения

Целью этого параграфа является установление некоторого способа задания группы без использования индивидуальных свойств элементов того множества, в котором определена групповая операция. Для достижения этой цели необходимо построить сперва один специальный класс групп, называемых *свободными* и являющихся в некотором смысле универсальными для всех существующих в природе групп вообще.

Пусть дано некоторое непустое (конечное или бесконечное) множество $\mathfrak{M}$ символов $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ [1]). Условимся обозначать эти символы также через $x_\alpha^{+1}, x_\beta^{+1}, x_\gamma^{+1}, \ldots$ и будем считать, что этим символам взаимно однозначно соответствуют некоторые новые символы $x_\alpha^{-1}, x_\beta^{-1}, x_\gamma^{-1}, \ldots$. Выражение

$$w = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

т. е. упорядоченная система из конечного числа символов вида x_α^{+1} и x_β^{-1} (каждый из символов, входящих в выражение (1), может встречаться в нем несколько раз), будет называться *словом*, если нигде в (1) не встречаются рядом какой-либо символ x_α^{+1} и соответствующий ему символ x_α^{-1}. Так, примерами слов будут: $x_\alpha x_\beta^{-1} x_\alpha x_\alpha x_\gamma$, $x_\alpha x_\alpha x_\alpha x_\beta x_\alpha^{-1} x_\beta$, но не $x_\alpha x_\beta^{-1} x_\beta x_\alpha x_\gamma$ [2]).

Число n называется *длиной* слова w и обозначается через $l(w)$. При всяком множестве $\mathfrak{M}$ можно устроить, очевидно, слова любой длины. Словами длины 1 будут сами символы x_α и x_α^{-1} и только они. К числу слов мы будем причислять также *пустое слово* w_0, не содержащее ни одного символа; $l(w_0) = 0$.

Множество всех слов, какие могут быть написаны с помощью нашего запаса символов, становится группой при следующем определении операции: если даны слова

$$w_1 = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

$$w_2 = x_{\beta_1}^{\delta_1} x_{\beta_2}^{\delta_2} \ldots x_{\beta_m}^{\delta_m} \quad (\delta_j = \pm 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

и если равенства

$$\alpha_{n-i+1} = \beta_i \quad \text{и} \quad \varepsilon_{n-i+1} + \delta_i = 0$$

[1]) Читателю, для облегчения понимания дальнейшей конструкции, полезно сперва предположить, что множество $\mathfrak{M}$ состоит всего лишь из двух символов x_1 и x_2.

[2]) Употребляемую нами запись слов не следует понимать так, что здесь предполагается наличие какого-либо «умножения» символов. Слово является пока лишь упорядоченной системой символов, и мы могли бы, например, отделять символы, составляющие слово, друг от друга запятыми.

выполняются для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$, где k удовлетворяет условию $0 \leqslant k \leqslant \min(n, m)$, но или $a_{n-k} \neq \beta_{k+1}$, или же, при $\alpha_{n-k} = \beta_{k+1}$, имеет место равенство $\varepsilon_{n-k} = \delta_{k+1}$, то полагаем

$$w_1 w_2 = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\alpha_{n-k}}^{\varepsilon_{n-k}} x_{\beta_{k+1}}^{\delta_{k+1}} x_{\beta_{k+2}}^{\delta_{k+2}} \dots x_{\beta_m}^{\delta_m}. \tag{4}$$

Иными словами, для получения произведения $w_1 w_2$ нужно слово w_2 написать непосредственно за словом w_1; если полученное таким путем выражение

$$x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} x_{\beta_1}^{\delta_1} x_{\beta_2}^{\delta_2} \dots x_{\beta_m}^{\delta_m} \tag{5}$$

будет словом, т. е. если символы x_{α_n} и x_{β_1} или различны, или же совпадают, но обладают в этом случае одинаковыми показателями, то произведение $w_1 w_2$ получено. В противном случае необходимо выполнить в выражении (5) несколько *сокращений*, т. е. последовательно удалить пары стоящих рядом одинаковых символов с противоположными показателями. Понятно, что при выполнении этих сокращений символы, составляющие один из множителей w_1, w_2 или даже оба, могут случайно оказаться полностью уничтоженными.

Роль *единицы* при таком определении умножения слов играет, очевидно, пустое слово w_0. *Обратным* для слова (2) будет слово

$$w_1^{-1} = x_{\alpha_n}^{-\varepsilon_n} \dots x_{\alpha_2}^{-\varepsilon_2} x_{\alpha_1}^{-\varepsilon_1}.$$

В частности, обратным для символа x_α оказывается символ x_α^{-1}.

Доказательство ассоциативности умножения слов представляет уже значительные трудности. Пусть даны слова w_1, w_2 и w_3, отличные от пустого слова [1]). Будем доказывать справедливость равенства

$$w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2) w_3 \tag{6}$$

индуктивно, ведя индукцию по длине среднего множителя w_2.

Рассмотрим сперва случай $l(w_2) = 1$, т. е. $w_2 = x_\alpha^\varepsilon$. Если последний символ слова w_1 и первый символ слова w_3 оба отличны от $x_\alpha^{-\varepsilon}$, то никакие сокращения не могут быть выполнены и поэтому равенство (6) имеет место. Это равенство справедливо и в том случае, если лишь один из названных двух символов равен $x_\alpha^{-\varepsilon}$, так как в одном из произведений $w_1 w_2$, $w_2 w_3$ в этом случае нет никаких сокращений. Если же, наконец, оба эти символа равны $x_\alpha^{-\varepsilon}$, то пусть

$$w_1 = x_{\beta_1}^{\delta_1} \dots x_{\beta_s}^{\delta_s} x_\alpha^{-\varepsilon}, \quad w_3 = x_\alpha^{-\varepsilon} x_{\gamma_1}^{\eta_1} \dots x_{\gamma_t}^{\eta_t}.$$

Тогда выражение

$$x_{\beta_1}^{\delta_1} \dots x_{\beta_s}^{\delta_s} x_\alpha^{-\varepsilon} x_{\gamma_1}^{\eta_1} \dots x_{\gamma_t}^{\eta_t}$$

будет словом, так как в нем нельзя выполнить никаких сокращений, и будет равно как левой, так и правой части равенства (6).

[1]) Справедливость закона ассоциативности для трех множителей, один из которых есть w_0, очевидна.

Пусть теперь $l(w_2) \geqslant 2$. Если

$$w_2 = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\alpha_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n},$$

то полагаем

$$w_2' = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\alpha_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}.$$

Тогда w_2' есть слово, $l(w_2') < l(w_2)$ и $w_2 = w_2' \cdot x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$. Справедливость равенства (6) для рассматриваемого случая доказывается теперь путем нескольких применений этого же равенства, но для случая, когда длина среднего множителя меньше n:

$$\begin{aligned} w_1(w_2w_3) = w_1[(w_2'x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n})w_3] = w_1(w_2'(x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}w_3)] = (w_1w_2')(x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}w_3) = \\ = [(w_1w_2')x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}]w_3 = [w_1(w_2'x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n})]w_3 = (w_1w_2)w_3. \end{aligned}$$

Конечно, некоторые из круглых скобок, встречающихся в предшествующих равенствах, могут содержать произведения, которые станут словами лишь после выполнения сокращений. Это не мешает, однако, проведению доказательства.

Мы получили право говорить о группе слов, составленных из символов, входящих в множество $\mathfrak{M}$, и символов, им обратных. Эта группа называется *свободной группой*. Она вполне определяется, очевидно, заданием мощности множества $\mathfrak{M}$ и не зависит ни от каких индивидуальных свойств элементов этого множества. Если мы назовем *рангом* свободной группы, построенной с помощью множества $\mathfrak{M}$, мощность этого множества (т. е. число его элементов, если это число конечно), то путем элементарных теоретико-множественных рассмотрений можно доказать, что свободные группы конечного ранга являются счетными, а свободные группы какого-либо бесконечного ранга имеют мощность, совпадающую с этим рангом.

Свободная группа ранга 1 будет, очевидно, бесконечной циклической группой. *Всякая свободная группа, ранг которой больше единицы, уже некоммутативна*: если $\alpha \neq \beta$, то слова $x_\alpha x_\beta$ и $x_\beta x_\alpha$ будут различными элементами этой группы. Во всех случаях *все элементы свободной группы, кроме единицы, имеют бесконечный порядок*: если в элементе

$$w = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

символы $x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$ и $x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$, символы $x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}$ и $x_{\alpha_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$, ..., символы $x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$ и $x_{\alpha_{n-k+1}}^{\varepsilon_{n-k+1}}$ являются попарно обратными, но это уже не имеет места для символов $x_{\alpha_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}}$ и $x_{\alpha_{n-k}}^{\varepsilon_{n-k}}$, то полагаем

$$\overline{w} = x_{\alpha_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} x_{\alpha_{k+2}}^{\varepsilon_{k+2}} \dots x_{\alpha_{n-k}}^{\varepsilon_{n-k}}.$$

Такое k, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant k < \frac{1}{2}n$, непременно найдется, так как w есть непустое слово. Теперь для $s > 0$ будет

$$w^s = x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} \overline{w}^s x_{\alpha_{n-k+1}}^{\varepsilon_{n-k+1}} \dots x_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}.$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, не допускает никаких сокращений, т. е. является непустым словом. Отсюда следует, что $w^s \neq 1$.

Заметим, что всякое слово равно произведению составляющих его символов. Множество $\mathfrak{M}$ будет поэтому системой образующих для свободной группы, построенной над этим множеством. Такую систему образующих свободной группы условимся называть ее *системой свободных образующих*. Мы будем в дальнейшем, сохраняя за элементами свободной группы название «слово», записывать их в виде произведения степеней свободных образующих, т. е. писать, например, не $x_\alpha x_\alpha x_\alpha x_\beta^{-1} x_\alpha x_\beta x_\beta$, а $x_\alpha^3 x_\beta^{-1} x_\alpha x_\beta^2$.

С развернутой теорией свободных групп, содержащей много глубоких и важных результатов, читатель познакомится в гл. 9. Сейчас мы докажем теорему, вполне выясняющую значение свободных групп для всей теории групп.

Всякая группа изоморфна фактор-группе некоторой свободной группы.

Пусть, в самом деле, дана произвольная группа G и пусть M есть некоторая система образующих для этой группы; элементы из M будем обозначать через $a_\alpha, a_\beta, \ldots$. Берем свободную группу W, система свободных образующих которой имеет такую же мощность, как множество M. Между элементами из M и взятыми нами свободными образующими группы W устанавливаем взаимно однозначное соответствие, причем образующий элемент группы W, соответствующий элементу a_α из M, условимся обозначать через x_α. Отображение, переводящее элемент x_α из W в соответствующий ему элемент a_α из G и вообще элемент

$$x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

в элемент группы G, равный произведению

$$a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}, \tag{8}$$

будет, очевидно, гомоморфным отображением группы W на всю группу G. Отсюда, ввиду теоремы о гомоморфизмах (§ 10), следует

$$G \simeq W/H,$$

что доказывает теорему. Заметим, что нормальный делитель H группы W составлен из тех и только тех слов вида (7), соответствующие которым произведения (8) равны в группе G единице.

Из проведенного сейчас доказательства теоремы следует, что *всякая группа с конечным числом образующих является фактор-группой свободной группы конечного ранга*. Точнее, *всякая группа с n образующими есть фактор-группа свободной группы ранга n.*

Понятно, что полученное нами представление группы G в качестве фактор-группы свободной группы не является для этой группы единственным, так как оно зависит от выбора множества M.

Пусть дана произвольная группа G и пусть она представлена в виде фактор-группы некоторой свободной группы W по нормальному делителю H. Как и выше, если $x_\alpha, x_\beta, \ldots$ — свободные образующие группы W, то соответствующие им при естественном гомоморфизме элементы из G будут обозначаться через $a_\alpha, a_\beta, \ldots$, а множество всех этих элементов (среди которых могут оказаться, конечно, и равные) — через M. Пусть слово

$$x_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} x_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} \quad (\varepsilon_i \text{ — целые числа})$$

есть произвольный элемент из H. Ему соответствует в группе G равенство

$$a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} = 1,$$

которое будет называться *соотношением*, связывающим в группе G элементы множества M.

Выбираем в H такое подмножество $\mathfrak{N}$, что нормальный делитель, порожденный в группе W этим подмножеством, совпадает с H. Система соотношений, соответствующих словам, входящим в $\mathfrak{N}$, называется системой *определяющих соотношений* группы G. Все соотношения, связывающие в группе G элементы из M, могут считаться следствиями определяющих соотношений, так как всякий элемент из H может быть записан в виде произведения степеней элементов из $\mathfrak{N}$ и элементов, с ними сопряженных.

Заданием определяющих соотношений группа G вполне определяется, ибо множество $\mathfrak{N}$ вполне определяет в свободной группе W нормальный делитель H и, следовательно, фактор-группу W/H. Так как всякая группа, как доказано выше, является фактор-группой свободной группы, то мы получаем, что *всякая группа может быть задана системой определяющих соотношений относительно некоторого множества символов*; *при этом, если две группы заданы определяющими соотношениями относительно некоторых систем образующих, причем между этими системами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором определяющие соотношения одной группы перейдут в определяющие соотношения другой и обратно, то группы изоморфны.*

Обратно, *если дано произвольное множество символов M и произвольная система соотношений*, приравнивающих единице некоторые слова, составленные из символов, входящих в M, *то всегда можно указать группу, для которой эти соотношения составляют систему определяющих соотношений.* Для этого достаточно построить свободную группу над множеством M, взять в ней нормальный делитель, порожденный левыми частями заданных соотношений, и перейти к фактор-группе.

Теорема Дика. *Если группа G задается некоторой системой определяющих соотношений, а группа G' задается относительно*

тех же символов помимо этих соотношений еще некоторыми другими, то группа G' изоморфна фактор-группе группы G.

Действительно, если мы представим группы G и G' факторгруппами одной и той же свободной группы W,

$$G \simeq W/H, \quad G' \simeq W/H',$$

то нормальный делитель H содержится в нормальном делителе H'.

Эта теорема бывает иногда полезной при разыскании определяющих соотношений группы, заданной иным способом.

Примеры. 1. Конечная циклическая группа порядка n задается образующим элементом a и определяющим соотношением

$$a^n = 1.$$

2. Аддитивная группа рациональных чисел R была представлена в § 7 как сумма некоторой возрастающей последовательности бесконечных циклических групп. Опираясь на этот результат, можно задать группу R образующими элементами

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

и определяющими соотношениями

$$a_1 = a_2^2, a_2 = a_3^3, \ldots, a_n = a_{n+1}^{n+1}, \ldots.$$

3. Группа типа p^∞ может быть задана образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и определяющими соотношениями

$$a_1^p = 1, a_{n+1}^p = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

4. Симметрическая группа третьей степени S_3 задается образующими элементами a и b и определяющими соотношениями

$$a^3 = 1, \quad b^2 = 1, \quad abab = 1. \tag{9}$$

Действительно, элементы

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{9'}$$

порождают всю группу S_3 и удовлетворяют соотношениям (9), а поэтому (ввиду теоремы Дика) группа S_3 является фактор-группой группы, заданной определяющими соотношениями (9), — группа S_3 задается относительно образующих (9′) соотношениями (9) и, быть может, еще некоторыми другими. С другой стороны, из соотношений (9) следует равенство $ba = a^2b$. Всякое произведение степеней символов a и b в группе, заданной соотношениями (9), может быть, следовательно,

приведено с помощью этих соотношений к виду $a^\alpha b^\beta$, $\alpha = 0, 1, 2$, $\beta = 0, 1$, т. е. группа с определяющими соотношениями (9) состоит не более чем из шести элементов и поэтому совпадает с S_3.

5. В § 9 было показано, что группа кватернионов K имеет порядок 8 и порождается двумя элементами a, b, причем эти элементы связаны соотношениями

$$a^4 = 1, \quad b^4 = 1, \quad a^2 = b^2, \quad aba = b. \tag{10}$$

Там же по ходу дела было установлено, что группа, определяемая соотношениями (10), имеет не более восьми элементов. Отсюда (снова ввиду теоремы Дика) вытекает, что (10) является системой определяющих соотношений для группы K. Заметим, что два из четырех соотношений (10) записаны не так, как мы условились выше. Переход от этой записи к стандартной, в данном случае к записи

$$a^2 b^{-2} = 1, \quad abab^3 = 1,$$

не представляет затруднений.

Относительно задания групп определяющими соотношениями мы сделаем сейчас несколько небольших дополнительных замечаний, отсылая читателя по поводу более глубоких вопросов к гл. 10. Так, мы знаем, что свободная группа задается системой своих свободных образующих без каких-либо определяющих соотношений. Обратно, если в некоторой труппе G можно выбрать систему образующих M, не связанных никакими соотношениями [1]), то всякий элемент из G будет однозначно записываться в виде слов относительно элементов из M, т. е. группа G будет изоморфна свободной группе, построенной над M в качестве системы свободных образующих. Иными словами, *группа G будет в этом случае свободной группой и M будет для нее системой свободных образующих*.

Для того чтобы группа с образующими элементами a_α, a_β, ... была абелевой, достаточно иметь среди определяющих соотношений равенства вида

$$[a_\alpha, a_\beta] = 1, \tag{11}$$

написанные для всех пар образующих элементов; слева стоит коммутатор элементов a_α и a_β. Действительно, из перестановочности между собою всех образующих элементов группы следует, как легко проверить, перестановочность всяких двух произведений степеней этих элементов. Приведенные выше примеры 2 и 3 показывают, однако, что группа может оказаться абелевой и в том случае, если среди определяющих соотношений нет равенств вида (11).

[1]) «Тривиальные» соотношения вида $aa^{-1} = 1$ не удовлетворяют данному выше определению соотношения и поэтому к числу соотношений не причисляются.

Всякая группа может быть задана образующими и определяющими соотношениями многими различными способами. Поэтому, хотя определяющие соотношения представляют собою удобный способ «абстрактного» задания группы, т. е. задания, общего для рассматриваемой группы и всех групп, с нею изоморфных, однако в подавляющем большинстве случаев о группе, заданной соотношениями, удается сказать очень мало. Так, если группа задана системой образующих и системой определяющих соотношений, то обычно нельзя установить, конечна ли эта группа или бесконечна, коммутативна она или нет и т. д. Больше того, группа может оказаться состоящей из одного лишь единичного элемента — это будет, очевидно, в том случае, если нормальный делитель, порожденный в соответствующей свободной группе левыми частями определяющих соотношений группы, совпадает со всей этой свободной группой, — однако и этого нельзя, вообще говоря, установить из рассмотрения определяющих соотношений. Возможен и другой крайний случай: наша группа может быть в действительности свободной группой, но заданной с помощью случайной системы образующих элементов.

Конечные группы часто задаются не определяющими соотношениями, а с помощью *таблицы Кэли*. Если конечная группа G имеет порядок n, то нумеруем ее элементы, начиная с единицы:

$$1, a_2, a_3, \ldots, a_n. \tag{12}$$

Устраиваем затем квадратную таблицу из n строк и n столбцов, отмечаем ее строки сверху вниз и столбцы слева направо символами (12), а на пересечении строки, отмеченной символом a_i, и столбца, отмеченного символом a_j, ставим элемент, равный произведению $a_i a_j$. Так, если мы берем симметрическую группу третьей степени, т. е. группу с образующими a и b и соотношениями $a^3 = 1$, $b^2 = 1$, $abab = 1$ (см. выше, пример 4), и введем обозначения:

$$a_2 = a, \quad a_3 = a^2, \quad a_4 = b, \quad a_5 = ab, \quad a_6 = a^2 b,$$

то таблица Кэли будет

	1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_3	1	a_5	a_6	a_4
a_3	a_3	1	a_2	a_6	a_4	a_5
a_4	a_4	a_6	a_5	1	a_3	a_2
a_5	a_5	a_4	a_6	a_2	1	a_3
a_6	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	1

Нециклическая абелева группа 4-го порядка, являющаяся прямым произведением двух циклических групп 2-го порядка — эта группа задается образующими a и b и определяющими соотношениями

$$a^2 = 1, \quad b^2 = 1, \quad ab = ba,$$

— может быть задана следующей таблицей Кэли:

	1	a_2	a_3	a_4
1	1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	1	a_4	a_3
a_3	a_3	a_4	1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_2	1

Вообще абелевы группы и только они обладают таблицами Кэли, симметричными относительно главной диагонали.

Часть вторая

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Глава шестая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

§ 19. Ранг абелевой группы. Свободные абелевы группы

Абелевы группы составляют один из важнейших классов групп и их теория уже достаточно хорошо разработана. В настоящей главе излагаются основные понятия и факты из теории абелевых групп, в том числе теория абелевых групп с конечным числом образующих. Эти понятия и факты существенным образом используются в двух следующих главах, посвященных более глубоким ветвям теории абелевых групп.

Условимся в этой главе и всюду дальше, где будут излагаться вопросы, относящиеся специально к абелевым группам, употреблять аддитивную запись вместо мультипликативной. Основные изменения в терминологии и обозначениях, вызываемые этим условием, указаны в конце § 3. Дополнительно укажем, что вместо единичной подгруппы теперь следует говорить о *нулевой подгруппе*; обозначаться эта подгруппа будет символом O. Вместо произведения подмножеств в группе теперь следует говорить о сумме подмножеств, причем благодаря тому, что все подгруппы абелевой группы являются в ней нормальными делителями и поэтому между собою перестановочны, *сумма двух и вообще любого конечного числа произвольных подгрупп абелевой группы сама будет подгруппой этой группы* (см. § 8). Заметим, наконец, что вместо прямого произведения (см. § 17) мы говорим о *прямой*

сумме абелевых групп. Это понятие будет основным для всех глав, посвященных абелевым группам.

В соответствии с общей терминологией, введенной в § 3, абелева группа называется *периодической*, если порядки всех ее элементов конечны, *группой без кручения*, если все ее элементы, кроме нуля, имеют бесконечный порядок, и *смешанной*, если она содержит элементы как конечного, так и бесконечного порядка.

Если G — смешанная абелева группа и F — множество всех ее элементов конечного порядка, то F будет, очевидно, подгруппой группы G. Эта однозначно определенная подгруппа называется *максимальной периодической подгруппой* или, короче, *периодической частью* группы G. Фактор-группа G/F будет уже группой без кручения. Таким образом, *всякая смешанная абелева группа является расширением* (в смысле § 10) *периодической группы — своей периодической части — при помощи группы без кручения*.

К числу периодических групп относятся, в частности, абелевы группы, порядки всех элементов которых являются степенями фиксированного простого числа p. Эти группы называются *примарными* по простому числу p.

Всякая периодическая абелева группа может быть разложена, притом единственным способом, в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам.

Действительно, совокупность всех элементов периодической абелевой группы G, порядки которых являются степенями простого числа p, будет подгруппой в G, которую мы обозначим через G_p; эта подгруппа будет в G характеристической и даже вполне характеристической. Все подгруппы G_p по различным p составляют в группе G прямую сумму, так как сумма всех этих подгрупп, кроме некоторой G_q, состоит из элементов, порядки которых взаимно просты с q, а поэтому пересечение этой суммы с G_q равно нулю. С другой стороны, всякий элемент группы G содержится в сумме всех подгрупп G_p, как вытекает из доказанной в § 17 разложимости всякой конечной циклической группы в прямую сумму примарных циклических групп.

Введем понятие *ранга абелевой группы* G.

Конечную систему элементов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ группы G будем называть *линейно зависимой*, если существуют такие целые числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, что имеет место равенство

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0,$$

где нуль в правой части равенства есть, конечно, нуль группы G. Система элементов, не обладающая этим свойством, называется *линейно независимой*. Условимся называть элемент u группы G *линейно зависящим* от системы элементов $u', u'', \ldots, u^{(s)}$ этой группы, если некоторое кратное αu этого элемента, $\alpha \neq 0$, содержится в подгруппе $\{u', u'', \ldots, u^{(s)}\}$, т. е. существуют такие целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$,

что

$$\alpha u = \beta_1 u' + \beta_2 u'' + \ldots + \beta_s u^{(s)}.$$

Очевидно, *система элементов* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *тогда и только тогда будет линейно зависимой, если хотя бы один из элементов* v_i *линейно зависит от остальных элементов этой системы.*

Очевидны следующие свойства линейной зависимости:

Всякая система элементов, содержащая элемент конечного порядка, в частности содержащая нуль, линейно зависима. Всякая подсистема линейно независимой системы сама линейно независима. Всякий элемент, входящий в некоторую конечную систему элементов, линейно зависит от этой системы.

Две системы элементов группы G, $u', u'', \ldots, u^{(s)}$ и $v', v'', \ldots, v^{(t)}$, называются *эквивалентными*, если всякий элемент первой системы линейно зависит от второй системы и обратно. Всякий элемент u группы G, линейно зависящий от одной из этих систем, линейно зависит и от второй. Действительно, если при $\alpha \neq 0$

$$\alpha u \in \{u', u'', \ldots, u^{(s)}\}$$

и при $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$,

$$\beta_i u^{(i)} \in \{v', v'', \ldots, v^{(t)}\}$$

то элемент $(\alpha\beta_1\beta_2 \ldots \beta_s)\, u$ уже содержится в подгруппе $\{v', v'', \ldots, v^{(t)}\}$. Отсюда следует, что понятие эквивалентности систем элементов является транзитивным.

Теорема о замене. *Пусть в группе* G *даны две конечные системы элементов*

$$u', u'', \ldots, u^{(k)}, \tag{I}$$

$$v', v'', \ldots, v^{(l)}, \tag{II}$$

из которых первая линейно независима, причем каждый ее элемент линейно зависит от второй системы. Тогда $k \leqslant l$ *и из системы* (II) *можно так удалить* k *элементов, что оставшиеся элементы вместе с элементами системы* (I) *составят систему, эквивалентную системе* (II).

Доказательство. Теорема верна, очевидно, при $k = 0$. Пусть она уже доказана для $k - 1$.

Подсистема $u', u'', \ldots, u^{(k-1)}$ системы (I) сама линейно независима и ее элементы линейно зависят от системы (II). Мы получим поэтому, меняя, быть может, нумерацию элементов в (II), систему

$$u', u'', \ldots, u^{(k-1)}, v^{(k)}, \ldots, v^{(l)}, \tag{III}$$

эквивалентную системе (II). Элемент $u^{(k)}$, будучи линейно зависимым от системы (II), должен линейно зависеть и от системы (III),

т. е. существуют такие коэффициенты α, β_1, ..., β_l, что $\alpha \neq 0$ и

$$\alpha u^{(k)} = \beta_1 u' + \beta_2 u'' + \ldots + \beta_{k-1} u^{(k-1)} + \beta_k v^{(k)} + \ldots + \beta_l v^{(l)}.$$

Отсюда следует, что $l \geqslant k$ и что хотя бы один из коэффициентов β_k, ..., β_l отличен от нуля, так как иначе элемент $u^{(k)}$ оказался бы линейно зависящим от системы u', u'', ..., $u^{(k-1)}$. Пусть $\beta_k \neq 0$. Тогда

$$\beta_k v^{(k)} = (-\beta_1) u' + \ldots + (-\beta_{k-1}) u^{(k-1)} + \alpha u^{(k)} + \\ + (-\beta_{k+1}) v^{(k+1)} + \ldots + (-\beta_l) v^{(l)},$$

т. е. элемент $v^{(k)}$ линейно зависит от системы

$$u', u'', \ldots, u^{(k-1)}, u^k, v^{(k+1)}, \ldots, v^{(l)}. \qquad \text{(IV)}$$

Системы (III) и (IV) эквивалентны, поэтому эквивалентны и системы (II) и (IV). Теорема доказана.

Из теормы о замене следует, что *две линейно независимые эквивалентные системы элементов группы G состоят из равного числа элементов*.

Понятие линейной зависимости следующим образом распространяется на случай бесконечной системы элементов: бесконечная система элементов абелевой группы G называется *линейно зависимой*, если она содержит хотя бы одну конечную линейно зависимую подсистему, и *линейно независимой*, если все ее конечные подсистемы линейно независимы. Соответственно элемент *линейно зависит* от бесконечной системы элементов, если он линейно зависит в указанном выше смысле от некоторой конечной подсистемы этой системы. Так как объединение возрастающей последовательности линейно независимых систем группы G само линейно независимо, то *всякая группа G, не являющаяся периодической, обладает максимальными линейно независимыми системами, причем всякая ее линейно независимая система может быть включена в максимальную*. Если же группа G периодична, то она не содержит ни одной линейно независимой системы.

Если группа G обладает конечными максимальными линейно независимыми системами и, следовательно, ввиду теоремы о замене все ее максимальные линейно независимые системы конечны, то все эти системы эквивалентны между собой и поэтому, как доказано выше, состоят из одного и того же числа элементов. Это число называется *рангом* абелевой группы G, а сама группа G — *группой конечного ранга*. Естественно причислить к группам конечного ранга все периодические абелевы группы, положив их ранг равным нулю. Группа, не имеющая конечного ранга, называется *группой бесконечного ранга*. В этом случае *рангом* группы следует называть мощность максимальной линейно независимой системы элементов; она равна мощности фактор-группы нашей группы по периодической части, т. е. снова является инвариантом группы.

Всякая подгруппа A и фактор-группа G/A абелевой группы G конечного ранга сами имеют конечные ранги, причем сумма их рангов равна рангу самой группы G.

Первое утверждение вытекает из того, что всякая линейно независимая система элементов подгруппы A будет линейно независимой и в группе G, второе — из того, что, беря в группе G/A любую линейно независимую систему элементов (т. е. смежных классов по A) и выбирая в этих смежных классах по одному представителю, мы получим систему элементов, линейно независимую в группе G.

Для доказательства третьего утверждения теоремы возьмем в подгруппе A максимальную линейно независимую систему элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \quad k \geqslant 0, \tag{1}$$

а в фактор-группе G/A — максимальную линейно независимую систему смежных классов

$$b_1 + A, b_2 + A, \ldots, b_l + A, \quad l \geqslant 0, \tag{2}$$

причем $b_1, b_2, \ldots, b_l$ есть произвольная система представителей этих смежных классов. Тогда система элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l \tag{3}$$

группы G будет линейно независимой. В самом деле, из равенства

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_l b_l = 0 \tag{4}$$

мы получим, переходя к фактор-группе по A, равенство

$$\beta_1(b_1 + A) + \beta_2(b_2 + A) + \ldots + \beta_l(b_l + A) = 0,$$

откуда ввиду линейной независимости системы (2) получаем

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_l = 0.$$

Равенство (4) сводится, следовательно, к равенству

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0,$$

откуда ввиду линейной независимости системы (1) вытекает

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Остается доказать, что система (3) будет максимальной линейно независимой системой группы G. Если g — произвольный элемент группы G, то смежный класс $g + A$ будет линейно зависеть от системы (2),

$$\alpha(g + A) = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \ldots + \gamma_l(b_l + A),$$

откуда

$$\alpha g = a + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_l b_l,$$

где a — некоторый элемент подгруппы A и $a \neq 0$. Однако само a линейно зависит от системы (1), $\beta a = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \ldots + \delta_k a_k$, где $\beta \neq 0$, а поэтому

$$(\alpha\beta)g = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \ldots + \delta_k a_k + (\beta\gamma_1)b_1 + (\beta\gamma_2)b_2 + \ldots + (\beta\gamma_l)b_l,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы вытекает, что *ранг смешанной группы равен рангу ее фактор-группы по периодической части*, а также, что *ранг прямой суммы конечного числа групп конечного ранга сам конечен и равен сумме рангов прямых слагаемых*.

Сейчас будет изучен один специальный тип абелевых групп, играющий в общей теории абелевых групп весьма заметную роль.

Свободной абелевой группой называется прямая сумма бесконечных циклических групп, взятых в конечном или бесконечном числе. Если

$$U = \sum_{\nu} \{u_\nu\}$$

будет разложение свободной абелевой группы U в прямую сумму бесконечных циклических групп, то совокупность образующих элементов u_ν всех этих циклических прямых слагаемых (взятых по одному из каждого слагаемого) называется *базой* группы U. Всякий элемент группы U однозначно записывается, следовательно, в виде суммы конечного числа элементов базы, взятых с некоторыми целыми коэффициентами.

Свободная абелева группа U обладает, вообще говоря, многими различными разложениями в прямую сумму бесконечных циклических групп и поэтому многими различными базами. Так, если в базу группы U входят элементы $u_1, u_2, \ldots$, то можно изменить базу, заменив в ней элемент u_1 на элемент $u_1 + \alpha u_2$, где α — произвольное целое число. Указанным преобразованием базы группы U мы будем часто пользоваться в следующем параграфе, не делая дополнительных пояснений.

Свободная абелева группа является группой без кручения, а всякая ее база — одной из максимальных линейно независимых систем. Отсюда следует ввиду полученных выше результатов, что *если свободная группа U имеет конечный ранг n, то все ее базы состоят из n элементов*, т. е. любое разложение группы U в прямую сумму бесконечных циклических групп состоит из n слагаемых. Если же ранг группы U бесконечен, то мощность всякой ее базы будет совпадать, очевидно, с мощностью самой группы.

Заметим, что далеко не всякая максимальная линейно независимая система свободной абелевой группы служит для нее базой. Так, свободная группа ранга 1, т. е. бесконечная циклическая группа $\{u\}$, имеет две базы — элемент u или элемент $-u$, в то время как любой элемент этой группы, отличный от нуля, составляет в ней максимальную линейно независимую систему.

Свободные абелевы группы играют в теории абелевых групп ту же роль, что свободные группы в общей теории групп, а именно:

Всякая абелева группа G изоморфна фактор-группе некоторой свободной абелевой группы, причем абелева группа с n образующими изоморфна фактор-группе свободной абелевой группы ранга n.

Для доказательства выбираем в группе G систему образующих $M = (a_\alpha)$, где α пробегает некоторое множество индексов, и берем свободную абелеву группу U, база которой состоит из элементов u_α, взаимно однозначно соответствующих элементам a_α множества M. Отображение

$$k_1 u_{\alpha_1} + k_2 u_{\alpha_2} + \ldots + k_n u_{\alpha_n} \to k_1 a_{\alpha_1} + k_2 a_{\alpha_2} + \ldots + k_n a_{\alpha_n}$$

будет, очевидно, гомоморфным отображением группы U на группу G. По теореме о гомоморфизмах (§ 10) группа G изоморфна, следовательно, фактор-группе группы U по подгруппе V, составленной из тех элементов группы U, которые отображаются при рассматриваемом гомоморфизме в нуль группы G,

$$G \simeq U/V.$$

Всякая подгруппа свободной абелевой группы, отличная от нуля, сама свободна [1]).

Пусть V есть подгруппа свободной группы U. Предположим, что база группы U вполне упорядочена: $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots, \alpha < \tau$. Всякий элемент x из U, $x \neq 0$, может быть однозначно записан в виде

$$x = k_1 a_{\alpha_1} + k_2 a_{\alpha_2} + \ldots + k_n a_{\alpha_n},$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ и все k_i отличны от нуля. Условимся называть α_n *последним индексом* элемента x, k_n — его *последним коэффициентом*. Рассмотрим элементы из V, последний индекс которых является наименьшим среди последних индексов всех элементов из V, а из этих элементов выберем элемент b_1 с наименьшим положительным последним коэффициентом. Легко видеть, что всякий элемент v из V, последний индекс которого совпадает с последним индексом элемента b_1, содержится в циклической подгруппе $\{b_1\}$. Действительно, обозначим последний коэффициент элемента b_1 через k, а элемента v — через l. Если $l = kq + r$, $0 \leqslant r < k$, то содержащийся в V элемент $v - qb_1$ (если он отличен от нуля) или имеет (при $r > 0$) такой же последний индекс, что и b_1, но меньший последний коэффициент, или же (при $r = 0$) имеет меньший последний индекс. В обоих случаях мы приходим, однако, в противоречие с выбором элемента b_1, а поэтому $v = qb_1$.

[1]) Частный случай этой теоремы, относящийся к свободным абелевым группам конечного ранга, получит в следующем параграфе независимое доказательство.

Предположим теперь, что в подгруппе V уже выбраны элементы b_β для всех β, меньших γ, причем эти элементы линейно независимы, т. е. порожденная ими подгруппа V' является прямой суммой циклических групп $\{b_\beta\}$, и сверх того, всякий элемент из V, последний индекс которого не больше последнего индекса одного из элементов b_β, содержится в V'. Среди элементов из V, лежащих вне V', выбираем элементы с наименьшим последним индексом, а из них выбираем элемент b_γ с наименьшим положительным последним коэффициентом. Всякий элемент, кратный элементу b_γ, имеет такой же последний индекс, как и b_γ, поэтому $V' \cap \{b_\gamma\} = O$, откуда

$$\{V', b_\gamma\} = V' + \{b_\gamma\}.$$

Если, далее, элемент c из V имеет такой же последний индекс, как b_γ, и если последние коэффициенты элементов b_γ и c будут соответственно k_γ и k, то (ввиду определения элемента b_γ) k должно делиться на k_γ, $k = k_\gamma k'$. Поэтому последний индекс элемента $c - k'b_\gamma$ меньше, чем у элемента b_γ, т. е. $c - k'b_\gamma \in V'$, а тогда $c \in V' + \{b_\gamma\}$. Этот процесс выбора элементов b_β может продолжаться до тех пор, пока не будут исчерпаны все элементы подгруппы V. Подгруппа V является, следовательно, свободной абелевой группой с базой $b_1, b_2, \ldots, b_\beta, \ldots$, где β меньше некоторого σ.

Докажем, наконец, следующую теорему.

Если фактор-группа абелевой группы G по подгруппе B является свободной группой, то B служит для G прямым слагаемым.

В самом деле, пусть

$$G/B = \sum_\alpha \{\overline{a}_\alpha\}$$

будет разложение группы G/B в прямую сумму бесконечных циклических групп. В каждом из смежных классов $\overline{a}_\alpha$ выбираем по представителю a_α. Подгруппа A группы G, порожденная всеми элементами a_α, будет прямой суммой циклических подгрупп $\{a_\alpha\}$, причем $A \cap B = O$. Вместе с тем всякий смежный класс группы G по подгруппе B содержит некоторый элемент из A и поэтому

$$G = \{B, A\} = B + A.$$

Заметим, что среди подгрупп абелевой группы G, фактор-группы по которым свободны, может не быть минимальной, а поэтому группа G не обязана разлагаться в прямую сумму свободной группы и группы, уже не обладающей свободными фактор-группами; примером такой группы служит полная прямая сумма счетного множества бесконечных циклических групп (см. § 17).

§ 20. Абелевы группы с конечным числом образующих

Абелевы группы с конечным числом образующих составляют класс групп, допускающий исчерпывающее изучение. Этот класс групп представляет особый интерес ввиду его исключительно важной роли в различных приложениях; так, абелевы группы с конечным числом образующих служат основным орудием в комбинаторной топологии.

Мы знаем из предшествующего параграфа, что всякая абелева группа с n образующими является фактор-группой свободной абелевой группы ранга n, которую мы будем обозначать в этом параграфе через U_n. Мы знаем, далее, что всякая подгруппа группы U_n сама свободна, причем ее ранг будет, конечно, не больше n. Не опираясь на этот последний результат, мы докажем сейчас следующую более сильную теорему о подгруппах группы U_n; на этой теореме основывается, по существу, вся теория абелевых групп с конечным числом образующих.

Всякая подгруппа V группы U_n, отличная от O, сама является свободной группой и ее ранг k не превосходит n. Больше того, можно выбрать такие базы $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ группы U_n и $v_1, v_2, \ldots, v_k$ группы V, что

$$v_i = \varepsilon_i \overline{u}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ являются положительными целыми числами и ε_{i+1} делится на ε_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Доказательство. Справедливость теоремы для $n = 1$ непосредственно следует из теоремы о подгруппах циклической группы (§ 6). Пусть теорема уже доказана для группы U_{n-1}. Если в группе U_n задана отличная от O подгруппа V, то всякому выбору базы для группы U_n однозначно соответствует некоторое целое положительное число, равное наименьшему из положительных чисел, встречающихся в качестве коэффициентов в тех линейных формах относительно этой базы, которые составляют подгруппу V. Этот минимальный положительный коэффициент меняется, вообще говоря, при изменении базы группы U_n. Ищем теперь такую базу группы U_n, для которой этот коэффициент достигает наименьшего из возможных для него значений. Пусть это будет база

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \tag{1}$$

пусть ε_1 ($\varepsilon_1 \geqslant 1$) есть минимальный положительный коэффициент, соответствующий этой базе, и пусть

$$v_1 = \varepsilon_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

есть один из тех элементов подгруппы V, запись которых через базу (1) содержит ε_1 в качестве одного из коэффициентов [1]).

Разделим каждый из коэффициентов $\alpha_2, \ldots, \alpha^n$ на ε_1:

$$\alpha_i = \varepsilon_1 q_i + r_i, \quad 0 \leqslant r_i < \varepsilon_1, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

и преобразуем базу (1) группы U_n, заменяя элемент u_1 элементом

$$\overline{u}_1 = u_1 + q_2 u_2 + \ldots + q_n u_n.$$

В новой базе $\overline{u}_1, u_2, \ldots, u_n$ элемент v_1 записывается следующим образом:

$$v_1 = \varepsilon_1 \overline{u}_1 + r_2 u_2 + \ldots + r_n u_n.$$

Отсюда, так как все r_i, $i = 2, \ldots, n$, неотрицательны и меньше ε_1, следуют, как показывает выбор числа ε_1, равенства

$$r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 0,$$

т. е. $v_1 = \varepsilon_1 \overline{u}_1$.

Собираем, далее, все те элементы подгруппы V, в записи которых относительно новой базы коэффициент при $\overline{u}_1$ равен нулю. Эти элементы составляют подгруппу V' группы V, пересечение которой с циклической подгруппой элемента v_1 есть O. Докажем, что сумма подгрупп $\{v_1\}$ и V' совпадает с V. Пусть

$$v = \beta_1 \overline{u}_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$$

есть произвольный элемент подгруппы V. Если $\beta_1 = \varepsilon_1 q + r$, $0 \leqslant r < \varepsilon_1$, то содержащийся в V элемент

$$v' = v - q v_1 = r \overline{u}_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$$

имеет в качестве коэффициента при $\overline{u}_1$ число, меньшее, чем ε_1, откуда, ввиду определения числа ε_1, следует $r = 0$. Поэтому элемент v' содержится в подгруппе V', а элемент $v = q v_1 + v'$ входит в сумму подгрупп $\{v_1\}$ и V'.

Отсюда следует, что если $V' = O$, то $V = \{v_1\}$ и наша теорема доказана. Если же $V' \neq O$, то мы получаем разложение подгруппы V в прямую сумму

$$V = \{v_1\} + V'.$$

Подгруппа V' содержится в подгруппе $U' = \{u_2, \ldots, u_n\}$, являющейся свободной группой ранга $n - 1$, и сама будет поэтому, ввиду индуктивного предположения, свободной. Существуют, далее, такие базы $\overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ для U' и $v_2, \ldots, v_k$ для V', что $k - 1 \leqslant n - 1$ и $v_i = \varepsilon_i \overline{u}_i$, где $\varepsilon_i > 0$ и ε_{i+1} делится на ε_i, $i = 2, 3, \ldots, k$.

[1]) Предположение, что ε_1 есть коэффициент при элементе u_1, является законным, так как мы не считаем базу группы U_n упорядоченной.

Мы получаем уже, что подгруппа V есть свободная группа ранга k, $k \leqslant n$ [1]). Для доказательства того, что базы

$$\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n \tag{2}$$

для группы U_n и

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \tag{3}$$

для подгруппы V удовлетворяют всем требованиям доказываемой теоремы, нам остается лишь показать, что число ε_2 делится без остатка на число ε_1. Пусть $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 q_0 + r_0$, $0 \leqslant r_0 < \varepsilon_1$. Преобразуем базу (2) группы U_n, заменяя элемент $\overline{u}_1$ элементом

$$\overline{u}_1' = \overline{u}_1 - q_0 \overline{u}_2.$$

Относительно этой новой базы лежащий в V элемент $v_2 - v_1$ записывается в виде

$$v_2 - v_1 = (-\varepsilon_1)\overline{u}_1' + r_0 \overline{u}_2,$$

откуда, снова ввиду выбора числа ε_1, следует $r_0 = 0$.

Теорема о подгруппах группы U_n доказана полностью. Непосредственным применением этой теоремы доказывается следующая основная теорема.

Всякая абелева группа с конечным числом образующих разлагается в прямую сумму циклических подгрупп [2]).

Доказательство. Пусть дана абелева группа G с конечным числом образующих. Как мы знаем, группа G изоморфна фактор-группе некоторой свободной группы U_n по некоторой ее подгруппе V. Выбираем на основании доказанной выше теоремы такие базы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ для U_n и $v_1, v_2, \ldots, v_k$ для V, что для $i = 1, 2, \ldots, k$ будет $v_i = \varepsilon_i u_i$, где $\varepsilon_i > 0$ и ε_{i+1} делится на ε_i. Благодаря такому выбору баз элемент

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \tag{4}$$

из группы U_n тогда и только тогда будет содержаться в подгруппе V, если коэффициенты α_i делятся на ε_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, а коэффициенты α_j, $j = k+1, \ldots, n$, равны нулю. Действительно, если коэффициенты α_i удовлетворяют этим условиям, то элемент u может быть записан через базу $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Обратно, если

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k,$$

то достаточно заменить всякое v_i через $\varepsilon_i u_i$ и сравнить с (4), так как всякий элемент из U_n однозначно записывается через базу этой группы. В фактор-группе U_n/V элемент $u_i + V$ имеет при $i \leqslant k$ поря-

[1]) Заметим, что ранг истинной подгруппы свободной группы может совпадать с рангом самой группы.

[2]) Эта прямая сумма может состоять, конечно, и лишь из одного прямого слагаемого, если сама группа циклическая.

док ε_i, а при $i > k$ бесконечный порядок. Циклические подгруппы всех этих элементов дают в сумме всю фактор-группу, причем, как следует из сделанного выше замечания, составляют даже прямую сумму — всякий элемент из U_n/V однозначно записывается в виде суммы элементов из циклических подгрупп $\{u_i + V\}$. Конечно, если несколько первых из чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ равны 1, то соответствующие прямые слагаемые $\{u_1 + V\}, \{u_2 + V\}, \ldots$ должны быть исключены. Ввиду изоморфизма группы G с фактор-группой U_n/V теорема доказана не только для U_n/V, но и для G.

Из этой теоремы следует, в частности, что *всякая нециклическая абелева группа с конечным числом образующих является разложимой*. Из § 17 мы знаем, что бесконечная циклическая группа, а также всякая примарная циклическая группа, т. е. циклическая группа порядка p^m, где p — простое число, неразложима; с другой стороны, непримарная конечная циклическая группа разложима в прямую сумму примарных циклических групп. Этот последний результат позволяет получить следующее усиление формулировки основной теоремы:

Всякая абелева группа G с конечным числом образующих разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых циклических подгрупп, частью конечных примарных, частью бесконечных.

Образующие элементы циклических прямых слагаемых из разложения группы G в прямую сумму неразложимых подгрупп (взятые по одному из каждого слагаемого) составляют базу этой группы. Для случая свободной группы это понятие совпадает с понятием базы, определенным в предыдущем параграфе.

Из доказанной выше основной теоремы следует, в частности, что *всякая конечная абелева группа разлагается в прямую сумму конечных циклических групп, которые можно считать даже примарными*. Именно эта теорема положила начало созданию теории абелевых групп. Она была отчасти известна еще Гауссу, а первое полное доказательство дали Фробениус и Штикельбергер [1]. Позже эта теорема многократно передоказывалась; для случая бесконечных абелевых групп с конечным числом образующих также имеется несколько доказательств основной теоремы. [См. Д.28.2.]

Таким образом, мы получим все абелевы группы с конечным числом образующих, если будем брать прямые суммы всевозможных конечных систем циклических групп, бесконечных или конечных примарных. Будут ли все получаемые этим путем абелевы группы различными? Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Число бесконечных циклических слагаемых и совокупность порядков примарных циклических слагаемых не зависят от выбора разложения рассматриваемой абелевой группы с конечным числом образующих в прямую сумму неразложимых подгрупп, т. е. от выбора ее базы.

Иными словами, *любые два разложения абелевой группы G с конечным числом образующих в прямую сумму неразложимых циклических групп изоморфны между собой*.

Доказательство этой теоремы мы объединим с доказательством теоремы о подгруппах группы G, формулировка которой будет дана ниже. Сперва докажем следующее утверждение:

Всякая подгруппа H абелевой группы G с конечным числом образующих сама обладает конечной системой образующих.

Действительно, группа G является фактор-группой некоторой свободной абелевой группы U по ее подгруппе V. Подгруппе H соответствует в группе U подгруппа U', содержащая V, причем

$$H \simeq U'/V.$$

Но U' обладает, как показано выше, конечной системой образующих. Такой системой обладает, следовательно, и подгруппа H.

Теорема о подгруппах абелевой группы G с конечным числом образующих состоит в следующем.

Пусть некоторое разложение группы G в прямую сумму неразложимых циклических групп содержит r бесконечных циклических слагаемых, $r \geqslant 0$; пусть, далее, число примарных циклических слагаемых, относящихся к данному простому числу p, равно k_p, причем $k_p \geqslant 0$, а порядками этих слагаемых служат числа

$$p^{\alpha_{p1}}, p^{\alpha_{p2}}, \ldots, p^{\alpha_{pk_p}},$$

где

$$\alpha_{p1} \geqslant \alpha_{p2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{pk_p}.$$

Пусть, с другой стороны, дано произвольное разложение подгруппы H группы G в прямую сумму неразложимых циклических групп, содержащее s бесконечных циклических слагаемых и, для каждого простого p, l_p циклических слагаемых, примарных по p, причем порядками этих слагаемых служат числа

$$p^{\beta_{p1}}, p^{\beta_{p2}}, \ldots, p^{\beta_{pl_p}},$$

где

$$\beta_{p1} \geqslant \beta_{p2} \geqslant \ldots \geqslant \beta_{pl_p}. \tag{5}$$

Тогда

$$s \leqslant r \tag{6}$$

и для каждого простого p

$$l_p \leqslant k_p, \tag{7}$$

$$\beta_{pi} \leqslant \alpha_{pi}, \quad i = 1, 2, \ldots, l_p. \tag{8}$$

Эта теорема будет доказываться одновременно с теоремой об изоморфизме разложений группы G. Прежде всего, элементы бесконечного порядка, входящие в произвольно выбранную базу группы G,

составляют, как легко видеть, ее максимальную линейно независимую систему, а поэтому число таких элементов равно рангу этой группы, т. е. не зависит от выбора базы. Отсюда следует также утверждение (6) теоремы о подгруппах, так как ранг подгруппы H не превосходит ранга группы G.

Мы знаем, далее, что периодическая часть A группы G разлагается в прямую сумму примарных подгрупп, относящихся к различным простым числам,

$$A = \sum_p A_p,$$

причем периодическая часть подгруппы H разлагается в прямую сумму своих пересечений B_p с подгруппами A_p, $B_p = H \cap A_p$. Вместе с тем подгруппа A_p порождается, как легко проверить, теми элементами произвольной базы группы G, порядки которых являются степенями числа p. Этим доказательство обеих теорем сведено на случай конечной примарной группы A_p и ее подгруппы B_p.

Закончим сначала доказательство теоремы о подгруппах. Подгруппа из элементов порядка p группы A_p является прямой суммой k_p циклических слагаемых порядка p, т. е. имеет порядок p^{k_p}. Соответственная подгруппа группы B_p имеет порядок p^{l_p}. Отсюда следует, что $l_p \leqslant k_p$. Пусть теперь

$$\beta_{p1} \leqslant \alpha_{p1},\ \ldots,\ \beta_{p,\,j-1} \leqslant \alpha_{p,\,j-1}, \quad \text{но} \quad \beta_{pj} > \alpha_{pj}. \tag{9}$$

Совокупность C элементов группы A_p, делящихся в этой группе на число $p^{\alpha_{pj}}$, т. е. таких элементов c, для которых уравнение $p^{\alpha_{pj}} x = c$ имеет в A_p решение, будет подгруппой группы A_p. Если $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k_p}$ — заданная база группы A_p, причем порядок элемента a_i равен $p^{\alpha_{pi}}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_p$, то подгруппа C будет, как легко проверить, прямой суммой циклических подгрупп, порожденных элементами

$$p^{\alpha_{pj}} a_1,\ p^{\alpha_{pj}} a_2,\ \ldots,\ p^{\alpha_{pj}} a_{j-1},$$

т. е. обладает базой, состоящей из $j-1$ элементов. С другой стороны, ввиду (9) и (5) подгруппа C' группы B_p, составленная из элементов, делящихся на $p^{\alpha_{pj}}$ уже в B_p, обладает базой, содержащей не менее чем j элементов. Однако C' является подгруппой в C, а мы уже доказали (7), т. е. доказали, что число элементов в базе подгруппы конечной примерной абелевой группы не больше числа элементов в базе самой группы. Полученным противоречием заканчивается доказательство теоремы о подгруппах.

Теорема об изоморфизме прямых разложений группы A_p непосредственно следует из теоремы о подгруппах, если положить $B_p = A_p$ и учесть, что для двух данных баз группы A_p должны наряду с неравенствами (7) и (8) по соображениям симметрии иметь место и противоположные неравенства, т. е. в действительности

$$i_p = k_p, \quad \beta_{pi} = \alpha_{pi}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_p.$$

Число бесконечных циклических слагаемых — ранг группы — и порядки примарных циклических слагаемых из любого разложения абелевой группы с конечным числом образующих называются *инвариантами* этой группы. Это будет даже *полная система инвариантов*, так как всякие две группы, у которых эти инварианты совпадают, будут изоморфными. Используя инвариантность этих чисел, читатель без труда докажет инвариантность, т. е. независимость от выбора прямого разложения группы, тех последовательно делящих друг друга чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$, которые были порядками циклических слагаемых в разложении, полученном при доказательстве основной теоремы. Числа эти называются иногда *коэффициентами кручения* группы G; порядки примарных циклических слагаемых мы условимся для сокращения называть *конечными инвариантами* группы.

Полученное нами в теореме о подгруппах описание инвариантов подгрупп абелевой группы с конечным числом образующих не исчерпывает, конечно, всех вопросов, которые можно поставить относительно этих подгрупп. Так, многие математики занимались вопросом о числе всех подгрупп конечной абелевой группы или о числе подгрупп того или иного специального вида. В этом же направлении идет следующий вопрос: если конечная примарная абелева группа задана своими инвариантами и если выбрана база этой группы, то нельзя ли получить полное перечисление всех подгрупп этой группы, задавая каждую из них некоторой «канонической» базой; эта база при выбранной базе самой группы должна определяться однозначно и быть в некотором смысле наилучшей. Решение этой проблемы дано Биркгофом [3].

§ 21. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы

Для эндоморфизмов абелевой группы G можно ввести, помимо известного нам из § 12 умножения, также операцию сложения. Именно, *суммой* эндоморфизмов χ и η называется отображение, переводящее всякий элемент a группы G в элемент $a\chi + a\eta$,

$$a(\chi + \eta) = a\chi + a\eta.$$

Это отображение также будет эндоморфизмом группы G, так как [1]

$$(a+b)(\chi+\eta) = (a+b)\chi + (a+b)\eta = (a\chi + b\chi) + \\ + (a\eta + b\eta) = a(\chi+\eta) + b(\chi+\eta).$$

[1] Здесь мы существенно воспользовались коммутативностью операции в группе G. В случае неабелевой группы G сумма эндоморфизмов χ и η будет эндоморфизмом тогда и только тогда, когда подгруппы $G\chi$ и $G\eta$ — образы группы G при этих эндоморфизмах — поэлементно перестановочны. [См. Д.3.6.]

Сложение эндоморфизмов коммутативно и ассоциативно. Роль нуля играет нулевой эндоморфизм. Если χ — эндоморфизм группы G, то отображение $-\chi$, переводящее всякий элемент a этой группы в элемент $-a\chi$,

$$a(-\chi) = -a\chi,$$

само будет эндоморфизмом:

$$(a+b)(-\chi) = -(a+b)\chi = -(a\chi + b\chi) = a(-\chi) + b(-\chi),$$

причем сумма эндоморфизмов χ и $-\chi$ равна нулевому эндоморфизму. Можно производить, следовательно, и *вычитание* эндоморфизмов:

$$\chi - \eta = \chi + (-\eta).$$

Сумма и произведение эндоморфизмов абелевой группы связаны *законами дистрибутивности*:

$$(\chi_1 + \chi_2)\eta = \chi_1\eta + \chi_2\eta, \tag{1}$$

$$\eta(\chi_1 + \chi_2) = \eta\chi_1 + \eta\chi_2. \tag{2}$$

Действительно, для любого a из G будет

$$a[(\chi_1 + \chi_2)\eta] = [a(\chi_1 + \chi_2)]\eta = (a\chi_1 + a\chi_2)\eta = \\ = (a\chi_1)\eta + (a\chi_2)\eta = a(\chi_1\eta) + a(\chi_2\eta) = a(\chi_1\eta + \chi_2\eta),$$

чем доказано равенство (1). Равенство (2) доказывается так же просто.

Все сказанное выше вместе с результатами из § 12 об умножении эндоморфизмов приводит к следующей теореме.

Множество всех эндоморфизмов абелевой группы является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения эндоморфизмов.

Эндоморфизмы некоммутативной группы не образуют кольца, ввиду невозможности неограниченно выполнять сложение и вычитание. Изучению свойств системы эндоморфизмов некоммутативной группы посвящены работы Фиттинга [1, 4].

Рассмотрим некоторые примеры и прежде всего найдем кольцо эндоморфизмов бесконечной циклической группы. Пусть a есть образующий элемент этой группы. Эндоморфизм χ переводит элемент a в элемент na ($n \gtreqless 0$), причем заданием целого числа n эндоморфизм χ вполне определяется. Этим между эндоморфизмами бесконечной циклической группы и целыми числами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Если

$$a\chi = na, \quad a\eta = ka,$$

то

$$a(\chi\eta) = (na)\eta = (nk)a,$$
$$a(\chi + \eta) = na + ka = (n+k)a.$$

Мы получаем, что *кольцо эндоморфизмов бесконечной циклической группы изоморфно кольцу C целых чисел*. Таким же методом можно доказать, что *кольцо эндоморфизмов конечной циклической группы порядка n изоморфно кольцу вычетов C_n кольца C по* $\bmod n$.

Найдем теперь кольцо эндоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел R. Всякий эндоморфизм χ этой группы вполне определяется образом числа 1: если $1 \cdot \chi = r$ и если $\left(\frac{1}{n}\right)\chi = r'$, то $nr' = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right)\chi = r$, откуда $r' = \frac{r}{n}$, а поэтому

$$\left(\frac{m}{n}\right)\chi = \frac{m}{n}\, r. \tag{3}$$

Обратно, выбирая произвольным образом рациональное число r и задавая отображение χ группы R формулой (3), мы получим эндоморфизм этой группы. Таким образом, между эндоморфизмами группы R и рациональными числами мы установили взаимно однозначное соответствие, а так как из

$$1 \cdot \chi = r_1, \quad 1 \cdot \eta = r_2$$

следует

$$1 \cdot (\chi\eta) = r_1\eta = r_1 r_2, \quad 1 \cdot (\chi + \eta) = r_1 + r_2,$$

то, оказывается, *кольцо эндоморфизмов группы R изоморфно полю рациональных чисел*. Таким образом, всякий эндоморфизм группы R, отличный от нулевого, обладает обратным и поэтому является автоморфизмом.

Найдем, наконец, кольцо эндоморфизмов группы типа p^∞. Эта группа задается образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{4}$$

и соотношениями

$$pa_1 = 0, \quad pa_{n+1} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Ее эндоморфизм χ вполне определяется заданием образов всех элементов (4), а так как все элементы нашей группы, порядки которых не превосходят p^n, лежат в подгруппе $\{a^n\}$, то

$$a_n\chi = k_n a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$0 \leqslant k_n < p^n. \tag{7}$$

Так как, далее, соотношения (5) должны иметь место и для образов элементов (4), то

$$p(a_{n+1}\chi) = a_n\chi,$$

откуда

$$p(k_{n+1}a_{n+1}) = k_{n+1}a_n = k_n a_n,$$

т. е.

$$k_{n+1} \equiv k_n (\bmod\, p^n), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Таким образом, всякому эндоморфизму χ группы типа p^∞ соответствует последовательность натуральных чисел

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots), \tag{9}$$

подчиненных условиям (7) и (8). Двум разным эндоморфизмам соответствуют при этом различные последовательности, так как хотя бы один из элементов a_n имеет при этих эндоморфизмах различные образы. С другой стороны, всякая последовательность (9), подчиненная условиям (7) и (8), определяет некоторый эндоморфизм, а именно задаваемый равенствами (6).

Пусть помимо эндоморфизма χ, определяемого последовательностью (9), в группе типа p^∞ задан еще эндоморфизм η, которому соответствует последовательность

$$(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots). \tag{10}$$

Тогда

$$a_n(\chi + \eta) = (k_n + l_n)a_n, \quad a_n(\chi\eta) = (k_n l_n)a_n.$$

Однако из справедливости условий (8) для последовательности (9) и аналогичных условий для последовательности (10) вытекает:

$$k_{n+1} + l_{n+1} \equiv k_n + l_n (\mathrm{mod}\ p^n),$$
$$k_{n+1} l_{n+1} \equiv k_n l_n (\mathrm{mod}\ p^n),$$

причем эти сравнения не нарушаются, если их левые части заменяются положительными вычетами по модулю p^{n+1}, а правые — по модулю p^n. Таким образом, сумме и произведению эндоморфизмов χ и η соответствуют сумма и произведение последовательностей (9) и (10), получающиеся их покомпонентным сложением или умножением и последующим редуцированием на каждом n-м месте по модулю p^n.

Множество последовательностей вида (9), подчиненных условиям (7) и (8), со сложением и умножением, выполняемым по только что описанным правилам, будет, следовательно, изоморфным кольцу эндоморфизмов группы типа p^∞, т. е. само будет кольцом, притом коммутативным. Это кольцо называется *кольцом целых p-адических чисел* и играет в различных ветвях алгебры, в первую очередь, в теории полей и топологической алгебре, весьма значительную роль. Таким образом, *кольцо эндоморфизмов группы типа p^∞ изоморфно кольцу целых p-адических чисел*.

Последовательность $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, соответствующая нулевому эндоморфизму, будет нулем кольца целых p-адических чисел, последовательность $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, соответствующая тождественному автоморфизму, — его единицей. Так как, далее, эндоморфизм группы типа p^∞ тогда и только тогда будет автоморфизмом, если он переводит элемент a_1 не в нуль, то целое p-адическое число (9) тогда и только тогда будет обладать обратным, если $k_1 \neq 0$.

Этим путем можно было бы получить ряд других свойств кольца целых p-адических чисел. Мы покажем лишь, что *это кольцо не содержит делителей нуля*. В самом деле, образом группы типа p^∞ при любом ненулевом эндоморфизме будет сама эта группа, а не ее истинная подгруппа, и поэтому результатом последовательного выполнения двух ненулевых эндоморфизмов не может явиться нулевой эндоморфизм.

Переходим к вопросу о кольце эндоморфизмов прямой суммы. Для этой цели необходимо ввести понятие *группы гомоморфизмов* одной абелевой группы в другую. Рассмотрим множество всех гомоморфных отображений абелевой группы A в абелеву группу B и для любых двух гомоморфизмов χ, η из этого множества определим *сумму* формулой

$$a(\chi+\eta)=a\chi+a\eta, \quad a\in A.$$

Доказательство того, что отображение $\chi+\eta$ будет гомоморфизмом и что этим путем множество гомоморфизмов группы A в группу B превращается в абелеву группу, проводится дословным повторением того, что было сказано в начале параграфа для частного случая сложения эндоморфизмов. [См. Д.33.5.]

Заметим, что если даны абелевы группы A, B и C, то можно говорить о *произведении* гомоморфизма A в B на гомоморфизм B в C, понимая под этим результат последовательного выполнения указанных гомоморфизмов; это будет, очевидно, гомоморфизм A в C.

Пусть теперь абелева группа G представлена в виде прямой суммы конечного числа групп H_i,

$$G=\sum_{i=1}^{n} H_i.$$

Обозначим через R_{ii} кольцо эндоморфизмов группы H_i, а через R_{ij} при $i\neq j$ — группу гомоморфизмов группы H_i в группу H_j. Тогда справедлива следующая теорема (см. Кишкина [1]).

Кольцо эндоморфизмов группы $G=\sum\limits_{i=1}^{n} H_i$ *изоморфно кольцу квадратных матриц* (χ_{ij}) *порядка* n, *где* $\chi_{ij}\in R_{ij}$, *с обычными для матриц определениями операций сложения и умножения* [1]). В самом деле, отнесем всякой матрице (χ_{ij}) указанного вида отображение χ группы G в себя, определяемое следующим образом: если $g\in G$, причем

$$g=\sum_{i=1}^{n} h_i, \quad h_i\in H_i,$$

[1]) Заметим, что для матриц указанного вида не только сложение, что очевидно, но и умножение всегда выполнимы и приводят к матрицам этого же вида.

то положим

$$g\chi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\chi_{ij}.$$

Это отображение будет, как легко видеть, эндоморфизмом группы G. Обратно, всякий эндоморфизм χ группы G соответствует в этом смысле некоторой матрице: если h_i — произвольный элемент из H_i и если

$$h_i\chi = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}, \quad h_{ij} \in H_j,$$

то положим

$$h_i\chi_{ij} = h_{ij};$$

отображение χ_{ij} будет, очевидно, гомоморфизмом группы H_i в группу H_j. Доказательство того, что полученное взаимно однозначное соответствие между эндоморфизмами группы G и матрицами вида (χ_{ij}) ставит в соответствие сумме и произведению эндоморфизмов сумму и произведение соответствующих матриц, не представляет никаких затруднений и предоставляется читателю. Отсюда вытекает, в частности, что матрицы вида (χ_{ij}) действительно составляют кольцо.

Из доказанной теоремы и результатов § 12 вытекает, что *группа автоморфизмов группы* $G = \sum_{i=1}^{n} H_i$ *изоморфна мультипликативной группе тех матриц вида* (χ_{ij}), *для которых в кольце всех этих матриц существует обратная матрица*. Заметим, что тождественному автоморфизму группы G соответствует матрица, у которой по главной диагонали стоят единицы колец R_{ii}, а вне этой диагонали — нули.

Приложим эти результаты к случаю абелевых групп с конечным числом образующих, разложимых, как мы знаем, в прямую сумму циклических групп, бесконечных и конечных примарных. Кольца эндоморфизмов циклических групп нам уже известны. Столь же легко доказывается следующее утверждение: если A и B — две циклические группы, бесконечные или конечные примарные, то группа гомоморфизмов группы A в группу B 1) изоморфна группе B, если группа A — бесконечная циклическая, 2) будет циклической порядка $p^{\min(k,l)}$, если группы A и B являются примарными по одному и тому же простому числу p и имеют соответственно порядки p^k и p^l, 3) равна нулю во всех других случаях. Заметим, далее, что если даны циклические группы $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ и гомоморфизмы φ первой во вторую и ψ второй в третью, причем

$$a\varphi = kb, \quad b\psi = lc,$$

то

$$a(\varphi\psi) = (kl)c.$$

Поэтому, если рассматривать указанные выше группы гомоморфизмов циклических групп как аддитивные группы кольца целых чисел C

или его соответствующих колец вычетов C_n, то мы получим, что произведению гомоморфизмов соответствует произведение соответствующих целых чисел, редуцированное, понятно, по модулю порядка группы $\{c\}$.

Мы предоставляем читателю детальное доказательство утверждений предшествующего абзаца, а также фактическое описание кольца эндоморфизмов абелевой группы с конечным числом образующих, заданной своими инвариантами. Отметим лишь следующие результаты, относящиеся к случаю свободной абелевой группы.

Кольцо эндоморфизмов свободной абелевой группы ранга n изоморфно кольцу всех квадратных матриц порядка n с целочисленными элементами.

Группа автоморфизмов свободной абелевой группы ранга n изоморфна мультипликативной группе тех квадратных матриц порядка n с целочисленными элементами, определители которых равны ± 1.

Группам автоморфизмов и кольцам эндоморфизмов различных классов абелевых групп посвящен ряд работ, в частности, работы Шода [1], [3], Бэра [14], [27], Дэрри [1], Шифмана [1], Кишкиной [1]. [См. § Д.34.]

§ 22. Абелевы группы с операторами

В разнообразных приложениях абелевых групп с операторами область операторов обычно оказывается ассоциативным кольцом R с элементами α, β, γ, …, причем, помимо выполняющегося для любых операторов условия

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha,$$

справедливы также следующие два условия, устанавливающие связь между операцией в группе G и операциями, определенными в кольце R [1]):

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \tag{1}$$

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta. \tag{2}$$

Лишь при выполнении условий (1) и (2) мы будем говорить, что *группа G обладает кольцом операторов R*. Говорят также, что группа G является *модулем над кольцом R*, или, короче, является *R-модулем*.

Естественность условий (1) и (2) следует из того, что если областью операторов для абелевой группы G считается кольцо ее эндоморфизмов

[1]) Необходимо учесть, конечно, что знак $+$ в левой части равенства (1) есть знак сложения в кольце R, а этот же знак в правой части равенства означает операцию в группе G. Соответственно в равенстве (2) нужно различать произведение элементов из R и действие оператора из R на элемент из G.

или любое подкольцо этого кольца, то условия (1) и (2) непосредственно следуют из определения суммы и произведения эндоморфизмов. Далее, если некоторое кольцо рассматривается как правосторонняя область операторов для его аддитивной группы, то условия (1) и (2) превращаются в дистрибутивность операций в кольце и ассоциативность умножения. Наконец, изучающиеся в курсе высшей алгебры векторные пространства над некоторым полем P будут, очевидно, P-модулями. Заметим, что всякая абелева группа без операторов может считаться модулем над кольцом целых чисел.

Из (1) следует $a\alpha = a(\alpha + 0) = a\alpha + a \cdot 0$, откуда $a \cdot 0 = 0$ [1], т. е. нулю кольца R как оператору соответствует нулевой эндоморфизм группы G.

Далее, $a\alpha = a[\alpha + \beta - \beta] = a(\alpha - \beta) + a\beta$, откуда

$$a(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta. \tag{1'}$$

Если кольцо R обладает единицей ε, то оператору ε не обязательно соответствует тождественный автоморфизм группы G. Так, условия (1) и (2) будут выполнены, если мы положим, например, $a\alpha = 0$ для любого a из G и любого α из R; в этом случае, конечно, наличие кольца операторов ничего не добавляет к изучению группы G. Общий случай легко сводится, однако, на этот случай и на тот, когда оператору ε соответствует тождественный автоморфизм.

Пусть, в самом деле, дана абелева группа G с кольцом операторов R, обладающим единицей ε. Обозначим через H множество таких элементов a из G, что $a\varepsilon = a$, а через F — множество таких a из G, что $a\varepsilon = 0$. H и F будут допустимыми подгруппами группы G, содержащими в пересечении лишь нуль. *Их прямая сумма совпадает с группой* G, ибо для любого a из G справедливо равенство

$$a = a\varepsilon + (a - a\varepsilon),$$

где, очевидно, $a\varepsilon \in H$, $a - a\varepsilon \in F$. Мы имеем право, конечно, изучая группы с операторами, ограничиться прямым слагаемым H, для которого ε соответствует его тождественному автоморфизму. В будущем, говоря о *кольце операторов с единицей*, мы будем всегда предполагать это ограничение выполненным, т. е. принимать условие

$$a\varepsilon = a \tag{3}$$

для всех a из G.

Если дана группа G с кольцом операторов R, то множество $\mathfrak{a}$ всех таких элементов α из R, которые *аннулируют* данный элемент a из G, т. е. таких, что $a\alpha = 0$, будет правосторонним идеалом кольца R, как показывают равенства (1′) и (2). Этот идеал $\mathfrak{a}$ называется *порядком*

[1] Нуль в левой части равенства есть нуль кольца R, нуль в правой части — нулевой элемент группы G.

элемента a. Для обычных абелевых групп, т. е. для групп с кольцом целых чисел C в качестве кольца операторов, это определение превращается по существу в обычное: если элемент a имеет в обычном смысле порядок n, то он аннулируется лишь числами, кратными числу n, т. е. числами, составляющими идеал числа n в кольце C.

Если порядок элемента a является нулевым идеалом кольца R, то элемент a называется *элементом бесконечного порядка*. Так, в аддитивной группе кольца R *без делителей нуля* с самим кольцом R в качестве области правосторонних операторов все элементы, кроме нуля, будут иметь бесконечный порядок. Порядком нуля группы G всегда является, конечно, само кольцо R, причем нуль будет единственным элементом порядка R, если рассматривается кольцо операторов с единицей [см. условие (3)].

Если рассматривается кольцо операторов R с единицей, то (допустимая) циклическая подгруппа элемента a группы G (см. § 15) будет состоять из всех элементов вида $a\alpha$, $\alpha \in R$. Действительно, эти элементы составляют в G подгруппу, как показывает равенство (1), допустимость этой подгруппы следует из (2), условие (3) показывает, что элемент a содержится в этой подгруппе, и, наконец, цикличность этой подгруппы следует из того, что во всякой допустимой подгруппе, содержащей a, будут содержаться и все элементы $a\alpha$.

Допустимая циклическая подгруппа элемента a операторно изоморфна фактор-группе $R/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ есть порядок элемента a. В частности, если $\mathfrak{a}$ является двусторонним идеалом кольца R, то циклическая подгруппа элемента a операторно изоморфна аддитивной группе кольца вычетов $R/\mathfrak{a}$. Действительно, ставя в соответствие элементу α из R элемент $a\alpha$ из G, мы получим ввиду (1) и (2) операторно гомоморфное отображение аддитивной группы кольца R на циклическую подгруппу элемента a, причем в нуль будут отображаться элементы из $\mathfrak{a}$ и только они.

По отношению ко всякому результату, полученному в общей теории абелевых групп, может быть поставлен вопрос, для групп с какими кольцами операторов этот результат остается справедливым. Пересмотр с этой точки зрения содержания теории абелевых групп еще далеко не завершен, хотя он представляет несомненный интерес и для самой теории колец. Мы ограничимся некоторыми указаниями, относящимися к результатам, доказанным в предшествующих параграфах настоящей главы, причем во избежание излишних осложнений будем в этом и следующем параграфах предполагать, что *кольцо операторов R является кольцом с единицей и без делителей нуля*.

Для справедливости утверждения, что периодическая часть F группы G, т. е. совокупность ее элементов с порядками, отличными от нулевого идеала, будет подгруппой, достаточно предположить, что *пересечение любых двух ненулевых правосторонних идеалов кольца R отлично от нуля*. Допустимость этой подгруппы получается при дополнительном предположении о коммутативности кольца R.

Фактор-группа G/F будет в этом случае также R-модулем, причем все ее элементы, отличные от нуля, имеют бесконечный порядок.

Теорема о разложимости периодической абелевой группы в прямую сумму примарных групп требует наложения более сильных ограничений на кольцо операторов R. Для этого достаточно, во всяком случае, предположения, что R является *коммутативным кольцом главных идеалов*, т. е. что все его идеалы главные.

Определение линейной зависимости элементов сохраняет смысл для группы с любым кольцом операторов R. Если же предположить это кольцо коммутативным, то сохраняется и доказательство теоремы о замене, а поэтому может быть введено понятие *ранга* группы. При этом предположении сохраняет силу и теорема о том, что ранг группы равен сумме ранга любой ее (допустимой) подгруппы и ранга фактор-группы по ней.

Роль бесконечной циклической группы в случае групп с кольцом операторов R играет аддитивная группа самого кольца R, рассматриваемая как правый R-модуль; в качестве образующего элемента можно взять единицу кольца R или любой делитель единицы. Прямая сумма любого множества таких групп будет называться *свободным R-модулем*. Если кольцо R коммутативно, то ранг свободного R-модуля равен числу циклических прямых слагаемых.

Всякий R-модуль изоморфен фактор-модулю некоторого свободного R-модуля, причем при коммутативном R R-модуль с n образующими изоморфен фактор-модулю свободного R-модуля ранга n.

Доказывается эта теорема операторно-гомоморфным отображением на рассматриваемый R-модуль свободного R-модуля с соответствующей системой образующих и применением теоремы о гомоморфизмах для операторных групп.

Если все правосторонние идеалы кольца R являются главными, то всякая допустимая подгруппа свободного R-модуля, отличная от нуля, сама свободна.

Для доказательства этой теоремы нужно повторить доказательство соответствующей теоремы из § 19, внеся в него следующее изменение: если в данной подгруппе рассматриваются элементы с данным последним индексом ν, то уже нельзя говорить, что среди них существует элемент с наименьшим положительным последним коэффициентом. Легко видеть, однако, что последние коэффициенты всех этих элементов составляют в R правосторонний идеал, который по условию будет главным, т. е. имеет вид αR. Элемент с последним индексом ν и последним коэффициентом α будет играть теперь роль элемента с наименьшим положительным последним коэффициентом.

В работе Эверетта [1] показано, что условия, наложенные нами на кольцо R — наличие единицы, отсутствие делителей нуля, все правосторонние идеалы главные — являются и необходимыми для справедливости теоремы о подмодулях свободного R-модуля.

Для перенесения на случай операторных абелевых групп теоремы о связи между базой свободной абелевой группы конечного ранга и базой ее подгруппы, а также вытекающей из нее основной теоремы об абелевых группах с конечным числом образующих, на кольцо операторов R необходимо наложить более сильные ограничения. В работе Тейхмюллера [1] показано, что эти результаты остаются справедливыми в том случае, когда *все правосторонние и все левосторонние идеалы кольца R являются главными*. Более частный случай евклидова кольца R рассмотрен в 15-й главе 2-го издания «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена. Теория Тейхмюллера излагается в следующем параграфе.

§ 22а. Теория Тейхмюллера

Как сказано выше, теорема, дающая связь между базами свободного R-модуля с n образующими — условимся обозначать его через $U_n(R)$ — и его допустимой подгруппы V, будет доказываться в предположении, что *все левосторонние и все правосторонние идеалы кольца операторов R являются главными*. Иными словами, если A есть произвольный левосторонний (правосторонний) идеал кольца R, то в A можно найти такой элемент a, что $A = Ra$ (соответственно $A = aR$). Введем сперва несколько новых понятий и докажем ряд результатов, относящихся к этому классу колец. При этом, как уже было сказано, рассматриваются кольца с единицей и без делителей нуля.

Если элемент b кольца R содержится в идеале Ra, $a \neq 0$, т. е. в R существует такой элемент r, что $b = ra$, то элемент a называется *правым делителем* элемента b. В этом случае, очевидно, $Rb \subseteq Ra$. Если $Rb = Ra$, то b будет, в свою очередь, правым делителем элемента a, т. е. $a = r'b$. Тогда благодаря отсутствию делителей нуля $rr' = \varepsilon$, т. е. r и r' являются *делителями единицы*. Заметим, что в этом случае имеет место также равенство $r'r = \varepsilon$. Действительно, из $rr' = \varepsilon$ следует $r'rr' = r'$, откуда ввиду отсутствия делителей нуля $r'r = \varepsilon$. Элемент a называется *левым делителем* элемента b, если b содержится в правостороннем главном идеале aR. Элемент a есть *полный делитель* элемента b, если он является как правым, так и левым делителем, т. е. если b содержится в пересечении $Ra \cap aR$.

Если в кольце R даны левосторонние идеалы Ra и Rb, то их сумма также будет главным идеалом, т. е. в R можно найти такой элемент c, что

$$(Ra, Rb) = Rc.$$

Элемент c называется *правым наибольшим общим делителем* элементов a и b. В R существуют, следовательно, такие элементы r', r'', r_1, r_2, что

$$a = r'c, \quad b = r''c, \quad c = r_1a + r_2b.$$

Аналогичным образом определяется *левый наибольший общий делитель* двух элементов кольца R.

В кольце R нельзя найти бесконечную возрастающую последовательность левосторонних идеалов.

Пусть, в самом деле, в R дана бесконечная неубывающая последовательность

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots.$$

Объединение этой последовательности также будет левосторонним идеалом в R, а поэтому — главным идеалом, порожденным некоторым элементом b. Элемент b будет, однако, содержаться в одном из идеалов A_n, а поэтому все идеалы последовательности должны, начиная с некоторого места, совпадать.

Соответствующая теорема имеет место и для правосторонних идеалов.

В кольце R нельзя найти бесконечную убывающую последовательность левосторонних (правосторонних) идеалов, содержащих некоторый левосторонний (правосторонний) идеал A, отличный от нулевого.

Рассмотрим произвольную невозрастающую последовательность левосторонних идеалов

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots.$$

Если $A = Ra$, $a \neq 0$, и $B_n = Rb_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то существуют такие отличные от нуля элементы $r_1, r_2, \ldots$ и $r'_1, r'_2, \ldots$, что

$$a = r_n b_n, \quad b_{n+1} = r'_n b_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда

$$a = r_{n+1} b_{n+1} = (r_{n+1} r'_n) b_n = r_n b_n,$$

т. е. $r_{n+1} r'_n = r_n$. Это показывает, что правосторонние идеалы

$$r_1 R, r_2 R, \ldots, r_n R, \ldots$$

составляют неубывающую последовательность. Ввиду доказанного выше, начиная с некоторого n, должны иметь место равенства

$$r_n R = r_{n+1} R = \ldots.$$

Но из $r_n R = r_{n+1} R$ следует существование такого элемента r', что $r_{n+1} = r_n r'$, т. е. $r_{n+1} = r_{n+1}(r'_n r')$, откуда $r'_n r' = \varepsilon$. Элемент r'_n является, следовательно, делителем единицы, а поэтому $B_{n+1} = B_n$. Это же, очевидно, справедливо и для всякого $i > n$. Тем самым теорема доказана.

Элемент a из кольца R, не являющийся делителем единицы, называется *неразложимым*, если из равенства $a = bc$ следует, что или b, или c является делителем единицы. Если же элемент a разложимый, то всякому его разложению $a = b_1 b_2 \ldots b_k$ в произведение множителей,

не являющихся делителями единицы, соответствует цепочка левых идеалов

$$Ra \subset R(b_2 \dots b_k) \subset \dots \subset Rb_k \subset R,$$

различных между собою и заключенных между Ra и R. Обратно, если между Ra и R дан конечный ряд различных левосторонних идеалов

$$Ra \subset Rc_1 \subset Rc_2 \subset \dots \subset Rc_l \subset R,$$

то существуют такие элементы $b_1, \dots, b_l$, не являющиеся делителями единицы, что $a = b_1c_1$, $c_1 = b_2c_2, \dots, c_{l-1} = b_lc_l$, откуда

$$a = b_1b_2 \dots b_lc_l.$$

Из доказанных выше теорем об обрыве цепочек идеалов следует (см. § 16), что фактор-группа R/Ra, рассматриваемая как группа с кольцом R в качестве области (левых) операторов, обладает композиционным рядом. Каждому из композиционных рядов этой группы соответствует разложение элемента a в произведение конечного числа неразложимых множителей и обратно, а из теоремы Жордана–Гёльдера следует, что все такие разложения элемента a будут обладать одним и тем же числом множителей. Это число мы будем обозначать через $r(a)$.

Если b есть левый или правый делитель элемента a, то всякое разложение элемента b в произведение неразложимых множителей можно дополнить до такого же разложения для элемента a. Отсюда следует, что $r(b) \leqslant r(a)$, причем равенство будет тогда и только тогда, если a является, в свою очередь, делителем для b. Именно это свойство целого положительного числа $r(a)$, связанного с элементом a кольца R, будет дальше использоваться.

Возвращаемся к абелевым группам с операторами.

Если все правосторонние и все левосторонние идеалы кольца R являются главными, то в свободном модуле $U_n(R)$ и в его допустимой подгруппе V можно выбрать соответственно такие базы $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n$ и $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_k$, $k \leqslant n$, что

$$\overline{v}_i = \overline{u}_i\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где всякое ε_i является полным делителем для ε_{i+1}.

Доказательство проходит по такой же схеме, как доказательство соответствующей теоремы в § 20. Мы предоставляем поэтому читателю проведение всех деталей доказательства и ограничимся лишь указанием тех изменений, которые вызываются переходом от случая операторов из кольца целых чисел к рассматриваемому сейчас общему случаю.

Справедливость теоремы для $n = 1$ следует теперь из замечания, что в этом случае допустимые подгруппы будут правосторонними идеалами кольца R, а поэтому и главными идеалами.

В доказательстве, данном в § 20, основную роль играл минимальный положительный коэффициент в линейных формах, составляющих подгруппу V. Его роль будет теперь играть отличный от нуля коэффициент α, для которого число $r(\alpha)$ является минимальным.

Далее, мы не можем пользоваться теперь алгоритмом деления с остатком. Его заменяют в доказательстве нашей теоремы следующие две леммы.

Лемма 1. *Если в элементе*

$$u = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n$$

из модуля $U_n(R)$ коэффициенты α_1 и α_2 отличны от нуля и если δ есть правый наибольший общий делитель элементов α_1 и α_2 в кольце R, то можно так изменить базу модуля $U_n(R)$, что в записи элемента и относительно новой базы δ будет одним из коэффициентов.

По условию $(R\alpha_1, R\alpha_2) = R\delta$. Тогда в R существуют такие элементы α_1', α_2', ξ и η, что

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \alpha_1'\delta, \quad \alpha_2 = \alpha_2'\delta, \\ \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 = \delta,\end{gathered} \tag{1}$$

откуда

$$\xi\alpha_1' + \eta\alpha_2' = 1. \tag{2}$$

Из (2) следуют равенства

$$\alpha_1'\eta\alpha_2' = \alpha_1' - \alpha_1'\xi\alpha_1', \tag{3}$$

$$-\alpha_2'\xi\alpha_1' = \alpha_2'\eta\alpha_2' - \alpha_2'. \tag{4}$$

Одна из сторон каждого из этих двух равенств лежит в идеале $R\alpha_1'$, другая в идеале $R\alpha_2'$, т. е. они содержатся в пересечении названных идеалов. Это пересечение снова будет левосторонним идеалом кольца R, причем заведомо отличным от нуля, так как левая часть хотя бы одного из равенств (3), (4) не равна нулю. Существует, следовательно, такой элемент β, $\beta \neq 0$, что

$$R\alpha_1' \cap R\alpha_2' = R\beta.$$

Отсюда следует существование таких элементов σ, τ, μ и ν, что

$$\beta = \sigma\alpha_1' = -\tau\alpha_2', \tag{5}$$

$$\mu\beta = \alpha_1'\eta\alpha_2' = \alpha_1' - \alpha_1'\xi\alpha_1', \tag{6}$$

$$\nu\beta = -\alpha_2'\xi\alpha_1' = \alpha_2'\eta\alpha_2' - \alpha_2'. \tag{7}$$

Полагаем теперь

$$\begin{aligned}u_1' &= u_1\alpha_1' + u_2\alpha_2', \\ u_2' &= u_1\mu + u_2\nu, \\ u_1' &= u_i, \quad i = 3, \ldots, n.\end{aligned}$$

Это будет преобразованием базы модуля $U_n(R)$. Действительно, обратным для него будет преобразование

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1'\xi + u_2'\sigma, \\ u_2 &= u_1'\eta + u_2'\tau, \\ u_i &= u_i', \quad i = 3, \ \ldots, n, \end{aligned}$$

что можно проверить, используя равенства (2), (5), (6), (7) и учитывая, что в кольце R отсутствуют делители нуля. Мы получаем теперь, ввиду (1) и (5),

$$u = u_1'\delta + u_3'\alpha_3 + \ldots + u_n'\alpha_n,$$

что доказывает лемму.

Лемма 2. *Если подмодуль V модуля $U_n(R)$ содержит элементы*

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n, \\ v_2 &= u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + \ldots + u_n\beta_n \end{aligned}$$

с отличными от нуля коэффициентами α_1 и β_1 и если δ есть левый наибольший общий делитель элементов α_1 и β_1 в R, то δ будет коэффициентом при u_1 для одного из элементов подмодуля V.

Действительно, из $(\alpha_1 R, \beta_1 R) = \delta R$ следует существование в R таких элементов ξ и η, что $\alpha_1\xi + \beta_1\eta = \delta$. Тогда в подмодуле V содержится элемент

$$v = v_1\xi + v_2\eta = u_1\delta + \ldots,$$

что и доказывает лемму.

Заметим, наконец, что если в $U_n(R)$ и в V выбраны соответственно такие базы $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ \ldots, \overline{u}_n$ и $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ \ldots, \overline{v}_k$, что

$$\overline{v}_i = \overline{u}_i\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ \ldots, k,$$

то доказательство утверждения, что ε_1 является полным делителем для ε_2, проводится следующим образом.

В подмодуле V содержится элемент

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{u}_1\varepsilon_1 + \overline{u}_2\varepsilon_2.$$

Поэтому ввиду выбора элемента ε_1 и леммы 1 этот элемент ε_1 будет правым делителем для ε_2. С другой стороны, если мы выберем для модуля $U_n(R)$ базу $\overline{u}_1, \overline{u}_2 - \overline{u}_1, \overline{u}_3, \ \ldots, \overline{u}_n$, то будет

$$\overline{v}_1 = \overline{u}_1\varepsilon_1, \quad \overline{v}_2 = \overline{u}_1\varepsilon_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)\varepsilon_2,$$

откуда ввиду выбора элемента ε_1 и леммы 2 ε_1 будет левым делителем для ε_2.

Теорема, доказательство которой было сейчас намечено, позволяет, как и в случае групп без операторов, доказать, что *всякий модуль с конечным числом образующих над кольцом операторов с главными правосторонними и левосторонними идеалами разлагается в прямую сумму конечного числа допустимых циклических подгрупп*. Предполагая дополнительно кольцо операторов коммутативным, можно было бы те из этих циклических слагаемых, образующие элементы которых имеют ненулевые порядки, разложить в прямую сумму циклических подгрупп, порядки которых будут уже идеалами, порожденными степенями простых (т. е. неразложимых) элементов кольца операторов, а затем доказать инвариантность этих порядков. Доказательства этих утверждений по существу близки к доказательствам соответствующих теорем из § 20, но требуют, однако, некоторых дополнительных сведений из теории коммутативных колец главных идеалов, и поэтому мы их опускаем.

Глава седьмая

ПРИМАРНЫЕ И СМЕШАННЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

§ 23. Полные абелевы группы

Теория примарных абелевых групп принадлежит к числу наиболее содержательных и глубоких ветвей общей теории групп, причем теорию счетных примарных групп можно считать уже законченной. Ряд разделов теории примарных групп — теория полных групп, вопрос о сервантных подгруппах и другие — уже вышел сейчас за рамки примарных групп. Целесообразно поэтому излагать теорию примарных групп в тесном переплетении с теорией смешанных абелевых групп, тем более, что на этом пути лежит и естественный подход к основному вопросу теории смешанных групп — к вопросу об их расщеплении, т. е. о разложении в прямую сумму периодической группы и группы без кручения.

Мы начнем с изучения одного важного класса абелевых групп, в некотором смысле двойственного классу свободных абелевых групп.

Абелева группа G называется *полной*, если для всякого элемента a из G и всякого натурального числа n уравнение

$$nx = a$$

имеет в G хотя бы одно решение, т. е. если, как говорят, всякий элемент a можно *разделить* в группе G на любое натуральное число. Очевидно, что для полноты группы G достаточно делимости всякого ее элемента на любое простое число.

Непосредственно из определения вытекает, что *всякая факторгруппа полной группы сама полна*, а также, что *прямая сумма любого множества полных групп сама будет полной группой*.

Если абелева группа G содержит полную подгруппу A, то A служит для G прямым слагаемым.

В самом деле, пусть B будет одна из максимальных подгрупп группы G, пересечение которых с A равно нулю; существование такой подгруппы следует из теоремы, доказанной в § 7. Подгруппы A и B составляют в группе G прямую сумму. Если в группе G можно найти элемент g, не принадлежащий к $A + B$, то пересечение подгрупп $A + B$ и $\{g\}$ не может равняться нулю, так как иначе пересечение подгрупп A и $B + \{g\}$ также было бы равно нулю в противоречие с выбором B.

Таким образом, некоторое кратное элемента g входит в $A+B$, т. е. $pg = a+b$, $a \in A$, $b \in B$; можно считать при этом число p простым — достаточно заменить элемент g его некоторым кратным, которое еще не входит в $A+B$, но простое кратное которого уже содержится в $A+B$.

В подгруппе A существует такой элемент a', что $pa' = a$. Тогда

$$p(g-a') = b \in B, \quad g-a' \notin A+B.$$

Введем обозначение $g' = g-a'$. Всякий элемент из подгруппы $\{g', B\}$ имеет вид $kg'+b'$, где $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $b' \in B$. Если бы пересечение подгрупп A и $\{g', B\}$ было отличным от нуля, то в A существовал бы такой элемент $\overline{a}$, $\overline{a} \neq 0$, что

$$\overline{a} = kg' + b'.$$

Здесь $k \neq 0$, так как $A \cap B = O$, но отсюда, ввиду $pg' \in B$ и взаимной простоты чисел p и k, мы без труда получаем $g' \in A+B$, что невозможно. С другой стороны, равенство нулю пересечения подгрупп A и $\{g', B\}$ противоречит выбору подгруппы B. Этим доказано, что $G = A+B$.

Сумма любого множества полных подгрупп некоторой абелевой группы сама является полной подгруппой.

Действительно, если в абелевой группе G даны полные подгруппы A_α, то всякий элемент из суммы этих подгрупп имеет вид $a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_k}$, где $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$. Если $\overline{a}_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, $p\overline{a}_{\alpha_i} = a_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то элемент $\overline{a}_{\alpha_1} + \overline{a}_{\alpha_2} + \ldots + \overline{a}_{\alpha_k}$ лежит в сумме подгрупп A_α и

$$p(\overline{a}_{\alpha_1} + \overline{a}_{\alpha_2} + \ldots + \overline{a}_{\alpha_k}) = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_k}.$$

В частности, сумма $\overline{A}$ всех полных подгрупп абелевой группы G будет в G максимальной полной подгруппой. В прямом разложении

$$G = \overline{A} + G',$$

существующем ввиду доказанной выше теоремы, слагаемое G' уже не содержит полных подгрупп. Если мы условимся называть *редуцированной* такую абелеву группу, никакая подгруппа которой не является полной, то мы получаем, что *всякая абелева группа разлагается в прямую сумму двух групп — полной и редуцированной*. Абелева группа G может обладать многими прямыми разложениями такого рода, однако всегда их полные слагаемые совпадают и поэтому редуцированные слагаемые между собою изоморфны.

Все полные абелевы группы могут быть без труда описаны. К их числу принадлежит, очевидно, *группа типа* R, т. е. группа, изоморфная аддитивной группе всех рациональных чисел, а также группы типа p^∞ для всех простых p (см. § 7). Действительно, делимость всякого элемента группы типа p^∞ на число p вытекает из определения

этой группы, деление же на всякое простое число q, отличное от p, может быть осуществлено уже внутри порождаемой этим элементом циклической группы порядка p^n. Оказывается, что указанными группами и их прямыми суммами исчерпываются все полные группы.

Всякая полная абелева группа разлагается в прямую сумму некоторого множества групп типа R и групп типов p^∞ по некоторым простым p.

Действительно, периодическая часть F полной абелевой группы G будет сама полной, так как всякое решение x уравнения $nx = a$ имеет вместе с a конечный порядок. Отсюда, как доказано выше, вытекает существование прямого разложения

$$G = F + H,$$

причем подгруппа H есть группа без кручения и, будучи изоморфной фактор-группе полной группы, сама полна. С другой стороны, подгруппа F разлагается, как доказано в § 19, в прямую сумму примарных групп F_p по различным простым p. При этом всякая подгруппа F_p будет полной: если $a \in F_p$, то решение уравнения $px = a$ имеет своим порядком степень p и поэтому содержится в F_p, всякое же уравнение $qx = a$, где $(q, p) = 1$, разрешимо, как мы знаем, уже в подгруппе $\{a\}$.

Остается рассмотреть, следовательно, два частных случая — случай полной группы без кручения и случай полной группы, примарной по p.

Если G — полная группа без кручения, a — ее элемент, отличный от нуля, то элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где

$$a_1 = a,\ na_n = a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

— существование таких элементов следует из полноты группы G — порождают в G подгруппу типа R (см. пример 2 в § 18). Пусть M будет максимальная линейно независимая система группы G. Включим каждый элемент из M указанным способом в подгруппу типа R. Сумма G' всех этих подгрупп будет их прямой суммой, как вытекает из линейной независимости системы M. Она будет вместе с тем совпадать с самой группой G. Действительно, всякий элемент b из G линейно зависит от M, т. е. имеет место равенство

$$nb = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_sa_s,$$

где $n \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_s \in M$. В полной подгруппе G' можно найти однако, элемент c, связанный с M этой же самой линейной зависимостью; отсюда $n(b - c) = 0$, т. е. $b = c$, а поэтому $G' = G$.

Переходя к случаю групп, примарных по p, прежде всего заметим, что всякий элемент полной примарной группы содержится в некоторой подгруппе типа p^∞. Действительно, если в полной группе дан элемент a порядка p^k, то введем обозначение

$$a_1 = p^{k-1}a,\ a_2 = p^{k-2}a,\ \ldots,\ a_{k-1} = pa,\ a_k = a.$$

Выберем затем в качестве a_{k+1} один из тех элементов, p-кратное которых равно a. Вообще, если элемент a_n, $n \geqslant k$, уже выбран, то в качестве a_{n+1} берется одно из решений уравнения $px = a_n$. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ порождают, очевидно, подгруппу типа p^∞, содержащую элемент a.

Пользуясь этим, в полной примарной группе G обычным трансфинитным процессом можно так выбрать некоторое множество подгрупп типа p^∞, что их сумма G' будет их прямой суммой, причем в G уже нельзя выбрать подгруппу типа p^∞, пересечение которой с G' было бы равно нулю. Покажем, что G' совпадает с G. Действительно, если бы группа G содержала элемент a, лежащий вне G', и если бы пересечение подгрупп G' и $\{a\}$ было равно нулю, то, включая элемент a в подгруппу типа p^∞, мы пришли бы в противоречие с определением подгруппы G'. Если же $p^k a \in G'$, но $p^{k-1}a \notin G'$, то ввиду полноты подгруппы G' в ней можно найти такой элемент a', что $p^k a' = p^k a$. Элемент $a - a'$ отличен от нуля, но пересечение его циклической подгруппы с G' равно нулю, а этот случай нами уже рассмотрен. Этим доказано, что группа G является прямой суммой групп типа p^∞.

Доказательство теоремы закончено.

Из этой теоремы следует, в частности, что аддитивная группа всех действительных чисел, являющаяся полной группой без кручения мощности континуум, разложима в прямую сумму континуального множества групп типа R.

Всякое прямое разложение полной абелевой группы может быть продолжено до разложения в прямую сумму групп типа R и типов p^∞. Любые два разложения полной группы в прямую сумму групп типа R и типов p^∞ изоморфны между собой.

Первое утверждение теоремы вытекает из того, что *всякое прямое слагаемое полной группы само полно*, — если $G = A + B$ и $n(a' + b') = a$, где $a', a \in A$, $b' \in B$, то $na' = a$, — а поэтому, как доказано выше, разложимо в прямую сумму групп типа R и типов p^∞.

Для доказательства второго утверждения возьмем любое разложение группы G в прямую сумму групп типа R и типов p^∞. Выбирая в каждом из прямых слагаемых типа R этого разложения по одному элементу, отличному от нуля, мы получим максимальную линейно независимую систему группы G, а поэтому, как вытекает из результатов § 19, число прямых слагаемых типа R (т. е. мощность их множества) не зависит от выбора разложения. С другой стороны, фиксируя p и беря сумму прямых слагаемых типа p^∞, входящих в данное разложение, мы получим подгруппу A группы G, состоящую из всех таких элементов этой группы, порядок которых конечен и является степенью p; эта подгруппа не зависит, следовательно, от выбора разложения. Число элементов подгруппы A, порядок которых не больше p, равно p^n, если n — число слагаемых типа p^∞, входящих в данное разложение; если же указанных элементов в подгруппе A бесконечно много, то мощность их множества совпадает с мощностью множества прямых

слагаемых типа p^∞ в рассматриваемом прямом разложении группы G. Этим доказано, что число прямых слагаемых типа p^∞ (т. е. мощность их множества) также не зависит от выбора разложения. [См. Д.28.5.]

Всякая полная абелева группа без кручения G является векторным пространством над полем рациональных чисел $\mathfrak{R}$.

Действительно, если a и b — элементы группы G и $ma = nb$, то заданием чисел m и n и одного из элементов a, b другой элемент однозначно определяется. Если $n \neq 0$, то можно употребить запись $b = \frac{m}{n}\, a$ и рассматривать элемент b как результат применения к элементу a оператора $\frac{m}{n}$ из поля $\mathfrak{R}$. В самом деле, справедливость условий, входящих в определение модуля над кольцом с единицей (см. § 22), легко проверяется.

Теперь легко видеть, что подгруппа типа R, содержащая элемент a полной абелевой группы без кручения, состоит из всех элементов вида $\frac{m}{n}\, a$. Условимся употреблять в дальнейшем для этой подгруппы запись $\mathfrak{R}a$. Поэтому, если G есть полная группа без кручения конечного ранга и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ее максимальная линейно независимая система, то, как доказано выше,

$$G = \mathfrak{R}a_1 + \mathfrak{R}a_2 + \ldots + \mathfrak{R}a_n.$$

Мы условимся также, если A есть некоторое подмножество полной группы без кручения G, а $\mathfrak{R}'$ — подкольцо поля $\mathfrak{R}$, обозначать через $\mathfrak{R}'A$ минимальную подгруппу группы G, содержащую A и допустимую относительно операторов из $\mathfrak{R}'$. Так, если M есть максимальная линейно независимая система группы G, то $\mathfrak{R}M = G$. Эти обозначения будут употребляться, в частности, в §§ 32б, 32в.

Возвращаясь к общему случаю, докажем следующую важную теорему.

Всякая абелева группа является подгруппой некоторой полной абелевой группы.

Следующее простое доказательство этой теоремы принадлежит Куликову [2]. Абелева группа G может быть представлена, как мы знаем, в виде фактор-группы некоторой свободной абелевой группы U,

$$G = U/N.$$

Берем любое разложение группы U в прямую сумму бесконечных циклических групп. Вкладывая каждое из этих циклических прямых слагаемых в группу типа R — так, например, как вкладывается в аддитивную группу рациональных чисел группа целых чисел, — и беря прямую сумму всех этих групп типа R, мы получим полную группу V, содержащую U. Фактор-группа V/N, являющаяся также полной, содержит подгруппу U/N, т. е. содержит G.

Из этой теоремы вытекает такое обращение доказанной выше теоремы о выделении полной группы прямым слагаемым из всякой содержащей ее абелевой группы (см. Бэр [26]).

Если абелева группа G выделяется прямым слагаемым из всякой абелевой группы, содержащей ее в качестве подгруппы, то она будет полной.

Действительно, группа G должна, в частности, служить прямым слагаемым для всякой полной группы, в которой она содержится. Мы знаем, однако, что всякое прямое слагаемое полной группы само полно.

Следующий результат, частично содержащийся в работе Бэра [26], а полностью доказанный Куликовым, дополняет теорему о вложении всякой абелевой группы в полную.

Во всякой полной абелевой группе, содержащей данную группу G, можно найти хотя бы одну полную подгруппу, минимальную среди тех, которые содержат G. Между всякими двумя минимальными полными группами, содержащими группу G, существует изоморфизм, продолжающий тождественный автоморфизм группы G.

Пусть, в самом деле, группа G содержится в полной группе $\overline{G}$. Так как объединение возрастающей последовательности полных групп есть полная группа, то существуют максимальные среди полных подгрупп группы $\overline{G}$, пересечение которых с G равно нулю. Пусть H будет одна из них. Существует прямое разложение

$$\overline{G} = H + F,$$

причем F, как известно, можно выбрать содержащим подгруппу G. Подгруппа F полна, как прямое слагаемое полной группы, причем это будет искомая минимальная полная подгруппа, содержащая G. Действительно, если существует полная подгруппа F', содержащаяся между G и F, $G \subset F' \subset F$, то $F = F' + F''$, т. е.

$$\overline{G} = F' + (F'' + H).$$

Подгруппы F'' и, следовательно, $F'' + H$ полны, а так как пересечение подгрупп $F'' + H$ и G равно нулю, то мы приходим к противоречию с выбором подгруппы H.

Пусть теперь F_1 и F_2 — любые две минимальные полные группы, содержащие группу G. Ввиду неполноты группы G в ней существует такой элемент a, что при некотором простом p уравнение

$$px = a$$

не имеет в G решения. Пусть b_1 и b_2 будут решения этого уравнения соответственно в F_1 и F_2. Мы получим изоморфное соответствие φ' между подгруппами $F_1' = \{G, b_1\}$ и $F_2' = \{G, b_2\}$, если подгруппу G отобразим на себя тождественно и положим $b_1\varphi' = b_2$.

Пусть для всех порядковых чисел β, меньших некоторого α, уже найдены в F_1 подгруппы $F_1^{(\beta)}$, составляющие возрастающую последовательность, а в F_2 — подгруппы $F_2^{(\beta)}$, и установлены изоморфизмы $\varphi^{(\beta)}$, отображающие $F_1^{(\beta)}$ на $F_2^{(\beta)}$, причем эти изоморфизмы продолжают друг друга. Если число α предельное, то через $F_i^{(\alpha)}$, $i = 1, 2$, обозначим объединение подгрупп $F_i^{(\beta)}$, а в качестве $\varphi^{(\alpha)}$ возьмем соединение всех изоморфизмов $\varphi^{(\beta)}$, $\beta < \alpha$. Если же число $\alpha - 1$ существует, то пусть a_1 будет такой элемент из $F_1^{(\alpha-1)}$, что при некотором простом p уравнение

$$px = a_1$$

не имеет в $F_1^{(\alpha-1)}$ решения; его решение в F_1 обозначим через b_1. Если $a_1\varphi^{(\alpha-1)} = a_2$, а b_2 — корень уравнения

$$px = a_2$$

в F_2, то полагаем

$$F_i^{(\alpha)} = \{F_i^{(\alpha-1)}, b_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Отображение $\varphi^{(\alpha)}$, совпадающее с $\varphi^{(\alpha-1)}$ на $F_i^{(\alpha-1)}$ и переводящее b_1 в b_2, будет изоморфизмом между $F_a^{(\alpha)}$ и $F_2^{(\alpha)}$.

Это построение остановится тогда, когда подгруппы $F_1^{(\alpha)}$ и $F_2^{(\alpha)}$ окажутся полными, т. е. когда они совпадут соответственно с F_1 и F_2. Теорема доказана.

Заметим, что в полной группе на самом деле может содержаться несколько минимальных полных подгрупп, содержащих данную подгруппу G. Так, прямая сумма двух групп типа p^∞ — группы A с образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и соотношениями

$$pa_1 = 0, pa_{n+1} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и группы B с образующими

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

и соотношениями

$$pb_1 = 0, pb_{n+1} = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

такова, что подгруппа $\{a_1\}$ содержится как в подгруппе A, так и в подгруппе типа p^∞, порожденной элементами

$$a_1, a_2 + b_1, \ldots, a_n + b_{n-1}, \ldots$$

[См. Д.28.4.]

§ 24. Прямые суммы циклических групп

Мы уже изучили два класса абелевых групп, разложимых в прямую сумму циклических групп, а именно свободные абелевы группы, т. е. прямые суммы любого множества бесконечных циклических групп, и абелевы группы с конечным числом образующих, т. е. прямые суммы конечного числа любых циклических групп. Эти группы, как оказалось, обладают рядом общих свойств и мы хотим показать, что в действительности это будут свойства прямых сумм любого множества произвольных циклических групп. Понятно, что можно предполагать при этом, что все конечные циклические слагаемые этих прямых сумм примарны по некоторым простым числам.

Существуют различные критерии разложимости абелевой группы в прямую сумму циклических групп. Сейчас будет указан один из таких критериев, относящийся к случаю примарных групп. Сперва введем, однако, некоторые понятия, основные для всей теории примарных абелевых групп.

Если группа G примарна (по простому числу p), то множество G_1 всех ее элементов порядка p (включая нуль) будет подгруппой, даже вполне характеристической. Эта подгруппа называется *нижним слоем* группы G.

Элемент a примарной группы G называется *элементом бесконечной высоты*, если $a \neq 0$ и если для любого k уравнение

$$p^k x = a$$

обладает в группе G хотя бы одним решением. Если же это уравнение может быть решено в G лишь при $k \leqslant n$, то говорят, что элемент a имеет *конечную высоту*, а именно *высоту* n.

Заметим, что было бы точнее говорить о *высоте элемента a в группе G*, так как высота этого элемента в содержащей его подгруппе H группы G может оказаться меньше, чем в самой группе G.

Следующие свойства высоты элемента немедленно вытекают из ее определения. Если элементы a_1 и a_2 имеют в группе G соответственно высоты h_1 и h_2, то при $h_1 < h_2$ высота элемента $a_1 + a_2$ равна h_1, а при $h_1 = h_2 = h$ высота этой суммы больше или равна h. Если элемент a имеет высоту h, то высота элемента pa больше или равна $h + 1$. Если элементы a и b порождают одну и ту же циклическую подгруппу, то их высоты в группе G совпадают. Если группа G разложена в прямую сумму, то элемент, содержащийся в некотором прямом слагаемом, имеет в нем такую же высоту, как во всей группе G. Высота произвольного элемента прямой суммы равна наименьшей из высот его компонент.

В полных примарных группах и только в них всякий элемент имеет бесконечную высоту. Больше того, *если всякий элемент нижнего слоя примарной группы G имеет в G бесконечную высоту, то группа G будет полной*. Пусть, в самом деле, уже доказано, что все элементы

группы G, порядок которых равен p^n, имеют бесконечную высоту. Если a — любой из этих элементов и b_1, b_2 — два любых решения уравнения $px = a$, то элемент $b_1 - b_2$ имеет порядок p, а поэтому бесконечную высоту. Отсюда следует на основании первого утверждения предшествующего абзаца, что элементы b_1 и b_2 имеют одну и ту же высоту. Так как, однако, элемент a имеет бесконечную высоту, то среди решений уравнения $px = a$ должны встречаться такие, высоты которых больше любого заданного натурального числа. Мы получаем, что все решения уравнения $px = a$ при любом элементе a порядка p^n, т. е. вообще все элементы порядка p^{n+1}, должны иметь в G бесконечную высоту.

Докажем теперь следующий критерий Куликова [2].

Примарная абелева группа G тогда и только тогда разложима в прямую сумму циклических групп, если она является объединением возрастающей последовательности

$$A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq A^{(n)} \subseteq \ldots \tag{1}$$

таких своих подгрупп, что у каждой из них высоты элементов в группе G конечны и ограничены в совокупности.

Доказательство. Если группа G уже представлена в виде прямой суммы циклических групп, то в качестве $A^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, следует взять сумму тех циклических прямых слагаемых из этого разложения, порядок которых не больше p^n.

Пусть, обратно, группа G представима в виде объединения возрастающей последовательности (1), подчиненной указанным условиям. Возьмем в качестве x_1 один из таких элементов порядка p подгруппы $A^{(1)}$, которые имеют в G максимальную возможную высоту; такие элементы существуют, так как высоты в группе G элементов из $A^{(1)}$ ограничены в совокупности.

Предположим, что для всех порядковых чисел α, меньших некоторого β, в G уже выбраны элементы x_α, подчиненные следующим условиям:

1) все элементы x_α имеют порядок p;
2) если элемент x_α содержится в подгруппе $A^{(n)}$, но не в $A^{(n-1)}$, и если C_α будет подгруппа, порожденная всеми $x_{\alpha'}$ при $\alpha' < \alpha$, то:

а) подгруппа C_α содержит весь нижний слой $A_1^{(n-1)}$ подгруппы $A^{(n-1)}$,

б) элемент x_α не содержится в подгруппе C_α и имеет наибольшую высоту в группе G среди всех элементов подгруппы $A^{(n)}$, лежащих вне C_α.

Если подгруппа C_β, порожденная всеми x_α, $\alpha < \beta$, еще не совпадает со всем нижним слоем G_1 группы G, то элемент x_β может быть выбран, а именно следующим образом. Из 2а) в этом случае вытекает существование такого n, что все x_α содержатся в $A^{(n)}$, но не все

в $A^{(n-1)}$. Если подгруппа C_β не совпадает с $A_1^{(n)}$, то в качестве x_β берем один из тех элементов порядка p из подгруппы $A^{(n)}$, лежащих вне C_β, которые имеют среди всех таких элементов наибольшую высоту в G. Если же C_β совпадает с $A_1^{(n)}$, то берем аналогичный элемент в наименьшей подгруппе последовательности (1), нижний слой которой больше $A_1^{(n)}$. В обоих случаях мы пользуемся, очевидно, требованиями, наложенными в формулировке теоремы на подгруппы $A^{(n)}$.

Выбор элементов x_α можно, таким образом, продолжать до тех пор, пока они не будут порождать всего нижнего слоя группы G. Пусть это произойдет тогда, когда x_α будут выбраны для всех α, меньших γ. Из 1) и 2б) вытекает, что нижний слой группы G обладает прямым разложением

$$G_1 = \sum_{\alpha<\gamma} \{x_\alpha\}. \tag{2}$$

Пусть h_α будет высота элемента x_α в группе G, а y_α — такой элемент из G, что

$$p^{h_\alpha} y_\alpha = x_\alpha.$$

Ввиду (2) циклические подгруппы $\{y_\alpha\}$ составляют прямую сумму, которую мы обозначим через F,

$$F = \sum_{\alpha<\gamma} \{y_\alpha\}. \tag{3}$$

Покажем, что *всякий элемент z порядка p из группы G, содержащийся ввиду включения $G_1 \subset F$ в подгруппе F, имеет в этой подгруппе такую же высоту, как во всей группе G*. В самом деле, элемент z может быть записан на основании (2) в виде

$$z = x'_{\alpha_1} + x'_{\alpha_2} + \ldots + x'_{\alpha_n},$$

где элемент x'_{α_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, является отличным от нуля кратным элемента x_{α_i} и поэтому имеет высоту h_{α_i} как в группе G, так и в подгруппе F. Высота h элемента z в подгруппе F будет равна ввиду прямого разложения (3) наименьшему из чисел h_{α_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Высота этого элемента в группе G не может быть меньше h; покажем, что она не может быть и больше. Пусть индекс k таков, что $h_{\alpha_k} = h$, но $h_{\alpha_i} > h$ при $i > k$. Тогда в сумме

$$z = (x'_{\alpha_1} + \ldots + x'_{\alpha_k}) + (x'_{\alpha_{k+1}} + \ldots + x'_{\alpha_n})$$

второе слагаемое или отсутствует (при $k = n$), или же его высота в G строго больше h. Что же касается первого слагаемого, то оно не содержится в подгруппе C_{α_k} и его высота в G не может быть больше высоты в G элемента x_{α_k}, т. е. не может быть больше $h_{\alpha_k} = h$, так как иначе мы пришли бы в противоречие с условием 2б), наложенным на выбор элемента x_{α_k}. Отсюда вытекает, что высота в G элемента z, являющегося суммой двух элементов с различными высотами, равна

меньшей из этих высот, т. е. не больше h. Этим доказано, что элемент z имеет в G и F одну и ту же высоту.

Предположим теперь, что G отлично от F. Пусть g будет один из элементов наименьшего порядка из группы G, лежащих вне F, и пусть его порядок будет p^s; понятно, что $s \geqslant 2$. Элемент $p^{s-1}g$ имеет порядок p и поэтому содержится в F, причем, как доказано, имеет в F и в G одну и ту же высоту. Существует, следовательно, такой элемент f из F, что $p^{s-1}f = p^{s-1}g$. Порядок элемента $g - f$ не больше p^{s-1}, т. е. $g - f$ содержится в F, но тогда и элемент g должен принадлежать к F против предположения. Этим доказано равенство $G = F$, т. е. закончено доказательство критерия. [См. Д.28.2.]

Из этого критерия выводятся следующие теоремы Прюфера [2], основные в теории примарных абелевых групп.

Первая теорема Прюфера. *Всякая примарная группа с ограниченными в совокупности порядками элементов разлагается в прямую сумму циклических групп.*

Действительно, в этом случае высоты всех элементов группы конечны и также в совокупности ограничены, т. е. можно применить критерий Куликова, полагая все подгруппы $A^{(n)}$ равными самой группе.

Вторая теорема Прюфера. *Всякая счетная примарная группа, не содержащая элементов бесконечной высоты, разлагается в прямую сумму циклических групп.*

Действительно, эту группу ввиду ее счетности можно представить как объединение возрастающей последовательности подгрупп с конечным числом образующих, причем эти подгруппы, как вытекает из периодичности и коммутативности группы, будут все конечными. Высоты в самой группе элементов каждой из этих подгрупп будут по условию конечными и, так как их лишь конечное число, в совокупности ограниченными.

Критерий Куликова приводит также к простому доказательству следующего результата:

Всякая подгруппа H примарной группы G, разложимой в прямую сумму циклических групп, сама разлагается в прямую сумму циклических групп.

Действительно, группа G будет ввиду критерия Куликова объединением возрастающей последовательности подгрупп $A^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, причем все элементы каждой из подгрупп $A^{(n)}$ имеют в G высоты конечные и в совокупности ограниченные. Если

$$B^{(n)} = H \cap A^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то все элементы каждой из подгрупп $B^{(n)}$ имеют в G и тем более в H конечные и также в совокупности ограниченные высоты. Подгруппа H является, однако, объединением подгрупп $B^{(n)}$, а поэтому остается снова применить критерий Куликова.

Теперь мы можем прервать рассмотрение примарных групп и вновь вернуться к общему случаю. Предшествующий результат и теорема

из § 19 о подгруппах свободных абелевых групп приводят к следующему общему результату.

Всякая подгруппа H абелевой группы G, разложимой в прямую сумму циклических групп, сама разлагается в прямую сумму циклических групп.

Действительно, если G^* будет периодическая часть группы G, то G, как прямая сумма циклических групп, разложима в прямую сумму подгруппы G^* и некоторой свободной подгруппы S. Фактор-группа группы H по ее периодической части H^* будет изоморфной, ввиду теоремы об изоморфизме, подгруппе группы G/G^*, т. е. изоморфной подгруппе группы S. Поэтому, как подгруппа свободной группы, группа H/H^* сама будет свободной, а значит, как доказано в конце § 19, группа H будет прямой суммой подгруппы H^* и свободной подгруппы. Далее, группа G^* является прямой суммой примарных подгрупп по различным простым p, причем каждая из этих подгрупп является прямой суммой циклических групп. Подгруппа H^* разлагается в прямую сумму своих пересечений с этими примарными подгруппами, а теперь остается воспользоваться доказанной выше теоремой о подгруппах примарной группы, разложимой в прямую сумму циклических групп.

Если абелева группа G разложима в прямую сумму циклических групп, то всякое прямое разложение этой группы можно продолжить до разложения с циклическими прямыми слагаемыми.

Действительно, всякое прямое слагаемое группы G разложимо, на основании предыдущей теоремы, в прямую сумму циклических групп.

Если абелева группа G разложима в прямую сумму циклических групп, то любые два ее прямых разложения с циклическими слагаемыми, бесконечными и конечными примарными, изоморфны между собой.

В самом деле, число бесконечных циклических слагаемых в любом из данных прямых разложений равно рангу группы G, т. е. не зависит от выбора разложения. Далее, те прямые слагаемые одного из данных разложений, порядки которых являются степенями простого числа p, порождают примарную подгруппу, которая не зависит от выбора разложения. Это позволяет ограничиться случаем, когда группа G сама примарна.

Берем одно из разложений группы G в прямую сумму циклических групп и через $A^{(n)}$ обозначим сумму прямых слагаемых из этого разложения, порядок которых равен p^n; если таких слагаемых нет, то $A^{(n)} = O$. Тогда

$$G = A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(n)} + \ldots.$$

Соответственно нижний слой группы G разлагается в прямую сумму нижних слоев групп $A^{(n)}$,

$$G_1 = A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(n)} + \ldots.$$

Пусть

$$B^{(n)} = A_1^{(n)} + A_1^{(n+1)} + \ldots.$$

Тогда

$$B^{(n)} = A_1^{(n)} + B^{(n+1)},$$

откуда

$$A_1^{(n)} \simeq B^{(n)}/B^{(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, однако, что подгруппа $B^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, может быть определена независимо от рассматриваемого прямого разложения группы G: эта подгруппа содержит все те и только те элементы порядка p из G, высота которых в G не меньше $n-1$. Подгруппа $A_1^{(n)}$ определяется, следовательно, самой группой G с точностью до изоморфизма, а так как группа $A^{(n)}$, как прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^n, вполне определяется своим нижним слоем и числом n, то изоморфизм двух любых разложений группы G в прямую сумму циклических групп доказан.

Теорема о подгруппах прямых сумм циклических групп позволяет доказать, наконец, такое утверждение.

Всякая абелева группа является объединением счетной возрастающей последовательности прямых сумм циклических групп.

Это очевидно для полных групп, так как и группа типа R, и группы типов p^∞ являются объединениями возрастающих последовательностей циклических групп. Произвольная же абелева группа G вкладывается, как доказано в предшествующем параграфе, в некоторую полную группу $\overline{G}$ и поэтому является объединением своих пересечений с теми прямыми суммами циклических групп, объединение возрастающей последовательности которых совпадает с $\overline{G}$. Эти пересечения сами будут, однако, прямыми суммами циклических групп. [См. Д.28.3.]

§ 25. Сервантные подгруппы

Подгруппа C абелевой группы G называется *сервантной*, если для любого элемента c из C и любого натурального числа n из разрешимости в группе G уравнения

$$nx = c$$

следует его разрешимость уже в подгруппе C. Примерами сервантных подгрупп служат нулевая подгруппа, сама группа G, а также прямые слагаемые данной группы и ее периодическая часть.

Из определения вытекает, что если подгруппа C сервантна в группе G, а подгруппа C' сервантна в C, то C' будет сервантной и в G. С другой стороны, объединение возрастающей последовательности сервантных подгрупп само сервантно.

Если подгруппа C сервантна в группе G, то при естественном взаимно однозначном соответствии, существующем между

подгруппами группы G/C и подгруппами группы G, содержащими C, сервантные подгруппы соответствуют друг другу.

Действительно, пусть подгруппа A группы G содержит подгруппу C. Если A сервантна в G и если существует такой элемент g, что

$$n(g+C) = a + C, \quad a \in A,$$

то

$$ng = a + c \in A,$$

а поэтому ввиду сервантности подгруппы A в ней существует такой элемент a'', что $na'' = a + c$, т. е.

$$n(a'' + C) = a + C.$$

Этим доказана сервантность подгруппы A/C в группе G/C, причем сервантность C здесь не использовалась.

Пусть теперь подгруппа A/C сервантна в группе G/C и пусть в G существует такой элемент g, что $ng = a$, где $a \in A$. Отсюда

$$n(g + C) = a + C,$$

а поэтому в A существует такой элемент a', что

$$n(a' + C) = a + C,$$

т. е.

$$na' = a + c, \quad c \in C.$$

Отсюда и из равенства $ng = a$ вытекает $n(a' - g) = c$, а поэтому ввиду сервантности подгруппы C в ней существует такой элемент c', что $nc' = c$. Таким образом,

$$a = n(a' - c'),$$

а так как элемент $a' - c'$ содержится в A, то сервантность подгруппы A в группе G доказана.

В случае примарных групп определение сервантной подгруппы равносильно следующему: *подгруппа C примарной (по p) группы G тогда и только тогда сервантна в G, если всякий элемент из C имеет в C такую же высоту, как во всей группе G.* Действительно, деление на любое число, взаимно простое с p, выполняется уже в пределах всякой циклической группы порядка p^n.

Справедлив следующий более общий результат.

Для сервантности подгруппы C в примарной группе G достаточно, чтобы всякий элемент нижнего слоя подгруппы C имел в C такую же высоту, как в G.

Действительно, пусть уже доказано, что всякий элемент порядка p^n из C имеет в G и в C одну и ту же высоту, и пусть в C дан элемент c порядка p^{n+1}. Если в группе G существует элемент g, удовлетворяющий равенству $p^k g = c$, то справедливо также равенство $p^{k+1} g = pc$, а так как элемент pc содержится в подгруппе C и имеет

порядок p^n, то в C можно найти, по предположению, такой элемент c', что $p^{k+1}c' = pc$. Отсюда

$$p(p^k c' - c) = 0,$$

т. е. содержащийся в C элемент $p^k c' - c$ имеет порядок p. Однако

$$p^k c' - c = p^k(c' - g),$$

а поэтому в C можно найти такой элемент c'', что $p^k c' - c = p^k c''$. Отсюда

$$c = p^k(c' - c''),$$

чем доказано совпадение высот элемента c в G и в C.

Если сервантная подгруппа C примарной группы G содержит весь нижний слой группы G, то C совпадает с G.

В самом деле, если группа G отлична от C, то пусть p^n будет наименьший порядок элементов из G, лежащих вне C, $n > 1$, и a — один из этих элементов. Элемент pa уже содержится в подгруппе C, но тогда в C ввиду ее сервантности существует такой элемент c, что $pc = pa$. Элемент $a - c$ имеет порядок p, т. е. принадлежит к подгруппе C, но тогда и элемент a должен содержаться в C.

Выше было отмечено, что всякое прямое слагаемое абелевой группы является в этой группе сервантной подгруппой. Обратное далеко не всегда имеет место. Так, *всякая примарная группа G, разложимая в прямую сумму циклических групп с неограниченными в совокупности порядками, содержит сервантную подгруппу, не являющуюся прямым слагаемым для G* (см. Прюфер [2]).

Для доказательства достаточно ограничиться случаем, когда G будет прямой суммой счетного множества циклических групп, образующие которых $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеют порядками числа $p^{k_1}, p^{k_2}, \ldots, p^{k_n}, \ldots$, причем

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots.$$

Обозначим через H подгруппу группы G, порожденную элементами $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, где

$$b_n = a_n - p^{k_{n+1}-k_n}a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Произвольный элемент h из H имеет вид

$$h = \sum_{n=1}^{N} l_n b_n = l_1 a_1 + \sum_{n=2}^{N}(l_n - l_{n-1}p^{k_n-k_{n-1}})a_n - l_N p^{k_{N+1}-k_N}a_{N+1}. \quad (1)$$

Высота этого элемента в группе G равна показателю при наибольшей степени числа p, на которую делятся все коэффициенты при образующих a_n, $n = 1, 2, \ldots, N+1$, в правой части этого равенства. Легко видеть, что на эту же степень числа p делятся тогда и все коэффициенты l_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, а поэтому элемент h имеет в подгруппе H такую же высоту, как в группе G. Этим доказана сервантность H в G.

Запись (1) произвольного элемента h из подгруппы H показывает, что эта подгруппа не содержит отличных от нуля кратных элемента a_1. Вместе с тем фактор-группа G/H будет группой типа p^∞, так как она порождается образующими $\overline{a}_n = a_n + H$, связанными соотношениями

$$p^{k_1}\overline{a}_1 = 0,\ p^{k_{n+1}-k_n}\overline{a}_{n+1} = \overline{a}_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда вытекает, что H не может служить прямым слагаемым для G, — в противном случае группа G обладала бы подгруппой типа p^∞, что противоречит, однако, доказанной в предшествующем параграфе теореме о подгруппах прямых сумм циклических групп. [См. Д.29.2.]

Сейчас будут доказаны две теоремы, указывающие условия, при которых данная сервантная подгруппа будет прямым слагаемым. Первую из этих теорем можно рассматривать как обобщение доказанной в § 19 теоремы о выделении прямым слагаемым всякой подгруппы, фактор-группа по которой свободна, так как всякая подгруппа, фактор-группа по которой является группой без кручения, заведомо будет сервантной.

Если подгруппа C сервантна в абелевой группе G и фактор-группа $\overline{G} = G/C$ разлагается в прямую сумму циклических групп, то C служит для G прямым слагаемым.

Пусть, в самом деле,

$$\overline{G} = \sum_\alpha \{\overline{a}_\alpha\}. \tag{2}$$

В каждом смежном классе $\overline{a}_\alpha$ можно выбрать в качестве представителя такой элемент a_α, порядок которого равен порядку элемента $\overline{a}_\alpha$ в группе $\overline{G}$. Это ясно, если порядок элемента $\overline{a}_\alpha$ бесконечен. Если же он конечен и равен n и если a'_α — произвольный элемент из класса $\overline{a}_\alpha$, то элемент na'_α будет содержаться в подгруппе C, а тогда ввиду сервантности этой подгруппы в ней существует элемент c, удовлетворяющий равенству $nc = na'_\alpha$. В качестве a_α можно взять теперь элемент $a'_\alpha - c$, содержащийся, очевидно, в классе $\overline{a}_\alpha$.

Обозначим через A подгруппу группы G, порожденную всеми элементами a_α. Подгруппы C и A порождают вместе всю группу G, пересечение же их равно нулю. В самом деле, если в этом пересечении содержится элемент c,

$$c = k_1 a_{\alpha_1} + \ldots + k_n a_{\alpha_n},$$

то в группе $\overline{G}$ имеет место равенство

$$k_1\overline{a}_{\alpha_1} + \ldots + k_n\overline{a}_{\alpha_n} = 0,$$

из которого ввиду (2) вытекает, что $k_i\overline{a}_{\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует, однако, что $k_i a_{\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а поэтому $c = 0$. Этим доказано существование прямого разложения

$$G = C + A.$$

Следующая теорема (Прюфер [2], Куликов [1]) будет в дальнейшем неоднократно использована.

Если сервантная подгруппа C абелевой группы G периодична, причем порядки ее элементов ограничены в совокупности, то C служит для G прямым слагаемым.

Пусть, в самом деле, порядки всех элементов подгруппы C являются делителями числа n. Обозначим через nG совокупность элементов группы G, делящихся в этой группе на число n; это будет, как легко видеть, подгруппа группы G. Пересечение подгрупп C и nG равно нулю: всякий элемент из этого пересечения, делясь на n в группе G, должен был бы делиться на n в сервантной подгруппе C, однако в C n-кратное любого элемента равно нулю. Таким образом, подгруппы C и nG составляют в группе G прямую сумму, которую мы обозначим через H,

$$H = C + nG. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь фактор-группу $\overline{G} = G/nG$ и докажем, что ее подгруппа $\overline{H} = H/nG$ в ней сервантна. Заметим сперва, что порядок всякого элемента из $\overline{G}$ является делителем числа n и что всякий элемент из $\overline{H}$ можно записать в виде $c + nG$, $c \in C$. Пусть элемент $c + nG$ делится в группе $\overline{G}$ на k,

$$k(g + nG) = c + nG,$$

причем можно ограничиться случаем, когда k является делителем числа n, $n = kk'$. Отсюда

$$kg = c + ng',$$

откуда

$$c = k(g - k'g').$$

Ввиду сервантности подгруппы C в ней существует такой элемент c', что $kc' = c$, а поэтому

$$k(c' + nG) = c + nG,$$

чем доказана сервантность подгруппы $\overline{H}$ в группе $\overline{G}$.

Так как порядки всех элементов фактор-группы $\overline{G}/\overline{H}$ в совокупности ограничены, то она разлагается в прямую сумму конечного числа примарных групп, каждая из которых, в свою очередь, разлагается, на основании первой теоремы Прюфера (см. предшествующий параграф), в прямую сумму циклических групп. Поэтому, как доказано выше, $\overline{H}$ будет прямым слагаемым для $\overline{G}$:

$$\overline{G} = \overline{H} + \overline{F}. \tag{4}$$

Обозначим через F полный прообраз подгруппы $\overline{F}$ в группе G, т. е. $\overline{F} = F/nG$. Из (4) вытекает, что

$$\{H, F\} = G, \quad H \cap F = nG,$$

а поэтому, учитывая (3),

$$\{C, F\} = G, \quad C \cap F = O,$$

т. е.

$$G = C + F,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы можно вывести ряд интересных следствий (см. Куликов [1]), некоторые из которых будут указаны в § 29. [См. Д.29.5.] Сейчас мы докажем следующую лемму (Прюфер [2]).

Л е м м а. *Если элемент a примарной (по p) группы G имеет порядок p и конечную высоту n, то он содержится в циклическом прямом слагаемом порядка p^{n+1} группы G.*

Действительно, пусть элемент b таков, что $p^n b = a$. Нижним слоем подгруппы $\{b\}$ является подгруппа $\{a\}$, причем всякий элемент из $\{a\}$ имеет в $\{b\}$ такую же высоту, как в G. Отсюда, как доказано выше, следует сервантность подгруппы $\{b\}$ в группе G, а так как здесь можно применить предшествующую теорему, то $\{b\}$ будет прямым слагаемым группы G.

Отсюда вытекает следующий результат.

Всякая неразложимая примарная группа является или циклической, или группой типа p^∞.

Действительно, если все элементы нижнего слоя данной группы G имеют в ней бесконечную высоту, то, как доказано в предшествующем параграфе, группа G будет полной и поэтому, ввиду неразложимости, группой типа p^∞. Если же в нижнем слое группы G содержится хотя бы один элемент конечной высоты, то группа G, как только что было доказано, обладает циклическим прямым слагаемым, т. е. ввиду неразложимости сама циклична.

Таким образом, если примарная группа не является прямой суммой циклических групп и групп типа p^∞, то она не может быть разложена в прямую сумму неразложимых групп.

§ 26. Примарные группы без элементов бесконечной высоты

Примарная абелева группа, разложимая в прямую сумму циклических групп, не содержит элементов бесконечной высоты, — мы знаем, в самом деле, что высота элемента прямой суммы равна наименьшей из высот его компонент, но высота всякого элемента циклической группы конечна. Вторая теорема Прюфера (см. § 24) показывает, что в счетном случае прямыми суммами циклических групп исчерпываются все примарные группы без элементов бесконечной высоты. В несчетном случае соответствующая теорема не имеет места, как показал Прюфер [1] с помощью весьма сложного примера; более простые примеры

указали позже Ульм [2] и Курош [9]. Приведем здесь последний из этих примеров.

Определим сперва группу K_n, $n = 1, 2, \ldots$. Ее элементами будут последовательности

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots), \tag{1}$$

где α_k — целые числа, причем $0 \leqslant \alpha_k < p^n$. Дополнительно требуем, чтобы α_1 делилось на p^{n-1}, α_2 делилось на p^{n-1}, $\ldots$, α_{n-1} делилось на p. Групповой операцией в K_n считаем сложение соответственных элементов последовательностей (1), производимое по модулю p^n. Нулем будет последовательность, состоящая целиком из нулей. Группа K_n имеет мощность континуума и является примарной, причем порядками ее элементов служат делители числа p^n.

Если всякому элементу (1) из группы K_n будет поставлен в соответствие элемент

$$(p\alpha_1, p\alpha_2, \ldots, p\alpha_k, \ldots) \tag{2}$$

группы K_{n+1} — последовательность (2) удовлетворяет, очевидно, всем требованиям, предъявляемым к элементам группы K_{n+1}, — то мы получим изоморфное отображение группы K_n в группу K_{n+1}. Группы K_n, $n = 1, 2, \ldots$, составляют, следовательно, при указанных изоморфных вложениях возрастающую последовательность; ее объединение обозначим через K.

Докажем, что *группа K не содержит элементов бесконечной высоты*. Действительно, порядок всякого элемента a из K_n, лежащего вне K_{n-1}, равен числу p^n. Элемент $p^{n-1}a$ будет уже элементом из K_1, однако таким, что первые $n-1$ мест в его записи в виде последовательности (1) будут заняты нулями. Отсюда следует, что в подгруппе K_1, являющейся нижним слоем группы K, нет элементов, имеющих в группе K бесконечную высоту. Таких элементов не может быть, следовательно, и в самой группе K.

Докажем теперь, что *группа K не может быть разложена в прямую сумму циклических групп*. Пусть она в самом деле обладает такими разложениями. Берем одно из них и через H^k обозначаем прямую сумму всех циклических прямых слагаемых порядка p^k из этого разложения. Если H_1^k есть нижний слой подгруппы H^k, то подгруппа K_1 будет прямой суммой всех подгрупп H_1^k, а так как K_1 имеет мощность континуума, то хотя бы одна из подгрупп H_1^k, $k = 1, 2, \ldots$, должна быть бесконечной. Иными словами, если будет введено обозначение

$$F_n = \sum_{k=n}^{\infty} H_1^k,$$

то хотя бы для одного n подгруппа F_{n+1} должна иметь в подгруппе F_n бесконечный индекс. Легко видеть, однако, что подгруппа F_n состоит из тех и только тех элементов подгруппы K_1, высота которых в группе K не меньше $n-1$, т. е. из тех и только тех элементов из K_1, в записи которых в виде последовательности (1) первые $n-1$ мест

заняты нулями. Отсюда следует, что при всяком n индекс подгруппы F_{n+1} в подгруппе F_n конечен и равен p. Этим противоречием доказывается наше утверждение.

В работах Куликова [1, 2] показано даже, что для любой несчетной мощности m существует примарная группа этой мощности, не содержащая элементов бесконечной высоты и не допускающая таких прямых разложений, что мощности всех прямых слагаемых не превосходят некоторого m', меньшего m. С другой стороны, Куликов [2] дал некоторое обозрение примарных групп без элементов бесконечной высоты, не являющееся их полным описанием, но достаточное для того, чтобы вновь показать невозможность распространения второй теоремы Прюфера на несчетный случай. Эта теория Куликова будет сейчас изложена.

Подгруппа B примарной абелевой группы G называется *базисной подгруппой*, если она сервантна в G и разложима в прямую сумму циклических групп, а фактор-группа G/B является полной группой. Так, во всякой полной примарной группе единственной базисной подгруппой будет нулевая подгруппа. С другой стороны, всякая прямая сумма примарных (по p) циклических групп является своей собственной базисной подгруппой, причем даже единственной в том случае, когда порядки элементов группы ограничены в совокупности.

Всякая примарная абелева группа G обладает базисными подгруппами.

Ввиду замечания, сделанного выше о базисных подгруппах полных групп, можно считать группу G неполной. Группа G обладает, следовательно (см. § 24), элементами порядка p и конечной высоты, которые на основании леммы, доказанной в конце предшествующего параграфа, вкладываются в циклические прямые слагаемые. Таким образом, группа G обладает сервантными подгруппами с ограниченными в совокупности порядками элементов. Отсюда, а также из того, что объединение возрастающей последовательности сервантных подгрупп само сервантно, вытекает, что в G можно найти возрастающую последовательность подгрупп

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots \tag{3}$$

со следующими свойствами:

1) Всякая подгруппа B_n, $n = 1, 2, \ldots$, сервантна в G.

2) Порядки элементов из B_n не превосходят числа p^n.

3) Подгруппа B_n не может быть включена в бóльшую подгруппу со свойствами 1) и 2).

Обозначим через B объединение последовательности (3). Эта подгруппа сервантна в группе G как объединение возрастающей последовательности сервантных подгрупп. Вместе с тем подгруппа B разложима в прямую сумму циклических групп, как показывает критерий Куликова (§ 24), так как из сервантности подгруппы B_n, $n = 1, 2, \ldots$,

и ограниченности порядков всех ее элементов вытекает конечность и ограниченность высот всех ее элементов в группе G.

Докажем полноту фактор-группы G/B. Для этого достаточно, как мы знаем из § 24, доказать, что всякий смежный класс $x + B$, имеющий в этой фактор-группе порядок p, имеет в ней бесконечную высоту. По условию, $px \in B$. Так как, однако, подгруппа B сервантна, в ней существует такой элемент b, что $pb = px$, откуда $p(x - b) = 0$. Можно считать, следовательно, что сам элемент x имеет в группе G порядок p, т. е. $px = 0$.

Подгруппа B_n, $n = 1, 2, \ldots$, сервантна в G и порядки ее элементов не превосходят числа p^n. Поэтому, как доказано в предшествующем параграфе, существует прямое разложение

$$G = B_n + C_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

В соответствии с этим элемент x разлагается в сумму $x = y + z$, где $y \in B_n$, $z \in C_n$. Элемент z отличен от нуля, так как x не содержится в подгруппе B, поэтому порядок z равен p. Высота элемента z в группе G не меньше n. Действительно, если бы она была меньше n, то на основании леммы из предшествующего параграфа элемент z вкладывался бы в группе C_n в циклическое прямое слагаемое, порядок которого был бы не больше p^n, что ввиду (4) привело бы к противоречию со свойством 3) подгруппы B_n. Элемент $z = x - y$ содержится, однако, в смежном классе $x + B$. Этот класс содержит, таким образом, элементы сколь угодно большой высоты, а поэтому высота класса $x + B$ в группе G/B бесконечна.

Этим доказано, что подгруппа B является базисной в группе G.

Все базисные подгруппы примарной абелевой группы G изоморфны между собой.

Пусть B будет любая базисная подгруппа группы G. Мы знаем из § 24, что все разложения группы B в прямую сумму циклических групп изоморфны между собой. Число слагаемых порядка p^k, $k = 1, 2, \ldots$, в любом из этих разложений (т. е. мощность множества таких слагаемых) равно, очевидно, числу циклических прямых слагаемых этого же порядка p^k в разложении фактор-группы B/p^nB, где $n > k$, а p^nB — подгруппа группы B, состоящая из всех тех элементов, высота которых в B больше или равна n. Теорема будет, следовательно, доказана, если мы покажем, что фактор-группа B/p^nB не зависит на самом деле от выбора базисной подгруппы B.

Обозначим через p^nG подгруппу группы G, состоящую из всех тех элементов, высота которых в G больше или равна n. Из сервантности подгруппы B следует равенство

$$B \cap p^nG = p^nB. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\{B, p^nG\} = G. \tag{6}$$

Действительно, если x — произвольный элемент группы G, то из полноты фактор-группы G/B следует существование в G такого элемента y, что элементы x и $p^n y$ лежат в одном смежном классе по B, т. е. $x = p^n y + b$.

Теорема об изоморфизме (§ 10) приводит, ввиду равенств (5) и (6), к изоморфизму

$$B/p^n B \simeq G/p^n G.$$

Таким образом, при данном n фактор-группы $B/p^n B$ изоморфны между собой для всех базисных подгрупп B группы G. Этим заканчивается доказательство теоремы. [См. Д.30.1.]

Применим полученные результаты к примарным группам без элементов бесконечной высоты. Мы видим, что эти группы можно разбить на непересекающиеся классы, относя в один класс те группы, базисные подгруппы которых изоморфны. Всякая примарная группа, разложимая в прямую сумму циклических групп, определяет при этом некоторый класс, так как она служит, например, базисной подгруппой для самой себя. С другой стороны, в каждом из рассматриваемых классов содержится такая группа. Задача описания всех примарных групп без элементов бесконечной высоты сводится, следовательно, на обозрение групп с данной базисной подгруппой B.

Для этой цели введем одно новое понятие. Возьмем разложение группы B в прямую сумму циклических групп и обозначим через $B^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, прямую сумму слагаемых порядка p^n из этого разложения; если же слагаемых этого порядка нет совсем, полагаем $B^{(n)} = 0$. Возьмем, далее, полную прямую сумму (в смысле конца § 17) всех групп $B^{(n)}$ и периодическую часть этой суммы назовем *замыканием* группы B и обозначим через $\overline{B}$. Иными словами, элементами группы $\overline{B}$ служат последовательности элементов, взятых по одному в каждой из групп $B^{(n)}$, причем порядки всех элементов каждой такой последовательности ограничены в совокупности; сложение последовательностей производится покомпонентно.

Ввиду изоморфизма всех разложений группы B в прямую сумму циклических групп группа $\overline{B}$ однозначно определяется самой группой B. Легко видеть, что группа $\overline{B}$ примарна и не содержит элементов бесконечной высоты. Группа B является в ней подгруппой, состоящей из тех последовательностей, которые содержат лишь конечное число ненулевых элементов. Таким образом, *группа B тогда и только тогда совпадает со своим замыканием $\overline{B}$, если порядки элементов в B ограничены в совокупности*, так как в этом и только в этом случае среди групп $B^{(n)}$ будет лишь конечное число ненулевых.

В общем случае группа B будет базисной подгруппой своего замыкания $\overline{B}$.

В самом деле, разложимость группы B в прямую сумму циклических групп предполагалась заранее. Для доказательства ее сервантности в группе $\overline{B}$ заметим, что сумма $C^{(n)} = B' + B'' + \ldots + B^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, служит прямым слагаемым для группы $\overline{B}$ — дополнительным слагаемым будет подгруппа, состоящая из тех последовательностей, первые n компонент которых равны нулю. Таким образом, подгруппа B, как объединение возрастающей последовательности подгрупп $C^{(n)}$, сервантных в $\overline{B}$, сама сервантна в $\overline{B}$. Докажем, наконец, полноту фактор-группы $\overline{B}/B$. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ есть произвольный элемент группы $\overline{B}$, то, так как порядки его компонент ограничены в совокупности, для всякого k можно найти такое N, что для всех n, $n \geqslant N$, высота элемента x_n в соответствующей группе $B^{(n)}$ не меньше k. Отсюда следует, что высота элемента $x = (0, \ldots, 0, x_N, x_{N+1}, \ldots)$ в группе $\overline{B}$ также не меньше k. Элемент x' принадлежит, однако, к смежному классу $x + B$. Этот класс содержит, следовательно, элементы сколь угодно большой высоты, а поэтому его высота в фактор-группе $\overline{B}/B$ бесконечна.

Отсюда может быть вновь выведено *существование примарных групп без элементов бесконечной высоты, не разложимых в прямую сумму циклических групп*.

Пусть, в самом деле, группа B — примарная группа, разложимая в прямую сумму циклических групп — счетна, но содержит элементы сколь угодно больших порядков. Ее замыкание $\overline{B}$ имеет поэтому мощность континуума. Группа $\overline{B}$ не может разлагаться в прямую сумму циклических групп, так как тогда в ней были бы две неизоморфные базисные подгруппы — она сама и B, что противоречит, однако, доказанной выше теореме об изоморфности всех базисных подгрупп данной примарной группы.

Все примарные абелевы группы без элементов бесконечной высоты, базисные подгруппы которых изоморфны группе B, исчерпываются такими подгруппами группы $\overline{B}$ — замыкания группы B, — которые содержат B и образы которых в фактор-группе $\overline{B}/B$ являются полными подгруппами.

Действительно, пусть C/B будет произвольная полная подгруппа группы $\overline{B}/B$. Группа C будет, как подгруппа группы $\overline{B}$, примарной и без элементов бесконечной высоты, причем подгруппа B содержится в C и служит для нее базисной подгруппой — из сервантности B в $\overline{B}$ следует сервантность B в C, а полнота фактор-группы C/B предположена заранее. Таким образом, группа C принадлежит к изучаемому нами классу групп.

Пусть теперь G будет произвольная примарная группа без элементов бесконечной высоты, базисные подгруппы которой изоморфны группе B. Выберем одну из этих базисных подгрупп и обозначим ее

через B_0. Мы знаем, что B обладает прямым разложением

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)},$$

где $B^{(n)}$ — прямая сумма циклических групп порядка p^n. Поэтому

$$B_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_0^{(n)},$$

причем $B_0^{(n)} \simeq B^{(n)}$. Введем обозначения:

$$D^{(k)} = \sum_{n>k} B_0^{(n)},$$

так что

$$B_0 = B_0' + B_0'' + \ldots + B_0^{(k)} + D^{(k)},$$

и

$$G^{(k)} = \{D^{(k)}, p^k G\},$$

где $p^k G$, как и раньше, будет подгруппа, составленная из всех тех элементов группы G, высота которых в G не меньше k. Выше было доказано [см. равенство (6)], что при всех k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет место равенство

$$G = \{B_0, p^k G\},$$

а поэтому

$$G = \{B_0' + B_0'' + \ldots + B_0^{(k)}, G^{(k)}\}.$$

Пусть элемент x содержится в пересечении подгрупп $B_0' + B_0'' + \ldots + B_0^{(k)}$ и $G^{(k)}$. Как элемент второй из этих подгрупп, он имеет вид $x = y + z$, где $y \in D^{(k)}$, $z \in p^k G$. Так как элементы x и y принадлежат к подгруппе B_0, то и элемент $z = x - y$ содержится в B_0. Высота элемента z в группе G не меньше k; такова же его высота и в подгруппе B_0, сервантной в G. Однако все элементы группы B_0, высота которых в B_0 не меньше k, принадлежат к $D^{(k)}$. Поэтому и элемент x, как сумма двух элементов из $D^{(k)}$, содержится в $D^{(k)}$, т. е., принадлежа и к $B_0' + B_0'' + \ldots + B_0^{(k)}$, будет равным нулю.

Этим доказано существование прямых разложений

$$G = B_0' + B_0'' + \ldots + B_0^{(k)} + G^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

причем, так как подгруппа $G^{(k)}$ содержит и подгруппу $B_0^{(k+1)}$, и подгруппу $G^{(k+1)}$, имеет место прямое разложение

$$G^{(k)} = B_0^{(k+1)} + G^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. прямые разложения (7) последовательно продолжают друг друга путем разложения последнего слагаемого. Отсюда вытекает, что данный элемент x группы G имеет в прямом слагаемом $B_0^{(n)}$ каждого

из разложений (7), взятых для $k = n, n+1, \ldots$, одну и ту же компоненту; обозначим эту компоненту через x_n.

Ставя в соответствие всякому элементу x группы G последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ его компонент, мы получим, очевидно, гомоморфное отображение группы G в замыкание $\overline{B}$ группы B — порядки всех компонент x_n не превосходят, понятно, порядка элемента x, т. е. последовательность компонент действительно содержится в $\overline{B}$. Это отображение будет даже изоморфным, так как элемент x, которому соответствует нулевая последовательность, должен лежать в подгруппе $G^{(k)}$ при $k = 1, 2, \ldots$, т. е. должен иметь бесконечную высоту, а поэтому ввиду отсутствия таких элементов в группе G он равен нулю. При этом изоморфном отображении группы G на некоторую подгруппу C группы $\overline{B}$ подгруппа B_0 будет отображаться на подгруппу B: элементам из B_0 и только им соответствуют последовательности компонент, содержащие конечное число ненулевых элементов, и, с другой стороны, всякая такая последовательность соответствует некоторому элементу из B_0. Из полноты фактор-группы G/B_0 следует, наконец, полнота фактор-группы C/B. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Следует заметить, что построенная в процессе доказательства подгруппа C группы $\overline{B}$, на которую изоморфно отображается группа G, зависит от выбора в G базисной подгруппы B_0. Вопрос об условиях, которым должны подчиняться полные подгруппы C/B и C'/B группы $\overline{B}/B$ для того, чтобы соответствующие подгруппы C и C' группы $\overline{B}$ были изоморфными, остается открытым.

В работе Куликова [2] можно найти ряд дальнейших свойств примарных групп, являющихся замыканиями прямых сумм циклических групп. См. также работу Калужнина [8]. [См. Д.30.2.]

§ 27. Ульмовские факторы. Теорема существования

Мы переходим теперь к изучению примарных абелевых групп, обладающих элементами бесконечной высоты. Не следует думать, что примарная группа, обладающая элементами бесконечной высоты, непременно должна содержать полные подгруппы — если элемент a примарной группы G имеет в ней бесконечную высоту, то элементы b_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие равенствам $p^n b_n = a$, вовсе не обязаны лежать в одной подгруппе типа p^∞. Основная теорема настоящего параграфа покажет, что строение редуцированных примарных групп — мы можем ввиду результатов § 23 ограничиться в дальнейшем рассмотрением лишь редуцированных групп — будет даже в счетном случае много более сложным, чем строение примарных групп без элементов бесконечной высоты.

Так как сумма и разность двух элементов бесконечной высоты из примарной группы G также будут иметь в G бесконечную высоту,

то множество всех элементов бесконечной высоты (с присоединением нуля) является подгруппой группы G; эта подгруппа будет обозначаться через G^1. Через G^2 мы обозначим подгруппу, составленную из всех элементов подгруппы G^1, имеющих в G^1 бесконечную высоту. Вообще, если в группе G уже определены подгруппы G^α для всех порядковых чисел a, меньших β, причем они составляют убывающую последовательность, то в качестве G^β выбираем при непредельном β подгруппу, составленную из всех элементов подгруппы $G^{\beta-1}$, имеющих в $G^{\beta-1}$ бесконечную высоту, а при предельном β — пересечение всех подгрупп G^α, $\alpha < \beta$.

Мы получаем убывающую последовательность подгрупп группы G,

$$G = G^0 \supset G^1 \supset \ldots \supset G^\alpha \supset \ldots,$$

которая должна оборваться на некотором γ. Точнее говоря, существует такое порядковое число γ, мощность которого не превосходит мощности самой группы G, что $G^\gamma = G^{\gamma+1}$, и поэтому $G^\gamma = G^\delta$ для всех δ, больших γ. Равенство $G^\gamma = G^{\gamma+1}$ показывает, однако, что все элементы подгруппы G^γ имеют в G^γ бесконечную высоту, т. е. что подгруппа G^γ является полной. Так как ввиду сделанного выше предположения группа G редуцированная, то подгруппа G^γ должна быть равной нулю.

Пусть τ будет первое порядковое число, для которого $G^\tau = O$. Число τ называется *типом* редуцированной группы G. Понятно, что группы, не содержащие элементов бесконечной высоты, имеют тип 1.

Если G есть редуцированная примарная группа типа τ, то для всех α, меньших τ, берем фактор-группы

$$\overline{G}^\alpha = G^\alpha / G^{\alpha+1}.$$

Последовательность групп

$$\overline{G}^0, \overline{G}^1, \ldots, \overline{G}^\alpha, \ldots, \quad \alpha < \tau,$$

называется *последовательностью ульмовских факторов* группы G. Из построения этой последовательности следует, что она однозначно определяется самой группой G и что для подгруппы G^α, $\alpha < \tau$, последовательностью ульмовских факторов будет последовательность

$$\overline{G}^\alpha, \overline{G}^{\alpha+1}, \ldots, \overline{G}^\beta, \ldots, \quad \alpha \leqslant \beta < \tau.$$

Значение ульмовских факторов для теории примарных групп выяснится ниже, в особенности в следующем параграфе.

При установлении простейших свойств ульмовских факторов примарной группы будет использоваться следующее замечание. Пусть примарная группа G гомоморфно отображается на примарную группу H, причем в нуль группы H переходит такая подгруппа A группы G, все элементы которой имеют в G бесконечную высоту. Тогда *образом всякого элемента бесконечной высоты из G, лежащего вне A, будет элемент бесконечной высоты в H*; *обратно*, *всякий прообраз*

элемента бесконечной высоты из H будет элементом бесконечной высоты в G. Первое из этих утверждений непосредственно следует из определения гомоморфного отображения. Докажем второе утверждение. Пусть h есть элемент бесконечной высоты в H и g — один из его прообразов в G. Если $p^n h' = h$, $h' \in H$, и если g' есть один из прообразов элемента h' в G, то

$$p^n g' = g + a, \quad a \in A.$$

Ввиду предположений, сделанных о подгруппе A, в группе G существует такой элемент b, что $p^n b = a$. Отсюда

$$p^n(g' - b) = g,$$

а поэтому элемент g имеет в группе G бесконечную высоту.

Из этого замечания следует, в частности, что *все ульмовские факторы примарной группы G являются группами без элементов бесконечной высоты.* Для доказательства достаточно применить наше замечание к естественному гомоморфному отображению группы G^α на фактор-группу $G^\alpha/G^{\alpha+1} = \overline{G}^\alpha$.

Докажем также, что *группа $F = G/G^\sigma$, $\sigma < \tau$, является примарной группой типа σ и что ее последовательность ульмовских факторов есть*

$$\overline{G}^0, \overline{G}^1, \ \ldots, \overline{G}^\alpha, \ \ldots, \quad \alpha < \sigma.$$

В самом деле, рассмотрим естественное гомоморфное отображение группы G на группу F. Из сказанного выше следует, что при этом гомоморфизме подгруппа G^1 отображается на подгруппу F^1, а так как $G^1 \supseteq G^\sigma$, то, по теореме о соответствии между подгруппами при гомоморфном отображении, фактор-группы $G/G^1 = \overline{G}^0$ и $F/F^1 = \overline{F}^0$ изоморфны. Пусть уже доказано, что для всех α, меньших β, подгруппа G^α отображается при рассматриваемом гомоморфизме на подгруппу F^α. Если $\beta - 1$ существует, то, как выше, мы получим, что G_1^β отображается на F^β и что $\overline{G}^{\beta-1} \simeq \overline{F}^{\beta-1}$. Если же β — предельное число, то G^β снова отображается на F^β, так как первое есть пересечение всех подгрупп G^α, $\alpha < \beta$, второе — пересечение образов этих подгрупп.

Если примарная группа G есть прямая сумма групп H_ν, $G = \sum\limits_\nu H_\nu$, то при всяком α, меньшем, чем тип группы G, будет

$$\overline{G}^\alpha \simeq \sum_\nu \overline{H}_\nu^\alpha.$$

При этом предполагается, конечно, что $\overline{H}_\nu^\alpha = O$, если α больше или равно типу группы H_ν.

Мы будем доказывать, что при любом β подгруппа G^β является суммой (причем, очевидно, прямой) всех подгрупп H_ν^β. Для всех α, меньших β, это утверждение будет считаться доказанным (при $\beta = 0$

оно верно). Если число $\beta-1$ существует, то $G^{\beta-1}=\sum\limits_{\nu}H_\nu^{\beta-1}$ и поэтому всякий элемент из H_ν^β имеет бесконечную высоту в $G^{\beta-1}$, т. е. $G^\beta\supseteq\sum\limits_{\nu}H_\nu^\beta$. С другой стороны, если g есть произвольный элемент бесконечной высоты в $G^{\beta-1}$ и $g=\sum\limits_{\nu}h_\nu$, $h_\nu\in H_\nu^{\beta-1}$, то всякий элемент h_ν должен иметь бесконечную высоту в $H_\nu^{\beta-1}$, откуда $G^\beta\subseteq\sum\limits_{\nu}H_\nu^\beta$. Поэтому $G^\beta=\sum\limits_{\nu}H_\nu^{\beta-1}$ и, как легко следует из определения прямой суммы,

$$\overline{G}^{\beta-1}=G^{\beta-1}/G^\beta\simeq\sum_{\nu}H_\nu^{\beta-1}/H_\nu^\beta=\sum_{\nu}\overline{H}_\nu^{\beta-1}.$$

Если же β предельное число, то наше утверждение следует из того, что подгруппа G^β есть пересечение всех подгрупп G^α, $\alpha<\beta$.

Мы исходили до сих пор из определения типа примарной группы и ее ульмовских факторов и не интересовались тем, всякое ли порядковое число служит типом для некоторой примарной группы и не имеет ли места на самом деле такое, например, обстоятельство, что последовательность подгрупп $G\supset G^1\supset\ldots\supset G^\alpha\supset\ldots$ всегда обрывается на конечном месте. Мы не знаем также, какими свойствами должна обладать последовательность примарных групп без элементов бесконечной высоты для того, чтобы она могла служить последовательностью ульмовских факторов для некоторой примарной группы. Полный ответ на эти вопросы дан Куликовым. Он, однако, очень сложен и мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь с ч е т н ы х примарных групп.

Если G есть счетная редуцированная примарная группа, то ее тип τ имеет, как мы знаем, конечную или счетную мощность. Ульмовские факторы этой группы будут счетными примарными группами без элементов бесконечной высоты и поэтому, по второй теореме Прюфера, они разложимы в прямую сумму циклических групп. Можно утверждать, далее (причем счетность группы здесь не играет роли), что *порядки элементов во всех ульмовских факторах* $\overline{G}^\alpha$, *кроме, быть может, фактора* $\overline{G}^{\tau-1}$, *если число* $\tau-1$ *существует, не ограничены в совокупности*. Действительно, если $\alpha<\tau-1$, то $G^{\alpha+1}\neq O$, и поэтому в этой подгруппе можно найти элемент, имеющий в ней конечную высоту, хотя его высота в подгруппе G^α бесконечна.

Оказывается, что установленное сейчас необходимое свойство ульмовских факторов является в счетном случае и достаточным, как показывает следующая теорема (см. Цыпин [1] [1])).

Пусть дано порядковое число τ *не более чем счетной мощности и для всякого* α, $0\leqslant\alpha<\tau$, *дана счетная примарная группа* A_α

[1]) Впрочем, работа Цыпина не содержит сколько-нибудь законченного доказательства этой теоремы.

без элементов бесконечной высоты, причем при всех α, кроме, быть может, $\alpha = \tau - 1$ (при непредельном числе τ), группа A_α содержит элементы как угодно больших порядков. Тогда существует счетная редуцированная примарная группа, имеющая тип τ и такая, что последовательность

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \tau,$$

служит для нее последовательностью ульмовских факторов.

Доказательство. Каждая из групп A_α разложима, по второй теореме Прюфера, в прямую сумму циклических групп. Пусть образующие этих циклических групп будут

$$a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \ldots, a_{\alpha i}, \ldots,$$

причем элемент $a_{\alpha i}$ имеет порядок $p^{n_{\alpha i}}$. Определим группу G следующим образом: ее образующими будут элементы $c_{\alpha i}$, взаимно однозначно соответствующие элементам $a_{\alpha i}$ (где α принимает всевозможные значения, меньшие τ). Всякому $c_{\alpha i}$ ставим в соответствие или равенство $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = 0$, или же равенство $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = c_{\beta j}$, где $\beta > \alpha$, причем полученная система равенств будет вместе с соотношениями коммутативности составлять для G систему определяющих соотношений. Дополнительно требуем, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Пусть дан элемент $c_{\alpha i}$; если ему соответствует соотношение $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = c_{\alpha_1 i_1}$, если элементу $c_{\alpha_1 i_1}$ соответствует соотношение $p^{n_{\alpha_1 i_1}} c_{\alpha_1 i_1} = c_{\alpha_2 i_2}$ и т. д., то после конечного числа шагов мы должны достигнуть элемента $c_{\alpha_k i_k}$, которому соответствует соотношение $p^{n_{\alpha_k i_k}} c_{\alpha_k i_k} = 0$.

2) Если даны: элемент $c_{\beta j}$, $\beta > 0$, порядковое число γ, меньшее β, и натуральное число N, то должен существовать такой элемент $c_{\alpha i}$, что $\gamma \leqslant \alpha < \beta$, $n_{\alpha i} > N$ и соотношение, соответствующее этому элементу, имеет вид $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = c_{\beta j}$.

3) Если число τ предельное, то для всякого γ, меньшего τ, и всякого натурального числа N должен существовать такой элемент $c_{\alpha i}$, что $\gamma < \alpha$, $n_{\alpha i} > N$ и соотношение, соответствующее этому элементу, имеет вид $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = 0$.

Докажем, что система равенств, удовлетворяющая этим трем требованиям, действительно существует и что группа G, так определенная, удовлетворяет условиям теоремы. Доказательство будем вести индукцией по порядковому числу τ. Действительно, при $\tau = 1$ группа G задается образующими $c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0i}, \ldots$ и соотношениями $p^{n_{0i}} c_{0i} = 0$, т. е. условия 1)–3) выполняются, а сама группа изоморфна группе A_0.

Предположим сначала, что число $\tau - 1$ существует. Пусть G' есть группа типа $\tau - 1$, имеющая последовательность

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \tau - 1,$$

своей последовательностью ульмовских факторов; эта группа задается образующими $c_{\alpha i}$, $\alpha < \tau - 1$, и соответствующими этим образующим

соотношениями указанного выше типа, причем условия 1)–3) выполнены. Соотношения в группе G определяем следующим образом: если элементу $c_{\alpha i}$, $\alpha < \tau - 1$, в группе G' соответствует соотношение $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = c_{\beta j}$, $\beta < \tau - 1$, то это соотношение будет ему соответствовать и в группе G. Если же элементу $c_{\alpha i}$, $\alpha < \tau - 1$, соответствует в группе G' соотношение $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = 0$, то в G оно заменяется некоторым соотношением вида $p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = c_{\tau-1,\,j}$. Легко видеть, что при этом можно достигнуть того, что условие 2) будет для элементов $c_{\tau-1,\,i}$ выполняться — это следует из того, что элементов $c_{\tau-1,\,i}$ не более чем счетное множество, и при предельном числе $\tau - 1$ из условия 3), а при непредельном $\tau - 1$ из того, что существуют элементы $c_{\tau-2,\,i}$ со сколь угодно большими показателями $n_{\tau-2,\,i}$, а соотношения, соответствующие всем элементам $c_{\tau-2,\,i}$ в G', имеют вид $p^{n_{\tau-2,\,i}} c_{\tau-2,\,i} = 0$. Наконец, элементам $c_{\tau-1,\,i}$ ставим в соответствие соотношения $p^{n_{\tau-1,\,i}} c_{\tau-1,\,i} = 0$. Мы получаем систему определяющих соотношений, удовлетворяющую условиям 1) и 2); условие 3) для этого случая ничего не утверждает.

Абелева группа G, сейчас построенная, будет, как следует из 1), примарной. Докажем, что *все элементы* $c_{\alpha i}$, $\alpha < \tau$, *будут в этой группе отличными от нуля*. Действительно, берем элемент $c_{\alpha i}$ и пишем соотношения

$$p^{n_{\alpha i}} c_{\alpha i} = c_{\alpha_1 i_1}, \quad p^{n_{\alpha_1 i_1}} c_{\alpha_1 i_1} = c_{\alpha_2 i_2}, \ \ldots, p^{n_{\alpha_k i_k}} c_{\alpha_k i_k} = \\ = c_{\tau-1,\,j}, \quad p^{n_{\tau-1,\,j}} c_{\tau-1,\,j} = 0$$

— из нашей конструкции следует, что до одного из элементов $c_{\tau-1,\,j}$ мы этим путем должны дойти. Введем обозначение

$$n_{\alpha i} + n_{\alpha_1 i_1} + \ldots + n_{\alpha_k i_k} + n_{\tau-1,\,j} = l(\alpha, i).$$

Берем, далее, группу P типа p^∞ с образующими $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$,

$$pd_1 = 0, \, pd_n = d_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Если мы поставим в соответствие каждому элементу $c_{\alpha i}$ элемент $d_{l(\alpha, i)}$ из группы P, то, как легко видеть, все определяющие соотношения группы G будут в P выполняться, причем всем элементам $c_{\alpha i}$ будут соответствовать отличные от нуля элементы группы P. Этим показано, что из определяющих соотношений группы G не может вытекать равенство нулю ни одного из $c_{\alpha i}$. Больше того, мы получаем, что порядок каждого элемента $c_{\alpha i}$ в группе G равен числу $p^{l(\alpha, i)}$.

Теперь можно уже утверждать, применяя индукцию по α и используя 2), что всякий элемент $c_{\alpha i}$ содержится в подгруппе G^α, определяемой так же, как это делалось в начале настоящего параграфа. В частности, все элементы $c_{\tau-1,\,i}$ принадлежат к подгруппе $G^{\tau-1}$. Если F есть подгруппа, порожденная в G всеми элементами $c_{\tau-1,\,i}$, то фактор-группа G/F изоморфна группе G'. Отсюда следует, так как G'

имеет тип $\tau - 1$, что в G вне группы F нет элементов, принадлежащих к $G^{\tau-1}$, т. е. $F = G^{\tau-1}$. Поэтому

$$\overline{G}^{\alpha} \simeq \overline{G}'^{\alpha} \simeq A_{\alpha}, \quad \alpha < \tau - 1.$$

Что же касается подгруппы $G^{\tau-1}$, то она является прямой суммой циклических групп $\{c_{\tau-1,\,i}\}$ и поэтому изоморфна группе $A_{\tau-1}$. Это следует из того, что сама группа G является, как показывают определяющие соотношения, прямой суммой подгрупп, каждая из которых порождается всеми теми элементами $c_{\alpha i}$, циклические подгруппы которых содержат фиксированный элемент $c_{\tau-1,\,j}$. Группа G удовлетворяет, следовательно, всем требованиям теоремы.

Пусть теперь число τ предельное. Каждая из групп A_{α}, $0 \leqslant \alpha < \tau$, является прямой суммой циклических групп с неограниченными в совокупности порядками. Это позволяет разложить A_{α} в прямую сумму счетного множества подгрупп, каждая из которых также содержит элементы как угодно больших порядков. Пусть это разложение будет [1])

$$A_{\alpha} = A_{\alpha\alpha} + A_{\alpha,\,\alpha+1} + \ldots + A_{\alpha\sigma} + \ldots, \quad \alpha \leqslant \sigma < \tau.$$

По индуктивному предположению существует группа H_{α} типа $\alpha + 1$, имеющая последовательность

$$A_{0\alpha},\ A_{1\alpha},\ A_{2\alpha},\ \ldots,\ A_{\alpha\alpha}$$

своей последовательностью ульмовских факторов. Прямая сумма всех групп H_{α}, $0 \leqslant \alpha < \tau$, будет уже, как мы знаем, удовлетворять всем требованиям теоремы. Вместе с тем система образующих $c_{\alpha i}$ для этой прямой суммы получается объединением соответствующих систем образующих из групп H_{α} с сохранением соответствовавших им в этих группах соотношений. Условия 1) и 2) будут, очевидно, выполняться. Справедливость условия 3) следует из того, что каждая из подгрупп $A_{\alpha\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < \tau$, содержит элементы сколь угодно больших порядков.

Этим заканчивается доказательство теоремы. [См. Д. 30.3.]

§ 28. Теорема Ульма

Основная теорема предшествующего параграфа показывает, что уже в счетном случае редуцированные примарные группы могут быть весьма разнообразными — любое порядковое число счетной мощности может служить в качестве типа такой группы и любая последовательность счетных примарных групп без элементов бесконечной высоты (с одним вполне естественным ограничением) может быть ее последовательностью ульмовских факторов. В действительности, однако, ульмовские факторы и тип группы могут быть использованы не только

[1]) Выбор нумерации находится, очевидно, в нашем распоряжении.

для установления разнообразия рассматриваемых нами групп, но и для полного их описания. Для этой цели служит следующая теорема.

Теорема Ульма. *Если счетные редуцированные примарные группы A и B имеют один и тот же тип τ и если для всякого α, меньшего τ, их ульмовские факторы $\overline{A}^{\alpha}$ и $\overline{B}^{\alpha}$ изоморфны, то группы A и B сами изоморфны между собой.*

Эта теорема была доказана Ульмом [1] с привлечением теории бесконечных матриц и передоказана теоретико-групповыми методами Цыпиным [1]. Теорема утверждает, очевидно, что всякая счетная редуцированная примарная группа полностью определяется заданием ее типа и последовательности ее ульмовских факторов, а так как всякий ульмовский фактор разложим в счетном случае, по второй теореме Прюфера, в прямую сумму циклических групп и поэтому вполне определяется числом циклических прямых слагаемых порядка p^n (для всех n), то мы получаем возможность задавать счетные примарные группы некоторой системой числовых инвариантов. Эти системы инвариантов оказываются, понятно, более сложными, чем те, которыми задаются абелевы группы с конечным числом образующих.

Пусть

$$A = A^0 \supset A^1 \supset A^2 \supset \ldots \supset A^a \supset \ldots \supset A^\tau = O$$

есть последовательность подгрупп группы A, определяемая так же, как это делалось в предшествующем параграфе: если $\alpha - 1$ существует, то A^α есть подгруппа из всех элементов бесконечной высоты из группы $A^{\alpha-1}$, если же число α предельное, то A^α есть пересечение всех A^β, $\beta < \alpha$. Соответственно строим последовательность

$$B = B^0 \supset B^1 \supset B^2 \ldots \supset B^\alpha \supset \ldots \supset B^\tau = O.$$

Элемент a из группы A называется *элементом типа* α, если он содержится в подгруппе A^α, но не содержится в подгруппе $A^{\alpha+1}$. Всякий элемент группы A обладает некоторым типом: если данный элемент содержится во всех подгруппах A^β, где β меньше предельного числа α, то он содержится и в пересечении этих подгрупп, т. е. в A^α.

Пусть, далее, X есть подгруппа группы A и $\alpha < \tau$. Пересечение $X \cap A^\alpha$ является подгруппой группы A^α; пусть при естественном гомоморфном отображении группы A^α на ульмовский фактор $\overline{A}^{\alpha} = A^\alpha / A^{\alpha+1}$ это пересечение отображается на подгруппу $\overline{A}^{\alpha}_{X}$ группы $\overline{A}^{\alpha}$. Подгруппа X будет называться *совершенной* подгруппой группы A, если при всяком α подгруппа $\overline{A}^{\alpha}_{X}$ является сервантной в группе $\overline{A}^{\alpha}$ (определение сервантной подгруппы см. в § 25).

Определения типа элемента и совершенной подгруппы переносятся, понятно, и на группу B.

Введем, наконец, следующее определение: пусть в группах A и B выбраны подгруппы $X \subset A$ и $Y \subset B$, изоморфные между собой; изоморфизм φ между этими подгруппами будет называться *сохраняющим*

типы, если он сопоставляет друг другу элементы из X и Y, имеющие соответственно в A и B одинаковые типы.

Основную часть доказательства теоремы Ульма составляет следующая лемма.

Пусть в группах A и B соответственно заданы конечные совершенные подгруппы X и Y, изоморфные между собой, причем φ есть их изоморфизм, сохраняющий типы. Пусть, далее, элемент a группы A не содержится в X. Тогда в A можно найти такую конечную совершенную подгруппу $\overline{X}$, содержащую X и a, а в B такую конечную совершенную подгруппу $\overline{Y}$, содержащую Y, что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ будут изоморфны, причем между ними существует изоморфизм $\overline{\varphi}$, сохраняющий типы и продолжающий изоморфизм φ.

Заметим, прежде всего, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда $pa \in X$: случай $p^n a \in X$, но $p^{n-1}a \notin X$, $n > 1$, сводится на указанный частный случай, так как можно последовательно присоединять к уже построенной подгруппе элементы $p^{n-1}a$, $p^{n-2}a$, ..., pa, a.

Пусть λ есть наивысший среди типов элементов, составляющих смежный класс $X + a$; такой существует, так как в классе $X + a$ лишь конечное число элементов. Пусть, далее, среди всех элементов типа λ из класса $X + a$ элемент $a' = x_0 + a$ является одним из имеющих наивысшую высоту в подгруппе A^λ. Если высота элемента a' в A^λ есть $n - 1$ и если $a' = p^{n-1}\overline{a}$, где $\overline{a} \in A^\lambda$, то полагаем

$$\overline{X} = \{X, \overline{a}\}.$$

Подгруппа $\overline{X}$ конечна и содержит как подгруппу X, так и элемент $a = a' - x_0$. Докажем, что *подгруппа $\overline{X}$ совершенна в группе A.*

Всякий элемент из подгруппы $\overline{X}$ имеет (ввиду $p^n\overline{a} \in X$) вид $\overline{x} = x + k\overline{a}$, где $x \in X$, $0 \leqslant k < p^n$. Если тип элемента $\overline{x}$ есть α и если $\overline{x}$ имеет в A^α высоту s, откуда

$$\overline{x} = x + k\overline{a} = p^s c, \quad c \in A^\alpha, \tag{1}$$

то высота элемента $A^{\alpha+1} + \overline{x}$ в фактор-группе $A^\alpha/A^{\alpha+1} = \overline{A}^{\,\alpha}$ также равна s (использовать определение подгруппы $A^{\alpha+1}$!). Нам нужно доказать, что в подгруппе $\overline{X}$ найдется такой элемент $\overline{x}'$ типа α, что

$$p^s(A^{\alpha+1} + \overline{x}') = A^{\alpha+1} + \overline{x}.$$

При $k = 0$, а также при $\alpha < \lambda$, будет $k\overline{a} \in A^{\alpha+1}$. Наше утверждение следует в этих двух случаях из совершенности в A подгруппы X. Если, далее, $\alpha = \lambda$, причем k делится на p^s, $k = p^s k'$, то, по (1), будет $x = p^s(c - k'\overline{a})$. Из $c - k'\overline{a} \in A^\lambda$ и совершенности подгруппы X следует теперь существование в подгруппе $A^\lambda \cap X$ такого элемента x', что

$$A^{\lambda+1} + x = p^s(A^{\lambda+1} + x'),$$

откуда

$$A^{\lambda+1} + \overline{x} = p^s(A^{\lambda+1} + x' + k'\overline{a}),$$

причем, очевидно, $x' + k'\overline{a} \in (A^\lambda \cap \overline{X})$.

Покажем, что во всех других случаях равенство (1) противоречит выбору элемента a'.

Пусть p^j есть наивысшая степень числа p, на которую делится k, $k = p^j k'$; так как $k < p^n$, то $j \leqslant n-1$. Из взаимной простоты чисел k' и p следует существование таких целых чисел m и l, $0 < l < p$, что $k'l = 1 + mp$. Умножение обеих частей равенства (1) на lp^{n-j-1} дает

$$lp^{n-j-1}x + p^{n-1}\overline{a} + p^n m\overline{a} = p^{n+s-j-1}(lc),$$

а из $p^n\overline{a} \in X$ следует

$$lp^{n-j-1}x + p^n m\overline{a} = x' \in X,$$

откуда, ввиду $p^{n-1}\overline{a} = a'$ и $lc = c' \in A^\alpha$,

$$x' + a' = p^{n+s-j-1}c'.$$

Если теперь $\alpha > \lambda$, то из $x' + a' \in A^\alpha$ следует, что в смежном классе $X + a' = X + a$ найден элемент, тип которого больше λ, что противоречит условию, наложенному на элемент a'. Если же $\alpha = \lambda$, но k не делится на p^s, то $j \leqslant s-1$, откуда $n + s - j - 1 \geqslant n$. Мы нашли, следовательно, в классе $X + a$ элемент типа λ, высота которого в A^λ больше высоты элемента a', равной $n-1$, что снова противоречит выбору элемента a'. Совершенность подгруппы $\overline{X}$ доказана.

Мы знаем, что элемент $p^n\overline{a}$ содержится в подгруппе X, причем тип этого элемента не меньше λ. Из совершенности подгруппы X следует, что в ней можно найти такой элемент x_1, имеющий тип λ или равный нулю, и такой элемент x_2, тип которого не меньше $\lambda + 1$, что

$$p^n\overline{a} = p^n x_1 + x_2.$$

Если $\overline{a} - x_1 = \overline{\overline{a}}$, то

$$p^n\overline{\overline{a}} = x_2, \quad x_2 \in A^{\lambda+1}, \tag{2}$$

и снова $\overline{X} = \{X, \overline{\overline{a}}\}$. Все элементы $k\overline{\overline{a}}$, $0 < k < p^n$, лежат вне подгруппы X. Мы знаем, далее, что типы всех элементов из $\overline{X}$, лежащих вне X, не превосходят λ — это следует из доказанной выше невозможности равенства (1) при $k \neq 0$ и $\alpha > \lambda$. Отсюда следует, что группа $\overline{A}^\lambda_{\overline{X}}$ является прямой суммой подгруппы $\overline{A}^\lambda_X$ и циклической подгруппы порядка p^n, порожденной в группе $\overline{A}^\lambda$ элементом $\overline{\overline{a}} + A^{\lambda+1}$. Конечная подгруппа $\overline{A}^\lambda_{\overline{X}}$ будет ввиду совершенности подгруппы $\overline{X}$ сервантной в ульмовском факторе $\overline{A}^\lambda$ и поэтому ввиду результатов § 25 служит для группы $\overline{A}^\lambda$ прямым слагаемым. Подгруппа $\overline{A}^\lambda_X$ также является для $\overline{A}^\lambda$ прямым слагаемым, причем нами доказано существование

в группе $\overline{A}^{\lambda}$ циклического прямого слагаемого порядка p^n, пересечение которого с $\overline{A}^{\lambda}_X$ есть O.

Переходим к рассмотрению группы B. Из сохранения типов при изоморфизме φ между подгруппами X и Y следует изоморфизм групп $\overline{A}^{\lambda}_X$ и $\overline{B}^{\lambda}_Y$. Подгруппа $\overline{B}^{\lambda}_Y$, будучи конечной и сервантной в группе $\overline{B}^{\lambda}$, будет для этой группы прямым слагаемым, а так как $\overline{B}^{\lambda}$ разложима, по второй теореме Прюфера, в прямую сумму циклических групп и, по условию теоремы Ульма, изоморфна группе $\overline{A}^{\lambda}$, то в $\overline{B}^{\lambda}$ можно найти циклическое прямое слагаемое порядка p^n, пересечение которого с подгруппой $\overline{B}^{\lambda}_Y$ есть O. Пусть образующий элемент этой циклической группы (т. е. смежный класс по $B^{\lambda+1}$) есть $b + B^{\lambda+1}$. Элемент b имеет тип λ в группе B, причем $p^n b \in B^{\lambda+1}$. Если элемент y_2 соответствует элементу x_2 при изоморфизме φ, то $y_2 \in B^{\lambda+1}$, а в B^{λ} существует такой элемент b_0, что $p^{n+1}b_0 = y_2 - p^n b$. Мы вводим теперь обозначение $\overline{b} = b + pb_0$, откуда

$$p^n \overline{b} = y_2, \tag{3}$$

и полагаем

$$\overline{Y} = \{Y, \overline{b}\}.$$

Заметим, что $p^{n-1}\overline{b} \notin Y$. Действительно, из $p^{n-1}\overline{b} = y_0$, $y_0 \in Y$, следовало бы

$$y_0 - p^{n-1}b = p^n b_0.$$

Это привело бы, однако, при переходе к фактору B^{λ}, к существованию в прямом слагаемом $\overline{B}^{\lambda}_Y + \{B^{\lambda+1} + b\}$ элемента, высота которого в $\overline{B}^{\lambda}$ больше высоты его компоненты в прямом слагаемом $\{B^{\lambda+1} + b\}$, что невозможно. Отсюда же следует, что в группе $\overline{B}^{\lambda}$ подгруппы $\overline{B}^{\lambda}_Y$ и $\{B^{\lambda+1} + \overline{b}\}$ составляют прямую сумму.

Из $p^{n-1}b \notin Y$, а также из равенств (2) и (3) и соответствия элементов x_2 и y_2 при изоморфизме φ следует, что *подгруппы* $\overline{X}$ *и* $\overline{Y}$ *изоморфны*: мы получим изоморфизм $\overline{\varphi}$ между этими подгруппами, если подгруппу X будем отображать на подгруппу Y в соответствии с изоморфизмом φ, а элементу $\overline{a}$ сопоставим элемент $\overline{b}$. Изоморфизм $\overline{\varphi}$ продолжает изоморфизм φ. *Он сохраняет вместе с тем типы элементов*. Действительно, если при $\overline{\varphi}$ соответствуют друг другу элементы $\overline{x} = x + k\overline{a}$ и $\overline{y} = y + k\overline{b}$, $0 \leqslant k < p^n$, то ввиду $x\varphi = y$ типы элементов x и y совпадают; это верно, следовательно, при $k = 0$ и для элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Если же $k \neq 0$, но тип элементов x и y отличен от λ, то типы элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ снова совпадают, так как элементы $k\overline{\overline{a}}$ и $k\overline{b}$ имеют тип λ, а тип суммы двух элементов *различных* типов равен, очевидно, меньшему из этих двух типов. Если, наконец, $k \neq 0$ и тип элементов x и y есть λ, то элементы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ также имеют тип λ, так как в группе $\overline{A}^{\lambda}$ (соответственно в $\overline{B}^{\lambda}$) подгруппы $\overline{A}^{\lambda}_X$ и $\{A^{\lambda+1} + \overline{\overline{a}}\}$ (соответственно $\overline{B}^{\lambda}_Y$ и $\{B^{\lambda+1} + \overline{b}\}$) составляют прямую сумму.

Нам остается доказать, что *подгруппа $\overline{Y}$ совершенна в группе B*. Это может быть сделано повторением рассуждений, проводившихся выше при доказательстве совершенности подгруппы $\overline{X}$ в группе A, если в качестве элемента $\overline{a}$ будет теперь взят элемент $\overline{b}$, а в качестве a' — элемент $p^{n-1}\overline{b}$. Действительно, элемент $\overline{b}$ имеет в подгруппе B^λ высоту нуль, далее, типы всех элементов из смежного класса $Y + p^{n-1}\overline{b}$ не выше типа элемента $p^{n-1}\overline{b}$, равного λ, и, наконец, если бы в этом смежном классе нашелся элемент типа λ, высота которого в группе B^λ больше $n-1$, то мы пришли бы в противоречие с тем, что подгруппа $\overline{B}^\lambda_Y + \{B^{\lambda+1} + b\}$ является для группы $\overline{B}^\lambda$ прямым слагаемым.

Доказательство леммы закончено. Доказательство теоремы Ульма проходит теперь без всяких затруднений. Мы нумеруем с помощью натуральных чисел все элементы каждой из групп A и B. В этих группах выбираем затем подгруппы $X_0 = O$ и $Y_0 = O$. Пусть для всех k, $0 \leqslant k < n$, уже найдены подгруппы $X_k \subset A$ и $Y_k \subset B$, удовлетворяющие всем условиям леммы, причем изоморфизмы φ_k, существующие между подгруппами X_k и Y_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, продолжают друг друга. Подгруппы X_n и Y_n строятся теперь на основании леммы, причем в качестве a берется при нечетном n элемент из группы A, лежащий вне X_{n-1} и имеющий среди элементов с этим свойством наименьший номер, а при четном n аналогичный элемент из группы B. Мы получаем, что группа A является объединением возрастающей последовательности подгрупп

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots,$$

а группа B — объединением возрастающей последовательности подгрупп

$$B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots,$$

причем между подгруппами A_n и B_n, $n = 0, 1, \ldots$, существует изоморфизм φ_n, продолжающий изоморфизм φ_{n-1}. Отсюда следует изоморфизм групп A и B. Теорема Ульма доказана.

Используя теорему Ульма и теорему существования из предыдущего параграфа, можно доказать следующую теорему (см. Бэр [5]), представляющую интерес и для общей теории прямых произведений групп.

Если G — счетная редуцированная примарная группа, то любые два прямых разложения этой группы тогда и только тогда обладают изоморфными продолжениями, если ее тип равен единице.

В самом деле, если $\tau = 1$, то группа G, по второй теореме Прюфера, разлагается в прямую сумму циклических групп, после чего остается применить результаты § 24. Пусть, с другой стороны, $\tau > 1$ и пусть ульмовский фактор $\overline{G}^\sigma$, $0 \leqslant \sigma < \tau$, разложен в прямую сумму циклических групп, порядками которых служат числа

$$p^{n_{\sigma,1}}, p^{n_{\sigma,2}}, \ldots, p^{n_{\sigma,k}}, \ldots,$$

где $n_{\sigma,1} < n_{\sigma,2} < \ldots < n_{\sigma,k} < \ldots$ [1]). Пусть $\overline{G}^{\sigma} = A_\sigma + B_\sigma$, где A_σ есть прямая сумма всех циклических прямых слагаемых порядков $p^{n_{\sigma,k}}$ из данного разложения группы $\overline{G}^{\sigma}$ при нечетных k, B_σ — такая же прямая сумма, но при четных k. Тогда существуют группы A и B, для которых последовательностями ульмовских факторов служат соответственно последовательности $A_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots$ и $B_0, B_1, \ldots, B_\sigma, \ldots$. Ульмовские факторы прямой суммы $A + B$ совпадают с ульмовскими факторами группы G, поэтому, по теореме Ульма,

$$G \simeq A + B.$$

Существуют, с другой стороны, группы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ с последовательностями ульмовских факторов $B_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots$ и соответственно $A_0, B_1, \ldots$ $\ldots, B_\sigma, \ldots$, причем снова

$$G \simeq \overline{A} + \overline{B}.$$

Отсутствие изоморфных продолжений у двух построенных нами прямых разложений группы G легко следует из доказанной в предшествующем параграфе теоремы о том, что ульмовские факторы прямой суммы являются прямыми суммами соответственных ульмовских факторов слагаемых.

Вопрос об условиях, при которых любые два прямых разложения несчетной редуцированной примарной группы обладают изоморфными продолжениями, остается пока настолько открытым, что еще не известно, будет ли для этого условие $\tau = 1$ хотя бы достаточным или хотя бы необходимым. Отметим, не приводя доказательства, относящийся сюда результат Куликова [2]: если примарная группа G является замыканием (в смысле § 26) прямой суммы циклических групп, то любая пара ее прямых разложений обладает изоморфными продолжениями.

В заключение рассмотрим вопрос о возможности распространения теоремы Ульма на несчетный случай. Пока не доказано никакой теоремы, которая сводила бы изучение редуцированных примарных групп произвольной мощности на изучение групп без элементов бесконечной высоты и в счетном случае превращалась бы в теорему Ульма. Во всяком случае, теорема, формулировка которой получалась бы простым выбрасыванием из формулировки теоремы Ульма слова «счетные», не может быть доказана — противоречащие примеры найдены Куликовым [2]. Группы, указанные в этих примерах, имеют счетный тип. Ниже излагается пример, относящийся к примарным редуцированным группам типа 2; этот пример сообщен автору Л. Я. Куликовым и публикуется впервые.

Пример Куликова. Обозначим через Z_i, $i = 1, 2, \ldots$, циклическую группу порядка p^i и через A — замыкание прямой суммы

[1]) Этим не утверждается, конечно, что в разложении группы $\overline{G}^{\sigma}$ встречается лишь одно циклическое слагаемое данного порядка $p^{n_{\sigma,k}}$.

всех этих циклических групп (см. § 26). Таким образом, A является группой последовательностей элементов, взятых по одному в каждой из групп Z_i, причем порядки всех элементов каждой из этих последовательностей ограничены в совокупности. Пусть B будет подгруппа, состоящая из всех тех элементов порядка p группы A, которые имеют лишь конечное число ненулевых компонент, C — подгруппа, состоящая из всех тех элементов порядка p, которые имеют лишь конечное число ненулевых компонент с нечетными индексами i, в то время как на компоненты с четными индексами не накладывается никаких ограничений. Ясно, что

$$B \subset C \subset A_1,$$

где A_1 — нижний слой группы A.

Докажем следующее утверждение.

Группы $H = A/B$ и $G = A/C$ являются неизоморфными редуцированными примарными группами типа 2 с изоморфными ульмовскими факторами.

Положим $H^* = A_1/B$ и докажем, что H^* состоит из элементов, имеющих в группе H бесконечную высоту. Произвольный элемент h^* из H^* имеет вид $h^* = a + B$, где a — элемент порядка p из A; i-ю компоненту элемента a обозначим через z_i. Если число n фиксировано, то для всякого $i > n$ в группе Z_i существует такой элемент z_i', что $p^n z_i' = z_i$. Положим, далее, $z_i' = 0$ при $i \leqslant n$. Тогда

$$z' = (z_1', z_2', \ldots, z_i', \ldots)$$

будет элементом порядка p^{n+1} группы A, причем $p^n z' - a \in B$, т. е. $p^n(z' + B) = h^*$. Этим доказано, что элемент h^* имеет в группе H бесконечную высоту, т. е.

$$H^* \subseteq H^1, \tag{4}$$

где H^1 — подгруппа элементов бесконечной высоты группы H.

Далее, из $H = A/B$, $H^* = A_1/B$ следует изоморфизм

$$H/H^* \simeq A/A_1.$$

Однако $A/A_1 \simeq pA$, так как отображение $a \to pa$, $a \in A$, является гомоморфизмом группы A на подгруппу pA с ядром A_1. Поэтому

$$H/H^* \simeq pA. \tag{5}$$

Так как группа pA, как и сама группа A, не содержит элементов бесконечной высоты, то из (4) и (5) вытекает

$$H^1 = H^*, \tag{6}$$

$$H/H^1 \simeq pA. \tag{7}$$

Мы нашли ульмовские факторы группы H и доказали, в частности, что *группа H является редуцированной типа 2*.

Найдем теперь ульмовские факторы группы G. Если положим $D = C/B$, то ввиду $G = A/C$, $H = A/B$ будет

$$G \simeq H/D. \tag{8}$$

Из $D \subset H^*$ и (6) следует $D \subset H^1$, а поэтому из (8) вытекает

$$G^1 \simeq H^1/D, \tag{9}$$

где G^1 — подгруппа элементов бесконечной высоты группы G: если элемент $h + D$ имеет в группе H/D бесконечную высоту, то для любого n существуют такие элементы $h_n \in H$ и $d_n \in D$, что $p^n h_n = h + d_n$; элемент d_n имеет, однако, в группе H бесконечную высоту, а поэтому высота элемента h также бесконечна.

Из (8) и (9) вытекает

$$G/G^1 \simeq H/H^1. \tag{10}$$

С другой стороны, группа H^1 имеет в виду (6) мощность континуума и состоит из элементов порядка p. Это же верно и для группы G^1: из (9), (6) и определения групп H^* и D следует, что

$$G^1 \simeq A_1/C,$$

однако, фактор-группа A_1/C состоит из элементов порядка p и имеет мощность континуума. Применяя первую теорему Прюфера (§ 24), мы приходим к изоморфизму

$$G^1 \simeq H^1. \tag{11}$$

Этим доказано, что G *является редуцированной группой типа* 2 *и что ее ульмовские факторы изоморфны соответственным ульмовским факторам группы* H.

Остается показать, что сами группы H и G не будут изоморфными. Для этого, учитывая включения $H^1 \subset H_1$, $G^1 \subset G_1$, где H_1 и G_1 — соответственно нижние слои групп H и G, достаточно доказать, что *фактор-группы* H_1/H^1 *и* G_1/G^1 *имеют различные мощности*.

Мы знаем ввиду (6), что $H^1 = A_1/B$. С другой стороны, легко видеть, что $H_1 = L/B$, где через L обозначена подгруппа группы A, состоящая из всех элементов порядка p и тех элементов порядка p^2, которые имеют лишь конечное число отличных от нуля компонент порядка p^2. Отсюда следует, что

$$H_1/H^1 \simeq L/A_1;$$

фактор-группа L/A_1 *является, однако, счетной*.

Рассмотрим теперь фактор-группу G_1/G^1. Прежде всего

$$G^1 = A_1/C. \tag{12}$$

Действительно, так как $D \subset H^1$, то при естественном гомоморфизме группы H на группу $G \simeq H/D$ полным прообразом подгруппы G^1 будет подгруппа H^1. Однако из (6) следует, что A_1 будет полным прообразом

подгруппы H^1 при естественном гомоморфизме группы A на группу $H = A/B$. Отсюда вытекает, что при естественном гомоморфизме группы A на группу $G = A/C$ полным прообразом подгруппы G^1 будет служить подгруппа A_1; этим доказано равенство (12).

С другой стороны, $G_1 = K/C$, где через K обозначена подгруппа группы A, состоящая из всех элементов порядка p и тех элементов порядка p^2, которые имеют лишь конечное число компонент порядка p^2 с нечетными индексами, в то время как компонент порядка p^2 с четными индексами может быть и бесконечно много. Отсюда и из (12) следует, что

$$G_1/G^1 \simeq K/A_1;$$

фактор-группа K/A_1 имеет, однако, мощность континуума.

Этим доказано, что *группы H и G не будут изоморфными.* [См. Д.30.3.]

§ 29. Смешанные абелевы группы

Смешанная абелева группа G называется *расщепляемой*, если она разложима в прямую сумму периодической группы и группы без кручения. Периодическое слагаемое совпадает при этом, понятно, с периодической частью F группы G, а слагаемое без кручения изоморфно фактор-группе G/F.

К числу расщепляемых групп принадлежат все прямые суммы циклических групп и, в частности, все абелевы группы с конечным числом образующих, а также все полные группы. Ниже мы узнаем, однако, что не все смешанные группы расщепляемы. Ввиду этого вопрос об условиях расщепляемости, т. е. условиях, при которых изучение смешанных групп сводится на изучение периодических групп и групп без кручения, оказывается основным в теории смешанных групп.

Мы докажем следующую теорему, причем в процессе доказательства будут построены некоторые примеры нерасщепляемых групп.

Тогда и только тогда будет расщепляемой всякая абелева группа, периодическая часть которой изоморфна данной периодической группе F, если F разложима в прямую сумму полной группы и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Следующее простое доказательство достаточности условия теоремы указал Куликов [1]. Пусть $F = F_1 + F_2$, где F_1 — полная группа, F_2 — группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, и пусть F служит периодической частью абелевой группы G. Как доказано в § 23, полную подгруппу F_1 можно выделить из группы G прямым слагаемым,

$$G = F_1 + G'.$$

Периодическая часть F' группы G' будет при этом изоморфной группе F_2, т. е. порядки ее элементов ограничены в совокупности,

а так как подгруппа F' сервантна в G', то, как доказано в § 25, она служит для G' прямым слагаемым. Этим доказана расщепляемость группы G.

Переходим к доказательству необходимости условия теоремы, причем сперва докажем следующую лемму.

Если периодическая группа F разложена в прямую сумму двух групп, $F = F' + F''$, и если существует нерасщепляемая группа G, имеющая F'' своей периодической частью, то группа $H = F' + G$, периодическая часть которой совпадает с F, также будет нерасщепляемой.

В самом деле, если существует расщепление

$$H = F + H_0 = F' + F'' + H_0,$$

где H_0 — группа без кручения, то фактор-группа H/F', изоморфная группе G, оказывается расщепляемой.

Эта лемма позволяет ограничиться дальше случаем, когда группа F редуцированная. Если при этом предположении порядки элементов группы F не ограничены в совокупности, то возможно одно из двух: или при разложении группы F в прямую сумму примарных групп среди этих примарных прямых слагаемых имеются такие, порядки элементов которых не ограничены в совокупности, или же число этих прямых слагаемых бесконечно. Рассмотрим отдельно эти два случая.

В первом случае можно ввиду леммы предполагать, что сама группа F примарна. Таким образом, *дана редуцированная примарная* (*по простому числу p*) *группа F, содержащая элементы сколь угодно больших порядков*. Обозначим через F_k, $k = 1, 2, \ldots$, подгруппу группы F, состоящую из всех тех элементов, высота которых в F не меньше k. Выбираем далее в F системы элементов $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$ со следующими свойствами (всюду $i = 1, 2, \ldots$): 1) $b_{i+1} = b_i + p^i a_{i+1}$, $b_1 = a_1$, 2) порядки элементов b_i неограниченно возрастают вместе с i, 3) элемент b_i имеет наименьший порядок среди элементов своего смежного класса по подгруппе F_i. Строим эти системы элементов следующим образом: в качестве b_1 выбираем в одном из смежных классов по подгруппе F_1 (но вне F_1) один из элементов наименьшего порядка и полагаем затем $a_1 = b_1$. Пусть уже выбраны элементы b_i и a_i и пусть порядок элемента b_i есть p^s. Неограниченность порядков элементов группы F и редуцированность этой группы позволяют найти в ней такой отличный от нуля элемент x, высота k которого конечна и больше $s + i$. Пусть далее элемент y удовлетворяет равенству $p^k y = x$. Берем элемент $b_i + p^i y$ и один из элементов наименьшего порядка из его смежного класса по подгруппе F_{i+1} обозначаем через b_{i+1}. Если

$$b_{i+1} = b_i + p^i y + p^{i+1} f, \quad f \in F,$$

то положим $a_{i+1} = y + pf$, откуда $b_{i+1} = b_i + p^i a_{i+1}$. Остается показать, что порядок элемента b_{i+1} больше порядка элемента b_i. Действительно,

из $p^s b_{i+1} = 0$ следовало бы $p^{s+1}y + p^{s+i+1}f = 0$, откуда ввиду $s+i<k$

$$p^k y = x = p^{k+1}(-f),$$

что противоречило бы, однако, тому, что элемент x имеет высоту k.

Мы строим теперь абелеву группу G. Ее система образующих состоит из всех элементов группы F и счетного множества элементов $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots$, а определяющими соотношениями служат соотношения коммутативности, все соотношения, существующие между элементами группы F, и, наконец, соотношения

$$pv_{i+1} = v_i + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где элементы a_i определены согласно предшествующему абзацу. Всякое следствие из соотношений (1) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(pv_{i+1} - v_i - a_i) = 0, \tag{2}$$

где $n \geqslant 1$, k_i — целые числа и $k_n \neq 0$. Однако в соотношении (2) элемент v_{n+1} имеет отличный от нуля коэффициент, поэтому из соотношений (1) не может следовать равенство нулю некоторого элемента из F, отличного от нуля в F. Иными словами, *группа F является подгруппой группы G*. Мы получаем, далее, что из соотношений (1) не может следовать соотношение $kv_1 = a$, где $k \neq 0$, $a \in F$, т. е. порядок элемента v_1 бесконечен. Фактор-группа G/F будет, следовательно, группой без кручения [1]), а поэтому *F является максимальной периодической подгруппой группы G*.

Предположим теперь, что F есть прямое слагаемое для G, т. е. $G = F + H$. Тогда $v_i = f_i + h_i$, $f_i \in F$, $h_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$. Из соотношений (1) следует, так как $a_i \in F$, $pf_{i+1} = f_i + a_i$. В частности, $pf_2 = f_1 + a_1 = f_1 + b_1$. Пусть уже доказано, что

$$p^{i-1} f_i = f_1 + b_{i-1}.$$

Тогда

$$p^i f_{i+1} = p^{i-1} f_i + p^{i-1} a_i = f_1 + b_{i-1} + p^{i-1} a_i = f_1 + b_i,$$

а так как $p^i f_{i+1} \in F_i$, то мы получаем, что при $i = 1, 2, \ldots$ элементы f_1 и b_i лежат в одном смежном классе по подгруппе F_i. Отсюда ввиду определения элементов b_i следует, что порядок элемента f_1 не меньше, чем порядок b_i, но тогда ввиду возрастания порядков элементов b_i вместе с i мы приходим в противоречие с конечностью порядка элемента f_1. Этим доказано, что *F не является прямым слагаемым для G*.

Мы переходим теперь ко второму из указанных выше случаев, т. е. предполагаем, что *группа F является прямой суммой бесконечного*

[1]) Легко видеть, что она изоморфна группе p-ичных дробей R_p.

множества редуцированных примарных групп, относящихся к различным простым числам $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$,

$$F = \sum_i F_{p_i}. \tag{3}$$

В каждой из подгрупп F_{p_i} мы выбираем отличный от нуля элемент a_i высоты 0 и следующим образом строим затем абелеву группу G: ее образующими служат все элементы группы F и, сверх того, элементы $v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$, а определяющими соотношениями являются соотношения коммутативности, все соотношения, существующие между элементами группы F, и, наконец, соотношения

$$p_i v_i = v_0 + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Как и в предыдущем случае, легко проверить, что F является подгруппой группы G, притом максимальной периодической.

Предположим, что F есть прямое слагаемое для G, т. е. $G = F + H$. Тогда $v_i = f_i + h_i$, $f_i \in F$, $h_i \in H$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Из соотношений (4) следует теперь ввиду $a_i \in F$

$$p_i f_i = f_0 + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Элемент f_0 есть сумма конечного числа компонент, взятых в прямых слагаемых разложения (3), поэтому можно найти такой номер j, что компонента элемента f_0 в F_{p_j} равна нулю. Если компонента элемента f_j в прямом слагаемом F_{p_j} будет обозначена через f_j', то равенство (5) приводит при $i = j$ к равенству

$$p_j f_j' = a_j,$$

что противоречит, однако, тому, что элемент a_j имеет в группе F_{p_j} нулевую высоту.

Этим заканчивается доказательство теоремы.

Условия расщепляемости смешанной группы G можно искать также в виде связей между свойствами ее периодической части F и фактор-группы G/F. Именно так рассматривает этот вопрос Бэр [13], однако он накладывает на группу без кручения G/F некоторые ограничения, заведомо выполняющиеся, впрочем, если эта группа счетна. Доказанная выше теорема является в действительности следствием результатов Бэра. Другой подход к этому вопросу, связанный со свойствами автоморфизмов смешанной группы, содержится в работе Мишиной [2]. Один критерий расщепляемости можно найти также в работе Ляпина [3]. Заметим, что пока не установлены необходимые и достаточные условия, каким должна удовлетворять группа без кручения H для того, чтобы всякая абелева группа, имеющая H своей фактор-группой по периодической части, была расщепляемой. [См. § Д.32.]

Не следует вопрос о расщепляемости смешанной группы отождествлять с вопросом о ее разложимости. Выше построены примеры нерасщепляемых смешанных абелевых групп. Однако *всякая смешанная абелева группа G разложима в прямую сумму* (Куликов [1]).

Действительно, если периодическая часть F группы G полна, то F служит для G прямым слагаемым. Если же F не является полной группой, то, используя результаты § 25, в том числе лемму, мы найдем в F циклическое прямое слагаемое A. Подгруппа A, будучи сервантной в F, сервантна и в группе G, а так как эта подгруппа к тому же конечна, т. е. порядки ее элементов ограничены в совокупности, то снова, ввиду § 25, A выделяется из G прямым слагаемым.

Глава восьмая

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

§ 30. Группы ранга 1. Типы элементов группы без кручения

Абелевы группы без кручения изучены пока значительно меньше, чем, например, примарные абелевы группы. В теории абелевых групп без кручения серьезно используется понятие ранга группы (см. § 19), причем группы конечного ранга выступают в качестве одного из основных объектов изучения. Весьма важную роль играет также понятие сервантной подгруппы (см. § 25), называемой в разных работах по теории абелевых групп без кручения также подгруппой нерасширяемой, замкнутой, дивизионной и т. д.

Следует учесть, что *в абелевой группе без кручения уравнение*

$$nx = a, \quad n > 0, \tag{1}$$

может иметь не больше одного решения, так как разность двух его решений была бы элементом конечного порядка. Отсюда следует, что *подгруппа C абелевой группы без кручения G тогда и только тогда будет сервантной в G, если фактор-группа G/C является группой без кручения*. Из единственности решения уравнения (1) следует также, что *пересечение любого множества сервантных подгрупп абелевой группы без кручения G само сервантно в этой группе*. Можно говорить, следовательно, о сервантной подгруппе группы G, *порожденной* данным множеством M элементов группы G, понимая под этим пересечение всех сервантных подгрупп группы G, содержащих M; одна такая подгруппа, а именно само G, заведомо существует.

Сервантная подгруппа группы без кручения G, порожденная множеством M, состоит из всех элементов группы G, линейно зависящих (в смысле § 19) *от множества M*.

В самом деле, если элемент a линейно зависит от множества M, т. е. некоторое кратное этого элемента содержится в подгруппе $\{M\}$, то в порожденной M сервантной подгруппе, заведомо содержащей подгруппу $\{M\}$, будет содержаться и сам элемент a. С другой стороны, все элементы группы G, линейно зависящие от множества M, составляют подгруппу: сумма и разность любых двух элементов, некоторые кратные которых лежат в $\{M\}$, сами обладают этим же свойством.

Эта подгруппа содержит M и будет сервантной в G: если $nb = a$ и $ka \in \{M\}$, то $(kn)b \in \{M\}$, т. е. b линейно зависит от M.

Мы знаем из § 23, что всякая абелева группа содержится в некоторой полной абелевой группе. Можно утверждать даже, что всякая *абелева группа без кручения содержится в некоторой полной абелевой группе без кручения, т. е. в прямой сумме некоторого множества групп типа R.* Это легко следует из доказательства соответствующей теоремы, приведенного в § 23, но может быть установлено и непосредственно: если группа без кручения G содержится в смешанной полной группе H, то пересечение группы G с периодической частью группы H равно нулю, а поэтому группа G изоморфно отображается в фактор-группу группы H по ее периодической части, являющуюся полной группой без кручения.

Всякая абелева группа без кручения G конечного ранга n содержится в полной абелевой группе без кручения ранга n, т. е. в прямой сумме n групп типа R.

В самом деле, группа G содержится в некоторой полной группе без кручения H. Порождаемая ею сервантная подгруппа $\overline{G}$ группы H сама будет полной. Вместе с тем выше было показано, что всякий элемент из $\overline{G}$ линейно зависит от G и поэтому линейно зависит от всякой максимальной линейно независимой системы элементов группы G. Таким образом, ранг группы $\overline{G}$ равен n.

Отсюда следует, в частности, что *всякая группа без кручения ранга 1 изоморфна подгруппе аддитивной группы рациональных чисел R.* Таким образом, когда мы получим описание всех абелевых групп без кручения ранга 1, что является нашей ближайшей целью, одновременно будет получено описание, с точностью до изоморфизма, всех подгрупп группы R.

Введем одно вспомогательное понятие. Назовем *характеристикой* всякую последовательность вида

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots),$$

где каждое α_n является или нулем, или некоторым натуральным числом, или же символом ∞. Характеристики α и

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$$

эквивалентны, если $\alpha_n = \beta_n$ для всех n, кроме, быть может, конечного числа, притом таких, для которых как α_n, так и β_n отличны от ∞. Все характеристики распадаются, очевидно, на непересекающиеся классы эквивалентных характеристик; эти классы будут называться *типами* [1]) и обозначаться буквами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...

В множество типов следующим образом вводится частичная упорядоченность: $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, если существуют такая характеристика α типа $\mathfrak{a}$

[1]) Их называют также *надтипами* и *родами*.

и такая характеристика β типа $\mathfrak{b}$, что для всех n будет $\alpha_n \leqslant \beta_n$; при этом считается, понятно, что символ ∞ больше любого натурального числа. Читатель, используя определение типа, без труда проверит справедливость следующих утверждений:

1) $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}$;

2) если $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$, то $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c}$;

3) если $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, т. е. эти два типа совпадают.

Наибольшим среди всех типов будет тип, состоящий из одной-единственной характеристики

$$(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots);$$

этот тип мы будем называть, по причинам, которые станут ясными ниже, *типом* R. Наименьшим среди всех типов является тип, содержащий характеристику

$$(0, 0, \ldots, 0, \ldots);$$

этот тип мы будем называть *нулевым*.

Пусть даны типы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Выберем в них характеристики α и соответственно β и введем обозначение

$$\gamma = \min(\alpha_n, \beta_n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тип $\mathfrak{c}$, определяемый характеристикой

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots),$$

не зависит, как легко видеть, от выбора характеристик α и β в типах $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Это будет наибольший среди типов, которые меньше или равны как типу $\mathfrak{a}$, так и типу $\mathfrak{b}$; назовем тип $\mathfrak{c}$ *произведением* типов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{ab}$. Аналогичным образом можно говорить, понятно, о произведении любого конечного числа типов [1]).

Переходим к описанию абелевых групп без кручения ранга 1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ будет последовательность всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Пусть, далее, G будет абелева группа без кручения ранга 1 и a — отличный от нуля элемент из G. Ставим в соответствие группе G характеристику α, полагая $\alpha_n = 0$, если уравнение $p_n x = a$ не имеет в G решения, $\alpha_n = k$, если в G может быть решено уравнение $p_n^k x = a$, но не уравнение $p_n^{k+1} x = a$, и $\alpha_n = \infty$, если все уравнения $p_n^i x = a$, $i = 1, 2, \ldots$, имеют в G решения. Легко проверить, что замена элемента a элементом ma, где m — отличное от 0 целое число, не вызывает изменения символа α_n, если он равен ∞, если же он конечен и равен $k \geqslant 0$, а $m = p_n^l m'$, $(p_n, m') = 1$, то после замены будет $\alpha_n = k + l$; иными

[1]) Можно было бы показать также, что среди типов, которые больше или равны данным типам $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, существует наименьший. Иными словами, множество типов является структурой (см. § 43).

словами, характеристика α заменяется в этом случае ей эквивалентной характеристикой. Это же обстоятельство имеет место и при замене элемента a любым отличным от нуля элементом b группы G, так как элементы a и b обладают отличным от нуля общим кратным. Обратно, если характеристика β эквивалентна характеристике α, то можно заменить элемент a таким элементом b, что при помощи этого элемента группе G будет ставиться в соответствие характеристика β. В самом деле, если $\alpha_n - \beta_n = \mu_n > 0$ при $n = i_1, i_2, \ldots, i_s$ и $\beta_n - \alpha_n = \nu_n > 0$ при $n = j_1, j_2, \ldots, j_t$, а для всех остальных n $\alpha_n = \beta_n$, то в качестве b нужно взять решение уравнения

$$p_{i_1}^{\mu_1} p_{i_2}^{\mu_2} \ldots p_{i_s}^{\mu_{s_x}} = p_{j_1}^{\nu_1} p_{j_2}^{\nu_2} \ldots p_{j_t}^{\nu_{t_a}};$$

легко видеть, что это решение в группе G существует.

Мы получаем, что *всякой абелевой группе без кручения ранга* 1 *однозначно соответствует некоторый определенный тип. Неизоморфным группам соответствуют при этом различные типы.* Действительно, если группе G при помощи элемента a поставлена в соответствие характеристика α, то уравнение $mx = a$ будет обладать в G решением тогда и только тогда, если m делится не более чем на α_n-ю степень числа p_n при всяком таком n, для которого $\alpha_n < \infty$ — если элементы b и c удовлетворяют равенствам $pb = a$, $qc = a$, причем числа p и q взаимно просты, то уравнению $(pq)x = a$ удовлетворяет элемент $tb + sc$, где $ps + qt = 1$. Таким образом, при том отображении группы G внутрь аддитивной группы рациональных чисел R, которое переводит элемент a в число 1, группа G отобразится на подгруппу R_α группы R, состоящую из всех тех рациональных чисел, знаменатели которых (в несократимой записи) делятся не более чем на α_n-ю степень простого числа p_n, $n = 1, 2, \ldots$, если $\alpha_n < \infty$, и на какую-либо степень числа p_n, если $\alpha_n = \infty$. Однако R_α является единственной подгруппой группы R, содержащей целые числа и обладающей тем свойством, что ей при помощи элемента 1 ставится в соответствие характеристика α. Этим доказано, что *заданием характеристики α группа G определяется с точностью до изоморфизма*. Одновременно мы получаем, что *для всякого типа $\mathfrak{a}$ можно найти подгруппу группы R, соответствующую этому типу*.

Таким образом, *между всеми типами и всеми неизоморфными группами без кручения ранга* 1 *установлено взаимно однозначное соответствие*. При этом самой группе R соответствует тип R, чем оправдывается его название, бесконечной циклической группе соответствует нулевой тип, а аддитивной группе p_n-ичных дробей (т. е. рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями простого числа p_n) — тип, содержащий характеристику, в которой $\alpha_n = \infty$ и $\alpha_s = 0$ при $s \neq n$. Отметим также, что аддитивной группе рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на квадрат никакого

простого числа, соответствует тип, содержащий характеристику

$$(1, 1, \ldots, 1, \ldots).$$

Если группе без кручения G ранга 1 соответствует тип $\mathfrak{a}$, то будем говорить, что G есть *группа типа* $\mathfrak{a}$.

Полученное описание групп ранга 1 является достаточно обозримым и удобным. Так, читатель без труда докажет, что если даны группы без кручения G и H ранга 1, соответственно типов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то *группа G тогда и только тогда изоморфна некоторой подгруппе группы H, если* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$. Отсюда следует, что *если каждая из этих двух групп G и H изоморфна подгруппе другой группы, то они изоморфны между собой*. Наше описание указывает вместе с тем на большое разнообразие абелевых групп без кручения ранга 1; из него следует, в частности, что множество всех этих групп имеет мощность континуума.

Возвращаемся к рассмотрению произвольных абелевых групп без кручения. Пусть G будет такая группа и a — ее элемент, отличный от нуля. Сервантная подгруппа A группы G, порожденная элементом a, будет группой ранга 1, так как, как показано выше, всякий элемент этой подгруппы линейно зависит от элемента a. Эта подгруппа будет, вместе с тем, наибольшей подгруппой ранга 1 группы G, содержащей элемент a. Тип подгруппы A мы будем называть *типом элемента a*. Иными словами, тип элемента a есть тип той характеристики, которую мы получим, полагая $\alpha_n = k$, если в группе G разрешимо уравнение $p_n^k x = a$, но не уравнение $p_n^{k+1} x = a$, и $a_n = \infty$, если уравнения вида $p_n^k x = a$ разрешимы в G при всех k; здесь p_n, $n = 1, 2, \ldots$, — совокупность простых чисел, упорядоченная по возрастанию. Именно в этом смысле мы будем иногда говорить о *характеристике элемента a* группы G.

Мы получаем теперь возможность различать элементы группы G, отличные от нуля, по их типам, что в некотором смысле соответствует разделению элементов примарной абелевой группы на элементы конечной и бесконечной высоты. Абелевы группы без кручения можно классифицировать, следовательно, в соответствии с тем, элементы каких типов в них содержатся. Можно, в частности, выделить в качестве особого объекта изучения те группы, все элементы которых, отличные от нуля, имеют один и тот же тип $\mathfrak{a}$. Впрочем, одного этого ограничения недостаточно для развития глубокой теории. Легко видеть, правда, что группы, все элементы которых, отличные от нуля, имеют тип R, будут полными и, следовательно, уже вполне изучены; однако совокупность тех групп, все ненулевые элементы которых имеют, например, нулевой тип, оказывается уже мало обозримой.

Отметим некоторые свойства типов элементов абелевой группы без кручения G, используемые в следующем параграфе.

I. *Два элемента, линейно зависящие друг от друга, имеют один и тот же тип.*

Действительно, эти элементы порождают одну и ту же сервантную подгруппу.

II. *Если элементы a и b имеют соответственно типы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то тип суммы $a+b$ (если она отлична от нуля) больше или равен произведению $\mathfrak{ab}$.*

Действительно, если характеристики элементов a и b будут соответственно α и β, то элемент $a+b$ во всяком случае будет делиться на любую степень простого числа p_n, показатель которой не больше $\min(\alpha_n, \beta_n)$. Этот элемент, как показывают простые примеры, может делиться, впрочем, и на более высокую степень числа p_n, если только числа α_n и β_n конечны и равны между собой.

III. *Если $G = A + B$, $a \in A$, $b \in B$ и типы элементов a и b будут соответственно $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то тип элемента $a+b$ равен произведению $\mathfrak{ab}$.*

Действительно, в этом случае характеристика γ элемента $a+b$ такова, что при всех n $\gamma_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Пусть G будет абелева группа без кручения и $\mathfrak{a}$ — произвольный тип. Обозначим через $G(\mathfrak{a})$ множество, состоящее из нуля и всех тех элементов группы G, типы которых больше или равны $\mathfrak{a}$; если таких элементов в группе G нет, то $G(\mathfrak{a}) = O$. Из II следует, что $G(\mathfrak{a})$ *будет подгруппой группы* G, а I показывает, что *эта подгруппа сервантна в* G. Через $G'(\mathfrak{a})$ обозначим подгруппу группы G, порожденную всеми теми элементами, типы которых строго больше $\mathfrak{a}$. Эта подгруппа содержится в подгруппе $G(\mathfrak{a})$ и иногда с нею совпадает; в общем случае она не обязана, однако, быть сервантной в $G(\mathfrak{a})$. Фактор-группа

$$G^*(\mathfrak{a}) = G(\mathfrak{a})/G'(\mathfrak{a})$$

может, следовательно, обладать элементами конечного порядка.

Введенные нами подгруппы $G(\mathfrak{a})$, $G'(\mathfrak{a})$ и фактор-группы $G^*(\mathfrak{a})$ будут использованы в следующем параграфе.

§ 31. Вполне разложимые группы

После того как нами в предшествующем параграфе изучены группы без кручения ранга 1, естественно перейти к рассмотрению абелевых групп без кручения, разложимых в прямую сумму групп ранга 1; такие группы будут называться *вполне разложимыми*. Этот класс групп уже достаточно широк — к нему, помимо всех групп ранга 1, принадлежат все свободные абелевы группы, а также все полные группы без кручения. С другой стороны, мы увидим позже, что вполне разложимыми группами далеко не исчерпываются все абелевы группы без кручения.

Существуют различные критерии для того, чтобы группа без кручения была вполне разложимой (см. Бэр [15], Ляпин [6]). Все эти

критерии формулируются, однако, весьма громоздко и вместе с тем их не удается использовать для дальнейшего развития теории вполне разложимых групп; мы не будем поэтому их излагать. Нецелесообразно также ставить вопрос о подгруппах или о фактор-группах вполне разложимых групп: всякая абелева группа без кручения содержится в некоторой полной группе без кручения и является фактор-группой некоторой свободной группы. Мы будем поэтому интересоваться лишь свойствами прямых разложений вполне разложимых групп и начнем со следующей теоремы (Бэр [15]).

Если абелева группа без кручения G вполне разложима, то всякие два разложения этой группы в прямую сумму групп ранга 1 *изоморфны между собой.*

Пусть, в самом деле, дано произвольное разложение группы G в прямую сумму групп ранга 1,

$$G = \sum_{\alpha} A_{\alpha}. \tag{1}$$

Если группа G обладает элементами типа $\mathfrak{a}$, то подгруппа $G(\mathfrak{a})$ (см. конец предшествующего параграфа) совпадает с прямой суммой тех слагаемых из разложения (1), типы которых больше или равны $\mathfrak{a}$. Действительно, ввиду сервантности прямых слагаемых тип всякого ненулевого элемента из подгруппы A_{α} равен типу самой этой подгруппы, после чего остается воспользоваться свойствами I–III из предшествующего параграфа. Аналогично подгруппа $G'(\mathfrak{a})$ совпадает с суммой тех прямых слагаемых из разложения (1), типы которых строго больше $\mathfrak{a}$. Отсюда вытекает, что сумма прямых слагаемых из разложения (1), тип которых равен $\mathfrak{a}$, изоморфна фактор-группе $G^*(\mathfrak{a})$, т. е. не зависит от выбора разложения (1): в любом разложении группы G в прямую сумму групп ранга 1 содержится столько слагаемых типа $\mathfrak{a}$, каков ранг группы $G^*(\mathfrak{a})$, если этот ранг конечен, или какова мощность этой группы, если ее ранг бесконечен. Теорема доказана.

Возникает вопрос, будет ли всякое прямое разложение вполне разложимой группы продолжаться до разложения в прямую сумму групп ранга 1? Иными словами, будет ли всякое прямое слагаемое вполне разложимой группы само вполне разложимым? Окончательный ответ на этот вопрос еще не получен [1]). В работе Бэра [15] содержится ряд относящихся сюда частных результатов, некоторые из которых будут сейчас изложены.

Рассмотрим сперва случай групп, разложимых в прямую сумму изоморфных групп ранга 1, причем докажем следующую теорему.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания он уже получен. [См. Д.31.4.]

Если абелева группа без кручения G обладает прямым разложением

$$G = \sum_{\alpha} A_\alpha, \tag{2}$$

все слагаемые A_α которого имеют ранг 1 и один и тот же тип $\mathfrak{a}$, и если подгруппа B сервантна в G, то B сама разложима в прямую сумму групп ранга 1 и типа $\mathfrak{a}$.

Предположим, что индекс α пробегает все порядковые числа, меньшие некоторого σ, и введем следующие обозначения:

$$G^{(\beta)} = \sum_{\alpha<\beta} A_\alpha,$$
$$B^{(\beta)} = B \cap G^{(\beta)}.$$

Для всякого β имеет место включение

$$B^{(\beta)} \subseteq B^{(\beta+1)},$$

причем или имеет место знак равенства, или же фактор-группа $B^{(\beta+1)}/B^{(\beta)}$ имеет ранг 1 и тип $\mathfrak{a}$. В самом деле, эта фактор-группа изоморфна подгруппе фактор-группы $G^{(\beta+1)}/G^{(\beta)}$, изоморфной группе A_β, т. е. имеет ранг 1 и тип, меньший или равный $\mathfrak{a}$. С другой стороны, если подгруппа $B^{(\beta+1)}$ содержит элемент x, лежащий вне $B^{(\beta)}$, то, ввиду сервантности B, тип этого элемента в B, а поэтому и в $B^{(\beta+1)}$, равен $\mathfrak{a}$. Тип образа этого элемента в фактор-группе $B^{(\beta+1)}/B^{(\beta)}$ не может быть, следовательно, меньше $\mathfrak{a}$, т. е. наше утверждение доказано.

Если бы было показано, что при $B^{(\beta)} \neq B^{(\beta+1)}$ имеет место прямое разложение

$$B^{(\beta+1)} = B^{(\beta)} + C_\beta, \tag{3}$$

где C_β — группа ранга 1 и типа $\mathfrak{a}$, то теорема была бы доказана, так как подгруппа B совпала бы с прямой суммой всех отличных от нуля подгрупп C_β, $\beta < \sigma$. Перейдем поэтому к доказательству существования разложения (3).

Выбираем в подгруппе $B^{(\beta+1)}$ элемент x, лежащий вне подгруппы $B^{(\beta)}$, и обозначим через $\overline{x}$ смежный класс $x + B^{(\beta)}$. Если элемент x делится на некоторое число n в группе $B^{(\beta+1)}$, то на это же число делится в группе $B^{(\beta+1)}/B^{(\beta)}$ элемент $\overline{x}$. Обратное может не иметь места, однако из совпадения типов элементов x и $\overline{x}$ вытекает, что существует лишь конечное число таких простых чисел

$$p_{i_1}, p_{i_2}, \ \ldots, p_{i_s}, \tag{4}$$

что значение α_{i_k} характеристики элемента x для простого числа p_{i_k}, $k = 1, 2, \ \ldots, s$, отлично от значения $\overline{\alpha}_{i_k}$ характеристики элемента $\overline{x}$ для этого же числа, причем тогда оба эти числа конечны и

$$\alpha_{i_k} < \overline{\alpha}_{i_k}.$$

Пусть

$$\overline{h} = p_{i_1}^{\overline{\alpha}_{i_1}} p_{i_2}^{\overline{\alpha}_{i_2}} \dots p_{i_s}^{\overline{\alpha}_{i_s}},$$
$$h = p_{i_1}^{\overline{\alpha}_{i_1} - \alpha_{i_1}} p_{i_2}^{\overline{\alpha}_{i_2} - \alpha_{i_2}} \dots p_{i_s}^{\overline{\alpha}_{i_s} - \alpha_{i_s}}.$$

В группе $B^{(\beta+1)}/B^{(\beta)}$ существует такой элемент $\overline{y} = y + B^{(\beta)}$, что

$$\overline{h}\overline{y} = \overline{x}, \tag{5}$$

т. е. элементы x и $\overline{h}y$ лежат в одном смежном классе $\overline{x}$. Пусть число h' играет для элемента $\overline{h}y$ такую же роль, как число h для элемента x. Из делимости элемента $\overline{h}y$ на число $\overline{h}$ вытекает, однако, что число h' не делится ни на одно из простых чисел (4), а поэтому

$$(h, h') = 1.$$

Существуют, следовательно, такие целые числа l и l', что

$$lh + l'h' = 1. \tag{6}$$

Элемент

$$z = lhx + l'h'(\overline{h}y) \tag{7}$$

лежит ввиду (5) и (6) в смежном классе $\overline{x}$. Если p_j — любое простое число и β_j — значение характеристики элемента z для этого простого числа, то, понятно, $\beta_j \leqslant \overline{\alpha}_j$. Однако элемент z во всяком случае делится на такую степень числа p_j, на которую делятся оба слагаемых правой части равенства (7), а поэтому, используя определение чисел h и h', получаем $\beta_j \geqslant \overline{\alpha}_j$.

Таким образом, в смежном классе $\overline{x}$ мы нашли такой элемент z, характеристика которого в группе $B^{(\beta+1)}$ совпадает с характеристикой элемента $\overline{x}$ в группе $B^{(\beta+1)}/B^{(\beta)}$. Если, следовательно, через C_β мы обозначим сервантную подгруппу группы $B^{(\beta+1)}$, порожденную элементом z, то в каждом смежном классе группы $B^{(\beta+1)}$ по подгруппе $B^{(\beta)}$ будет содержаться по одному элементу из C_β. Этим доказано существование прямого разложения (3), т. е. закончено доказательство теоремы.

Применяя эту теорему к тому случаю, когда в качестве B берется прямое слагаемое группы G, мы приходим к такому результату.

Если группа G разложима в прямую сумму групп ранга 1, *имеющих один и тот же тип* $\mathfrak{a}$, *то всякое прямое слагаемое этой группы само разложимо в прямую сумму групп ранга* 1 *и типа* $\mathfrak{a}$.

Докажем теперь следующую более общую теорему [1]).

[1]) Доказательство сообщено автору Л. Я. Куликовым.

Пусть группа G вполне разложима, причем множество типов слагаемых в ее разложении

$$G = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \tag{8}$$

в прямую сумму групп ранга 1 *конечно. Тогда всякое прямое слагаемое группы G само вполне разложимо.*

Для доказательства обозначим через

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n \tag{9}$$

различные типы слагаемых, входящих в разложение (8), а через D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — прямую сумму слагаемых типа $\mathfrak{a}_i$ из этого разложения. Тогда

$$G = D_1 + D_2 + \ldots + D_n. \tag{10}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что разложение (10) и любое прямое разложение группы G,

$$G = \sum_{\beta} B_{\beta}, \tag{11}$$

обладают изоморфными продолжениями. Действительно, в этом случае всякое B_β будет разлагаться в прямую сумму подгрупп, изоморфных прямым слагаемым групп D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и поэтому, как доказано выше, вполне разложимых.

Доказательство существования изоморфных продолжений для прямых разложений (10) и (11) мы будем вести индукцией по числу n, так как при $n = 1$ доказывать нечего. Пусть тип $\mathfrak{a}_1$ будет одним из максимальных (в смысле частичной упорядоченности типов) среди типов (9). Тогда компонента подгруппы D_1 в прямом слагаемом B_β второго разложения совпадает с пересечением

$$C_\beta = D_1 \cap B_\beta;$$

она не может быть больше этого пересечения, так как всякая подгруппа гомоморфно отображается на свою компоненту, однако ввиду выбора типа $\mathfrak{a}_1$ никакой элемент из подгруппы D_1 не может ни при каком гомоморфизме этой подгруппы переходить в элемент группы G, лежащий вне D_1. Отсюда вытекает существование прямого разложения

$$D_1 = \sum_{\beta} C_\beta,$$

т. е. мы получаем следующее продолжение разложения (10):

$$G = \sum_{\beta} C_\beta + D_2 + \ldots + D_n. \tag{12}$$

Подгруппа B_β содержит прямое слагаемое C_β группы G, поэтому для всякого β существует прямое разложение

$$B_\beta = C_\beta + C'_\beta,$$

т. е. мы приходим к следующему продолжению разложения (11):

$$G = \sum_\beta C_\beta + \sum_\beta C'_\beta. \tag{13}$$

Разложения (12) и (13) показывают, что подгруппы

$$D_2 + \ldots + D_n, \quad \sum_\beta C'_\beta \tag{14}$$

изоморфны между собой, а поэтому на основании индуктивного предположения для разложений (14) существуют изоморфные продолжения. Подставляя их соответственно в разложения (12) и (13), мы получим изоморфные продолжения разложений (10) и (11), что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что *всякое прямое слагаемое вполне разложимой группы конечного ранга само вполне разложимо*.

В вопросе о прямых слагаемых вполне разложимых групп в действительности получены результаты, идущие дальше тех, которые изложены выше. Так, Бэр [15] доказал полную разложимость прямых слагаемых в том случае, когда множество типов слагаемых в разложении (8) из формулировки предыдущей теоремы не обязательно конечно, а лишь удовлетворяет условию максимальности (в смысле частичной упорядоченности типов). С другой стороны, Куликов доказал полную разложимость прямых слагаемых для всякой счетной вполне разложимой группы. [См. Д.31.4.]

§ 32. Другие классы абелевых групп без кручения

До сих пор мы еще не встречали абелевых групп без кручения, отличных от вполне разложимых групп. Их существование вытекает из следующей теоремы.

Полная прямая сумма (см. § 17) *бесконечного множества бесконечных циклических групп не является вполне разложимой группой*.

Пусть, в самом деле, группа G представима в виде полной прямой суммы бесконечных циклических групп, множество которых имеет бесконечную мощность $\mathfrak{m}$. Берем некоторое счетное подмножество этого множества и полную прямую сумму входящих в него подгрупп обозначим через G'. Если бы группа G была вполне разложимой, то, так как все ее элементы имеют в ней нулевой тип, она оказалась бы свободной группой, а тогда и группа G', изоморфная подгруппе группы G, была бы свободной. Будем считать поэтому, что сама группа G является полной прямой суммой счетного множества бесконечных циклических групп.

Если

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

— образующие этих циклических групп, то всякий элемент g группы G записывается в виде бесконечной суммы этих образующих, взятых с целыми коэффициентами,

$$g = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n + \ldots. \tag{1}$$

Обозначим через H совокупность элементов вида (1), обладающих следующим свойством: для всякого натурального числа s почти все коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ (т. е. все, кроме, быть может, конечного числа) делятся на число 2^s. Множество H будет подгруппой группы G, имеющей, как и сама группа G, мощность континуума. Если группа G свободна, то и H будет свободной группой, т. е. прямой суммой континуального множества бесконечных циклических групп, а тогда фактор-группа $H/2H$, где $2H$ — совокупность элементов группы H, делящихся в этой группе на число 2, должна иметь мощность континуума.

В действительности, однако, фактор-группа $H/2H$ счетна. В самом деле, группа H содержит счетную подгруппу H', состоящую из элементов вида (1), обладающих лишь конечным числом ненулевых коэффициентов k_n. Если теперь h — произвольный элемент из H, то из него можно вычесть такой элемент h' из H', что разность $h - h'$ будет иметь запись вида (1), в с е коэффициенты которой делятся на 2. Таким образом, $h - h' = 2h_0$, причем, как легко видеть, элемент h_0 принадлежит к подгруппе H, т. е.

$$h - h' \in 2H.$$

Этим доказано, что всякий смежный класс группы H по подгруппе $2H$ содержит элемент из подгруппы H', т. е. доказана счетность фактор-группы $H/2H$.

Таким же методом может быть показано (см. Бэр [15]), что вообще никакая полная прямая сумма бесконечного множества групп ранга 1, имеющих один и тот же тип, отличный от типа R, не может быть вполне разложимой. Больше того, в работе Мишиной [1] доказано, что если группа G является полной прямой суммой некоторых групп A_α ранга 1 (α пробегает множество индексов M), то G тогда и только тогда вполне разложима, если среди групп A_α лишь конечное число не является группами типа R. [См. Д.31.5.]

Группы, построенные выше, хотя и не являются вполне разложимыми, но, тем не менее, в прямую сумму разложимы — от полной прямой суммы циклических групп всегда можно отщепить циклическое прямое слагаемое. Существуют, однако, и такие абелевы группы без кручения, ранг которых больше единицы и которые вместе с тем в прямую сумму вообще не могут быть разложены. Это вытекает из следующей т е о р е м ы (Бэр [15]).

Всякая сервантная подгруппа C аддитивной группы J целых p-адических чисел (см. § 21) *неразложима*; *в частности неразложима сама группа J.*

Действительно, рассмотрим подгруппу pJ, составленную из p-кратных всех элементов группы J. Эта подгруппа будет содержать те и только те целые p-адические числа, запись которых в виде (9) из § 21 имеет на первом месте нуль, т. е. $k_1 = 0$. Отсюда следует, что индекс подгруппы pJ в группе J равен p.

Поэтому и индекс подгруппы pC в группе C равен p, т. е. фактор-группа C/pC является циклической порядка p. В самом деле,

$$pC = C \cap pJ,$$

так как подгруппа C сервантна в J, а

$$J = C + pJ,$$

так как индекс pJ в J есть простое число p, и теперь остается применить теорему об изоморфизме, т. е.

$$C/pC \simeq J/pJ.$$

Если бы подгруппа C оказалась разложимой, $C = C_1 + C_2$, то подгруппы C_1 и C_2 как прямые слагаемые сервантной подгруппы сами будут сервантными в J, а поэтому фактор-группы C_1/pC_1 и C_2/pC_2 будут циклическими порядка p. Но

$$pC = pC_1 + pC_2$$

и поэтому фактор-группа C/pC окажется прямой суммой двух циклических групп порядка p в противоречии с доказанным выше.

Так как группа J имеет мощность континуума, то в ней можно найти сервантные подгруппы любого конечного ранга, а также любого бесконечного ранга, не превосходящего мощности континуума. Вопрос о существовании неразложимых в прямую сумму абелевых групп без кручения произвольной бесконечной мощности остается пока открытым [1]).

В работе Бэра [15] рассматриваются некоторые классы абелевых групп без кручения, близкие к вполне разложимым группам. Так, абелева группа без кручения G называется *сепарабельной*, если всякое конечное множество элементов группы G содержится во вполне разложимом прямом слагаемом этой группы; можно считать, конечно, что указанное прямое слагаемое имеет конечный ранг. Всякая вполне разложимая группа будет, понятно, сепарабельной.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания ответ на этот вопрос уже получен. [См. Д.31.2.]

Всякая счетная сепарабельная группа G вполне разложима.

Пусть, в самом деле, $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ — все элементы группы G. Положим $A_0 = O$. Пусть уже в G найдено вполне разложимое прямое слагаемое A_n конечного ранга, содержащее элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$. В качестве подгруппы A_{n+1} мы возьмем вполне разложимое прямое слагаемое группы G, имеющее конечный ранг и содержащее как элемент g_{n+1}, так и некоторую максимальную линейно независимую систему элементов подгруппы A_n. Тогда, ввиду сервантности в G подгруппы A_{n+1}, A_n содержится в A_{n+1} и, следовательно, служит для A_{n+1} прямым слагаемым:

$$A_{n+1} = A_n + B_{n+1}.$$

Подгруппа B_{n+1} как прямое слагаемое вполне разложимой группы конечного ранга сама вполне разложима (см. предшествующий параграф). Группа G совпадает с объединением возрастающей последовательности подгрупп A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а поэтому является прямой суммой вполне разложимых групп B_n, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. сама вполне разложима.

В несчетном случае существуют сепарабельные, но не вполне разложимые группы: *полная прямая сумма бесконечного множества бесконечных циклических групп сепарабельна*, хотя, как показано выше, она не является вполне разложимой.

Пусть, в самом деле, группа G будет полной прямой суммой бесконечных циклических групп с образующими элементами a_α (α пробегает некоторое множество индексов). Докажем сначала, что всякий элемент g группы G содержится во вполне разложимом прямом слагаемом этой группы: можно считать, понятно, что $g \neq 0$. Элемент g обладает записью

$$g = \sum_\alpha k_\alpha a_\alpha, \tag{2}$$

где k_α — некоторые целые числа. Обозначим через $k(g)$ наименьшую среди абсолютных величин тех коэффициентов k_α, которые отличны от нуля,

$$k(g) = \min(|k_\alpha|,\ k_\alpha \neq 0).$$

Если $k(g) = 1$, то есть такой индекс β, что $k_\beta = \pm 1$. Тогда

$$G = \{g\} + G',$$

где подгруппа G' состоит из всех тех элементов группы G, в записи которых вида (2) коэффициент при a_β равен нулю; G' сама будет, следовательно, полной прямой суммой бесконечных циклических групп.

Пусть теперь $k(g)$ произвольно. Разделим каждый коэффициент k_α из (2) на $k(g)$:

$$k_\alpha = k(g)q_\alpha + r_\alpha, \quad 0 \leqslant r_\alpha < k(g).$$

Тогда

$$g = k(g)g_1 + g_2,$$

где

$$g_1 = \sum_\alpha q_\alpha a_\alpha, \quad g_2 = \sum_\alpha r_\alpha a_\alpha.$$

Так как есть такое p, что $k(g) = \pm k_\beta$, то $q_\beta = \pm 1$ и поэтому $k(g_1) = 1$. Имеет место, следовательно, прямое разложение

$$G = \{g_1\} + G',$$

причем в G' собраны все те элементы из G, в записи которых коэффициент при a_β равен нулю. К числу таких элементов принадлежит и элемент g_2, т. е. $g_2 \in G'$. Однако $k(g_2)$ строго меньше, чем $k(g)$, — ведь все коэффициенты r_α строго меньше, чем $k(g)$. Можно считать поэтому доказанным существование такого прямого разложения

$$G' = A + B,$$

что A содержит g_2 и является вполне разложимой и даже свободной группой конечного ранга, а подгруппа B состоит из всех тех элементов группы G, в записи которых вида (2) равны нулю коэффициенты при некоторых фиксированных a_α, взятых в конечном числе. Элемент g содержится теперь во вполне разложимом прямом слагаемом $\{g_1\} + A$ группы G.

Если, наконец, в группе G задана конечная система элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$, то можно считать доказанным существование прямого разложения

$$G = U + V,$$

где U — вполне разложимое прямое слагаемое, содержащее элементы $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, а V — полная прямая сумма бесконечных циклических групп. Тогда $g_n = u + v$, $u \in U$, $v \in V$, а так как, по доказанному, существует такое прямое разложение

$$V = A + B,$$

что A вполне разложимо и содержит v, то прямое слагаемое $U + A$ группы G также будет вполне разложимым и содержит все заданные элементы; прямое слагаемое B будет при этом полной прямой суммой бесконечных циклических групп. Сепарабельность группы G доказана. [См. Д.31.5.]

В работе Бэра [15] рассматриваются и другие классы абелевых групп без кручения, в частности прямые суммы таких групп, все элементы которых, отличные от нуля, имеют один и тот же тип. Как показал Конторович [7], теория этого класса групп может быть распространена и на те некоммутативные группы без кручения,

в которых, как и во всех абелевых группах без кручения, уравнение

$$x^n = a, \quad n > 0,$$

допускает не больше одного решения.

Специальное направление в теории абелевых групп без кручения составляет изучение групп конечного ранга. Следующие параграфы настоящей главы посвящены изложению некоторого способа обозрения таких групп и необходимых для этого вспомогательных сведений. Отметим также интересный вопрос об изоморфизме разложений абелевой группы без кручения конечного ранга в прямую сумму неразложимых групп — в заметке Йонсона [1] приведен пример, показывающий, что этот изоморфизм не всегда имеет место. [См. Д.31.3.]

§ 32а. Поле p-адических чисел

В следующих параграфах нами будет существенно использовано одно расширение поля рациональных чисел, играющее во многих отделах алгебры важную роль. Сейчас мы должны определить это расширение и указать его основные, необходимые для дальнейшего, свойства.

Выберем простое число p, остающееся на протяжении всего параграфа фиксированным, и определим в поле рациональных чисел $\mathfrak{R}$ *p-адическую норму*. Если a есть рациональное число, $a \neq 0$, то можно записать

$$a = a' p^n,$$

где a' есть несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с p, а n больше, равно или меньше нуля. p-адической нормой числа a называется число p^{-n},

$$\|a\| = p^{-n}.$$

Если мы положим, сверх того, $\|0\| = 0$, то этим всякому рациональному числу a будет поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число, отличное от нуля при $a \neq 0$, причем

$$\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|, \tag{1}$$

$$\|a + b\| \leqslant \max(\|a\|, \|b\|). \tag{2}$$

Знак $<$ в последнем соотношении возможен лишь при $\|a\| = \|b\|$. Далее, $\| - a\| = \|a\|$ и поэтому

$$\|a - b\| \leqslant \max(\|a\|, \|b\|).$$

Мы определим теперь, используя p-адическую норму, некоторое расширение поля рациональных чисел, подобно тому, как абсолютная величина рациональных чисел используется при построении методом Кантора поля действительных чисел.

Последовательность рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, не обязательно различных, называется *сходящейся* (в смысле p-адической нормы), если для всякого положительного рационального числа ε существует такое натуральное число m, что

$$\|a_i - a_j\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i > m, \quad j > m.$$

Рациональное число b называется (p-адическим) *пределом* последовательности рациональных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое m, что

$$\|b - b_i\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i > m.$$

Легко видеть, что всякая последовательность, имеющая предел, будет сходящейся. Обратное имеет место не всегда, как показывает, например, последовательность

$$1,\ 1+p,\ 1+p+p^2,\ 1+p+p^2+p^4,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 1+p+p^2+\ldots+p^{2(n-1)}+p^{2n},\ \ldots,$$

сходящаяся, но не имеющая предела.

Суммой и *произведением* сходящихся последовательностей (a_n) и (b_n) называются последовательности $(a_n + b_n)$ и $(a_n b_n)$. Легко проверить, что эти последовательности снова будут сходящимися [1]) и что наше определение сложения и умножения сходящихся последовательностей удовлетворяет всем требованиям, составляющим определение кольца. Если, сверх того, последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределами числа a и b, то последовательность $(a_n + b_n)$ будет иметь пределом число $a + b$, последовательность $(a_n b_n)$ — число ab.

Последовательности, имеющие пределом число 0, составляют в кольце $\mathfrak{K}$ всех сходящихся последовательностей идеал, который мы обозначим через $\mathfrak{N}$. *Фактор-кольцо*

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$$

является полем. Действительно, если дана сходящаяся последовательность (a_n), не входящая в $\mathfrak{N}$, то существует такое рациональное число $\eta > 0$ и такое натуральное число k, что $\|a_i\| > \eta$ при $i > k$. Если первые k элементов последовательности (a_n) будут заменены числами, норма которых больше η, то мы получим сходящуюся последовательность $(\overline{a}_n)$, лежащую в том же классе по идеалу $\mathfrak{N}$, что и последовательность (a_n), причем для всех i будет $\|\overline{a}_i\| > \eta$ и, в частности, $\overline{a}_i \neq 0$. Рассмотрим теперь последовательность $(\overline{a}_n^{-1})$. Она будет сходящейся, так как из

$$\|\overline{a}_i - \overline{a}_j\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i > m, \quad j > m$$

[1]) При доказательстве сходимости последовательности $(a_n b_n)$ следует учесть, что нормы элементов сходящихся последовательностей (a_n) и (b_n) ограничены сверху.

следует

$$\|\overline{a}_j^{-1} - \overline{a}_i^{-1}\| = \|(\overline{a}_i - \overline{a}_j)\overline{a}_i^{-1}\overline{a}_j^{-1}\| < \varepsilon\eta^{-2}.$$

Вместе с тем произведение последовательностей $(\overline{a}_n)$ и $(\overline{a}_n^{-1})$ есть последовательность $(1, 1, \ldots)$, являющаяся единицей кольца $\mathfrak{K}$. Этим доказано существование в $\mathfrak{P}$ обратного элемента для всякого элемента, отличного от нуля.

Поле $\mathfrak{P}$ называется *полем p-адических чисел*, его элементы — *p-адическими числами*. В этом поле содержится поле рациональных чисел $\mathfrak{R}$: для доказательства следует идентифицировать всякое рациональное число a с классом по идеалу $\mathfrak{N}$, содержащим сходящуюся последовательность $(a, a, \ldots)$, т. е. с классом, состоящим из последовательностей, имеющих число a своим (p-адическим) пределом. Изоморфизм этого отображения поля $\mathfrak{R}$ в поле $\mathfrak{P}$ проверяется без затруднений.

Определим в поле $\mathfrak{P}$ норму, продолжающую p-адическую норму поля $\mathfrak{R}$, т. е. совпадающую в поле $\mathfrak{R}$ с его исходной p-адической нормой. Пусть p-адическое число α, отличное от нуля, определяется сходящейся последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Докажем, что нормы $\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_n\|, \ldots$, начиная с некоторого n, совпадают. Действительно, если

$$\|a_i - a_j\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i > m, \quad j > m,$$

то при $\|a_i\| \neq \|a_j\|$ из

$$\|a_i - a_j\| = \max(\|a_i\|, \|a_j\|)$$

следовало бы $\max(\|a_i\|, \|a_j\|) < \varepsilon$. Если бы, следовательно, для любого n существовали такие $i > n$ и $j > n$, что $\|a_i\| \neq \|a_j\|$, то мы пришли бы в противоречие с предположением, что $\alpha \neq 0$. Существует поэтому такое n, что

$$\|a_n\| = \|a_{n+1}\| = \ldots = p^k.$$

Мы положим теперь $\|\alpha\| = p^k$. Это определение не зависит от выбора последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, так как, если последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ имеет пределом нуль, т. е. $(b_n) \in \mathfrak{N}$, то для всех i, больших некоторого m, будет $\|b_i\| < p^k$, а тогда

$$\|a_i + b_i\| = p^k \quad \text{при} \quad i > m.$$

Последовательность $(a_n + b_n)$, снова определяющая число α, дает, таким образом, для α такое же значение нормы, как и (a_n). Если мы положим, сверх того, $\|0\| = 0$, то в поле $\mathfrak{P}$ будет введена норма, совпадающая для рациональных чисел с ранее определенной и снова удовлетворяющая условиям (1) и (2).

В поле $\mathfrak{P}$ можно определить теперь с помощью введенной нами нормы понятия сходящейся последовательности и предела последовательности, перенося на этот случай данные выше определения. Легко видеть при этом, что всякое p-адическое число α будет пределом

определяющей его последовательности рациональных чисел (a_n). Кроме того, теперь имеет место следующая теорема.

I. *В поле* $\mathfrak{P}$ *всякая сходящаяся последовательность имеет предел*.

Пусть, в самом деле, дана сходящаяся последовательность p-адических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$. Для всякого n можно найти такое рациональное число a_n, что

$$\|\alpha_n - a_n\| < \frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$\|a_i - a_j\| = \|(a_i - \alpha_i) + (\alpha_i - \alpha_j) + (\alpha_j - a_j)\| \leqslant \max\left(\frac{1}{i}, \|\alpha_i - \alpha_j\|, \frac{1}{j}\right),$$

т. е. при достаточно больших i и j эта норма будет произвольно малой. Последовательность (a_n) будет, следовательно, сходящейся, т. е. она определяет некоторое p-адическое число β. Из

$$\|\beta - \alpha_n\| = \|(\beta - a_n) + (a_n - \alpha_n)\| \leqslant \max\left(\|\beta - a_n\|, \frac{1}{n}\right)$$

следует теперь, что β есть предел последовательности (α_n).

Определим для поля $\mathfrak{P}$ некоторые элементарные топологические понятия, необходимые для дальнейшего. Подмножество (в частности, подкольцо) $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{P}$ называется *замкнутым*, если в $\mathfrak{M}$ содержится предел всякой сходящейся последовательности, составленной из элементов, принадлежащих к $\mathfrak{M}$. Если множество $\mathfrak{M}$ не является замкнутым, то множество $\overline{\mathfrak{M}}$, полученное присоединением к $\mathfrak{M}$ пределов всех сходящихся последовательностей, составленных из элементов множества $\mathfrak{M}$, будет уже, как легко проверить, замкнутым; $\overline{\mathfrak{M}}$ называется *замыканием* множества $\mathfrak{M}$. Наконец, множество $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{P}$ называется *компактным*, если всякая счетная последовательность элементов из $\mathfrak{M}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит $\mathfrak{M}$.

Из того, что всякое p-адическое число есть предел последовательности рациональных чисел, следует

II. *Замыкание поля рациональных чисел* $\mathfrak{R}$ *в поле* $\mathfrak{P}$ *совпадает с* $\mathfrak{B}$.

Можно доказать даже больше:

III. *Поле* $\mathfrak{P}$ *служит замыканием для кольца p-ичных дробей* $\mathfrak{R}_p$.

Так как всякое p-адическое число есть предел последовательности рациональных чисел, то нужно лишь доказать, что всякое рациональное число является p-адическим пределом последовательности чисел из кольца $\mathfrak{R}_p$. Пусть дано рациональное число $\frac{m}{n}$, и пусть s есть некоторое целое положительное число. Если $n = p^k n_0$, $(n_0, p) = 1$, $k \geqslant 0$, то берем целое число v, удовлетворяющее сравнению

$$n_0 v \equiv m (\mathrm{mod}\ p^{s+k}).$$

Тогда

$$\left\| \frac{m}{n} - \frac{v}{p^k} \right\| = \left\| \frac{m - n_0 v}{n} \right\| \leqslant p^{-s},$$

причем $\frac{v}{p^k} \in \mathfrak{R}_p$. Утверждение III доказано.

p-адическое число α называется *целым*, если $\|\alpha\| \leqslant 1$. Из свойств (1) и (2) p-адической нормы следует, что сумма, разность и произведение целых p-адических чисел сами будут целыми, т. е. *целые p-адические числа составляют кольцо*. Это кольцо, уже появлявшееся на другом пути в § 21, будет обозначаться дальше через $\mathfrak{J}$. Очевидны следующие два утверждения:

IV. *Пересечением кольца $\mathfrak{J}$ с полем рациональных чисел $\mathfrak{R}$ служит кольцо $\mathfrak{R}^{(p)}$ тех рациональных чисел, знаменатель которых взаимно прост с p.*

V. *Пересечением кольца $\mathfrak{J}$ с кольцом p-ичных дробей $\mathfrak{R}_p$ служит кольцо целых рациональных чисел $\mathfrak{C}$.*

Из III и V без труда следует теорема

VI. *Кольцо $\mathfrak{J}$ является замыканием кольца $\mathfrak{C}$.*

Действительно, если дано отличное от нуля целое p-адическое число α, то оно будет по III пределом сходящейся последовательности p-ичных дробей $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Однако ввиду $\alpha \neq 0$ нормы $\|a_n\|$ будут, начиная с некоторого n, равными норме числа α, т. е. меньшими или равными единице, а поэтому по V сами числа a_n будут целыми рациональными. Обратно, предел всякой сходящейся последовательности целых рациональных чисел имеет норму, не превосходящую единицы, т. е. является целым p-адическим числом.

Отсюда следует

VII. *Кольцо $\mathfrak{J}$ замкнуто в поле $\mathfrak{P}$.*

Пусть теперь α есть некоторое целое p-адическое число и $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ — последовательность целых рациональных чисел, имеющая α своим пределом. Запишем каждое из чисел a_n в виде суммы по возрастающим степеням числа p, взятым с коэффициентами, принимающими значения $0, 1, \ldots, p-1$, и обозначим через $a_n^{(k)}$ начало этой записи, обрывающееся на члене с p^k, где k — некоторое целое неотрицательное число. Из сходимости последовательности (a_n) следует, что все числа $a_n^{(k)}$, кроме, быть может, конечного числа, равны между собою, т. е. равны числу, которое мы обозначим через $a^{(k)}$. Легко проверить, что при всех k $a^{(k)}$ служит началом (при записи по возрастающим степеням числа p) для $a^{(k+1)}$, что $a^{(k)}$ не зависит от выбора последовательности (a_n), т. е. определяется самим числом α, и, наконец, что последовательность $(a^{(k)})$ имеет α своим пределом. Числу α можно поставить теперь в соответствие однозначно определенный ряд по возрастающим степеням числа p, имеющий своими начальными отрезками числа $a^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Этот ряд мы будем называть *канонической записью* числа α. Обратно, всякий ряд

по возрастающим степеням числа p, коэффициенты которого являются неотрицательными вычетами по модулю p, соответствует некоторому целому p-адическому числу, а именно пределу (сходящейся) последовательности своих отрезков от начала. Отсюда следует

VIII. *Кольцо $\mathfrak{J}$ имеет мощность континуума.*

Докажем теперь следующую теорему:

IX. *Кольцо $\mathfrak{J}$ компактно.*

Пусть дана счетная последовательность целых p-адических чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots. \tag{F}$$

Так как в качестве коэффициента при p^0 в канонических записях этих чисел может стоять лишь одно из чисел 0, 1, $\ldots$, $p-1$, то в (F) можно выбрать бесконечную подпоследовательность

$$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}, \ldots, \tag{F_1}$$

состоящую из чисел, канонические записи которых имеют один и тот же коэффициент при p^0. Пусть уже определена подпоследовательность

$$\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}, \ldots, \tag{F_k}$$

состоящая из чисел, в записях которых коэффициенты при p^0, p, p^2, $\ldots$ $\ldots$, p^{k-1} совпадают. Из нее мы выбираем теперь такую бесконечную подпоследовательность (F_{k+1}), в канонических записях элементов которой равны между собой и коэффициенты при p^k. Этим убывающая цепочка последовательностей (F_k) определена для всех k. Легко видеть теперь, что подпоследовательность

$$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, \ldots$$

будет сходящейся. Принимая во внимание VII, мы убеждаемся в справедливости рассматриваемой теоремы.

Кольцо $\mathfrak{J}$ является, очевидно, кольцом без делителей нуля и обладает единицей. Рассмотрим идеалы этого кольца. Из свойств (1) и (2) p-адической нормы следует, что множество $p^n\mathfrak{J}$, $n \geqslant 0$, состоящее из всех тех целых p-адических чисел, норма которых не превосходит p^{-n}, будет идеалом в $\mathfrak{J}$. *Убывающей цепочкой идеалов $\mathfrak{J}$, $p\mathfrak{J}$, $p^2\mathfrak{J}$, $\ldots$ исчерпываются в действительности все ненулевые идеалы кольца $\mathfrak{J}$*: если два целых p-адических числа имеют одну и ту же норму, то каждое из них содержится в идеале, порожденном другим, так как их частное имеет норму 1, т. е. содержится в $\mathfrak{J}$. Отсюда следует

X. *В кольце $\mathfrak{J}$ все идеалы главные.*

Отметим также следующее свойство найденной нами цепочки идеалов:

XI. *Если сходящаяся последовательность p-адических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ имеет пределом нуль, то всякий идеал $p^n\mathfrak{J}$ содержит все числа этой последовательности, кроме, быть может, конечного числа.*

XII. *Всякое p-адическое число может быть сделано целым умножением на некоторую положительную степень числа p.*

Действительно, если норма числа α есть p_n, $n > 0$, то для произведения $p^n\alpha$ будет ввиду свойства (1) p-адической нормы $\|p^n\alpha\| = 1$.

В дальнейшем нам придется рассматривать *конечномерные векторные пространства над полем* $\mathfrak{P}$. Если

$$P = \mathfrak{P}u_1 + \mathfrak{P}u_2 + \ldots + \mathfrak{P}u_n$$

есть такое пространство, то следующим образом определим в нем сходимость: элемент

$$a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

будет называться *пределом* последовательности элементов

$$a_k = \alpha_{k1} u_1 + \alpha_{k2} u_2 + \ldots + \alpha_{kn} u_n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

если для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, число α_i есть (p-адический) предел последовательности $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ki}, \ldots$.

Определенная нами сходимость не зависит от выбора в пространстве P линейно независимой системы $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Действительно, если мы перейдем к системе $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и если

$$u_i = \sum_j \mu_{ij} v_j,$$

то

$$a = \sum_j \Big(\sum_i \alpha_i \mu_{ij} \Big) v_j,$$

$$a_k = \sum_j \Big(\sum_i \alpha_{ki} \mu_{ij} \Big) v_j, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. последовательность коэффициентов при v_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, у элементов $a_1, a_2, \ldots$ имеет пределом коэффициент при v_j у элемента a.

В аддитивной группе пространства P можно определить теперь так же, как выше, понятия замкнутого подмножества, замыкания, компактности и т. д. Заметим при этом, что *замыкание подгруппы снова будет подгруппой*. В самом деле, если элемент a из P есть предел последовательности (a_k), элемент b — предел последовательности (b_k), то, как легко проверить, последовательность $(a_k \pm b_k)$ имеет пределом элемент $a \pm b$.

В следующих двух параграфах мы будем при ссылках на теоремы I–XII настоящего параграфа ограничиваться указанием номера теоремы без указания параграфа.

§ 32б. Группы конечного ранга без кручения

Нашей задачей является теперь полное описание абелевых групп без кручения, имеющих конечный ранг, т. е. описание (с точностью до изоморфизма) всех подгрупп прямой суммы конечного числа групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел R. В отличие от групп ранга 1, описание которых дано в § 30, случай групп произвольного конечного ранга оказывается уже весьма сложным и требует привлечения p-адических чисел. Эта связь абелевых групп с p-адическими числами была впервые указана Леви [1]. Для случая подгрупп прямой суммы конечного числа групп, изоморфных аддитивной группе p-ичных дробей R_p, полную систему инвариантов (т. е. полное описание) дал Курош [6]. Упрощения некоторых доказательств из этой работы, достигаемые привлечением топологических свойств поля p-адических чисел, указаны Калужниным [1]. Случай произвольных абелевых групп без кручения конечного ранга изучен Дэрри [1], причем им также использовались как алгебраические, так и топологические свойства поля p-адических чисел; описание, полученное Дэрри, излагается в настоящем параграфе. Другими методами, не требующими привлечения непрерывности и по существу близкими к методам линейной алгебры, описание групп без кручения конечного ранга получено Мальцевым [1].

Пусть дана абелева группа без кручения G конечного ранга n. Она содержится, согласно § 23, в минимальной полной группе F, которая заданием группы G однозначно определяется и ранг которой равен n. Если $\mathfrak{R}$ есть поле рациональных чисел, то $F = \mathfrak{R}G$, причем для всякого элемента x из F можно найти такой элемент a из G и такое рациональное число α (даже число вида $1/m$), что $x = \alpha a$. Пусть G_p есть подгруппа группы F, порожденная элементами αa, где a пробегает группу G, а α — кольцо $\mathfrak{R}^p$ тех рациональных чисел, *знаменатель которых взаимно прост с простым числом* p, т. е. $G_p = \mathfrak{R}^{(p)}G$. Всякий элемент из подгруппы G_p может быть записан, притом многими способами, в виде $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$, где

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \in G, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathfrak{R}^{(p)}.$$

Заметим, что элемент αx, где $x \in G_p$, $\alpha \in \mathfrak{R}^{(p)}$, также принадлежит к G_p, т. е.

$$\mathfrak{R}^{(p)} G_p = G_p.$$

Подгруппа G является пересечением всех подгрупп G_p при p, пробегающем все простые числа.

Очевидно, что $G \subset G_p$, и поэтому G содержится в пересечении всех подгрупп G_p. Пусть, с другой стороны, b есть произвольный элемент из этого пересечения. Из $b \in G_p$ следует существование записи

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k \in G$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathfrak{R}^{(p)}$. Если r есть общий знаменатель чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то $rb \in G$, причем r взаимно просто с p. Если $p_1, p_2, \ldots, p_m$ будут все различные простые делители числа r, то, рассматривая b как элемент подгрупп $G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_m}$, мы аналогичным путем найдем такие целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_m$, что $r_i b \in G$ и $(r_i, p_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $(r, r_1, r_2, \ldots, r_m) = 1$, т. е. существуют такие целые числа $l, l_1, \ldots, l_m$, что

$$lr + l_1 r_1 + \ldots + l_m r_m = 1,$$

откуда

$$b = (lr + l_1 r_1 + \ldots + l_m r_m) b \in G.$$

Мы переходим теперь к рассмотрению подгруппы G_p при некотором фиксированном p. Если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ есть некоторая максимальная линейно независимая система группы F, то

$$F = \mathfrak{R} u_1 + \mathfrak{R} u_2 + \ldots + \mathfrak{R} u_n. \tag{1}$$

Группу F мы включаем в векторное пространство размерности n над полем p-адических чисел $\mathfrak{P}$,

$$P = \mathfrak{P} u_1 + \mathfrak{P} u_2 + \ldots + \mathfrak{P} u_n.$$

Заметим, что пространство P не зависит от выбора прямого разложения (1) группы F, т. е. определяется в конечном счете самой группой G, так как другое разложение группы F приводит лишь к новому прямому разложению для P. Обозначим далее через $\overline{G}_p$ замыкание подгруппы G_p в группе P и докажем теорему:

Подгруппа G_p является пересечением подгрупп F и $\overline{G}_p$ группы P.

Понятно, что $G_p \subseteq (F \cap \overline{G}_p)$. Пусть, с другой стороны, элемент x содержится в этом пересечении. Как элемент из $\overline{G}_p$ он является пределом последовательности элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ из G_p, а так как элементы x и $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ принадлежат к F, то имеют место равенства

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n,$$
$$x_k = \alpha_{k1} u_1 + \alpha_{k2} u_2 + \ldots + \alpha_{kn} u_n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где все коэффициенты α_i и α_{ki} являются рациональными числами. Так как всякий элемент из F может быть записан в виде αa, где $a \in G$, α — рациональное число, то этот элемент умножением на некоторую степень числа p (равную, например, степени, с какой число p входит в знаменатель числа α) превращается в элемент из подгруппы G_p. Пусть, следовательно, число m таково, что элементы $p^m u_1, p^m u_2, \ldots, p^m u_n$ принадлежат к G_p. Из сходимости последовательности элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ к элементу x следует p-адическая сходимость чисел $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ki}, \ldots$ к числу α_i,

$i = 1, 2, \ldots, n$, а тогда по XI существует такое целое положительное число s, что

$$\alpha_i - \alpha_{si} \in p^m \mathfrak{J}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из рациональности числа $\alpha_i - \alpha_{si}$ следует теперь, ввиду IV,

$$\alpha_i - \alpha_{si} \in p^m \mathfrak{R}^{(p)},$$

а поэтому

$$(\alpha_i - \alpha_{si}) u_i \in G_p,$$

откуда

$$x - x_s = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{si}) u_i \in G_p,$$

т. е., ввиду $x_s \in G_p$, мы получаем $x \in G_p$.

Отвлечемся на время от связи группы P с исходной группой G, т. е. будем рассматривать P просто как векторное пространство над полем $\mathfrak{P}$, имеющее размерность n, и докажем теорему:

Всякая замкнутая подгруппа H группы P, содержащая n линейно независимых над $\mathfrak{P}$ элементов, разлагается в прямую сумму

$$H = \mathfrak{P} v_1 + \ldots + \mathfrak{P} v_k + \mathfrak{J} v_{k+1} + \ldots + \mathfrak{J} v_n,$$

причем число k, $0 \leqslant k \leqslant n$, зависит лишь от самой группы H.

Предположим сперва, что *подгруппа H не содержит никакого отличного от нуля подпространства над $\mathfrak{P}$*. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ есть произвольная система n элементов из H, линейно независимых относительно $\mathfrak{P}$. Обозначим

$$H_0 = \mathfrak{J} u_1 + \mathfrak{J} u_2 + \ldots + \mathfrak{J} u_n;$$

подгруппа H_0 является, иными словами, минимальной подгруппой группы P, содержащей элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и выдерживающей умножение на целые p-адические числа. Заметим, что $H_0 \subseteq H$. Действительно, для всякого целого рационального числа k и любого элемента x из H элемент kx содержится в H, а так как по VI всякое целое p-адическое число есть p-адический предел последовательности целых рациональных чисел и так как подгруппа H замкнутая, то произведение элемента x на любое целое p-адическое число также содержится в H.

Обозначим теперь через H'_m подгруппу, составленную из всех тех элементов группы P, p^m-кратное которых содержится в H_0, и положим

$$H_m = H'_m \cap H, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_m \subseteq \ldots$, причем объединение этой возрастающей последовательности совпадает с H. Действительно, всякий элемент из P может быть записан через элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ с p-адическими коэффициентами, но по XII всякое p-адическое число

умножением на некоторую степень числа p превращается в целое p-адическое число.

Предположим, что можно выбрать бесконечную подпоследовательность $H_0 \subset H_{m_1} \subset H_{m_2} \subset \ldots \subset H_{m_t} \subset \ldots$ так, что всякая подгруппа H_{m_t} отлична от подгруппы H_{m_t-1}. Тогда в H_0 можно найти такую последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots$, что элемент $p^{-m_t}x_t$ содержится в H_{m_t}, но не в H_{m_t-1}. Ввиду компактности подгруппы H_0, следующей из IX, в этой последовательности можно найти подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу x из H_0, а тогда ввиду XI для всякого s, $s = 1, 2, \ldots$, можно найти такой элемент $x_{t(s)}$, что $t(s) > s$ и

$$x - x_{t(s)} \in p^s H_0.$$

Отсюда умножением на p^{-s}, имеющим смысл в пространстве P, получаем

$$p^{-s}x - p^{-s}x_{t(s)} \in H_0. \tag{2}$$

Из $p^{-m_{t(s)}}x_{t(s)} \notin H_{m_{t(s)}-1}$ и $1 \leqslant s < t(s) \leqslant m_{t(s)}$ следует $p^{-s}x_{t(s)} \notin H_0$, поэтому (2) показывает, что $x \neq 0$. Из (2) следует также, ввиду $p^{-s}x_{t(s)} \in H$, что $p^{-s}x \in H$. Такое включение имеет место для всех s, а так как произведение элемента из H на любое целое p-адическое число, как доказано выше, также содержится в H, то в H будет содержаться подгруппа $\mathfrak{P}x$, отличная от нуля и допустимая относительно $\mathfrak{P}$, что противоречит предположениям, сделанным о подгруппе H.

Этим доказано существование такого m, что

$$H_m = H_{m+1} = H_{m+2} = \ldots = H,$$

откуда $H_0 \subseteq H \subseteq H'_m$. По построению H_0 есть свободный модуль ранга n над кольцом $\mathfrak{J}$. Это же верно и для H'_m — в качестве базы можно взять элементы $p^{-m}u_1, p^{-m}u_2, \ldots, p^{-m}u_n$. Поэтому, применяя на основании X к кольцу операторов $\mathfrak{J}$ результаты § 22, мы получаем, что подгруппа H также является свободным модулем ранга n над кольцом $\mathfrak{J}$, т. е.

$$H = \mathfrak{J}v_1 + \mathfrak{J}v_2 + \ldots + \mathfrak{J}v_n.$$

В этом случае $k = 0$.

Если же H *содержит ненулевые подпространства над* $\mathfrak{P}$, то пусть K есть объединение этих подпространств. Так как P как векторное пространство над полем вполне приводимо — аддитивная группа поля, рассматриваемая как группа с операторами из этого поля, является простой, — то по § 61 подгруппа K служит для P прямым слагаемым, $P = K + L$ и, сверх того,

$$K = \mathfrak{P}v_1 + \mathfrak{P}v_2 + \ldots + \mathfrak{P}v_k, \quad k \leqslant n.$$

С другой стороны, подгруппа L будет векторным пространством размерности $n - k$ над $\mathfrak{P}$. Пересечение $D = H \cap L$ также содержит $n - k$ линейно независимых над $\mathfrak{P}$ элементов, но уже не содержит

допустимых относительно $\mathfrak{P}$ подгрупп и будет благодаря замкнутости H замкнутой в L. Поэтому мы оказываемся в условиях рассмотренного выше случая, т. е.

$$D = \mathfrak{J}v_{k+1} + \ldots + \mathfrak{J}v_n.$$

Наконец, по VII′ из § 17 $H = K + D$. Доказательство теоремы закончено. Мы видим вместе с тем, что число k есть ранг (над $\mathfrak{P}$) максимальной подгруппы из H, допустимой относительно $\mathfrak{P}$, т. е. это число определяется самой группой H.

Эта теорема может быть применена к группе $\overline{G}_p$. Число k, получающееся на основании теоремы для этого случая, будет в конечном счете однозначно определяться самой исходной группой G, т. е. является инвариантом этой группы. Это число мы будем называть *p-рангом* группы G и обозначать через k_p, $0 \leqslant k_p \leqslant n$. Далее, всякая система элементов

$$v_1, \ \ldots, v_{k_p}, v_{k_p+1}, \ \ldots, v_n, \tag{3}$$

выбираемая в подгруппе $\overline{G}_p$ на основании предшествующей теоремы, будет линейно независимой над $\mathfrak{P}$ и поэтому максимальной линейно независимой (над $\mathfrak{P}$) системой элементов из группы P. С другой стороны, всякая максимальная линейно независимая (над $\mathfrak{R}$) система элементов

$$u_1, u_2, \ \ldots, u_n \tag{4}$$

из группы F остается максимальной линейно независимой (над $\mathfrak{P}$) в группе P. Отсюда следует, что каждая из систем (3) и (4) линейно выражается (над $\mathfrak{P}$) через другую; поэтому

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, \ \ldots, n,$$

где все коэффициенты α_{ij} являются p-адическими числами, а определитель $|\alpha_{ij}| \neq 0$.

Этим путем *группе G ставится в соответствие невырожденная квадратная матрица $A_p = (\alpha_{ij})$ порядка n с p-адическими элементами*. Матрица A_p зависит, впрочем, от выбора систем (3) и (4), и мы должны сейчас посмотреть, как она меняется при изменении этих систем.

Пусть системы (3) и (4) заменены соответственно системами

$$v_1', \ \ldots, v_{k_p}', v_{k_p+1}', \ \ldots, v_n', \tag{3′}$$

$$u_1', u_2', \ \ldots, u_n', \tag{4′}$$

причем элементы $v_1', \ \ldots, v_{k_p}'$ играют для подгруппы $\overline{G}_p$ такую же роль, как элементы $v_1, \ \ldots, v_{k_p}$ из системы (3). Системы (4) и (4′) являются обе максимальными линейно независимыми системами группы F

и поэтому линейно выражаются над полем $\mathfrak{R}$ одна через другую. Пусть (4′) выражается через (4) с помощью матрицы B [1]),

$$(u') = B(u).$$

B является невырожденной матрицей n-го порядка с рациональными коэффициентами, причем всякая такая матрица дает переход от системы (4) к некоторой системе (4′).

Пусть соответственно будет

$$(v) = C_p(v').$$

Матрица C_p дает некоторый автоморфизм группы

$$C_p = \mathfrak{P}v'_1 + \ldots + \mathfrak{P}v'_{k_p} + \mathfrak{J}v'_{k_p+1} + \ldots + \mathfrak{J}v'_n,$$

при котором подгруппа $K = \mathfrak{P}v'_1 + \ldots + \mathfrak{P}v'_{k_p}$ отображается на себя. Поэтому C_p имеет вид

$$C_p = \left(\begin{array}{c|c} U & O \\ \hline W & V \end{array}\right), \tag{5}$$

где U есть невырожденная квадратная матрица порядка k_p с p-адическими элементами, V — квадратная матрица порядка $n - k_p$ с целыми p-адическими элементами, обладающая обратной матрицей над кольцом $\mathfrak{J}$, W — прямоугольная матрица с произвольными p-адическими элементами. Обратно, всякая матрица вида (5) дает некоторый автоморфизм группы $\overline{G}_p$, т. е. служит для перехода к системе (3) от некоторой системы (3′). Все матрицы вида (5) составляют по умножению группу, которую мы будем обозначать через $\Gamma_p(n, k_p)$.

Теперь мы в состоянии указать матрицу A'_p, выражающую систему (4′) через систему (3′). Действительно, ввиду $(u) = A_p(v)$ будет

$$(u') = BA_pC_p(v'),$$

т. е. $A'_p = BA_pC_p$.

Матрица A_p была поставлена в соответствие группе G при фиксированном простом числе p. Предположим теперь, что это сделано для всех простых чисел, причем *при одной и той же линейно независимой системе* (4) *из группы* F. Этим, если $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ есть последовательность всех простых чисел, группе G будет поставлена в соответствие последовательность матриц

$$\mathfrak{A} = (A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_i}, \ldots), \tag{6}$$

[1]) (u) и (u') являются сокращенными записями систем (4) и (4′), расположенных в столбец.

где A_{p_i} есть невырожденная квадратная матрица порядка n с p_i-адическими элементами [1]). Если последовательности (6) и

$$\mathfrak{A}' = (A'_{p_1}, A'_{p_2}, \ldots, A'_{p_i}, \ldots) \tag{7}$$

будут называться *эквивалентными* в том случае, когда существует такая невырожденная матрица B порядка n с рациональными элементами и такие матрицы C_{p_i}, принадлежащие соответственно к группам $\Gamma_{p_i}(n, k_{p_i})$, что для всех i имеют место равенства

$$A'_{p_i} = BA_{p_i}C_{p_i},$$

— эта эквивалентность будет, очевидно, рефлексивной, симметричной и транзитивной, — то из доказанного выше следует, что последовательность матриц (7) тогда и только тогда соответствует группе G, если она эквивалентна с (6). Таким образом, *группа G однозначно определяет класс эквивалентных последовательностей матриц*; этот класс мы условимся сокращенно обозначать через $(\mathfrak{A})_G$.

Следующая теорема является целью всех рассмотрений настоящего параграфа:

Ранг n, p-ранги k_p по всем простым p и класс последовательностей матриц $(\mathfrak{A})_G$ составляют полную систему инвариантов группы G.

Пусть группы G и G' обладают одним и тем же рангом n, одинаковыми p-рангами k_p по всем p и, сверх того, $(\mathfrak{A})_G = (\mathfrak{A})_{G'} = (\mathfrak{A})$. Пусть, далее, F и F' будут минимальные полные группы, содержащие соответственно G и G', и, при некотором простом p, P и P' — минимальные векторные пространства размерности n над полем p-адических чисел, содержащие соответственно F и F'. Берем в классе $(\mathfrak{A})$ последовательность $\mathfrak{A}$, а в ней матрицу A_p, соответствующую числу p. Тогда в F существует такая система линейно независимых элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а для замыкания группы G_p такое прямое разложение

$$\overline{G}_p = \mathfrak{P}v_1 + \ldots + \mathfrak{P}v_{k_p} + \mathfrak{J}v_{k_p+1} + \ldots + \mathfrak{J}v_n,$$

что система $u_1, \ldots, u_n$ выражается через систему $v_1, \ldots, v_n$ при помощи матрицы A_p. Соответственно в группах F' и $\overline{G}'_p$ мы найдем системы элементов $u'_1, \ldots, u'_n$ и $v'_1, \ldots, v'_n$, причем первая система снова выражается через вторую при помощи матрицы A_p.

Соответствие $u_1 \to u'_1, u_2 \to u'_2, \ldots, u_n \to u'_n$ приводит к операторному (над $\mathfrak{R}$) изоморфизму между группами F и F', который однозначно продолжается до операторного (над $\mathfrak{P}$) изоморфизма между группами P и P'. Благодаря тому, что матрицы перехода от $u_1, \ldots, u_n$ к $v_1, \ldots, v_n$ и от $u'_1, \ldots, u'_n$ к $v'_1, \ldots, v'_n$ совпадают, элемент v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, будет отображаться при этом изоморфизме в элемент v'_i,

[1]) Говоря дальше о последовательностях матриц, мы всегда будем иметь в виду последовательности вида (6).

т. е. подгруппа $\overline{G}_p$ будет изоморфно отображаться на $\overline{G}'_p$. Отсюда следует, что пересечение $F \cap \overline{G}_p$ изоморфно отображается на пересечение $F' \cap \overline{G}'_p$; иными словами, при построенном нами изоморфизме между F и F' подгруппы G_p и G'_p отображаются друг на друга. Это верно для всех p, так как, по определению последовательности матриц $\mathfrak{A}$, системы $u_1, \ldots, u_n$ и $u'_1, \ldots, u'_n$ не зависят от выбора числа p. Таким образом, пересечение всех подгрупп G_p изоморфно отображается на пересечение всех подгрупп G'_p, т. е. группы G и G' изоморфны.

§ 32в. Дополнения и приложения результатов предшествующего параграфа

Установление полной системы инвариантов абелевых групп без кручения конечного ранга, осуществленное в предшествующем параграфе, нельзя считать завершением классификации этого класса групп. В самом деле, мы не доказали пока, что при произвольном задании инвариантов можно найти группу, этими инвариантами обладающую. Это и не может быть доказано, так как в действительности последовательности матриц, соответствующие в описанном выше смысле группам, обладают некоторыми дополнительными свойствами, которые не были отмечены в предшествующем параграфе [1]). К рассмотрению этих свойств мы сейчас и переходим.

Последовательность матриц $\mathfrak{A}$, поставленная в соответствие группе G, зависела от выбора линейно независимой системы $u_1, \ldots, u_n$ в группе F. Эту систему можно было выбрать в самой группе G. В этом случае она содержалась бы при всех p в группе $\overline{G}_p$, т. е. всякий элемент u_i, $i = 1, \ldots, n$, записывался бы линейно через элементы $v_1, \ldots, v_{k_p}, v_{k_p+1}, \ldots, v_n$ с p-адическими коэффициентами при элементах $v_1, \ldots, v_{k_p}$ и целыми p-адическими при остальных элементах. Иными словами, матрица A_p оказывается в этом случае (для всех p) такой, что в ней последние $n - k_p$ столбцов состоят из целых p-адических элементов. Если такая матрица будет называться *нормальной* [2]), то мы получаем, что при нашем выборе системы $u_1, \ldots, u_n$ все матрицы, составляющие последовательность $\mathfrak{A}$, оказываются нормальными. Это свойство последовательности $\mathfrak{A}$ не сохраняется, однако, при переходе к эквивалентным с нею последовательностям. Правда, умножение нормальной матрицы A_p справа на матрицу C_p из группы $\Gamma_p(n, k_p)$ снова приводит, как легко проверить, к нормальной матрице, но при умножении нормальной матрицы A_p слева на невырожденную

[1]) В работе Дэрри [1] эти дополнительные свойства последовательностей матриц также не отмечены, и самый вопрос о существовании группы с наперед заданными инвариантами в ней не рассматривается.

[2]) Определение нормальной матрицы зависит, как мы видим, от p-ранга k_p группы G.

матрицу B с рациональными элементами свойство нормальности, вообще говоря, теряется. Здесь следует учесть, однако, что матрица B, входящая в определение эквивалентности последовательностей матриц, была общей для всех p. Вместе с тем в знаменатели элементов этой матрицы входит лишь конечное число простых чисел, т. е. для всех p, кроме конечного числа, матрицу B можно считать матрицей с целыми p-адическими элементами, а в этом случае произведение BA_p снова будет нормальной матрицей. Мы приходим, таким образом, к следующему результату.

Во всякой последовательности матриц $\mathfrak{A}$, *входящей в класс* $(\mathfrak{A})_G$, *соответствующий группе* G, *все матрицы*, *кроме*, *быть может*, *конечного числа*, *являются нормальными*.

Условимся класс $(\mathfrak{A})$, состоящий из последовательностей матриц с указанным в этой теореме свойством, называть *нормальным*. Очевидно, что нормальным будет далеко не всякий класс.

Лемма. *Всякий нормальный класс* $(\mathfrak{A})$ *содержит хотя бы одну последовательность*, *состоящую целиком из нормальных матриц*.

Пусть в самом деле $\mathfrak{A}$ есть произвольная последовательность из класса $(\mathfrak{A})$, и пусть матрица A_p из этой последовательности не является нормальной. Существует ввиду XII такая степень p^k числа p, что после умножения матрицы A_p слева на скалярную матрицу p^kE все элементы последних $n - k_p$ столбцов станут целыми p-адическими числами, т. е. матрица A_p станет нормальной. Если на матрицу p^kE будут умножены слева все матрицы последовательности $\mathfrak{A}$, то получим последовательность из класса $(\mathfrak{A})$ с меньшим, чем у $\mathfrak{A}$, числом матриц, не являющихся нормальными: умножение всякой нормальной матрицы A_q из $\mathfrak{A}$, $q \neq p$, на матрицу p^kE не нарушает ее нормальности. Применяя указанный прием конечное число раз, мы получим последовательность из класса $(\mathfrak{A})$, все матрицы которой нормальны.

Мы можем перейти теперь к доказательству теоремы, завершающей описание абелевых групп без кручения конечного ранга:

Если даны: *натуральное число* n, *целые неотрицательные числа* k_p (*для всех простых* p), *удовлетворяющие условию* $0 \leqslant k_p \leqslant n$, *и нормальный класс последовательностей матриц* $(\mathfrak{A})$, *связанный с этими числами* [1]), *то существует абелева группа без кручения*, *имеющая ранг* n, p-*ранги* k_p *и класс* $(\mathfrak{A})$ *в качестве соответствующего ей класса последовательностей матриц*.

Для доказательства выбираем в классе $(\mathfrak{A})$ на основании леммы последовательность $\mathfrak{A}$, состоящую целиком из нормальных матриц, и берем полную группу F ранга n,

$$F = \mathfrak{R}u_1 + \mathfrak{R}u_2 + \ldots + \mathfrak{R}u_n.$$

[1]) Напоминаем, что при определении нормального класса $(\mathfrak{A})$ приходится использовать как число n, так и числа k_p.

Фиксируем затем простое число p и включаем F в векторное пространство P размерности n над полем p-адических чисел $\mathfrak{P}$,

$$P = \mathfrak{P}u_1 + \mathfrak{P}u_2 + \ldots + \mathfrak{P}u_n.$$

В пространстве P выбираем элементы $v_1, \ldots v_{k_p}, v_{k_p+1}, \ldots, v_n$, выражающиеся через $u_1, \ldots, u_n$ при помощи матрицы, обратной к матрице A_p из последовательности $\mathfrak{A}$, и полагаем

$$V_p = \mathfrak{P}v_1 + \ldots + \mathfrak{P}v_{k_p} + \mathfrak{J}v_{k_p+1} + \ldots + \mathfrak{J}v_n.$$

Пусть далее $F \cap V_p = D_p$, и пусть пересечение всех подгрупп D_p (p пробегает все простые числа) обозначено через G.

Группа G является искомой. В самом деле, из нормальности матрицы A_p следует, что элементы $u_1, \ldots, u_n$ принадлежат к подгруппе V_p, т. е. лежат в D_p, а так как это верно ввиду выбора последовательности $\mathfrak{A}$ для всех p, то элементы $u_1, \ldots, u_n$ содержатся в подгруппе G. Этим доказано, что *группа G имеет ранг n*, а поэтому $F = \mathfrak{R}G$.

Подгруппа V_p служит замыканием в P для подгруппы D_p. В самом деле, система элементов $v_1, \ldots, v_n$ является максимальной линейно независимой (над $\mathfrak{P}$) системой из P, т. е.

$$P = \mathfrak{P}v_1 + \ldots + \mathfrak{P}v_n.$$

Поэтому ввиду замкнутости $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{P}$ подгруппа V_p замкнута в P и, следовательно, содержит замыкание $\overline{D}_p$ подгруппы D_p. Если, с другой стороны, x есть произвольный элемент из V_p, то, так как замыкание подгруппы F совпадает с P [1]), существует в F последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, сходящаяся к x. Ввиду XI существует такое число m, что при $k > m$

$$x - x_k \in V_p,$$

откуда $x_k \in V_p$, т. е. $x_k \in D_p$. Этим доказано, что подгруппа $\overline{D}_p$ совпадает с V_p.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что *для всех p имеет место равенство* $\mathfrak{R}^{(p)}G = D_p$.

Действительно, из $\mathfrak{R}^{(p)} \subset \mathfrak{J}$ следует, что при $d \in D_p$, $\alpha \in \mathfrak{R}^{(p)}$ будет $\alpha d \in V_p$; так как вместе с тем $\alpha d \in F$, то $\alpha d \in D_p$, т. е. $\mathfrak{R}^{(p)}D_p = D_p$. Поэтому для всех простых p будет $\mathfrak{R}^{(p)}G \subseteq D_p$. Пусть, с другой стороны, x есть произвольный элемент из D_p. Существует такой элемент a из G и такое целое положительное число m, что $x = \dfrac{1}{m}\,a$.

[1]) Это следует из II.

Если $m = p^{\alpha}m'$, $(m', p) = 1$, то при $\alpha = 0$ будет $\frac{1}{m} \in \mathfrak{R}^{(p)}$, т. е. $x \in \in \mathfrak{R}^{(p)}G$. Если же $\alpha > 0$, то рассмотрим элемент

$$y = m'x = \frac{1}{p^{\alpha}}\, a.$$

Для всех простых чисел q, отличных от p, $\frac{1}{p^{\alpha}} \in \mathfrak{R}^{(q)}$, а поэтому элемент y содержится в D_q. Элемент $y = m'x$ содержится вместе с тем в D_p, т. е. $y \in G$. Отсюда следует, ввиду $\frac{1}{m'} \in \mathfrak{R}^{(q)}$, что

$$x = \frac{1}{m'}\, y \in \mathfrak{R}^{(p)}G,$$

т. е. $\mathfrak{R}^{(p)}G = D_p$.

Укажем некоторые применения полученной нами классификации абелевых групп конечного ранга без кручения. Мы знаем, что ранг прямой суммы равен сумме рангов прямых слагаемых. *Это же верно и для p-ранга*, как легко установить, используя его определение. Если мы рассматриваем, далее, группу G ранга 1, то ее p-ранг равен нулю или единице. Эта группа может быть задана, как мы знаем из § 30, классом характеристик, эквивалентных характеристике

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n, \ \ldots),$$

где всякое $\alpha_i = \alpha(p_i)$ есть или нуль, или целое положительное число, или же символ ∞, причем те простые числа p_i, для которых $\alpha(p_i) = \infty$, не зависят от выбора характеристики α в ее классе. *Группа G имеет p-ранг 1 для тех и только тех p, для которых $\alpha(p) = \infty$.* Действительно, пусть $\mathfrak{P}G = P$, где $\mathfrak{P}$ — поле p-адических чисел. Если $\alpha(p) = \infty$, т. е. при любом элементе a из G и любом целом положительном m уравнение $p^m x = a$ имеет в G решение, то $\mathfrak{R}_p G = G$, где $\mathfrak{R}_p$ — кольцо p-ичных дробей. Из III следует теперь, что замыкание подгруппы G в группе P есть P, откуда $k_p = 1$. Если же $\alpha(p) \neq \infty$, то в G можно выбрать элемент a так, что в соответствующей ему характеристике α будет $\alpha(p) = 0$. В этом случае, ввиду IV,

$$D \subseteq \mathfrak{R}^{(p)}a \subset \mathfrak{J}a,$$

откуда $k_p = 0$ [1]).

Из сказанного в предшествующем абзаце следует, что можно построить группу без кручения с любыми наперед заданными рангом

[1]) Полный перевод классификации групп ранга 1, данной в § 30, на язык инвариантов, установленных нами для случая любого конечного ранга, предоставляется читателю.

и p-рангами по всем p, беря прямую сумму соответственно подобранных групп ранга 1. Не исчерпываются ли прямыми суммами групп ранга 1 вообще все абелевы группы без кручения конечного ранга? Если бы ответ на этот вопрос был положительным, то классификация, данная выше, во многом потеряла бы свое значение. В действительности, однако, этот вопрос имеет отрицательный ответ, как показывает следующая теорема, относящаяся к более общему вопросу о существовании групп, вообще неразложимых в прямую сумму своих подгрупп (см. Леви [1], Понтрягин [1], Курош [6]; см. также § 32):

Для любого целого положительного числа n существуют абелевы группы без кручения ранга n, неразложимые в прямую сумму.

Доказательство. Пусть группа без кручения G ранга n имеет по некоторому простому числу p p-ранг $n-1$, и пусть дано прямое разложение группы G, $G = G_1 + G_2$, где слагаемые имеют соответственно ранги n_1 и n_2, $n_1 + n_2 = n$. Тогда p-ранг одного из слагаемых, например G_1, совпадает с его рангом n_1, а p-ранг слагаемого G_2 равен $n_2 - 1$. Системы элементов вида (3) и (4) из предшествующего параграфа, служащие для построения матрицы A_p, соответствующей группе G, можно получить теперь объединением соответствующих систем из групп G_1 и G_2, причем матрица A_p примет в этом случае вид

$$A_p = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & N \end{array}\right),$$

где M и N — квадратные матрицы соответственно порядков n_1 и n_2. Можно считать при этом матрицу A_p нормальной, т. е. принять последний столбец матрицы N состоящим из целых p-адических чисел. Всякая матрица A'_p, соответствующая группе G при другом выборе систем элементов (3) и (4), имеет, как мы знаем, вид $A'_p = BA_pC_p$, где B — невырожденная матрица порядка n с рациональными элементами, а C_p — матрица из группы $\Gamma_p(n, n-1)$. В последнем столбце матрицы C_p равны нулю все элементы, кроме последнего, являющегося отличным от нуля целым p-адическим числом. Отсюда следует, что матрица A_pC_p имеет вид

$$A_pC_p = \left(\begin{array}{c|c} S & O \\ \hline & T \end{array}\right),$$

где S — матрица с p-адическими элементами, имеющая n строк и $n-1$ столбцов, а T — матрица с целыми p-адическими элементами, имеющая n_2 строк и один столбец. Если, далее, через B' будет обозначена матрица, составленная последними n_2 столбцами матрицы B, то последний столбец матрицы BA_pC_p будет равен произведению $B'T$.

Элементы этого столбца являются, следовательно, линейными формами с рациональными коэффициентами относительно элементов из T, т. е., ввиду $n_2 < n$, *линейно зависимы над полем рациональных чисел* $\mathfrak{R}$.

Поле $\mathfrak{R}$ является счетным, тогда как по VIII кольцо $\mathfrak{J}$ имеет мощность континуума. Отсюда следует возможность построить такую невырожденную матрицу A_p порядка n с p-адическими элементами, *последний столбец которой будет состоять из целых p-адических элементов*, *линейно независимых над полем* $\mathfrak{R}$. Полагая $k_p = n - 1$ и задавая произвольным образом q-ранги k_q по всем q, отличным от p, $0 \leqslant k_q \leqslant n$, и соответствующие нормальные матрицы A_q, мы определим, как доказано в настоящем параграфе, некоторую абелеву группу без кручения G ранга n, причем из сказанного в предшествующем абзаце следует, что эта группа неразложима в прямую сумму.

Часть третья

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Глава девятая

СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

§ 33. Определение свободного произведения

Прямые произведения групп, введенные в § 17, играют в теории групп очень большую роль, как показывают хотя бы главы, посвященные абелевым группам. Другой конструкцией этого типа, также нередко весьма полезной, является свободное произведение групп. Свободное произведение дает, подобно прямому произведению, некоторую возможность из заданных групп построить новую группу. Оно отличается от прямого произведения тем, что в его определении отсутствует содержащееся в определении прямого произведения требование перестановочности элементов, входящих в различные прямые множители. Точное определение свободного произведения таково.

Группа G называется *свободным произведением* своих подгрупп A_α, отличных от E (α пробегает некоторое множество индексов), если подгруппы A_α в совокупности порождают всю группу G, т. е. если всякий элемент g из G является произведением конечного числа элементов, взятых из A_α,

$$g = a_1 a_2 \dots a_n, \quad a_i \in A_{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

и если всякий элемент g из G обладает единственной записью вида (1) при условии, что все элементы a_i отличны от единицы и что в (1) не могут стоять рядом два элемента из одной подгруппы A_α, хотя, вообще говоря, произведение (1) может содержать несколько множителей, входящих в одну такую подгруппу.

Для записи свободного произведения употребляется символ

$$G = \prod_{\alpha}^{*} A_\alpha, \tag{2}$$

а если группа G есть свободное произведение конечного числа своих подгрупп $A_1, A_1, \ldots, A_k$, то символ

$$G = A_1 * A_2 * \ldots * A_k.$$

Подгруппы A_α называются *свободными множителями* группы G, входящими в свободное разложение (2). Выражение (1) (при сделанных о нем предположениях) есть *несократимая запись* элемента g относительно разложения (2), число n — длина элемента g в этом разложении (обозначение: $n = l(g)$).

Из единственности несократимой записи элемента следует, что пересечение любого свободного множителя A_α из (2) с подгруппой, порожденной в G всеми остальными множителями этого разложения, равно E.

Пусть группа G разложима в свободное произведение своих истинных подгрупп. Если (2) есть ее разложение, то берем два элемента a_1 и a_2, отличных от единицы и принадлежащих к различным свободным множителям из (2). Из определения свободного произведения следует, что произведения a_1a_2 и a_2a_1 будут различными элементами группы G, т. е. группа G непременно некоммутативна, даже если все свободные множители A_α из (2) абелевы. Далее, все произведения

$$a_1a_2,\ a_1a_2a_1a_2,\ \ldots,\ (a_1a_2)^n,\ \ldots$$

также являются различными элементами группы G, т. е. группа G непременно обладает элементами бесконечного порядка, даже если все свободные множители A_α периодичны. Таким образом, *как абелевы, так и периодические* (*в том числе и конечные*) *группы неразложимы в свободное произведение*.

К числу групп, разложимых в свободное произведение, принадлежат свободные группы, а именно *свободная* (*нециклическая*) *группа является свободным произведением бесконечных циклических групп*. Пусть в самом деле в свободной группе W задана система свободных образующих x_α. Если $A_\alpha = \{x_\alpha\}$, то группа W порождается, очевидно, подгруппами A_α, а всякий элемент из W, т. е. всякое слово относительно символов x_α, однозначно записывается в виде произведения

степеней элементов x_α. Группа W является, следовательно, свободным произведением своих бесконечных циклических подгрупп A_α [1]).

Как и в случае прямых произведений, мы имеем право говорить *о свободном произведении любых наперед заданных групп* на основании конструкции, являющейся естественным обобщением той конструкции, с помощью которой были введены в § 18 свободные группы.

Пусть дано произвольное множество групп A_α. Называем *словом* всякую упорядоченную систему элементов

$$w = a_1 a_2 \dots a_n, \tag{3}$$

где *длина* $n \geqslant 1$, всякое a_i есть отличный от единицы элемент из некоторой группы A_{α_i} и всякие два соседних элемента a_i и a_{i+1} принадлежат к различным группам A_α. Считаем, сверх того, что случаю $n = 0$ соответствует *пустое слово*. Если даны слова (3) и

$$w' = a'_1 a'_2 \dots a'_m, \tag{4}$$

то определяем *произведение* w на w' следующим образом: пусть

$$a'_1 = a_n^{-1},\ a'_2 = a_{n-1}^{-1},\ \dots,\ a'_i = a_{n-i+1}^{-1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant \min(n, m),$$

но $a'_{i+1} \neq a_{n-1}^{-1}$. Если элементы a_{n-i} и a'_{i+1} принадлежат к различным группам A_α, то полагаем

$$ww' = a_1 a_2 \dots a_{n-i} a'_{i+1} a'_{i+1} \dots a'_m;$$

если же a_{n-i} и a'_{i+1} лежат в одной группе A_α и $a_{n-i} a'_{i+1} = \overline{a}$, то

$$ww' = a_1 a_2 \dots a_{n-i-1} \overline{a} a'_{i+2} \dots a'_m.$$

Иными словами, для получения произведения слова w на слово w' нужно написать эти слова одно за другим и выполнить затем необходимые *сокращения и объединения*.

Роль единицы при так определенном умножении слов играет пустое слово. Обратным для слова (3) является слово

$$w^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}.$$

Доказательство ассоциативности умножения слов, не отличаясь по существу от соответствующего доказательства из § 18, является технически очень сложным. Обойти эти сложности можно таким путем (см. Ван-дер-Варден [2]).

Обозначим через M множество всех определенных выше слов, а через S_M — группу всех взаимно однозначных отображений множества M на себя. Пусть A_α — одна из данных нам групп, a — элемент из A_α, отличный от 1. Элемент a определяет такое отображение множества M

[1]) Заметим, что для случая свободной группы определенное выше понятие длины элемента не совпадает с одноименным понятием, введенным в § 18.

в себя: если слово w с записью (3) оканчивается не на элемент из A_α, в частности, если оно пустое, то отображаем w в слово

$$wa = a_1 a_2 \dots a_n a.$$

Если же $a_n \in A_\alpha$, причем в A_α $a_n a = a' \neq 1$, то образом слова w считаем слово

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a'.$$

Если, наконец, $a_n \in A_\alpha$, но $a_n a = 1$, то образом w будет слово

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1}.$$

С другой стороны, если $a = 1$, то будем считать, что ему соответствует тождественное отображение множества M на себя.

Если b — любой другой элемент из группы A_α, то, очевидно, отображение, соответствующее произведению ab, будет произведением отображений, соответствующих элементам a и b, в смысле их последовательного выполнения. В частности, последовательное выполнение отображений, соответствующих элементам a и a^{-1}, дает тождественное отображение, а поэтому отображение, соответствующее любому элементу a из A_α, будет взаимно однозначным отображением множества M на себя, т. е. будет элементом группы S_M. Различным элементам из группы A_α соответствуют различные отображения, так как отображение, соответствующее элементу a, отличному от единицы, переводит пустое слово как раз в слово a.

Мы получили изоморфное отображение группы A_α на некоторую подгруппу $\widehat{A}_\alpha$ группы S_M; образ элемента a при этом отображении обозначим через $\widehat{a}$. Проделав это для всех α, обозначим через $\widehat{G}$ подгруппу группы S_M, порожденную всеми подгруппами $\widehat{A}_\alpha$. Всякий элемент из $\widehat{G}$ записывается в виде слова относительно элементов из $\widehat{A}_\alpha$, причем однозначно: если w — любое слово из M и (3) — его запись, то произведение

$$\widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \dots \widehat{a}_n$$

будет подстановкой, переводящей пустое слово как раз в слово w. Иными словами, группа $\widehat{G}$ является свободным произведением своих подгрупп $\widehat{A}_\alpha$.

Умножение в группе $\widehat{G}$ выполняется точно по тем законам, которые указаны выше в определении умножения слов. Таким образом, множество M всех слов является теперь группой, которую мы обозначим через $\overline{G}$. Слова длины 1, соответствующие всем элементам одной из групп A_α, составляют вместе с пустым словом подгруппу $\overline{A}_\alpha$ группы $\overline{G}$, изоморфную группе A_α. Полученный выше изоморфизм между группами $\overline{G}$ и $\widehat{G}$ показывает, что *группа $\overline{G}$ есть свободное произведение своих подгрупп $\overline{A}_\alpha$, изоморфных заданным группам A_α.*

Покажем теперь, что определение свободного произведения можно было бы дать и в другой форме, использующей образующие и соотношения, а именно следующим образом.

Пусть

$$G = \prod_{\alpha}^{*} A_\alpha$$

и пусть группа A_α задается системой образующих $\mathfrak{M}_\alpha$ и системой определяющих соотношений Φ_α в этих образующих. Тогда объединение $\mathfrak{M}$ всех множеств $\mathfrak{M}_\alpha$ будет системой образующих группы G, а объединение Φ всех множеств Φ_α — ее системой определяющих соотношений. Обратно, если группа G задается такой системой образующих $\mathfrak{M}$ и такой системой определяющих соотношений Φ, что $\mathfrak{M}$ распадается на непересекающиеся истинные подсистемы $\mathfrak{M}_\alpha$, а Φ — на непересекающиеся подсистемы Φ_α, причем в каждое соотношение из Φ_α входят лишь образующие из $\mathfrak{M}_\alpha$, то группа G изоморфна свободному произведению групп A_α, где A_α — группа с системой образующих $\mathfrak{M}_\alpha$ и системой определяющих соотношений Φ_α.

Оба утверждения теоремы вытекают из следующих рассмотрений. Пусть дана система непересекающихся множеств $\mathfrak{M}_\alpha$, и для каждого α некоторое множество соотношений Φ_α, написанных с помощью символов из $\mathfrak{M}_\alpha$. Обозначим объединение всех $\mathfrak{M}_\alpha$ через $\mathfrak{M}$, объединение всех Φ_α через Φ. Тогда существует, ввиду § 18, группа G, имеющая $\mathfrak{M}$ системой образующих и Φ системой определяющих соотношений. Обозначим, с другой стороны, через $\overline{A}_\alpha$ группу с системой образующих $\mathfrak{M}_\alpha$ и системой определяющих соотношений Φ_α и через $\overline{G}$ свободное произведение всех групп $\overline{A}_\alpha$,

$$\overline{G} = \prod_{\alpha}^{*} \overline{A}_\alpha,$$

существующее ввиду изложенной выше конструкции. Тогда системой образующих для группы $\overline{G}$ будет $\mathfrak{M}$, но для получения системы определяющих соотношений необходимо, быть может, систему Φ дополнить еще некоторым числом соотношений. Поэтому, по теореме Дика, группа $\overline{G}$ изоморфна фактор-группе группы G. Если A_α есть подгруппа группы G, порожденная множеством $\mathfrak{M}_\alpha$, то при естественном гомоморфном отображении группы G на группу $\overline{G}$ подгруппа A_α будет гомоморфно отображаться на подгруппу $\overline{A}_\alpha$. Так как, однако, все соотношения из системы Φ_α, являющейся системой определяющих соотношений для $\overline{A}_\alpha$, выполняются и в A_α, то это отображение будет просто изоморфным. Наконец, всякий элемент из G может быть записан (быть может и не только одним способом) в виде слова с помощью элементов из подгрупп A_α. Этот элемент при гомоморфном отображении G в $\overline{G}$ переходит в соответствующее слово относительно элементов из $\overline{A}_\alpha$. Так как, однако, в $\overline{G}$ различные слова, составленные из элементов

из $\overline{A}_\alpha$, являются различными элементами группы, то это же будет иметь место и в G для слов, состоящих из элементов подгрупп A_α. Этим доказан изоморфизм групп G и $\overline{G}$.

Возможен и другой подход к понятию свободного произведения, а именно:

Если группа G порождается подгруппами A_α (α пробегает некоторое множество индексов), то G тогда и только тогда будет свободным произведением этих подгрупп, если, при любой группе H и любых гомоморфных отображениях φ_α каждой из групп A_α в группу H, существует гомоморфное отображение φ группы G в группу H, совпадающее с φ_α на каждой подгруппе A_α.

Действительно, если

$$G = \prod_\alpha^* A_\alpha$$

и если группа H и гомоморфизмы φ_α даны, то искомый гомоморфизм φ определяется так: если $w = a_1 a_2 \dots a_n$ — слово из G, причем $a_i \in A_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$w\varphi = a_1\varphi_{\alpha_1} \cdot a_2\varphi_{\alpha_2} \dots a_n\varphi_{\alpha_n}.$$

Для доказательства обратного утверждения нужно в качестве H взять свободное произведение групп A_α в смысле данной выше конструкции, а в качестве гомоморфизмов φ_α — тождественные отображения групп A_α на себя. Гомоморфизм φ, существование которого теперь предполагается, превращается на самом деле в изоморфное отображение G на H.

Пользуясь каждый раз наиболее подходящей из данных выше форм определения свободного произведения, читатель без труда докажет следующие простейшие свойства свободных произведений:

I. *Если $G = \prod_\alpha^* A_\alpha$ и если всякая подгруппа A_α сама разложена в свободное произведение, $A_\alpha = \prod_\beta^* B_{\alpha\beta}$, то группа G будет свободным произведением всех $B_{\alpha\beta}$.* Это новое свободное разложение группы G называется *продолжением* исходного свободного разложения.

II. *Если дано свободное разложение группы G, то мы получим ее новое свободное разложение, разбивая множество свободных множителей данного разложения на непересекающиеся подсистемы и беря произведение всех множителей внутри каждой из подсистем.* В частности, всякая группа, разложимая в свободное произведение, может быть представлена как свободное произведение двух групп.

III. *Если $G = \prod_\alpha^* A_\alpha$ и если в каждом из множителей A_α выбрана подгруппа A'_α, $E \subseteq A'_\alpha \subseteq A_\alpha$, то подгруппа, порожденная в G всеми подгруппами A'_α, будет свободным произведением этих подгрупп.*

IV. *Если* $G = A * B$ *и если* N *есть нормальный делитель, порожденный в* G *подгруппой* B, *то* $A \simeq G/N$.

Действительно, переход к фактор-группе по N равносилен с наложением соотношений, приравнивающих единице все образующие элементы группы B. После этого сохраняются, однако, лишь образующие и определяющие соотношения группы A.

Любопытным примером группы, разложимой в свободное произведение, является *модулярная группа*, т. е. группа дробно-линейных преобразований комплексной плоскости:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{5}$$

где a, b, c, d — целые рациональные числа и определитель $ad - bc = 1$. Это же преобразование (5) может быть записано также в виде

$$z' = \frac{-az - b}{-cz - d}$$

— обстоятельство, которое мы должны будем дальше учитывать. Последовательное выполнение дробно-линейных преобразований (5) и

$$z'' = \frac{\overline{a}z' + \overline{b}}{\overline{c}z' + \overline{d}} \tag{6}$$

приводит к преобразованию

$$z'' = \frac{(\overline{a}a + \overline{b}c)z + (\overline{a}b + \overline{b}d)}{(\overline{c}a + \overline{d}c)z + (\overline{c}b + \overline{d}d)}; \tag{7}$$

его коэффициенты получены из коэффициентов преобразований (6) и (5) по правилу умножения матриц, а поэтому его определитель равен 1. Если мы условимся называть преобразование (7) произведением преобразования (6) на преобразование (5), то ввиду ассоциативности умножения матриц это умножение преобразований будет также ассоциативным. Легко видеть, что перемена знаков у всех коэффициентов одного из преобразований (5), (6) приводит лишь к такой же перемене знаков в преобразовании (7), т. е. что мы в самом деле имеем право говорить об умножении дробно-линейных преобразований комплексной плоскости.

Единицей этого умножения будет тождественное преобразование $z' = z$. Обратным для преобразования (5) является преобразование

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + a}.$$

Рассматриваемые нами дробно-линейные преобразования составляют, следовательно, группу. Эта группа, обозначаемая дальше через M, называется *модулярной группой* и играет существенную роль в теории автоморфных функций. Из всего сказанного выше без труда следует, что группа M изоморфна фактор-группе группы целочисленных матриц

второго порядка с равным единице определителем по ее нормальному делителю, состоящему из единичной матрицы и матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

эти две матрицы и только они соответствуют тождественному дробно-линейному преобразованию.

Обозначим через s преобразование

$$z' = -\frac{1}{z},$$

через t преобразование

$$z' = z + 1.$$

Тогда $s^2 = 1$, а t^n есть преобразование $z' = z + n$. Докажем, что *элементы s и t составляют систему образующих для группы M*. Если v есть произвольный элемент группы M и если (5) есть его запись, то положим сперва, что $d = 0$. Тогда $bc = -1$, а поэтому, используя наше право менять знаки у всех коэффициентов преобразования, мы получаем $b = -1$, $c = 1$, т. е. v есть преобразование

$$z' = \frac{az - 1}{z}.$$

Теперь легко проверить, что

$$v = t^a s.$$

Если же $d \neq 0$, то пусть сперва $|b| \geqslant |d| > 0$. Так как элементу $t^n v$ соответствует преобразование

$$z' = \frac{(a + nc)z + (b + nd)}{cz + d}$$

и так как можно, очевидно, подобрать такое n, что $|b + nd| < |d|$, то мы получаем возможность перейти к случаю, когда $0 \leqslant |b| < |d|$. Если же элемент v удовлетворяет этим новым условиям, то элемент sv уже имеет вид

$$z' = \frac{-cz - d}{az + b},$$

т. е. снова возвращает нас к первому случаю, но уже с меньшей абсолютной величиной свободного члена знаменателя. Применяя эти умножения элемента v слева на соответствующие степени элемента t и на элемент s несколько раз, мы придем к уже рассмотренному случаю $d = 0$. Это показывает, что сам элемент v имеет вид

$$v = s^{\alpha} t^{n_1} s t^{n_2} s \dots s t^{n_k} s^{\beta},$$

где α и β могут быть равными 0 или 1, т. е. элементы s и t являются образующими для группы M.

Если мы положим $u = ts$, то элементы s и u также составят систему образующих для M. Элементу u соответствует преобразование

$$z' = \frac{z-1}{z};$$

легко проверить, что $u^3 = 1$. Докажем теперь, что группа M является свободным произведением циклических подгрупп $\{s\}$ и $\{u\}$, $M = \{s\} * \{u\}$.

Всякий элемент из M, отличный от степеней элементов s и u, может быть записан ввиду соотношений $s^2 = u^3 = 1$ в виде произведения, в котором чередуются элемент s и элементы u или u^2. Если бы для некоторого элемента из M такая запись не была однозначной, то мы получили бы, что элементы s и u связаны соотношением вида

$$s^{\varepsilon} u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} s \dots s u^{\alpha_k} s^{\eta} = 1,$$

где ε и η равны 0 или 1, а каждое $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ равно 1 или 2. Левую часть этого соотношения путем трансформирования можно переделать, очевидно, так, что она будет начинаться элементом s и заканчиваться степенью элемента u. Можно ограничиться, следовательно, рассмотрением соотношений вида

$$s u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} \dots s u^{\alpha_k} = 1, \tag{8}$$

где все α, как и раньше, принимают значения 1 или 2. Докажем, однако, что левая часть соотношения (8) не может в действительности равняться единице. Доказательство ведется индукцией по k, причем одновременно мы будем доказывать, что матрица из коэффициентов дробно-линейного преобразования, соответствующего левой части равенства (8), имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где числа a, b, c и d имеют один и тот же знак; при этом предполагается, что нулю можно приписывать как знак плюс, так и минус. Действительно, элементу su соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

элементу su^2 — матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. для случая $k = 1$ утверждение доказано. Пусть оно уже доказано для k, и пусть элементу

$$s u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} \dots s u^{\alpha_k} \tag{10}$$

соответствует матрица (9). Если этот элемент умножается справа на элемент su, то мы получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ c+d & -d \end{pmatrix},$$

удовлетворяющую нашему условию; элемент $c+d$ отличен от нуля, так как числа c и d одного знака и хотя бы одно из них не равно нулю. К такому же результату мы придем и при умножении элемента (10) на su^2. Этим доказано следующее утверждение.

Модулярная группа разлагается в свободное произведение двух конечных циклических групп, одной второго и другой третьего порядка.

§ 34. Подгруппы свободного произведения

Следующая теорема о подгруппах свободного произведения, доказанная в работе Куроша [3] и передоказанная в работах Бэра и Леви [2] и Такахаси [1] [1]), является основной в теории свободных произведений.

Если

$$G = \prod_{\alpha}^{*} A_\alpha \tag{1}$$

и H произвольная подгруппа группы G, то существует свободное разложение подгруппы H,

$$H = F * \prod_{\beta}^{*} B_\beta,$$

где F — свободная группа, а всякое B_β сопряжено в G с некоторой подгруппой одного из множителей A_α.

Доказательство. Условимся всюду в этом параграфе считать длину данного элемента, его несократимую запись и т. д. взятыми относительно свободного разложения (1) группы G. Введем, далее, такие определения.

Если элемент g из G имеет четную длину, $l(g) = 2k$, т. е.

$$g = a_{-k} \dots a_{-1} a_1 \dots a_k,$$

то слово $a_{-k} \dots a_{-1}$ будет называться *левой половиной* элемента g, слово $a_1 \dots a_k$ — его *правой половиной*. Если же $l(g) = 2k+1$, т. е.

$$g = a_{-k} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_k,$$

то $a_{-k} \dots a_{-1}$ есть *левая половина* элемента g, $a_1 \dots a_k$ — его *правая половина*, a_0 — его *середина*. Если при этом левая и правая половины

[1]) Ко времени подготовки третьего издания опубликован ряд других доказательств. [См. Д.7.1.]

обратны друг другу, т. е. $a_{-i} = a_i^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то элемент g будет называться *трансформой*. Трансформа сопряжена со своей серединой и имеет поэтому такой же порядок. Порядок всякого элемента из G, не являющегося трансформой, бесконечен.

Определим теперь следующим образом подгруппы Φ_μ группы H (μ — порядковое число). Пусть $\Phi_0 = E$. Если подгруппы Φ_μ уже определены для всех μ, меньших, чем некоторое ν, и если K_ν есть подгруппа, порожденная всеми этими Φ_μ, то пусть l_ν есть наименьшая длина элементов из H, лежащих вне K_ν. Если среди этих элементов есть трансформы, то выбираем одну из них, $g_\nu^{-1} a g_\nu$, где $a \in A_{\alpha_\nu}$ и первый элемент несократимой записи элемента g_ν принадлежит не к A_{α_ν}, и обозначаем

$$\overline{A}_\nu = H \cap g_\nu^{-1} A_{\alpha_\nu} g_\nu.$$

В частности, при $l_\nu = 1$ выбранная нами трансформа будет просто элементом a из некоторого A_α и поэтому

$$\overline{A}_\nu = H \cap A_{\alpha_\nu}.$$

Если же среди элементов из H, лежащих вне K_ν, нет трансформ длины l_ν, в частности, при четном l_ν, то полагаем $\overline{A}_\nu = E$.

Мы выбираем, далее, в H, но вне подгруппы $\{K_\nu, \overline{A}_\nu\}$, элемент $f_{\nu 1}$, правая половина которого есть g_ν, а середина принадлежит к A_{α_ν}, если такие элементы существуют. Если же $\overline{A}_\nu = E$, то $f_{\nu 1}$ есть произвольный элемент длины l_ν, лежащий в H, но вне K_ν; его правую половину обозначаем через g_ν, а свободный множитель A_α, в котором лежит его середина (при нечетном l_ν), через A_{α_ν}. Если уже выбраны элементы $f_{\nu\delta}$ для всех порядковых чисел δ, $\delta < \sigma$, и если в H, но вне подгруппы, порожденной подгруппами K_ν, $\overline{A}_\nu$ и всеми элементами $f_{\nu\delta}$, $\delta < \sigma$, еще остаются элементы длины l_ν, имеющие g_ν своей правой половиной и некоторый элемент из A_{α_ν} своей серединой, то один из этих элементов обозначаем через $f_{\nu\sigma}$. Этот процесс остановится на некотором порядковом числе σ_ν. Мы обозначим теперь через Φ_ν подгруппу группы H, порожденную подгруппой $\overline{A}_\nu$ и всеми элементами $f_{\nu\delta}$, $\delta < \sigma_\nu$. Тогда, очевидно, будет $K_{\nu+1} = \{K_\nu, \Phi_\nu\}$, а при предельном порядковом числе λ подгруппа K_λ будет объединением возрастающей последовательности подгрупп K_ν, $\nu < \lambda$. Процесс построения подгрупп Φ_μ и K_ν остановится на таком порядковом числе τ, что $K_\tau = H$.

Условимся называть *образующими* подгруппы Φ_μ элементы $f_{\mu\delta}$, $\delta < \sigma_\mu$, элементы $f_{\mu\delta}^{-1}$, а также все элементы из $\overline{A}_\mu$, кроме 1. Образующими подгруппы K_ν будем считать образующие всех подгрупп Φ_μ, $\mu < \nu$. Лишь в этом специальном смысле мы будем говорить дальше об образующих подгрупп Φ_μ и K_ν.

Пусть U есть или некоторая подгруппа Φ_μ, или же некоторая подгруппа K_ν. Ее образующие будем обозначать через $u_1, u_2, \ldots$. Произведение $u_1 u_2 \ldots u_k$ будем называть *словом* в U, если никакие из двух соседних множителей u_i, u_{i+1} не являются обратными друг другу

и не принадлежат к одной и той же подгруппе $\overline{A}_\mu$. Говоря о *длине* слова, мы будем всегда иметь в виду длину его несократимой записи относительно свободного разложения (1) группы G. В частности, слово $u_1u_2\dots u_k$ будет называться *простым*, если его длина равна наибольшей из длин множителей u_i [1]). Простые слова в U будут обозначаться через u', u'', ... Условимся, наконец, говорить, что в произведении $u'u''$ двух простых слов u' и u'' между этими словами имеет место *соседство первого*, *второго или третьего рода* в зависимости от того, будет ли длина произведения $u'u''$ больше, равна или меньше наибольшей из длин слов u', u''.

Перейдем теперь к доказательству следующего утверждения:

Подгруппа Φ_μ есть свободное произведение подгруппы $\overline{A}_\mu$ и бесконечных циклических подгрупп, порожденных элементами $f_{\mu\sigma}$, $\sigma < \sigma_\mu$.

Это утверждение равносильно, очевидно, тому, что всякое непустое слово из Φ_μ (в определенном выше специальном смысле) отлично от единицы группы G, т. е. обладает непустой несократимой записью относительно разложения (1). Докажем сперва лемму:

Лемма 1. *Два любых элемента $f_{\mu\sigma_1}$ и $f_{\mu\sigma_2}$, $\sigma_1 < \sigma_2$, обладают различными левыми половинами.*

Это очевидно при четном l_μ, так как правые половины заданных элементов равны g_μ, т. е. совпадают. Если же l_μ нечетное, то при совпадении левых половин элементов $f_{\mu\sigma_1}$ и $f_{\mu\sigma_2}$ элемент $f_{\mu\sigma_1}^{-1}f_{\mu\sigma_2}$ принадлежал бы к подгруппе $\overline{A}_\mu$, т. е. элемент $f_{\mu\sigma_2}$ лежал бы в подгруппе, порожденной подгруппой $\overline{A}_\mu$ и элементом $f_{\mu\sigma_1}$, что противоречит выбору элементов $f_{\mu\sigma}$.

Условимся теперь обозначать образующие подгруппы Φ_μ через v_1, v_2, ..., простые слова через v', v'', ... К числу простых слов подгруппы Φ_μ принадлежат следующие:

1) Всякое слово, состоящее из одного множителя v_1.

2) Всякое слово вида v_1v_2, если правая половина элемента v_1 есть g_μ, левая половина элемента v_2 есть g_μ^{-1}. Действительно, если бы было $l(v_1v_2) < l_\mu$, то $v_1v_2 \in K_\mu$, т. е. каждый из элементов v_1, v_2 лежал бы в подгруппе, порожденной другим элементом и подгруппой K_μ, что, однако, для одного из этих двух элементов не может иметь места.

3) Всякое слово вида $v_1v_2v_3$, где $v_2 \in \overline{A}_\mu$, v_1 есть некоторый элемент $f_{\mu\sigma_1}$, v_3 — некоторый элемент $f_{\mu\sigma_2}^{-1}$, причем индексы σ_1 и σ_2 могут быть как различными, так и совпадающими.

Случаями 1)–3) исчерпываются все простые слова подгруппы Φ_μ, как показывает следующий результат:

[1]) То есть равна l_μ, если $U = \Phi_\mu$.

Если $v_1 v_2 \dots v_n$ *есть слово из* Φ_μ, *то его множители можно так объединить*,

$$v_1 v_2 \dots v_n = (v_1 \dots v_{i_1})(v_{i_1+1} \dots v_{i2}) \dots (v_{i_{k-1}+1} \dots v_n),$$

что всякое слово $v_{i_s+1} \dots v_{i_{s+1}}$ *есть простое слово одного из видов* 1)–3),

$$v_1 v_2 \dots v_n = v' v'' \dots v^{(k)},$$

причем между всякими двумя соседними простыми словами $v^{(s)}$, $v^{(s+1)}$ *имеет место соседство первого рода.*

Эта теорема верна при $n = 1$. Если она уже доказана для $n - 1$, то

$$v_1 v_2 \dots v_{n-1} = v' v'' \dots v^{(s)}.$$

Слово $v^{(s)}$ есть простое слово одного из видов 1)–3), а поэтому его правая половина совпадает с правой половиной элемента v_{n-1}. Если эта правая половина равна g_μ, а левая половина элемента v_n есть g_μ^{-1}, то произведение $v^{(s)} v_n$ будет простым словом вида 2) или 3). Во всех других случаях между $v^{(s)}$ и v_n будет ввиду леммы 1 и определения элементов $f_{\mu\sigma}$ соседство первого рода, т. е. элемент v_n можно взять в качестве нового простого слова.

Из этой теоремы следует, что всякое непустое слово из Φ_μ обладает непустой несократимой записью относительно разложения (1), т. е. следует высказанное выше утверждение о подгруппе Φ_μ.

Переходим к рассмотрению подгруппы K_ν и ставим себе целью доказательство следующего утверждения.

Подгруппа K_ν *есть свободное произведение всех подгрупп* $\overline{A}_\mu$, $\mu < \nu$, *отличных от* E, *и всех бесконечных циклических подгрупп, порожденных элементами* $f_{\mu\sigma}$, $\sigma < \sigma_\mu$, $\mu < \nu$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следующей теоремы (здесь $u_1, u_2, \dots$ означают образующие подгруппы K_ν, $u', u'', \dots$ ее простые слова).

(А) *Если дано произвольное слово* $u_1 u_2 \dots u_n$ *из* K_ν, *то его множители можно так объединить*:

$$u_1 u_2 \dots u_n = (u_1 \dots u_{i_1})(u_{i_1+1} \dots u_{i_2}) \dots (u_{i_{k-1}+1} \dots u_n),$$

что всякое слово $u_{i_s+1} \dots u_{i_{s+1}}$ *есть простое слово, т. е.*

$$u_1 u_2 \dots u_n = u' u'' \dots u^{(k)},$$

причем между всякими двумя соседними простыми словами $u^{(s)}$, $u^{(s+1)}$ *имеет место соседство первого рода.*

Действительно, из (А) легко следует, что *длина всякого слова из* K_ν, *не являющегося простым, больше длины каждого из его множителей*, т. е. всякое непустое слово из K_ν обладает непустой несократимой записью.

Теорема (А) будет доказываться индукцией по ν, причем для $K_1 = E$ она очевидна, а для $K_2 = \Phi_1$ доказана выше. Справедливость

этой теоремы для случая, когда ν есть предельное порядковое число, следует из замечания, что в этом случае всякое слово из K_ν будет словом уже в некоторой подгруппе K_μ при $\mu < \nu$. Нам остается поэтому, предполагая теорему (А) справедливой для подгруппы K_ν при некотором ν, доказать ее для $K_{\nu+1}$.

Лемма 2. *Если $u_1 u_2 \dots u_k$ является простым словом из K_ν, то всякий его отрезок $u_1 u_2 \dots u_s$, $s \leqslant k$ (и всякий отрезок $u_t \dots u_k$, $t \geqslant 1$) также будет простым словом.*

Если некоторые отрезки данного простого слова (например от начала) не являются простыми, то существует такое s, $s < k$, что слово $u_1 \dots u_s$ не простое, но $u_1 \dots u_s u_{s+1}$ уже простое. По (А) будет

$$u_1 \dots u_s = u' \dots u^{(r)}, \quad r > 1.$$

Длина слова $u_1 \dots u_s$ будет в этом случае больше длины каждого из множителей, т. е. больше длины каждого из простых слов u', ..., $u^{(r)}$. Если между простыми словами $u^{(r)}$ и u_{s+1} — соседство первого или второго рода, то длина слова $u_1 \dots u_s u_{s+1}$ также будет больше длины каждого из его множителей, что противоречит его простоте. Если же между $u^{(r)}$ и u_{s+1} — соседство третьего рода, то произведение $u^{(r)} u_{s+1}$, являющееся словом, будет иметь меньшую длину, чем один из его множителей, что противоречит теореме (А).

Лемма 3. *В несократимой записи простого слова $u_1 \dots u_k$ из K_ν левая половина элемента u_1 и правая половина элемента u_k сохраняются без всяких изменений, а середины этих элементов (в случае нечетных длин) могут замениться лишь другими отличными от единицы элементами из тех же свободных множителей.*

Действительно, так как слово $u_1 \dots u_{k-1}$, по лемме 2, простое, т. е. его длина равна максимальной длине его множителей, и так как слово $u_1 \dots u_k$ должно обладать этим же свойством, то между простыми словами $u_1 \dots u_{k-1}$ и u_k должно иметь место соседство второго рода. Отсюда следует, что сокращения не затронут правой половины элемента u_k, а его середина может испытать лишь объединение. Рассуждения для случая элемента u_1 проходят симметричным образом.

Лемма 4. *Всякое слово w из K_ν, имеющее своей несократимой записью трансформу, имеет вид*

$$w = u_n^{-1} \dots u_1^{-1} u_0 u_1 \dots u_n,$$

где u_0 является трансформой, т. е. принадлежит к одной из подгрупп $\overline{A}_\mu$, $\mu < \nu$.

Пусть $w = u_1 u_2 \dots u_k$. Если бы было $u_1 = u_k^{-1}$, то мы могли бы перейти к рассмотрению слова

$$u_1^{-1} w u_1 = u_2 \dots u_{k-1},$$

несократимая запись которого также является трансформой. Если бы элементы u_1 и u_k принадлежали к одной и той же подгруппе $\overline{A}_\mu$, $\mu < \nu$,

то мы могли бы рассматривать слово

$$u_1^{-1} w u_1 = u_2 \dots u_{k-1}(u_k u_1).$$

Мы полагаем поэтому, что элементы u_1 и u_k не являются обратными друг другу и не принадлежат к одной и той же подгруппе $\overline{A}_\mu$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что в этом случае $k = 1$.

Пусть $k > 1$. Если слово w не является простым, то, по (A), оно разложимо в произведение простых слов, между которыми имеет место соседство первого рода,

$$w = u' u'' \dots u^{(r)}, \quad r > 1.$$

Так как, однако, несократимая запись слова w является трансформой, т. е. его левая половина обратна правой, то в произведении $u^{(r)} u'$, являющемся словом, сокращения пойдут так далеко, что между множителями будет соседство третьего рода. Длина слова $u^{(r)} u'$ будет, следовательно, меньше длины одного из множителей, что, однако, противоречит теореме (A).

Пусть теперь слово w простое. Существует, следовательно, такой множитель u_i, что $l(w) = l(u_i)$, причем $l(u_i) \geqslant l(u_j)$ при всех $j \neq i$. Мы будем предполагать, что u_i не есть один из элементов $f_{\mu\sigma}^{-1}$, $\mu < \nu$, так как иначе мы могли бы рассматривать слово w^{-1}. Мы будем предполагать, далее, что $i = k$, так как при $i < k$ мы могли бы рассматривать слово

$$u_{i+1} \dots u_k w u_k^{-1} \dots u_{i+1}^{-1} = u_{i+1} \dots u_k u_1 \dots u_i,$$

несократимая запись которого снова является трансформой; вследствие проведенных выше рассмотрений это новое слово можно считать простым.

Если $u_k \in \Phi_\mu$, т. е. правая половина элемента u_k есть g_μ, а середина принадлежит к A_{α_μ}, то ввиду леммы 3 правая половина элемента w также равна g_μ, а середина также содержится в A_{α_μ}. Так как, однако, несократимая запись элемента w есть трансформа, то его левая половина равна g_μ^{-1}. Если подгруппа $\overline{A}_\mu \neq E$, то $w \in \overline{A}_\mu$. Так как

$$u_1 \dots u_k w^{-1} = 1$$

и так как в левой части при $u_k \notin \overline{A}_\mu$ стоит слово, а при $u_k \in \overline{A}_\mu$ слово получается после объединения множителей u_k и w^{-1}, то предположение $k \geq 1$ заведомо приводит нас в противоречие с теоремой (A). Если же $\overline{A}_\mu = E$, то слово w будет содержаться уже в некоторой подгруппе K_λ при $\lambda < \mu$, т. е. может быть записано через образующие этой подгруппы,

$$w = u_1' u_2' \dots u_m'.$$

Мы получаем в этом случае равенство

$$u_1 \dots u_k u_m'^{-1} \dots u_1'^{-1} = 1,$$

которое снова невозможно, так как в левой части равенства стоит слово из подгруппы K_ν.

Лемма 5. $K_\nu \cap \overline{A}_\nu = E$.

Действительно, из определения подгруппы $\overline{A}_\nu$ следует существование в $\overline{A}_\nu$ такого отличного от единицы элемента w, который не принадлежит к K_ν. Пусть, однако, существует отличный от 1 элемент w', принадлежащий как к $\overline{A}_\nu$, так и к K_ν. Из $w' \in K_\nu$ и леммы 4 следует

$$w' = u_n^{-1} \dots u_1^{-1} u_0 u_1 \dots u_n,$$

где $u_0 \in \overline{A}_\mu$, $\mu < \nu$. Несократимые записи элементов w и w' отличаются друг от друга лишь тем, что их середины являются различными элементами из одной и той же подгруппы A_α. Отсюда следует, что элемент $u_1 \dots u_n w u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$ должен принадлежать к подгруппе $\overline{A}_\mu$, но тогда $w \in K_\nu$, так как все элементы u_i, $i = 1, 2, \dots, n$, заведомо принадлежат к K_ν.

Мы переходим теперь к подготовке доказательства теоремы (А) для подгруппы $K_{\nu+1}$. Всюду дальше через $u_1, u_2, \dots$ будут обозначаться образующие подгруппы K_ν, через $u', u'', \dots$ — простые слова из этой подгруппы, а через $v_1, v_2, \dots$ и $v', v'', \dots$ — соответственно образующие и простые слова подгруппы Φ_ν. Заметим, что из построения подгрупп Φ_μ и из определения простого слова следует неравенство $l(u') \leqslant l(v')$ при любых u' и v', т. е. неравенство $l(u') \leqslant l_\nu$.

Лемма 6. *Если $l(u') < l(v')$, то между простыми словами u' и v' невозможно соседство третьего рода.*

Действительно, если, например, в произведении $u'v'$ между множителями имеет место соседство третьего рода и если $v' = v_1 \dots v_k$ [1]), то уже произведение $u'v_1$ будет иметь меньшую длину, чем l_ν, т. е. $u'v_1 \in K_\nu$, откуда $v_1 \in K_\nu$. Последнее невозможно, однако, ввиду леммы 5, если $v_1 \in \overline{A}_\nu$, или ввиду определения элементов $f_{\nu\sigma}$, если v_1 есть один из этих элементов или один из обратных к ним.

Лемма 7. *Если $\mu < \nu$ и если левая половина элемента h из подгруппы H совпадает с левой половиной одного из элементов $f_{\mu\sigma}$, а середина элемента h (при нечетном l_μ) принадлежит к A_{α_μ}, то h содержится в подгруппе $K_{\mu+1}$ и поэтому в подгруппе K_ν.*

Действительно, $l(h^{-1} f_{\mu\sigma}) \leqslant l_\mu$. Если на самом деле имеет место строгое неравенство, то $h^{-1} f_{\mu\sigma} \in K_\mu$ и поэтому $h \in K_{\mu+1}$. Если же $l(h^{-1} f_{\mu\sigma}) = l_\mu$, то правая половина элемента $h^{-1} f_{\mu\sigma}$ равна g_μ, а его середина содержится в A_{α_μ}. Все элементы такого рода принадлежат к $K_{\mu+1}$, поэтому $h^{-1} f_{\mu\sigma} \in K_{\mu+1}$, т. е. снова $h \in K_{\mu+1}$.

Лемма 8. *Если $l(u') = l(v')$, то между простыми словами u' и v' возможно лишь соседство первого рода.*

Пусть $u' = u_1 u_2 \dots u_s$, $v' = v_1 \dots v_k$ и пусть в произведении $u'v'$ между множителями имеет место соседство второго или третьего рода.

[1]) Ввиду доказанного выше о простых словах подгруппы Φ_ν $k \leqslant 3$.

Тогда между u' и v_1 также будет соседство второго или даже третьего рода. Если $l(u_j) = l(u') = l_\nu$, но, при $j < s$, $l(u_i) < l_\nu$ для $j < i \leqslant s$, то между словом $u_{j+1} \dots u_s$ и словом v_1 будет соседство второго рода, т. е. $l(u_{j+1} \dots u_s v_1) = l_\nu$. Действительно, соседство третьего рода исключено леммой 6, так как слово $u_{j+1} \dots u_s$ является, по лемме 2, простым и поэтому $l(u_{j+1} \dots u_s) < l\nu$; соседство же первого рода влекло бы за собой соседство первого рода между словами u' и v_1.

Правая половина простого слова $u_1 \dots u_j$ совпадает, по лемме 3, с правой половиной элемента u_j, а середина этого слова принадлежит к тому же свободному множителю A_α, что и середина элемента u_j. Так как между словами $u_1 \dots u_j$ и $u_{j+1} \dots u_s v_1$ должно иметь место соседство второго или третьего рода и так как их длины совпадают, то левая половина слова $u_{j+1} \dots u_s v_1$ будет обратной правой половине элемента u_j, а их середины принадлежат к одному и тому же свободному множителю. Отсюда следует, однако, по определению подгрупп Φ_μ, если u_j входит в $\overline{A}_\mu$ или равно некоторому элементу $f_{\mu\sigma}$, $\mu < \nu$, или по лемме 7, если u_j равно некоторому $f_{\mu\sigma}^{-1}$, что

$$u_{j+1} \dots u_s v_1 \in K_\nu,$$

откуда $v_1 \in K_\nu$, что невозможно.

Случай произведения $v'u'$ рассматривается аналогичным способом.

Лемма 9. *Если $l(u') < l_\nu$ и в произведениях $v'u'$ и $u'v''$ между множителями имеет место соседство второго рода, то между $v'u'$ и v'' возможно лишь соседство первого рода.*

Если $v' = v_{11} \dots v_{1s}$, $v'' = v_{21} \dots v_{2t}$ и если между $v'u'$ и v'' имеет место соседство второго или третьего рода, то между $v_{1s}u'$ и v_{21} (и между v_{1s} и $u'v_{21}$) также будет соседство второго или третьего рода. Это невозможно, однако, если правая половина элемента v_{1s} равна g_ν, а левая половина элемента v_{21} равна g_ν^{-1}, так как тогда сокращения не уничтожат целиком слова u'.

Пусть теперь левая половина элемента v_{21} равна g_ν^{-1}, но правая половина элемента v_{1s} отлична от g_ν; тогда левая половина элемента v_{1s} непременно равна g_ν^{-1}. Так как между $v_{1s}u'$ и v_{21} имеет место, по предположению, соседство второго или третьего рода, то правая половина элемента $v_{1s}u'$ будет равна g_ν, т. е. $v_{1s}u' \in \overline{A}_\nu$. Отсюда следует, однако, что $v_{1s} \in \{K_\nu, \overline{A}_\nu\}$, что противоречит определению элементов $f_{\nu\sigma}$.

Случай, когда правая половина элемента v_{1s} равна g_ν, но левая половина элемента v_{21} отлична от g_ν^{-1}, рассматривается аналогичным образом.

Пусть, наконец, правая половина элемента v_{1s} отлична от g_ν, а левая половина элемента v_{21} отлична от g_ν^{-1}. При наших предположениях о соседстве между $v_{1s}u'$ и v_{21} мы теперь получим, что произведение $v_{1s}u'v_{21}$ или является трансформой, входящей в $\overline{A}_\nu$, или же равно единице. В обоих случаях один из элементов v_{1s}, v_{21} будет лежать в подгруппе, порожденной подгруппами K_ν, $\overline{A}_\nu$ и другим элементом.

Так как, однако, элемент v_{1s} отличен как от v_{21}, так и от v_{21}^{-1} — сокращения в произведении $v_{1s}u'v_{21}$ должны уничтожить слово u' целиком, — то мы приходим в противоречие с определением элементов $f_{\nu\sigma}$. Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы (A) для подгруппы $K_{\nu+1}$ проходит теперь без затруднений. Мы докажем даже, что *всякое слово из* $K_{\nu+1}$ *является произведением простых слов одного из видов* 1) u', 2) v', 3) $u'v'$, 4) $v'u'$ *и* 5) $u'v'u''$, *между которыми имеет место соседство первого рода*.

Действительно, если дано некоторое слово w из $K_{\nu+1}$, то, объединяя стоящие в нем рядом элементы из K_ν и элементы из Φ_ν, мы представим это слово как произведение чередующихся слов из K_ν и из Φ_ν. Каждое из этих слов можно представить, по индуктивному предположению для случая слов из K_ν и по доказанному раньше для случая слов из Φ_ν, в виде произведения простых слов, между которыми имеет место соседство первого рода. Леммы 6, 8 и 9 показывают, когда стоящие рядом простые слова, одно из K_ν и одно из Φ_ν, дают, объединяясь, простое слово; в случае, рассмотренном в лемме 9, слово u' можно по произволу объединять или с v', или с v''. Мы получим, что слово w действительно записывается в виде произведения простых слов вида 1)–5), между которыми имеет место соседство первого рода.

Теорема (A) справедлива, следовательно, для всех подгрупп K_ν, а поэтому и для подгруппы H, равной K_τ. Иными словами подгруппа H является свободным произведением всех подгрупп $\overline{A}_\nu$, $\nu < \tau$, отличных от E, — эти подгруппы по их определению сопряжены с подгруппами свободных множителей A_α — и всех бесконечных циклических подгрупп $\{f_{\nu\sigma}\}$, $\sigma < \sigma_\nu$, $\nu < \tau$.

Доказательство теоремы о подгруппах свободного произведения закончено.

Заметим, что полученное нами свободное разложение для H обладает следующим свойством: если g есть произвольный элемент из G, A_α — произвольный свободный множитель исходного разложения группы G и если пересечение $D = H \cap g^{-1}A_\alpha g$ отлично от E, то *в нашем разложении для* H *найдется свободный множитель, сопряженный с* D *внутри* H. Действительно, если d есть отличный от 1 элемент из D, то $d = g^{-1}a_\alpha g$, $a_\alpha \in A_\alpha$. Применение леммы 4 настоящего параграфа показывает, что элемент d сопряжен внутри H с элементом одной из подгрупп $\overline{A}_\mu$, т. е.

$$d = g^{-1}a_\alpha g \in h^{-1}\overline{A}_\mu h, \quad \text{где} \quad h \in H.$$

Но из $\overline{A}_\mu \subseteq g_\mu^{-1}A_{\alpha_\mu}g_\mu$ следует, что

$$d \in (g_\mu h)^{-1}A_{\alpha_\mu}(g_\mu h),$$

откуда

$$a_\alpha \in (g_\mu h g^{-1})^{-1}A_{\alpha_\mu}(g_\mu h g^{-1}).$$

Отсюда следует, что $\alpha = \alpha_\mu$ и $g_\mu h g^{-1} = a'_{\alpha_\mu} \in A_{\alpha_\mu}$, т. е. $g = a'^{-1}_{\alpha_\mu} g_\mu h$. Теперь

$$D = H \cap g^{-1} A_\alpha g = H \cap (a'^{-1}_{\alpha_\mu} g_\mu h)^{-1} A_{\alpha_\mu} (a'^{-1}_{\alpha_\mu} g_\mu h) =$$
$$= h^{-1}(H \cap g_\mu^{-1} A_{\alpha_\mu} g_\mu) h = h^{-1} \overline{A}_\mu h,$$

что доказывает наше утверждение.

§ 35. Изоморфизм свободных разложений. Свободные произведения с объединенной подгруппой

Два свободных разложения группы G,

$$G = F_1 * \prod_\alpha{}^* A_\alpha = F_2 * \prod_\beta{}^* B_\beta,$$

будут называться *изоморфными*, если F_1 и F_2 являются изоморфными свободными группами, а между множителями A_α и B_β можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие множители сопряжены в группе G. Тогда, используя введенное в § 33 понятие продолжения свободного разложения группы, можно доказать следующую теорему (см. Курош [2], [3], Бэр и Леви [2]):

Два любых свободных разложения произвольной группы обладают изоморфными продолжениями.

Действительно, пусть

$$G = \prod_\alpha{}^* A_\alpha = \prod_\beta{}^* B_\beta. \tag{1}$$

Если

$$A_\alpha = F_\alpha * \prod_\gamma{}^* A_{\alpha\gamma} \tag{2}$$

есть свободное разложение подгруппы A_α, полученное применением указанной в предшествующем параграфе конструкции ко второму из разложений (1), и если

$$B_\beta = F'_\beta * \prod_\delta{}^* B_{\beta\delta} \tag{3}$$

есть такое же разложение для B_β относительно первого из разложений (1), то подгруппа

$$B_{\beta\delta} = B_\beta \cap g^{-1} A_\alpha g$$

сопряжена с пересечением $g B_\beta g^{-1} \cap A_\alpha$. Это пересечение сопряжено, однако, в соответствии с замечанием, сделанным в конце предыдущего параграфа, с одной из подгрупп $A_{\alpha\gamma}$. Для всякой подгруппы $B_{\beta\delta}$ найдется, следовательно, сопряженная с нею в G подгруппа $A_{\alpha\gamma}$.

Устраиваем теперь продолжения разложений (1), заменяя все A_α и B_β их разложениями (2) и (3):

$$G = \prod_\alpha^* F_\alpha * \prod_{\alpha,\gamma}^* A_{\alpha\gamma} = \prod_\beta^* F'_\beta * \prod_{\beta,\delta}^* B_{\beta\delta}. \tag{4}$$

Заметим, что две различные подгруппы $A_{\alpha\gamma}$ и $A_{\alpha'\gamma'}$ не могут быть сопряженными в G, так как они входят в качестве свободных множителей в одно свободное разложение группы G. Всякая подгруппа $B_{\beta\delta}$ сопряжена поэтому с одной и только одной подгруппой $A_{\alpha\gamma}$; с другой стороны, всякая подгруппа $A_{\alpha\gamma}$ сопряжена с одной из подгрупп $B_{\beta\delta}$. Между всеми подгруппами $A_{\alpha\gamma}$ и всеми подгруппами $B_{\beta\delta}$ можно установить, следовательно, такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие подгруппы сопряжены в G. Подгруппы $\prod\limits_{\alpha,\gamma}^* A_{\alpha\gamma}$ и $\prod\limits_{\beta,\delta}^* B_{\beta\delta}$ порождают теперь в группе G один и тот же нормальный делитель, а поэтому ввиду свойства IV из § 33 свободные группы $\prod\limits_\alpha^* F_\alpha$ и $\prod\limits_\beta^* F'_\beta$ изоморфны. Изоморфизм свободных разложений (4) доказан.

Будем называть в этой главе *неразложимой* такую группу, которая не может быть разложена в свободное произведение своих истинных подгрупп. Из доказанной сейчас теоремы непосредственно следует утверждение:

Если группа G обладает свободными разложениями с неразложимыми множителями, то всякие два таких разложения этой группы изоморфны, а ее произвольное свободное разложение можно продолжить до разложения с неразложимыми множителями.

Заметим, что в то время как теорема о существовании изоморфных продолжений была доказана для произвольных групп, последнее утверждение относится уже к некоторому специальному классу групп — *существуют группы, которые хотя и разложимы в свободное произведение, но не могут быть разложены в свободное произведение неразложимых групп* (см. Курош [8]).

В определении изоморфизма двух свободных разложений содержится, в частности, высказывание об изоморфизме некоторых двух свободных групп. Возникает вопрос об условиях, при которых две свободные группы изоморфны. Так как свободная группа вполне определяется заданием ее ранга, т. е. числа (мощности) ее свободных образующих, то вопрос сводится, очевидно, к тому, могут ли быть изоморфными две свободные группы различных рангов? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (Шрейер [4]):

Ранг свободной группы является ее инвариантом, т. е. не зависит от выбора системы свободных образующих.

Эта теорема показывает, что изоморфизм двух свободных групп влечет за собою совпадение их рангов: при изоморфном отображении одной из этих групп на другую образы данных свободных образующих первой группы составляют систему свободных образующих для второй группы.

Для доказательства теоремы возьмем фактор-группу свободной группы W по ее коммутанту K. Так как переход к фактор-группе по коммутанту равносилен предположению, что все образующие элементы перестановочны между собой, то фактор-группа W/K будет свободной абелевой группой, а смежные классы по K, содержащие элементы данной системы свободных образующих группы W, — базой этой свободной абелевой группы. Инвариантность ранга группы W следует теперь из доказанной в § 19 инвариантности ранга абелевой группы.

Теорема о подгруппах свободного произведения, примененная к случаю свободной группы, т. е. свободного произведения бесконечных циклических групп, приводит к следующей теореме.

Теорема Нильсена–Шрейера. *Всякая подгруппа свободной группы, отличная от E, сама является свободной группой.*

Действительно, всякая подгруппа, сопряженная внутри некоторой группы с подгруппой бесконечной циклической группы, сама будет бесконечной циклической группой.

Мы снова вернемся к этой теореме в следующем параграфе, а сейчас укажем еще одно приложение теоремы о подгруппах свободного произведения, а именно докажем следующую теорему (Бэр и Леви [2]):

Никакая группа не может быть одновременно разложимой в свободное и в прямое произведение.

Пусть, в самом деле,

$$G = A * B = C \times D,$$

где подгруппы A, B, C и D отличны от единичной подгруппы. Так как отличный от единицы элемент из свободного множителя группы не может быть перестановочным с элементом группы, лежащим вне этого свободного множителя, то из $A \cap C \neq E$ и из перестановочности элементов из C и D следовало бы $A \supset D$, а тогда и $A \supset C$, т. е. $A = G$, что невозможно. Поэтому $A \cap C = A \cap D = E$. Соответственно будет $B \cap C = B \cap D = E$. Так как C есть нормальный делитель группы G, то пересечение C с любой подгруппой, сопряженной с A или с B, также равно E. Применяя теперь к C теорему о подгруппах свободного произведения, мы получаем, что C есть свободная группа. Это же верно для D. Из $A \cap D = E$ следует, далее, что компонента (см. § 17) подгруппы A в множителе C из прямого разложения $G = C \times D$ изоморфна самой подгруппе A. Эта компонента будет, как подгруппа свободной группы, по теореме Нильсена–Шрейера сама свободной. Этим доказано, что A, а также и B, являются свободными группами, а тогда свободной группой будет и их свободное произведение G. Это приводит нас, однако, к противоречию, так как свободная группа не может

быть разложимой в прямое произведение: если бы такое разложение существовало, то в свободной группе можно было бы найти подгруппу, являющуюся прямым произведением двух бесконечных циклических групп, что противоречит теореме Нильсена–Шрейера.

Заметное место в теории свободных групп и свободных произведений занимает вопрос о группах автоморфизмов. Образующие и определяющие соотношения группы автоморфизмов свободной группы любого конечного ранга установлены Нильсеном [1, 2, 4] (см. также Б. Нейман [1]). Вопрос об условиях, при которых одна из двух данных систем элементов свободной группы переводится в другую при некотором автоморфизме этой группы, рассмотрен в работе Уайтхеда [2]. [См. Д.9.4.] Группы автоморфизмов свободных произведений конечного числа любых неразложимых групп рассматривались в одном частном случае Головиным и Садовским [1], а в общем случае найдены Фукс-Рабиновичем [6], [7]. Все полученные здесь результаты формулируются, однако, весьма громоздко, и мы ограничимся здесь рассмотрением одного частного случая.

Пусть группа G есть свободное произведение двух групп, $G = A * B$, причем множители A и B неразложимы, отличны от бесконечной циклической группы и неизоморфны между собой. Элементы групп G, A и B будут обозначаться соответственно буквами g, a, b. В группе автоморфизмов Γ группы G можно указать следующие подгруппы: подгруппу Φ_A, состоящую из тех автоморфизмов группы G, которые получаются, когда в множителе A выполняется некоторый автоморфизм, а множитель B отображается на себя тождественно; подгруппу Φ_B, определяемую аналогичным образом; подгруппу Ψ_A, состоящую из внутренних автоморфизмов группы G, порождаемых трансформированием элементами из A; подгруппу Ψ_B, состоящую из внутренних автоморфизмов, порождаемых элементами из B.

Очевидно, что подгруппы Φ_A и Φ_B изоморфны соответственно группам автоморфизмов групп A и B. Элементы этих подгрупп будут обозначаться буквами $\alpha \in \Phi_A$ и $\beta \in \Phi_B$. С другой стороны, благодаря отсутствию центра в группе G подгруппы Ψ_A и Ψ_B изоморфны соответственно множителям A и B. Элемент подгруппы Ψ_A (подгруппы Ψ_B), получающийся трансформированием группы G элементом a из A (элементом b из B), будет обозначаться через $\psi(a)$ [через $\psi(b)$].

Мы докажем теперь теорему:

Подгруппы Φ_A, Φ_B, Ψ_A и Ψ_B порождают всю группу автоморфизмов Γ.

Пусть, в самом деле, θ есть произвольный элемент из Γ. Автоморфизм θ переводит свободное разложение $G = A * B$ в некоторое свободное разложение $G = A' * B'$, причем, ввиду доказанной выше теоремы об изоморфизме свободных разложений с неразложимыми множителями и сделанных о группе G предположений, подгруппы A'

и B' сопряжены соответственно с подгруппами A и B:

$$A' = x^{-1}Ax, \quad B' = y^{-1}By, \quad x, y \in G.$$

Автоморфизм χ, получающийся последовательным выполнением автоморфизма θ и трансформирования $\psi^{-1}(x)$ группы G элементом x^{-1}, отображает подгруппу A на себя, а подгруппу B переводит в некоторую подгруппу $z^{-1}Bz$, причем элемент z можно считать словом, начинающимся элементом из A. Если бы длина элемента z была больше 1, то элементы из B нельзя было бы получить перемножением элементов из A и $z^{-1}Bz$, тогда как на самом деле $G = A * (z^{-1}Bz)$. Поэтому $z \in A$. Отсюда следует, что автоморфизм $\chi \cdot \psi^{-1}(z)$ осуществляет лишь автоморфизмы внутри подгрупп A и B, т. е. принадлежит к $\{\Phi_A, \Phi_B\}$, а тогда

$$\theta = [\chi\psi^{-1}(z)]\psi(z)\psi(x) \in \{\Phi_A, \Phi_B, \Psi_A, \Psi_B\},$$

так как

$$\psi(z) \in \Psi_A, \quad \psi(x) \in \{\Psi_A, \Psi_B\}.$$

Укажем теперь систему определяющих соотношений, связывающих найденную нами систему образующих группы Γ. Легко проверить, что при любых $a \in A$, $b \in B$, $\alpha \in \Phi_A$, $\beta \in \Phi_B$ справедливы соотношения:

1) $\alpha\beta = \beta\alpha$,

2) $\psi(a) \cdot \beta = \beta \cdot \psi(a), \quad \psi(b) \cdot \alpha = \alpha \cdot \psi(b)$,

3) $\psi(a) \cdot \alpha = \alpha \cdot \psi(a^\alpha), \quad \psi(b) \cdot \beta = \beta \cdot \psi(b^\beta)$,

где a^α есть образ элемента a при автоморфизме α, b^β — образ элемента b при автоморфизме β. Докажем, что *все соотношения вида* 1)–3) *составляют для* Γ *систему определяющих соотношений*.

Действительно, всякое соотношение между нашими образующими может быть при помощи соотношений 1)–3) приведено к виду

$$\alpha\beta\psi(x) = 1,$$

где $\psi(x)$ есть трансформирование группы G элементом x. Отсюда следует $\alpha\beta = 1$ и $\psi(x) = 1$, так как автоморфизм $\alpha\beta$ не меняет длин элементов группы G, тогда как внутренний автоморфизм $\psi(x)$, если он отличен от тождественного, длины некоторых элементов меняет. Так как, далее, автоморфизм α действует только на элементы из A, β — только на элементы из B, то из $\alpha\beta = 1$ следует $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Наконец, группа внутренних автоморфизмов группы G есть свободное произведение подгрупп Ψ_A и Ψ_B, поэтому равенство $\psi(x) = 1$ означает, что элемент $\psi(x)$ есть пустое слово этого свободного произведения. Этим доказано, что всякое соотношение в группе Γ есть следствие соотношений 1)–3).

Свободные произведения с объединенной подгруппой. В некоторых случаях оказывается полезной более общая конструкция, чем свободное произведение. Пусть даны группы A_α, где α пробегает

некоторое множество индексов, и пусть в каждой из групп A_α выбрана истинная подгруппа B_α так, что все эти подгруппы изоморфны одной и той же группе B. Через φ_α обозначим определенное изоморфное отображение B_α на B; $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ будет поэтому изоморфным отображением B_α на B_β.

Свободным произведением групп A_α с объединенной подгруппой B называется фактор-группа G свободного произведения групп A_α по нормальному делителю, порожденному всеми элементами вида $b_\alpha b_\beta^{-1}$, где $b_\beta = b_\alpha\psi_{\alpha\beta}$, b_α пробегает всю подгруппу B_α, а α и β — всевозможные пары индексов. Иными словами, если всякая группа A_α задана системой образующих $\mathfrak{M}_\alpha$ и системой определяющих соотношений Φ_α в этих образующих, то группа G имеет системой образующих объединение всех множеств $\mathfrak{M}_\alpha$, а системой определяющих соотношений объединение множеств Φ_α с присоединением всех соотношений, получающихся приравниванием друг другу таких элементов из различных подгрупп B_α и B_β, которые отображаются при изоморфизмах φ_α и φ_β в один и тот же элемент группы B. Происходит, следовательно, «склеивание» подгрупп B_α в соответствии с изоморфизмами $\psi_{\alpha\beta}$.

Данное нами определение не дает возможности непосредственно выяснить строение группы G — можно опасаться, что наложение дополнительных определяющих соотношений вызывает склеивания между группами A_α, не предусмотренные изоморфизмами $\psi_{\alpha\beta}$, или заменяет какую-либо из групп A_α ее фактор-группой и т. д. Проведем поэтому некоторые дополнительные рассмотрения.

В каждой из групп A_α во всех правосторонних смежных классах по подгруппе B_α выбираем по представителю, предполагая лишь, что представителем в самой подгруппе B_α взята единица. Представитель класса, в котором лежит данный элемент a_α, обозначим через $\overline{a}_\alpha$, т. е.

$$a_\alpha = b_\alpha\overline{a}_\alpha, \quad b_\alpha \in B_\alpha. \tag{5}$$

Назовем *словом* выражение

$$b\overline{a}_1\overline{a}_2 \dots \overline{a}_n, \tag{6}$$

где $n \geqslant 0$, b — любой элемент группы B, быть может и единица, всякое $\overline{a}_i$ — отличный от единицы представитель одного из правосторонних смежных классов одной из групп A_α по подгруппе B_α и, наконец, соседние представители $\overline{a}_i$, $\overline{a}_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ лежат в разных группах A_α.

Всякий элемент группы G — свободного произведения групп A_α с объединенной подгруппой B — может быть записан в виде (6), *притом единственным способом.*

Существование такой записи доказывается очень легко. Пусть $a_1a_2 \dots a_n$ — элемент свободного произведения групп A_α, взятый в несократимой записи, $a_i \in A_{\alpha_i}$. Если $n = 1$, то требуемая запись

указана в (5). Предположим поэтому уже доказанным, что

$$a_2a_3\dots a_n = b\overline{a}'_2\overline{a}'_3\dots\overline{a}'_s,$$

где справа стоит слово. Пусть

$$b\varphi_{\alpha_1}^{-1} = b_1, \quad a_1b_1 = a'_1, \quad a'_1 = b'_1\overline{a}'_1, \quad b'_1\varphi_{\alpha_1} = b'.$$

Если $\overline{a}'_1 = 1$, то

$$a_1a_2\dots a_n = b'\overline{a}'_2\dots\overline{a}'_s,$$

где справа стоит слово. Если же $\overline{a}'_1 \neq 1$, то в том случае, когда $\overline{a}'_1$ и $\overline{a}'_2$ лежат в разных группах A_α, искомой записью будет

$$a_1a_2\dots a_n = b'\overline{a}'_1\overline{a}'_2\dots\overline{a}'_s.$$

Если, наконец, $\overline{a}'_1$ и $\overline{a}'_2$ лежат в одной и той же группе A_α, то пусть

$$\overline{a}'_1\overline{a}'_2 = b_\alpha\overline{a}''_1, \quad b_\alpha\varphi_\alpha = b'';$$

тогда при $\overline{a}''_1 \neq 1$ будет

$$a_1a_2\dots a_n = (b'b'')\overline{a}''_1\overline{a}'_3\dots\overline{a}'_s,$$

а при $\overline{a}''_1 = 1$

$$a_1a_2\dots a_n = (b'b'')\overline{a}'_3\dots\overline{a}'_s.$$

Заметим, что описанный выше процесс, если он на самом деле будет применен к произведению $a_1a_2\dots a_n$, начиная с его конца, приведет к вполне определенному слову вида (6). Назовем этот процесс *редукцией* произведения $a_1a_2\dots a_n$.

Для доказательства единственности рассматриваемой записи воспользуемся методом, уже примененным в § 33. Обозначим через M множество всех слов вида (6), а через S_M — группу всех взаимно однозначных отображений множества M на себя. Если a — элемент из группы A_α, то поставим ему в соответствие следующее отображение $\widehat{a}$ множества M в себя. Пусть (6) — любое слово. Умножим его, как элемент свободного произведения группы A_α, справа на элемент a, перейдем к несократимой записи, а затем применим редукцию. Полученное новое слово считаем поставленным в соответствие слову (6) при отображении $\widehat{a}$.

Если элемент a — единица группы A_α, то ему соответствует тождественное отображение множества M на себя. Легкая, хотя и связанная с рассмотрением разных частных случаев, проверка показывает, что отображение, соответствующее произведению двух элементов a и a' группы A_α, совпадает с результатом последовательного выполнения отображений $\widehat{a}$ и $\widehat{a}'$. В частности, элементу a^{-1} будет соответствовать отображение, обратное отображению $\widehat{a}$, а поэтому $\widehat{a}$ взаимно однозначно и является отображением на в с е M.

Заметим, что при $a \neq 1$, $a = b\overline{a}$, слово 1 переводится в слово $b\overline{a}$, отличное от 1, т. е. отображение $\widehat{a}$ не будет тождественным. Мы получаем, следовательно, изоморфное отображение группы A_α

на подгруппу $\widehat{A}_\alpha$ группы S_M. Пусть $\widehat{G}$ будет подгруппа группы S_M, порожденная всеми $\widehat{A}_\alpha$. В группе $\widehat{G}$ выполняются, очевидно, все соотношения, которые были определяющими для группы G, и вместе с тем запись элементов из $\widehat{G}$ в виде (6) однозначна. Действительно, если $b_\alpha \psi_{\alpha\beta} = b_\beta$, то отображения $\widehat{b}_\alpha$ и $\widehat{b}_\beta$ будут, очевидно, совпадать и это придает однозначный смысл символу $\widehat{b}$. Отображение

$$\widehat{b}\widehat{\overline{a}}_1\widehat{a}_2 \dots \widehat{\overline{a}}_n \tag{7}$$

переводит, однако, слово 1 как раз в слово (6), т. е. разные произведения (7) являются различными элементами группы $\widehat{G}$. Отсюда вытекает однозначность записи элементов группы G в виде слов.

Теперь уже без труда устанавливается ряд свойств свободного произведения G групп A_α с объединенной подгруппой B.

Группы A_α лежат в группе G в качестве подгрупп, порождают вместе эту группу и попарно пересекаются лишь по объединенной подгруппе B.

Действительно, слово, стоящее в правой части равенства (5), отлично от слова 1 при $a_\alpha \neq 1$. Если же $a_\alpha \notin B_\alpha$, то при любом элементе a_β из A_β, $\beta \neq \alpha$, редукция произведения $a_\beta^{-1} a_\alpha$ приводит к слову, оканчивающемуся на $\overline{a}_\alpha$, т. е. отличному от 1.

Всякий элемент группы G, имеющий конечный порядок, сопряжен в группе G с элементом одной из подгрупп A_α.

Пусть, в самом деле, элемент g из G конечного порядка k,

$$g^k = 1,$$

записан в виде (6). Если $n \leqslant 1$, то доказывать нечего. Если же $n > 1$ и если элементы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_n$ из этой записи принадлежат к одной подгруппе A_α, то после трансформирования элементом $\overline{a}_n^{-1}$ и последующей редукции мы перейдем к слову меньшей длины. Будем считать поэтому, что $n > 1$, но элементы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_n$ лежат в разных подгруппах A_α, и покажем, что этот случай вообще невозможен. Действительно, запишем k раз подряд слово (6) и объединим каждый раз соседние множители b и a_1. Мы получим благодаря сделанным нами предположениям несократимую запись произведения нескольких элементов из групп A_α, причем эти элементы лежат вне соответствующих подгрупп B_α. При выполнении редукции никогда, следовательно, не встретится представитель, равный единице — произведение элемента из A_α, лежащего вне B_α, слева на элемент из B_α лежит, понятно, вне B_α, — а поэтому редукция не может привести к слову 1.

Если C_α — пересечение подгруппы B_α с центром группы A_α, то центром группы G будет пересечение всех подгрупп $C_\alpha \varphi_\alpha$ группы B.

Ясно, что пересечение всех подгрупп $C_\alpha\varphi_\alpha$ лежит в центре группы G. Пусть, с другой стороны, элемент

$$g = b\overline{a}_1\overline{a}_2\dots\overline{a}_n$$

лежит в центре группы G. Если $n \geqslant 1$ и $\overline{a}_n \in A_\alpha$, то возьмем в любой группе A_β, $\beta \neq \alpha$, любой элемент a', лежащий вне B_β. Тогда редукции произведений ga' и $a'g$ заведомо приводят к разным словам. Если же $n = 0$, т. е. $g = b$, но b лежит вне одной из подгрупп C_α, то мы снова придем к противоречию, беря в качестве a' такой элемент из группы A_α, который не перестановочен с элементом $b\varphi_\alpha^{-1}$.

Вопрос о подгруппах свободных произведений с объединенной подгруппой потребовал изучения еще более общей конструкции: вместо склеивания всех групп A_α по одной и той же подгруппе B предполагается, что каждая пара групп A_α, A_β склеивается по некоторой подгруппе $B_{\alpha\beta}$, причем выбор этих подгрупп $B_{\alpha\beta}$ в группах A_α должным образом согласован. Эта конструкция изучается в работах Х. Нейман [1], [2], [3]. Интересна эта конструкция также и потому, что ее частным случаем является объединение возрастающей последовательности групп, введенное в § 7. [См. § Д.8.]

§ 36. Подгруппы свободных групп

Теорема Нильсена–Шрейера, выведенная в предшествующем параграфе из теоремы о подгруппах свободного произведения, была доказана Нильсеном [3] для случая свободных групп конечного ранга и распространена Шрейером [4] на произвольные свободные группы. Метод Шрейера был существенно упрощен Гуревичем [1]. Другое доказательство теоремы Нильсена–Шрейера дал Леви [2]. Существует также несколько топологических доказательств — Рейдемейстер [3], Лохер [1]. Новое доказательство опубликовали также Федерер и Йонсон [1] [1]).

Мы приведем здесь ввиду важности этой теоремы еще одно ее доказательство, не связанное с общей теорией свободных произведений, а именно доказательство Гуревича.

Пусть дана свободная группа G с системой свободных образующих a_α, где α пробегает некоторое множество, и пусть U есть подгруппа из G. В каждом правостороннем смежном классе Ug выбираем по представителю $\overline{g}$, причем в самой подгруппе U представителем берется единица, т. е. $\overline{1} = 1$. Выбор представителей мы подчиняем следующему условию: если элемент, записываемый словом $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\dots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, является представителем своего класса, то и *всякий его отрезок* $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\dots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, $k \leqslant n$, *должен быть представителем своего класса*.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания опубликованы и другие доказательства. [См. Д.9.1.]

Докажем, что такой выбор представителей возможен. Пусть l есть минимальная длина слов, входящих в класс Ug, и пусть для классов с меньшей минимальной длиной слов требуемый выбор представителей уже осуществлен; действительно, при $l = 0$, т. е. для U, это имеет место. Берем в классе Ug один из элементов минимальной длины; пусть это будет

$$g = a_{\beta_1}^{\eta_1} a_{\beta_2}^{\eta_2} \dots a_{\beta_l}^{\eta_l}, \quad \eta_i = \pm 1.$$

Элемент $g' = a_{\beta_1}^{\eta_1} a_{\beta_2}^{\eta_2} \dots a_{\beta_{l-1}}^{\eta_{l-1}}$ определяет смежный класс Ug', в котором представитель с нужными свойствами уже выбран. Если этот представитель есть $\overline{g}' = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, то $g' = \overline{u}g'$, $u \in U$, откуда

$$g = u\overline{g}' a_{\beta_l}^{\eta_l}.$$

Элемент $\overline{g}' a_{\beta_l}^{\eta_l}$, лежащий в классе Ug, может быть выбран теперь в качестве $\overline{g}$. Его запись

$$\overline{g} = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} a_{\beta_l}^{\eta_l}$$

является словом, так как l есть минимальная длина элементов в классе Ug (отсюда $k = l - 1$), причем всякий отрезок этого слова (от начала) является представителем в своем классе.

Пусть $\overline{g}$ есть произвольный из выбранных нами представителей, a_α — произвольный из образующих элементов. Рассмотрим произведение $\overline{g}a_\alpha(\overline{ga}_\alpha)^{-1}$. Оно не зависит, очевидно, от выбора элемента g в смежном классе, имеющем $\overline{g}$ своим представителем, причем если $\overline{g} = u_1 g$, $\overline{ga}_\alpha = u_2 g a_\alpha$, где $u_1, u_2 \in U$, то

$$\overline{g}a_\alpha(\overline{ga}_\alpha)^{-1} = u_1 u_2^{-1} \in U.$$

Условимся обозначать это произведение, если оно отлично от единицы, через $u_{\overline{g},\alpha}$,

$$u_{\overline{g},\alpha} = \overline{g}a_\alpha(\overline{ga}_\alpha)^{-1}, \quad \text{если} \quad \overline{g}a_\alpha(\overline{ga}_\alpha)^{-1} \neq 1,$$

и докажем, что *множество всех $u_{\overline{g},\alpha}$ есть система образующих для подгруппы U*.

Если $u = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \in U$, то пусть $g_k = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, $k \leqslant n$. Очевидно, что $g_0 = 1$, $g_n = u$. Тогда

$$u = \prod_{k=1}^{n} \overline{g}_{k-1} a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} (\overline{g}_k)^{-1},$$

так как $\overline{g}_0 = \overline{g}_n = 1$. Однако если $\varepsilon_k = +1$, то

$$\overline{g}_{k-1} a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} (\overline{g}_k)^{-1} = \overline{g}_{k-1} a_{\alpha_k} (\overline{g_{k-1} a_{\alpha_k}})^{-1},$$

что равно $u_{\overline{g}_{k-1},\alpha_k}$ или единице; если же $\varepsilon_k=-1$, то из $g_k=g_{k-1}a_{\alpha_k}^{-1}$ следует $g_{k-1}=g_ka_{\alpha_k}$, а поэтому

$$\overline{g}_{k-1}a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}(\overline{g}_k)^{-1}=\overline{g_ka_{\alpha_k}}a_{\alpha_k}^{-1}(\overline{g}_k)^{-1},$$

что равно $u_{\overline{g}_k,\alpha_k}^{-1}$ или единице.

Если для элемента u будет взята другая запись через образующие a_α — эта новая запись может быть получена из первоначальной конечным числом элементарных преобразований, заключающихся в вычеркивании или включении двух стоящих рядом обратных друг другу символов a_α и a_α^{-1}, — и если к этой новой записи будет применен только что осуществленный способ представления элемента u через образующие $u_{\overline{g},\alpha}$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что это новое представление получается из первоначального аналогичными вычеркиваниями или включениями стоящих рядом обратных друг другу символов $u_{\overline{g},\alpha}$ и $u_{\overline{g},\alpha'}^{-1}$. Иными словами, если U^* есть свободная группа со свободными образующими $u_{\overline{g},\alpha}$ [1]), то описанный в предшествующем абзаце способ записи элемента u через элементы $u_{\overline{g},\alpha}$ ставит в соответствие всякому элементу u из подгруппы U вполне определенный элемент u^* из группы U^*. Так как — если символ $\equiv$ будет употребляться для записи равенства элементов в группе U^*, — для любых двух элементов u_1 и u_2 из U имеет место равенство [2])

$$(u_1u_2)^*\equiv u_1^*u_2^*,$$

то соответствие $u\to u^*$ оказывается гомоморфным отображением подгруппы U в группу U^*. Докажем, что это есть *изоморфное отображение на всю группу* U^*.

Для доказательства найдем элемент $u_{\overline{g},\alpha}^*$. Если

$$\overline{g}=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\dots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n},\quad \overline{ga}_\alpha=a_{\beta_1}^{\eta_1}\dots a_{\beta_m}^{\eta_m},$$

то

$$\begin{aligned}u_{\overline{g},\alpha}=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\dots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\dots a_{\beta_1}^{-\eta_1}=\\ =\prod_{i=1}^{n}(\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\dots a_{\alpha_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}}a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\dots a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}}^{-1})\cdot(\overline{g}a_\alpha\overline{\overline{g}a}_\alpha^{-1})\times\\ \times\prod_{j=0}^{m-1}(\overline{\overline{g}a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\dots a_{\beta_{m-j+1}}^{-\eta_{m-j+1}}}a_{\beta_{m-j}}^{-\eta_{m-j}}\overline{\overline{g}a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\dots a_{\beta_{m-j}}^{-\eta_{m-j}}}^{-1}).\end{aligned}$$

[1]) Точнее говоря, это есть свободная группа, свободные образующие которой поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами $u_{\overline{g},\alpha}$.

[2]) Для доказательства достаточно применить способ построения элемента u^* к произведению u_1u_2, не выполняя в этом произведении никаких сокращений.

Если мы воспользуемся теперь (впервые во всем доказательстве!) тем обстоятельством, что всякий отрезок представителя сам является представителем в своем классе, а также заметим, что при $0 \leqslant j \leqslant m-1$

$$\overline{\overline{g}a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m} \dots a_{\beta_{m-j}}^{-\eta_{m-j}}} = \overline{u_{\overline{g},\alpha} a_{\beta_1}^{\eta_1} \dots a_{\beta_{m-j-1}}^{\eta_{m-j-1}}} = a_{\beta_1}^{\eta_1} \dots a_{\beta_{m-j-1}}^{\eta_{m-j-1}},$$

то без труда обнаружим, что в полученном нами произведении пропадают все множители, кроме одного, равного самому $u_{\overline{g},\alpha}$. Этим доказано, что

$$u_{\overline{g},\alpha}^* \equiv u_{\overline{g},\alpha}.$$

Всякий из образующих элементов группы U^*, а поэтому вообще все элементы этой группы будут, следовательно, образами элементов из U. Мы получаем, вместе с тем, что подгруппа U *является свободной, а множество элементов* $u_{\overline{g},\alpha}$ *ее системой свободных образующих*. Этим заканчивается доказательство теоремы Нильсена–Шрейера.

Изложенный сейчас метод построения системы свободных образующих для подгруппы свободной группы может быть использован для установления некоторых новых свойств свободных групп.

I. *Коммутант свободной группы конечного ранга* n, $n > 1$, *является свободной группой счетного ранга*.

Пусть, в самом деле, свободная группа G имеет элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ системой своих свободных образующих и пусть K есть коммутант этой группы. Каждый смежный класс по K содержит один и только один элемент вида $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$, где показатели α_i — некоторые целые числа, причем при выборе этих элементов в качестве представителей требования, предъявлявшиеся к представителям в проведенном выше доказательстве, будут удовлетворены. Легко видеть, однако, что элемент $\overline{g}a_i\overline{ga}_i^{-1}$, где

$$\overline{g} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_{s+1} = 0, \quad \alpha_s \neq 0, \quad s \leqslant n,$$

тогда и только тогда будет равным единице, если $s \leqslant i$. Отсюда следует бесконечность ранга подгруппы K.

II. (Шрейер [4]). *Если в свободной группе* G *конечного ранга* n *дана подгруппа* U *конечного индекса* j, *то ранг* k *этой подгруппы также конечен и удовлетворяет равенству*

$$k = 1 + j(n-1).$$

Пусть в G дана система свободных образующих $a_1, a_2, \dots, a_n$ и пусть в правосторонних смежных классах по U выбраны представители $\overline{g}$, причем всякий отрезок представителя также является представителем в своем классе. Общее число произведений вида $\overline{g}a_i\overline{ga}_i^{-1}$ равно, очевидно, jn; уже отсюда следует, что k конечно. Подсчитаем теперь, сколько среди этих произведений равных единице.

Пусть P_i есть число представителей $\overline{g}$ длины l, имеющих своим последним множителем один из элементов a_l, P_l' — число представителей той же длины, оканчивающихся одним из элементов a_i^{-1};

при этом полагаем, что $P_0 = 1$, $P_0' = 0$. Если теперь $\overline{g}a_i\overline{ga_i}^{-1} = 1$, т. е. $\overline{g}a_i = \overline{ga}_i$, и если $\overline{g}$ имеет длину l, то длина элемента ga_i равна $l-1$ или $l+1$. В первом случае $\overline{g}$ оканчивается на a_i^{-1}. Таких случаев при данном l и любых i будет P_l', так как, обратно, если $\overline{g}$ оканчивается на a_i^{-1}, то $\overline{ga}_i$ будет отрезком от $\overline{g}$ и поэтому $\overline{g}a_i\overline{ga}_i^{-1} = 1$. Если же имеет место второй случай, то $\overline{ga}_i$ есть представитель длины $l+1$ с положительным последним показателем. Обратно, если некоторый представитель длины $l+1$ оканчивается на a_i, то он имеет вид $\overline{g}a_i$, где $\overline{g}$ есть его отрезок длины l, а тогда $\overline{g}a_i\overline{ga}_i^{-1} = 1$. Таких случаев будет, следовательно, P_{l+1}. Общее число равных единице произведений равно, таким образом, сумме

$$\sum_{l\geqslant 0}(P_l' + P_{l+1}),$$

т. е. равно $j-1$, так как j получается из этой суммы прибавлением P_0, равного 1. Теперь

$$k = jn - (j-1) = 1 + j(n-1).$$

Теорема доказана.

III. (М. Холл [4]). *Пусть в свободной группе G дана убывающая последовательность подгрупп*

$$G = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots,$$

обладающая следующим свойством: *для всякого k, $k \geqslant 0$, и всякого выбора системы свободных образующих в группе A_k любой элемент из подгруппы A_{k+1}, отличный от* 1, *имеет в этих образующих длину, бóльшую или равную трем. Тогда пересечение данной последовательности подгрупп равно E.*

Пусть в группе G задана система свободных образующих. Применяя метод, указанный в приведенном выше доказательстве теоремы Нильсена–Шрейера, выбираем систему свободных образующих в подгруппе A_1. Исходя из этой системы свободных образующих группы A_1, тем же методом выбираем свободные образующие в A_2 и т. д.

Пусть x — произвольный элемент из подгруппы A_k, $k \geqslant 1$. Если n — его длина в выбранных образующих группы A_{k-1}, то его длина в выбранных же образующих подгруппы A_k будет не больше n (см. то место доказательства теоремы Нильсена–Шрейера, где элемент u из подгруппы U записывался через элементы $u_{\overline{g},\alpha}$). В нашем случае, однако, длина будет даже строго меньше n: если

$$x = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

— несократимая запись элемента x в выбранных образующих группы A_{k-1} и если бы было $\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}} \neq a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$, то

$$a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} = y\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}}, \quad y \in A_k,$$

откуда следовало бы, что элемент

$$y = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}}^{-1}$$

подгруппы A_k отличен от 1. Его длина в выбранных образующих группы A_{k-1} равна, однако, двум — представитель $\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}}$ смежного класса $A_k a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$ имеет минимальную длину в этом классе, т. е. длину 1. Мы пришли к противоречию с условием теоремы. Таким образом, при переходе от A_{k-1} к A_k длина элемента из A_k строго уменьшается, а поэтому никакой элемент, отличный от 1, не может лежать во всех подгруппах A_k. [См. Д.9.1.]

Из последней теоремы вытекает следующее утверждение: если ω — первое бесконечное порядковое число, то ω-й *коммутант свободной группы* (см. § 14) *равен* E. Действительно, если x_α — свободные образующие свободной группы G, y — элемент коммутанта группы G, $y \neq 1$, то в несократимой записи элемента y через образующие x_α сумма показателей у всякого x_α равна нулю. Отсюда следует, что длина элемента y в образующих x_α не меньше четырех.

Следствие, сейчас доказанное, можно было бы вывести также из следующей теоремы.

Теорема Магнуса. *Если G — произвольная свободная группа, то ω-й член ее нижней центральной цепи равен E.*

Эта теорема доказана в работе Магнуса [6] и передоказана Виттом [1], Фукс-Рабиновичем [5], М. Холлом [4]. Она содержится также в много более общих результатах Мальцева [7], относящихся к вопросу об условиях, при которых ω-й член нижней центральной цепи свободного произведения некоторых групп будет равным E. Мы докажем теорему Магнуса, используя метод Мальцева.

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо. Полагая для любых a и b из R

$$a \circ b = a + b - ab,$$

мы получаем в R новую операцию, называемую *присоединенным умножением*. Эта операция ассоциативна:

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = \\ = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Роль единицы в присоединенном умножении играет, очевидно, нуль кольца R,

$$a \circ 0 = 0 \circ a = a.$$

Назовем элемент a из кольца R *радикальным*, если для него существует присоединенный обратный элемент a', т. е. элемент, удовлетворяющий равенствам

$$a \circ a' = a' \circ a = 0.$$

Ясно, что

$$(a')' = a.$$

Присоединенное произведение радикальных элементов радикально, так как

$$(a \circ b)' = b' \circ a'.$$

Мы получаем, что радикальные элементы кольца R составляют по присоединенному умножению группу, называемую *присоединенной группой* кольца R.

Пусть теперь задана некоторая мощность $\mathfrak{m}$, конечная или бесконечная. Возьмем множество символов e_α, где индексы α пробегают множество мощности $\mathfrak{m}$, и назовем *словом длины* n, $n \geqslant 1$, всякое выражение вида

$$e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_n},$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, т. е. соседние «множители» непременно различны. Построим следующим образом кольцо R. Его элементами будут формальные суммы конечного числа слов с некоторыми целыми коэффициентами, отличными от нуля; считаем, что запись элемента из R в виде такой суммы однозначна с точностью до порядка слагаемых. К числу элементов кольца R присоединим также пустую сумму слов, не содержащую ни одного слова с отличным от нуля коэффициентом.

Сложение двух сумм слов определим через сложение коэффициентов при одинаковых словах и последующее выбрасывание тех слов, коэффициенты при которых оказались равными нулю. Ясно, что это сложение коммутативно, ассоциативно и обладает вычитанием; в частности, нулем будет пустая сумма слов.

Определим произведение слов. Если даны слова

$$v_1 = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_n}, \quad v_2 = e_{\beta_1} e_{\beta_2} \dots e_{\beta_s},$$

то при $a_n \neq \beta_1$ выражение

$$e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_n} e_{\beta_1} e_{\beta_2} \dots e_{\beta_s}$$

будет словом, которое и считается произведением $v_1 v_2$. Если же $\alpha_n = \beta_1$, то полагаем $v_1 v_2 = 0$; в частности, квадрат всякого слова e_α равен нулю. Заметим, что если $v_1 v_2 \neq 0$, то длина слова $v_1 v_2$ равна сумме длин слов v_1 и v_2.

Умножение двух сумм слов определим следующим образом: каждый член первой суммы умножается на каждый член второй суммы, причем коэффициенты перемножаются, а произведение слов берется в указанном выше смысле, после чего приводятся подобные члены и выбрасываются те члены, коэффициенты которых оказались равными нулю. Это умножение не будет, конечно, коммутативным. Оно, однако, ассоциативно, так как ассоциативно умножение слов, и дистрибутивно относительно сложения.

Мы построили, следовательно, кольцо R. Обозначим через G присоединенную группу этого кольца. В G содержится каждый из элементов e_α; действительно,

$$e'_\alpha = -e_\alpha. \tag{1}$$

Докажем, что *подгруппа F, порожденная в группе G всеми элементами e_α, является свободной, а множество e_α — ее системой свободных образующих*.

Действительно, $e_\alpha \circ e_\alpha = 2e_\alpha$ и вообще при любом целом k, как положительном, так ввиду (1) и отрицательном, присоединенная k-я степень элемента e_α равна ke_α. Элемент e_α порождает, следовательно, в группе G бесконечную циклическую подгруппу. Если же мы рассмотрим произведение

$$k_1 e_{\alpha_1} \circ k_2 e_{\alpha_2} \circ \ldots \circ k_n e_{\alpha_n}, \tag{2}$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, а все k_i отличны от нуля, то, развертывая это присоединенное произведение, мы получим, в частности, член

$$(k_1 k_2 \ldots k_n) e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_n}.$$

Это будет единственный член длины n с отличным от нуля коэффициентом, он ни с чем не может сократиться, а поэтому произведение (2) не равно нулю, т. е. не равно единице группы G, что и требовалось доказать.

Если в R взят элемент, отличный от нуля, то его члены минимальной длины назовем *младшими членами*, а их длину — *высотой* нашего элемента. Условимся, далее, считать высоту нулевого элемента бесконечной, т. е. большей, чем высота любого другого элемента из R. Легко проверяется, что *высота произведения больше или равна сумме высот сомножителей*. С другой стороны, *высота суммы больше или равна меньшей из высот слагаемых*, а поэтому *высота отличного от нуля присоединенного произведения элементов из R больше или равна меньшей из высот сомножителей*.

Если теперь a — элемент из G, то *высоты элементов a и a' совпадают*. Действительно,

$$a + a' - aa' = 0,$$

но высота произведения aa' строго больше высоты каждого из сомножителей, а поэтому младшие члены слагаемых a и a' должны взаимно уничтожать друг друга.

Если элементы a и b лежат в группе G и отличны от нуля, то *высота их коммутатора строго больше высоты каждого из них*. В самом деле, развертывая выражение коммутатора и учитывая определение присоединенного обратного элемента, мы получим:

$$a' \circ b' \circ a \circ b = -a'b' - ab - a'b - b'a + a'ab + b'ab + a'b'a + a'b'b - a'b'ab.$$

Высота всякого члена суммы, стоящей справа, строго больше высоты каждого из элементов a, b, а тогда это верно и для всей суммы.

Рассмотрим теперь нижнюю центральную цепь группы F,

$$F = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots, \tag{3}$$

и докажем, что *высота всякого элемента из F_n больше или равна $n+1$*. Это верно для $F = F_0$. Пусть уже доказано для F_n. Коммутируя элемент a из F_n с любым элементом из F, мы получим элемент, высота которого строго больше высоты элемента a, т. е. больше или равна числу $n+2$. Это же верно тогда и для присоединенного произведения таких коммутаторов, т. е. для любого элемента из подгруппы F_{n+1}.

Отсюда следует, что пересечение подгрупп (3), т. е. ω-й член нижней центральной цепи свободной группы F ранга $\mathfrak{m}$, равен единице. Так как мощность $\mathfrak{m}$ была произвольной, то этим теорема Магнуса доказана.

Отметим без доказательства теорему из работы Витта [1] о том, что *все факторы F_n/F_{n+1}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, нижней центральной цепи* (3) *свободной группы F являются свободными абелевыми группами*.

Одну теорему такого же типа, как доказанные выше теоремы М. Холла и Магнуса, можно найти в работе Леви [3]. Все эти теоремы представляют собой частные вклады в общий и не слишком определенный вопрос об обозрении всех подгрупп свободной группы или, употребляя терминологию, которая будет введена лишь в гл. 11, об описании структуры подгрупп свободной группы. Во всяком случае, свободная группа весьма насыщена подгруппами и даже нормальными делителями. Это можно усмотреть из разных соображений, в частности из следующей теоремы.

Если G — свободная группа, а g — ее элемент, отличный от 1, то в G существует нормальный делитель конечного индекса, не содержащий элемента g.

Эта теорема содержится в много более общей теореме 7 работы Мальцева [2]. Позже она была вновь независимо доказана Ивасавой [2]. Эта теорема допускает также следующее простое доказательство.

Пусть x_α (α пробегает некоторое множество индексов) — система свободных образующих группы G. Те из этих образующих, которые входят в несократимую запись элемента g, обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Несократимая запись элемента g имеет, следовательно, вид

$$g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, \tag{4}$$

где $1 \leqslant i_k \leqslant s$, $\varepsilon_k = \pm 1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Возьмем симметрическую группу $(n+1)$-й степени S_{n+1}, переставляющую символы $1, 2, \ldots, n+1$, и следующим образом выберем в ней подстановки

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_s. \tag{5}$$

Пусть $k = 1, 2, \ldots, n$. Если $\varepsilon_k = +1$, то требуем, чтобы подстановка x'_{i_k} (ввиду $1 \leqslant i_k \leqslant s$ это будет одна из подстановок (5)) переводила символ k в символ $k+1$. Если же $\varepsilon_k = -1$, то считаем, что эта же

подстановка x'_{i_k} переводит символ $k+1$ в символ k. Этим, понятно, ни одна из подстановок $(n+1)$-й степени (5) не будет полностью определена, так как каждая из подстановок (5) переводит пока лишь часть символов $1, 2, \ldots, n+1$ в часть этих же символов. Это отображение, однако, взаимно однозначно, так как ввиду несократимости записи (4) ни одна из подстановок (5) не будет переводить какой-либо символ k в два разных символа, $k-1$ и $k+1$, или же переводить два разных символа, $k-1$ и $k+1$, в один и тот же символ k. Отображения (5) можно, следовательно, доопределить, т. е. на самом деле считать подстановками из группы S_{n+1}.

Мы получим гомоморфное отображение группы G в конечную группу S_{n+1}, если отобразим элементы $x_1, x_2, \ldots, x_s$ соответственно в элементы $x'_1, x'_2, \ldots, x'_s$, а все остальные свободные образующие x_α — в единицу группы S_{n+1}. Ядро этого гомоморфизма будет в G нормальным делителем конечного индекса. Элемент g лежит вне этого нормального делителя, так как отображается в подстановку

$$g' = x'^{\varepsilon_1}_{i_1} x'^{\varepsilon_2}_{i_2} \ldots x'^{\varepsilon_n}_{i_n},$$

переводящую ввиду определения подстановок (5) символ 1 в символ $n+1$, т. е. отличную от тождественной подстановки. Теорема доказана.

В работе М. Холла [2] содержится одно частичное обобщение этой теоремы. [См. Д.9.2.]

§ 37. Вполне характеристические подгруппы свободных групп. Тождественные соотношения

Вполне характеристические подгруппы свободных групп представляют особый интерес. Это вызвано, в первую очередь, их связью с так называемыми тождественными соотношениями в группах.

Мы знаем, что во всякой абелевой группе равенство

$$x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = 1 \quad \text{или} \quad [x_1, x_2] = 1 \tag{1}$$

выполняется при подстановке вместо «неизвестных» x_1 и x_2 любых элементов группы. Аналогично во всякой метабелевой группе (см. § 14) имеет место равенство

$$[[x_1, x_2], x_3] = 1, \tag{2}$$

снова при любых x_1, x_2, x_3 из группы. Наконец, в конечной группе порядка n порядок всякого элемента делит n, а поэтому «тождественно» выполняется равенство

$$x_1^n = 1. \tag{3}$$

Пусть вообще дана группа G. Рассмотрим вспомогательную свободную группу W со счетным множеством свободных образующих

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Если w — элемент группы W, т. е. слово в образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то равенство

$$w = 1 \tag{4}$$

называется *тождественным соотношением* в группе G, если оно выполняется при подстановке вместо x, входящих в слово w, л ю б ы х элементов из G.

Группа G может обладать, вообще говоря, многими тождественными соотношениями. Так, если в G тождественно выполняется соотношение (3), то выполняются и соотношения $x_1^{2n} = 1$, $x_2^n = 1$, $(x_1x_2x_3)^n = 1$ и т. д. *Левые части всех тождественных соотношений группы G составляют в группе W вполне характеристическую подгруппу V_G.*

В самом деле, если в G выполняются тождественные соотношения

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1,$$

то, очевидно, выполняются и соотношения

$$w_1w_2 = 1 \quad \text{и} \quad w_1^{-1} = 1,$$

т. е. левые части тождественных соотношений действительно составляют подгруппу свободной группы W. Рассмотрим теперь произвольный эндоморфизм φ группы W. Он переводит каждый образующий элемент x_i в элемент $x_i\varphi$, являющийся словом в образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Если (4) — произвольное тождественное соотношение группы G и

$$w = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_n}^{\alpha_n},$$

то

$$w\varphi = (x_{i_1}\varphi)^{\alpha_1}(x_{i_2}\varphi)^{\alpha_2} \ldots (x_{i_n}\varphi)^{\alpha_n}.$$

Справа стоит некоторое слово в образующих $x_1, x_2, \ldots$. Подстановка в него любых элементов из G вместо этих образующих равносильна подстановке этих элементов в слова $x_{i_k}\varphi$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и подстановке полученных значений в слово w. Последняя подстановка превращает слово w в единицу, а поэтому

$$w\varphi = 1$$

также будет тождественным соотношением в группе G, т. е. $w\varphi \in V_G$.

Так, тождественное соотношение (1) соответствует коммутанту группы W, соотношение (2) — второму члену W_2 нижней центральной цепи группы W. Наконец, вполне характеристическая подгруппа группы W, соответствующая тождественному соотношению (3), является подгруппой, порожденной n-ми степенями всех элементов из W. Будем называть в дальнейшем эту подгруппу *n-й степенью* группы W и обозначать через W^n. Определение этой вполне характеристической подгруппы переносится на случай любой группы, как уже отмечалось в § 14.

Для того чтобы задать все тождественные соотношения группы G, нет необходимости, очевидно, выписывать все элементы соответствующей подгруппы V_G, достаточно выбрать в этой подгруппе элементы, которые порождают ее как вполне характеристическую подгруппу группы W. Этот выбор элементов не будет, понятно, однозначным.

Можно ли для всякой вполне характеристической подгруппы H свободной группы W счетного ранга указать такую группу G, что $H = V_G$? Положительный ответ на этот вопрос вытекает из следующих рассмотрений.

Пусть дана группа G. Представим ее как фактор-группу некоторой свободной группы F с системой свободных образующих $M = (a_\alpha)$ по нормальному делителю N,

$$G \simeq F/N,$$

и найдем тождественные соотношения группы G. Пусть H будет произведение всех вполне характеристических подгрупп группы F, содержащихся в N; H само вполне характеристично в F. Если

$$h = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

— произвольный элемент из H, то равенство

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1, \tag{5}$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — натуральные числа, причем $i_k = i_l$ тогда и только тогда, если $\alpha_k = \alpha_l$, будет тождественным соотношением в группе G. Действительно, для того чтобы подставить в равенство (5) любые элементы из G, т. е. любые смежные классы по N, нужно в его левую часть подставить представители этих смежных классов, т. е. некоторые слова в образующих a_α. Это равносильно, однако, применению к элементу h эндоморфизма группы F, что не выводит за пределы подгруппы H и, следовательно, подгруппы N. Равенство (5) удовлетворяется, таким образом, любыми элементами группы G, т. е. *является тождественным соотношением этой группы.*

Обратно, если

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1 \tag{6}$$

есть любое тождественное соотношение группы G, то после подстановки в его левую часть произвольных элементов из F мы получим элемент, лежащий в нормальном делителе N. На самом деле он лежит даже в H. Действительно, все элементы из N, которые мы этим путем получим, всевозможными способами выбирая подставляемые в (6) элементы из F, порождают в N подгруппу. Легко видеть, что она будет вполне характеристической в F и поэтому содержится в H. В частности, мы получим некоторый элемент h из H, подставляя в (6) вместо неизвестных какие-либо элементы из M, а поэтому *тождественное соотношение* (6) *принадлежит к числу тех тождественных соотношений группы G, которые описаны в предшествующем абзаце.*

Отсюда вытекает, что группы $G \simeq F/N$ и F/H обладают одинаковыми тождественными соотношениями. Заметим, что ввиду $H \subseteq N$ первая из этих групп изоморфна фактор-группе второй.

Фактор-группы свободных групп произвольного ранга по их вполне характеристическим подгруппам называются *приведенными свободными группами*. Мы доказали, следовательно, такую теорему.

Всякая группа G изоморфна фактор-группе некоторой приведенной свободной группы, обладающей теми же тождественными соотношениями, что и группа G.

Так, приведенной свободной группой будет фактор-группа свободной группы по ее коммутанту, т. е. свободная абелева группа. Для случая абелевых групп, т. е. групп с тождественным соотношением (1), мы пришли, следовательно, к результату, по существу равносильному теореме из § 19 о том, что всякая абелева группа изоморфна фактор-группе некоторой свободной абелевой группы.

Мы видим теперь, что *всякая вполне характеристическая подгруппа H свободной группы W счетного ранга будет играть роль группы V_G для некоторой группы G* — фактор-группа W/H будет иметь левыми частями своих тождественных соотношений как раз элементы из H.

Таким образом, если бы мы захотели классифицировать группы по их тождественным соотношениям, продолжая уже сделанное нами выделение классов абелевых и метабелевых групп, мы должны были бы описать все вполне характеристические подгруппы свободной группы W счетного ранга. С другой стороны, описание всех приведенных свободных групп связано с обозрением вполне характеристических подгрупп произвольных свободных групп. Докажем несколько теорем, относящихся к этим подгруппам.

Всякая вполне характеристическая подгруппа H свободной группы F, не содержащаяся целиком в коммутанте F', является произведением своего пересечения K с этим коммутантом, $K = H \cap F'$, и некоторой степени F_n группы F, $n \geqslant 1$ (Леви [3], Б. Нейман [4]).

Пусть (a_α) — система свободных образующих группы F. Учитывая, что фактор-группа F/F' является свободной абелевой группой в свободных образующих $a_\alpha F'$, можно утверждать, что элемент h из H, как и всякий элемент из F, может быть записан в виде

$$h = a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\alpha_2}^{k_2} \dots a_{\alpha_s}^{k_s} f', \tag{7}$$

где $f' \in F'$, $s \geqslant 0$, все индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ различны, а все показатели $k_1, k_2, \dots, k_s$ отличны от нуля. Если при этом $h \notin F'$, то $s > 0$. Эндоморфизм группы F, оставляющий a_{α_i} на месте и переводящий все остальные образующие a_α в 1, переводит элемент h в элемент $a_{\alpha_i}^{k_i}$, так как элемент f', имеющий по каждому из образующих сумму показателей 0, переходит при этом эндоморфизме в 1. Поэтому ввиду

полной характеристичности подгруппы H

$$a_{\alpha_i}^{k_i} \in H, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{8}$$

а тогда и $f' \in H$, т. е.

$$f' \in (H \cap F') = K.$$

Пусть n будет наименьший положительный показатель, с которым какой-либо из образующих элементов a_α входит в H; существование такого n вытекает из сказанного выше ввиду условия $H \not\subset F'$. Так как, однако, существует эндоморфизм группы F, переводящий элемент a_α в любой наперед заданный элемент этой группы, то снова ввиду полной характеристичности H n-я степень любого элемента из F лежит в H, т. е. $H \supseteq F^n$. Всякий из показателей $k_1, \ldots, k_s$ в (7) должен теперь ввиду (8) нацело делиться на n, а поэтому

$$a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\alpha_2}^{k_2} \ldots a_{\alpha_s}^{k_s} \in F^n.$$

Этим доказано равенство

$$H = F^n K, \tag{9}$$

т. е. закончено доказательство теоремы.

Число n, введенное в этом доказательстве, обозначим через $n(H)$, а при $H \subset F'$ положим $n(H) = \infty$, и докажем теорему:

Если F — свободная группа, H — ее истинная вполне характеристическая подгруппа, то фактор-группа приведенной свободной группы F/H по ее коммутанту является прямым произведением циклических групп порядка $n(H)$; число этих циклических прямых множителей равно рангу группы F.

Действительно, коммутантом группы F/H служит группа HF'/H. Однако при $H \not\subset F'$ ввиду (9) и включения $K \subseteq F'$ имеет место равенство

$$HF' = F^n F',$$

а поэтому фактор-группа группы F/H по ее коммутанту изоморфна фактор-группе $F/F^n F'$. Если же $H \subset F'$, то фактор-группа группы F/H по ее коммутанту изоморфна просто F/F'. В обоих случаях эта фактор-группа абелева и является, очевидно, прямым произведением циклических групп порядка n, число которых равно рангу группы F. Заметим, что ввиду неравенства $H \neq F$ число $n = n(H)$ больше единицы.

Теперь мы можем доказать следующую теорему Бэра [32], полностью сводящую вопрос об описании приведенных свободных групп на обозрение всех вполне характеристичесих подгрупп во всех свободных группах.

Всякая приведенная свободная группа G, отличная от E, обладает единственным представлением в виде фактор-группы свободной группы по ее вполне характеристической подгруппе.

Пусть, в самом деле, группа G допускает два таких представления, т. е.

$$G \simeq F/H \simeq \overline{F}/\overline{H},$$

где F и $\overline{F}$ — свободные группы, а H и $\overline{H}$ — соответственно их вполне характеристические подгруппы. В силу предыдущей теоремы факторгруппа группы G по ее коммутанту G' является прямым произведением циклических групп одного и того же порядка n. Любые два таких прямых разложения группы G/G' будут изоморфными, как вытекает из результатов § 24 при конечном n и результатов § 19 при $n = \infty$. Поэтому, снова ввиду предшествующей теоремы, свободные группы F и $\overline{F}$ имеют один и тот же ранг, т. е. изоморфны.

Можно считать, следовательно, что в свободной группе F с системой свободных образующих (a_α) даны две вполне характеристические группы H и K, фактор-группы по которым изоморфны,

$$F/H \simeq F/K. \tag{10}$$

Если

$$h = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

есть любой элемент из H, то, как показано в начале параграфа, равенство

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1$$

(где $i_k = i_l$ тогда и только тогда, если $\alpha_k = \alpha_l$) будет тождественным соотношением в группе F/H. Ввиду изоморфизма (10) оно будет тождественным соотношением и в группе F/K, а поэтому подстановка в его левую часть любых элементов из F приводит к элементу из K. Подставляя, в частности, вместо каждого из «неизвестных» x_{i_k} элемент a_{α_k}, мы получим элемент h, который, следовательно, лежит в подгруппе K. Таким образом, $H \subseteq K$. Аналогично $K \subseteq H$, а поэтому $H = K$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, как связан вопрос об обозрении всех вполне характеристических подгрупп свободной группы F *произвольного ранга* с соответствующим вопросом для случая свободной группы W *счетного ранга*. Если H — вполне характеристическая подгруппа группы F, то ей соответствует в W вполне характеристическая подгруппа $V_{F/H}$, составленная из левых частей тождественных соотношений группы F/H. Если K — другая вполне характеристическая подгруппа группы F, то подгруппа $V_{F/K}$ отлична от подгруппы $V_{F/H}$: если бы группы F/H и F/K обладали одинаковыми тождественными соотношениями, то, повторяя конец доказательства предыдущей теоремы, мы получили бы, что $H = K$. Если, далее, $H \subset K$, то и $V_{F/H} \subset V_{F/K}$, так как всякое тождественное соотношение группы F/H будет выполняться и в ее гомоморфном образе F/K. Обратно, если $V_{F/H} \subset V_{F/K}$, то, беря любой элемент h из H и строя, как описывалось в начале этого параграфа, соответствующее тождественное

соотношение группы F/H, а поэтому и группы F/K, мы получим, что $h \in K$, т. е. $H \subset K$. Этим доказана следующая теорема (Бэр [32]).

Существует взаимно однозначное отображение множества L_F всех вполне характеристических подгрупп свободной группы F произвольного ранга в множество L_W всех вполне характеристических подгрупп свободной группы W счетного ранга, в обе стороны сохраняющее включение.

Если ранг группы F бесконечен, то это будет отображение множества L_F на все множество L_W.

Действительно, пусть $M = (x_\alpha)$ — система свободных образующих группы F. Ввиду бесконечности множества M в нем можно выбрать счетное подмножество $M' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Будем считать, что группа W совпадает с подгруппой группы F, порожденной множеством M'.

Пусть V — произвольная вполне характеристическая подгруппа группы W, а H — порожденная множеством V вполне характеристическая подгруппа группы F. Мы не выйдем за пределы H, если возьмем любой элемент из V и произвольным образом заменим входящие в его запись элементы из M' на любые элементы из M. Читатель без труда проверит, однако, что все элементы из H, которые таким путем будут получены, сами составляют в F вполне характеристическую подгруппу и, следовательно, исчерпывают все элементы из H.

Таким образом,

$$H \cap W = V,$$

а поэтому подгруппа $V_{F/H}$ группы W, соответствующая в указанном выше смысле подгруппе H, в действительности совпадает с V.

Если же ранг r группы F конечен, то определенное выше отображение множества L_F в множество L_W уже *не будет отображением на все L_W*. Это ясно при $r = 1$, так как в группе W существует, например, бесконечная цепь коммутантов, чего нет в бесконечной циклической группе, но может быть показано и для других r.

Ряд других свойств приведенных свободных групп и вполне характеристических подгрупп свободных групп можно найти в работах Леви [3], Б. Неймана [4], Бэра [32] и Мальцева [9]. Заметим, что полное обозрение всех вполне характеристических подгрупп нециклических свободных групп, т. е. описание структуры этих подгрупп в смысле гл. 11, еще не получено. [См. § Д.10.]

§ 37а. Локально свободные группы

Начнем теперь рассмотрение одного класса групп, являющегося естественным обобщением класса свободных групп, но уже достаточно широкого. Изучение этого класса групп пока далеко от завершения; основная часть излагаемых ниже результатов содержится в работе Куроша [10]; см. также работы Фукс-Рабиновича [2] и Мальцева [4].

Группа G называется *локально свободной*, если всякая ее подгруппа, порожденная конечным числом элементов, является свободной. К локально свободным группам принадлежат, ввиду теоремы Нильсена–Шрейера, все свободные группы. Определению локально свободной группы удовлетворяют также аддитивная группа рациональных чисел и все ее подгруппы; действительно, в этих группах всякое конечное подмножество порождает бесконечную циклическую подгруппу.

Всякая подгруппа локально свободной группы будет сама локально свободной; в частности, всякий отличный от единицы элемент локально свободной группы имеет бесконечный порядок. Объединение возрастающей последовательности локально свободных групп само локально свободно. Для случая счетных групп имеет место следующее обращение этого последнего результата.

Всякая счетная локально свободная группа является объединением возрастающей последовательности свободных групп конечного ранга.

Для доказательства достаточно пронумеровать элементы данной группы и взять подгруппы, порожденные первым элементом, первыми двумя и т. д. Заметим, что для несчетного случая пока остается открытым вопрос, всякая ли несчетная локально свободная группа является объединением некоторой возрастающей последовательности свободных групп.

Свободное произведение любого множества локально свободных групп само локально свободно.

Действительно, пусть $G = \prod_{\alpha}^{*} H_\alpha$, и пусть в группе G дано конечное подмножество M. Всякий элемент из M записывается в виде конечного слова относительно элементов из групп H_α. Собираем в каждой из подгрупп H_α элементы, входящие в эти слова; их будет конечное число, т. е. они порождают в H_α свободную подгруппу H'_α. Подгруппа группы G, порожденная всеми подгруппами H'_α, будет свободным произведением этих подгрупп, т. е. является свободной группой. Свободной будет, следовательно, и ее подгруппа $\{M\}$.

Следует заметить, что локально свободная группа не может быть простой (см. Фукс-Рабинович [2]), хотя, в отличие от свободных групп, локально свободная группа может совпадать со своим коммутантом.

Локально свободная группа G называется *группой конечного ранга*, а именно *ранга* n, если n есть наименьшее число с тем свойством, что всякое конечное подмножество из G содержится в свободной подгруппе с n свободными образующими (если только такие числа вообще существуют). Для свободной группы это определение совпадает с определением ранга, данным в § 18. С другой стороны, если локально свободная группа ранга n счетна, но не свободна, то она является объединением возрастающей последовательности свободных групп

ранга n [1]). Наконец, группы ранга 1 являются, очевидно, абелевыми, т. е. совпадают с абелевыми группами без кручения, имеющими ранг 1; всякая локально свободная группа, ранг которой больше 1, будет уже некоммутативной.

Пока нет ответа на вопрос, следует ли из конечности ранга локально свободной группы ее счетность. Этот вопрос непосредственно связан с отмеченным выше вопросом о возможности получения всякой локально свободной группы объединением возрастающей последовательности свободных групп. Действительно, имеет место следующая теорема.

Объединение возрастающей последовательности несчетных свободных групп не может быть группой конечного ранга.

Доказательство. Пусть несчетная локально свободная группа G имеет ранг n и является вместе с тем объединением возрастающей последовательности свободных групп

$$W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_k \subset \ldots.$$

В группе G можно найти такое конечное подмножество M, которое не содержится в подгруппе с меньшим, чем n, числом образующих. С другой стороны, подмножество, полученное присоединением к M любого элемента a из G, должно содержаться в некоторой свободной подгруппе с n образующими, причем эта подгруппа будет, в свою очередь, содержаться во всех группах W_k, начиная с некоторого номера k. Из несчетности группы G и счетности множества групп W_k, $k = 1, 2, \ldots$, следует теперь существование такого k и такого несчетного подмножества P из G, что всякое множество, получающееся присоединением к M любого элемента из P, уже в группе W_k содержится в свободной подгруппе с n образующими. Всякий элемент из M записывается через конечное число свободных образующих группы W_k, и поэтому M содержится в счетном свободном множителе A этой группы. В множестве P благодаря его несчетности можно найти элемент b, лежащий вне подгруппы A. Множество M', состоящее из множества M и элемента b, содержится в свободной подгруппе B с n образующими, причем $B \subset W_k$. Конструкция, применявшаяся в § 34 при доказательстве теоремы о подгруппах свободного произведения, позволяет утверждать, что пересечение $B \cap A$ будет свободным множителем для B. Это пересечение содержит, однако, множество M и поэтому обладает не менее чем n свободными образующими, что противоречит тому, что B отлично от $B \cap A$.

Относительно ранга локально свободных групп докажем следующие две теоремы.

[1]) При $n > 1$ эта группа может быть получена, впрочем, также и как объединение возрастающей последовательности свободных групп с m образующими при любом m, большем n.

Ранг свободного произведения двух локально свободных групп конечного ранга конечен и равен сумме рангов сомножителей.

Пусть, в самом деле, группа G является свободным произведением групп A и B, причем A имеет ранг r, B — ранг s. Элементы любого конечного подмножества M из G записываются через конечное число элементов из A и B, и поэтому можно найти такие свободные подгруппы $A' \subset A$ и $B' \subset B$ соответственно рангов r и s, свободное произведение которых содержит M. Подгруппа $A' * B'$ является свободной группой ранга $r+s$, поэтому доказано, что ранг группы G не больше $r+s$. С другой стороны, берем в подгруппе A конечное подмножество M_1, которое не содержится в свободной подгруппе, ранг которой меньше r; соответствующим образом в подгруппе B выбираем подмножество M_2. Всякая свободная подгруппа C из группы G, содержащая объединение множеств M_1 и M_2, разлагается, согласно § 34, в свободное произведение, среди множителей которого содержатся и пересечения $C \cap A$ и $C \cap B$. Поэтому ранг подгруппы C не меньше $r+s$.

Если локально свободная группа G ранга n гомоморфно (но не изоморфно) отображается на локально свободную группу $\overline{G}$, то ранг группы $\overline{G}$ конечен и меньше n.

Действительно, берем в группе $\overline{G}$ любое конечное подмножество $\overline{M}$, а в группе G конечное подмножество M, содержащее по одному прообразу каждого элемента из $\overline{M}$ и один из отличных от единицы элементов, отображающихся в единицу группы $\overline{G}$. Множество M содержится в свободной подгруппе A ранга n. Образ $\overline{A}$ подгруппы A в группе $\overline{G}$ будет подгруппой с конечным числом образующих, поэтому свободной, причем ранг подгруппы $\overline{A}$ не больше n. Равным n он, однако, также не может быть ввиду следствия из теоремы Грушко (см. § 39), так как A отображается на $\overline{A}$ гомоморфно, но не изоморфно. Подгруппа $\overline{A}$ содержит заданное множество $\overline{M}$, поэтому ранг группы $\overline{G}$ меньше n.

Из этой теоремы следует, что *локально свободная группа конечного ранга не может быть изоморфной со своей истинной фактор-группой.*

Свойства локально свободных групп во многом напоминают свойства абелевых групп без кручения. В действительности между этими классами групп существует тесная связь, выражаемая следующими теоремами [1]:

Фактор-группа G/K локально свободной группы G по ее коммутанту K является абелевой группой без кручения. Если ранг группы G конечен и равен n, то ранг группы G/K не больше n.

В самом деле, если бы группа G/K содержала отличный от 1 элемент конечного порядка, то в группе G нашелся бы такой элемент a,

[1] Говоря в этих теоремах о ранге абелевой группы, мы имеем в виду определение, данное в § 19.

что $a \notin K$, но $a^m \in K$, $m > 1$, т. е.

$$a^m = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i b_i.$$

Множество, состоящее из элемента a и всех элементов a_i и b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, порождает в группе G свободную подгруппу, в коммутант которой входит элемент a^m, но не элемент a. Это противоречит, однако, тому, что фактор-группа свободной группы по коммутанту является свободной абелевой группой. Вторая половина теоремы следует из замечания, что при естественном гомоморфном отображении G на G/K всякая подгруппа группы G с n образующими отображается на подгруппу группы G/K, имеющую не более чем n образующих, причем всякое конечное подмножество из G/K содержится в такой подгруппе.

Следует отметить, что ранг группы G/K может быть на самом деле меньше ранга группы G. Так, например, уже было отмечено, что коммутант локально свободной группы в некоторых случаях совпадает с самой этой группой.

Всякая абелева группа без кручения A изоморфна фактор-группе некоторой локально свободной группы G по ее коммутанту. Если ранг группы A конечен и равен n, то среди локально свободных групп, для которых A служит фактор-группой по коммутанту, существуют группы ранга n.

Доказательство. Группа A является объединением возрастающей последовательности групп

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots, \tag{1}$$

где каждая из групп A_k разложима в прямое произведение некоторого множества бесконечных циклических групп [1]. Пусть базу группы A_k составляют элементы $a_{k\alpha}$, где α пробегает некоторое множество $\mathfrak{M}_k$. Ввиду (1) всякий элемент $a_{k\alpha}$ равен некоторому произведению степеней элементов $a_{k+1,\beta}$, $\beta \in \mathfrak{M}_{k+1}$, т. е.

$$a_{k\alpha} = w_{k\alpha}(a_{k+1,\beta}), \quad \alpha \in \mathfrak{M}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

причем соотношения (2) полностью определяют вложения (1) и поэтому вместе с соотношениями коммутативности составляют для группы A систему определяющих соотношений. Если G есть группа, имеющая символы $a_{k\alpha}$, $\alpha \in \mathfrak{M}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, образующими элементами, а равенства (2) определяющими соотношениями, то фактор-группа группы G по ее коммутанту изоморфна группе A. Покажем, что группа G локально свободна.

Фиксируем некоторое k и берем вспомогательную свободную группу W со свободными образующими b_β, $\beta \in \mathfrak{M}_{k+1}$. Если элементы этой

[1] Мы предполагаем операцию в группе A мультипликативной.

группы

$$c_\alpha = w_{k\alpha}(b_\beta), \quad \alpha \in \mathfrak{M}_k,$$

т. е. слова, получающиеся заменой в правых частях равенства (2) при фиксированном k элементов $a_{k+1,\beta}$ соответствующими элементами b_β, не являются свободными образующими порожденной ими подгруппы, то пусть некоторое соотношение связывает элементы $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_s}$. Тогда подгруппа $\{c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_s}\}$ группы W будет свободной, но, ввиду следствия из теоремы Грушко (см. § 39), ее ранг меньше s. В этом случае, однако, в подгруппе $\{a_{k\alpha_1}, a_{k\alpha_2}, \ldots, a_{k\alpha_s}\}$ группы A можно найти систему образующих, состоящую из меньшего, чем s числа элементов, что противоречит тому, что ранг свободной абелевой группы равен минимальному числу образующих.

Мы получаем, что группа G является объединением возрастающей последовательности свободных групп и поэтому локально свободна, причем ее фактор-группа по коммутанту изоморфна A. Если, сверх того, ранг группы A равен n, то группа G будет объединением возрастающей последовательности свободных групп ранга n, т. е. ее ранг не больше n. Он не может быть, однако, и меньше n ввиду предшествующей теоремы. Этим доказательство теоремы заканчивается.

Установленная нами связь локально свободных групп с абелевыми группами без кручения может быть использована для доказательства *существования неразложимых в свободное произведение локально свободных групп любого конечного ранга*. Для этого достаточно взять в качестве группы A неразложимую в прямое произведение абелеву группу без кручения ранга n; существование таких групп доказано в § 32в. Локально свободная группа G ранга n, для которой фактор-группой по коммутанту служит группа A, будет неразложимой в свободное произведение. Действительно, из разложимости некоторой группы в свободное произведение следует возможность представить ее фактор-группу по коммутанту в виде прямого произведения. В общем случае один из множителей этого прямого разложения мог бы оказаться равным E, однако в рассматриваемом нами случае это невозможно ввиду совпадения рангов групп A и G.

Иными методами (см. Курош [10]) можно было бы доказать также существование неразложимых в свободное произведение локально свободных групп любой бесконечной мощности. [См. Д.9.6.]

Мощность множества всех групп мощности $\mathfrak{m}$. Как уже отмечалось в § 5, множество всех неизоморфных конечных групп является счетным. Естественным образом возникает вопрос о мощности множества всех неизоморфных групп любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$. Результаты, полученные в настоящей главе, позволяют дать на этот вопрос следующий ответ (Курош [9]).

Множество всех неизоморфных групп бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{m}}$, т. е. мощность множества всех частей множества мощности $\mathfrak{m}$.

Заметим прежде всего, что всякая группа мощности $\mathfrak{m}$ является фактор-группой свободной группы $W_{\mathfrak{m}}$ этой же мощности. Мощность множества всех неизоморфных групп мощности $\mathfrak{m}$ будет, следовательно, не больше мощности множества всех нормальных делителей группы $W_{\mathfrak{m}}$, которая, в свою очередь, не больше мощности множества всех подмножеств из $W_{\mathfrak{m}}$, т. е. не больше чем $2^{\mathfrak{m}}$.

Доказательству того, что интересующая нас мощность не меньше чем $2^{\mathfrak{m}}$, предпошлем следующую лемму.

Л е м м а. *Если дано множество $\mathfrak{M}$ мощности $\mathfrak{m}$ групп A_γ, A_δ, ..., каждая из которых имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$, то мощность свободного произведения этих групп есть $\mathfrak{m}$.*

Действительно, собираем в этом свободном произведении те слова длины n, у которых первый элемент принадлежит к группе A_{γ_1}, второй — к группе A_{γ_2}, ..., n-й — к группе A_{γ_n}. Мощность множества $M(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ всех таких слов равна произведению мощностей групп $A_{\gamma_1}, A_{\gamma_2}, \ldots, A_{\gamma_n}$ и поэтому не больше чем $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$. С другой стороны, множество всех систем индексов вида $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ при данном n и всевозможных γ_i, удовлетворяющих тому условию, что соседние индексы γ_i и γ_{i+1} различны, имеет мощность $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$; поэтому такова же мощность множества всех таких систем индексов при всех n. Все свободное произведение групп A_γ распадается, следовательно, на $\mathfrak{m}$ непересекающихся подмножеств $M(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и поэтому имеет мощность, не меньшую чем $\mathfrak{m}$, но и не большую чем $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы, причем мы будем доказывать даже следующее утверждение.

Множество всех неизоморфных групп бесконечной мощности $\mathfrak{m}$, неразложимых в свободное произведение, имеет мощность $2^{\mathfrak{m}}$.

Ввиду сделанного выше замечания достаточно доказать, что интересующая нас мощность не меньше чем $2^{\mathfrak{m}}$. При доказательстве мы будем пользоваться тем, что мощности могут быть вполне упорядочены по возрастанию, т. е. будем вести доказательство индукцией по этому вполне упорядоченному множеству.

Рассмотрим сперва случай наименьшей из бесконечных мощностей — счетной. Берем множество P всевозможных бесконечных систем различных простых чисел — это множество имеет мощность континуума, т. е. мощность множества всех частей счетного множества, — и каждой последовательности из P ставим в соответствие группу, являющуюся прямым произведением циклических групп тех простых порядков, которые входят в эту последовательность. Мы получаем континуальное множество счетных групп, притом абелевых и поэтому неразложимых в свободное произведение. Среди этих групп нет изоморфных, так как для любых двух из них хотя бы в одной есть элемент такого простого порядка, какого не могут иметь элементы другой.

Пусть теперь наше утверждение уже доказано для всех мощностей, меньших чем $\mathfrak{m}$. Отсюда следует, что если мы берем множество

всех неизоморфных групп, неразложимых в свободное произведение и имеющих мощность, меньшую чем $\mathfrak{m}$, то мощность этого множества больше или равна $\mathfrak{m}$. Действительно, если бы объединение множеств мощности $2^{\mathfrak{n}}$ для всех $\mathfrak{n}$, меньших $\mathfrak{m}$, имело мощность $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, то мы пришли бы к противоречию, так как в этом объединении содержалось бы и множество мощности $2^{\mathfrak{m}'}$, хотя $2^{\mathfrak{m}'} > \mathfrak{m}'$. Мы можем, следовательно, выбрать некоторое множество Π, мощность которого *равна* $\mathfrak{m}$, а элементами которого являются неразложимые в свободное произведение группы мощностей, меньших чем $\mathfrak{m}$, причем среди этих групп нет изоморфных.

Берем теперь в Π всевозможные подмножества мощности $\mathfrak{m}$ и устраиваем свободное произведение групп, составляющих каждое из этих подмножеств. Мы получаем $2^{\mathfrak{m}}$ групп, каждая из которых имеет, согласно лемме, мощность $\mathfrak{m}$, а из теоремы об изоморфизме разложений группы в свободное произведение неразложимых подгрупп (§ 35) следует, что среди этих групп нет изоморфных. Заметим также, что эти группы, будучи разложимыми в свободное произведение, не имеют центра и вместе с тем неразложимы в прямое произведение (см. § 35). Берем теперь прямое произведение каждой из полученных нами $2^{\mathfrak{m}}$ групп с симметрической группой 3-й степени. Новые группы будут уже неразложимыми в свободное произведение и снова не имеют центра, а так как, как будет показано в § 45, группа без центра может обладать лишь единственным прямым разложением с неразложимыми множителями, то среди вновь построенных групп нет изоморфных. Мы получили, следовательно, $2^{\mathfrak{m}}$ неизоморфных групп мощности $\mathfrak{m}$, неразложимых в свободное произведение.

Позже Куликов [4] показал, что уже множество всех неизоморфных абелевых групп бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{m}}$. [См. также Д.2.4.]

Глава десятая

ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОБРАЗУЮЩИХ

§ 38. Общие свойства групп с конечным числом образующих

Введенные в § 6 группы с конечным числом образующих представляют собою одно из естественных обобщений конечных групп. Для абелевых групп с конечным числом образующих в § 20 была построена исчерпывающая теория. В общем случае, однако, изучение групп с конечным числом образующих встречается с большими трудностями, много более значительными, чем, например, изучение конечных групп, теория которых также далека от исчерпания. Мы хотим указать причины, лежащие в основе этих трудностей.

Как уже отмечалось в § 5, множество всех неизоморфных конечных групп является счетным, а из результатов § 20 вытекает счетность множества неизоморфных абелевых групп с конечным числом образующих. В противоположность этому множество всех вообще групп с конечным числом образующих имеет мощность континуума — иметь бóльшую мощность оно не может, конечно, так как все эти группы счетны. Больше того, справедлива следующая теорема (Б. Нейман [5]).

Множество всех неизоморфных групп с двумя образующими имеет мощность континуума.

В § 9 (лемма 1) доказано, что тройные циклы, содержащиеся в знакопеременной группе n-й степени, составляют при $n \geqslant 3$ систему образующих для этой группы. Сейчас мы докажем, что *при нечетном n элементы $a = (12\dots n)$, $b = (123)$ также составляют систему образующих для знакопеременной группы n-й степени*. Это очевидно при $n = 3$, поэтому полагаем $n \geqslant 5$. Заметим, что четность подстановки a следует из нечетности числа n. Так как, как легко проверить, при $3 \leqslant i < n$ будет

$$ba^{-1}(12i)ab^2 = (1, 2, i+1),$$

то подгруппа $\{a, b\}$, содержащая подстановку (123), содержит и все тройные циклы вида $(1\ 2\ i)$, $3 \leqslant i \leqslant n$, а поэтому и обратные им циклы $(1\ i\ 2)$. Если $i \neq j$, $i \geqslant 3$, $j \geqslant 3$, то

$$(12j)(12i)(1j2) = (1ij),$$

т. е. подгруппа $\{a, b\}$ содержит все тройные циклы вида $(1\ i\ j)$. Наконец, если символы i, j, k, l различны между собою и отличны от символа 1, то

$$(1li)(1jk)(1il) = (ijk),$$

т. е. подгруппа $\{a, b\}$ содержит вообще все тройные циклы n-й степени и поэтому совпадает со всей знакопеременной группой.

Пусть теперь

$$(U) \qquad u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \ldots$$

есть возрастающая последовательность нечетных чисел, где $u_1 \geqslant 5$, и пусть G'_U есть прямое произведение конечных знакопеременных групп, степени которых входят в U,

$$G'_U = A_{u_1} \times A_{u_2} \times \ldots \times A_{u_n} \times \ldots.$$

Всякая группа A_{u_n} есть группа четных подстановок, производимых над символами $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \ldots, \sigma_{n,u_n}$, причем циклы $a_n = (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \ldots \ldots, \sigma_{n,u_n})$ и $b_n = (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3})$ будут, как показано выше, образующими элементами для этой группы. Если Σ есть множество всех символов σ_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то группа G'_U будет подгруппой в группе всех взаимно однозначных отображений множества Σ на себя. Берем, с другой стороны, в этой последней группе подгруппу G_U, порожденную элементами

$$a = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1,u_1})(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \ldots, \sigma_{2,u_2}) \ldots (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \ldots, \sigma_{n,u_n}) \ldots,$$
$$b = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \ldots (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}) \ldots,$$

и докажем, что $G_U \supset G'_U$.

Действительно, непосредственная проверка показывает, что элементы $a_n^{-(u_m-2)} b a_n^{u_m-2}$ и b перестановочны при $m < n$, но неперестановочны при $m = n$. Так как в любом произведении степеней элементов a и b циклы, содержащие символы σ_{ni} с одним и тем же первым индексом n, перемножаются между собой так же, как в группе A_{u_n}, то мы получаем, что коммутатор k_m элементов $a^{-(u_m-2)} b a^{u_m-2}$ и b оставляет все символы σ_{ni} при $n > m$ неподвижными, но перемещает символы σ_{mi} и, быть может, некоторые σ с меньшим, чем m, первым индексом. Иными словами, элемент k_m содержится в прямом произведении подгруппы A_{u_m} и некоторых из подгрупп A_{u_s}, $s < m$. Это же верно для всякого элемента, сопряженного в группе G_U с элементом k_m — трансформирование элемента x из A_{u_n} любым элементом из G_U переводит x в элемент, принадлежащий к той же подгруппе A_{u_n}, — а поэтому весь нормальный делитель, порожденный в группе G_U элементом k_m, содержится в прямом произведении

$$A_{u_1} \times A_{u_2} \times \ldots \times A_{u_m}.$$

Компонента этого нормального делителя в прямом множителе A_{u_m} является отличным от E нормальным делителем в A_{u_m}, т. е. ввиду

простоты этой группы совпадает с A_{u_m}. Если мы будем считать доказанным, что группы $A_{u_1}, \ldots, A_{u_{m-1}}$ содержатся в G_U (при $m = 1$ это очевидно), то мы получаем, что и A_{u_m} входит в G_U. Отсюда следует, что все подгруппы A_{u_n} содержатся в группе G_U, причем будут в G_U нормальными делителями.

Пусть, с другой стороны, в группе G_U взят произвольный конечный нормальный делитель H. Всякому элементу h из H соответствует элемент из A_{u_n}, совершающий такую же перестановку символов $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \ldots, \sigma_{n,u_n}$, как и h. Эти «компоненты» элементов из H составляют в подгруппе A_{u_n} нормальный делитель, который ввиду простоты этой подгруппы равен или A_{u_n}, или E. Ввиду конечности подгруппы H будет, начиная с некоторого номера $n+1$, постоянно иметь место вторая из этих двух возможностей. Иными словами, нормальный делитель H оставляет все символы σ_{ki} при $k > n$ неподвижными и поэтому содержится в прямом произведении

$$A_{u_1} \times A_{u_2} \times \ldots \times A_{u_n},$$

причем компонента подгруппы H в A_{u_n} совпадает с самим этим прямым множителем.

Пусть теперь нормальный делитель H изоморфен некоторой знакопеременной группе A_k, $k \geqslant 5$. Будучи простой, подгруппа H будет изоморфной своей компоненте в A_{u_n}, т. е. изоморфна самой подгруппе A_{u_n}, откуда $k = u_n$. Мы получаем ввиду доказанного выше, что группа G_U обладает конечными нормальными делителями, изоморфными знакопеременной группе A_k, тогда и только тогда, если k равно некоторому u_n из U.

Множество различных последовательностей типа U имеет мощность континуума. Если U_1 и U_2 — две из этих последовательностей, то из сказанного выше следует, что группы G_{U_1} и G_{U_2} не могут быть изоморфными. Мы получили, следовательно, континуальное множество неизоморфных групп с двумя образующими, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает, что *не существует такой «универсальной» счетной группы, некоторой подгруппе которой была бы изоморфна любая счетная группа* — всякая счетная группа может содержать, понятно, лишь счетное множество подгрупп с двумя образующими. Вопрос о существовании такой группы мощности континуум, некоторой подгруппе которой изоморфна любая группа этой мощности, пока открыт [1]).

[1]) Ко времени подготовки третьего издания этот вопрос уже получил решение. [См. Д.1.2.]

Можно указать и другие причины малой обозримости групп с конечным числом образующих, не связанные непосредственно с доказанной выше теоремой. Начнем со следующих лемм, представляющих и самостоятельный интерес (см. Хигмэн, Б. и Х. Нейманы [1]).

Лемма 1. *Пусть в группе G даны изоморфные между собой подгруппы A и B и пусть φ — изоморфное отображение A на B. Тогда группу G можно так вложить в некоторую группу H, что в H найдется элемент h, трансформирование которым подгруппы A порождает отображение φ,*

$$h^{-1}ah = a\varphi \quad \text{для всех} \quad a \quad \text{из} \quad A.$$

Рассмотрим, в самом деле, свободные произведения

$$K = G * \{u\}, \quad L = G * \{v\},$$

где $\{u\}$ и $\{v\}$ — бесконечные циклические группы. Как вытекает из результатов § 34, для подгруппы $U = \{G, u^{-1}Au\}$ группы K имеет место свободное разложение

$$U = G * u^{-1}Au,$$

а для подгруппы $V = \{G, vBv^{-1}\}$ группы L — свободное разложение

$$V = G * vBv^{-1}.$$

Мы получим изоморфное отображение ψ группы U на группу V, если положим:

$$g\psi = g \quad \text{для всех} \quad g \quad \text{из} \quad G,$$
$$(u^{-1}au)\psi = v(a\varphi)^{-1} \quad \text{для всех} \quad a \quad \text{из} \quad A.$$

Можно, следовательно, построить свободное произведение H групп K и L с объединенной подгруппой (см. § 35), склеивая подгруппы U и V в соответствии с изоморфизмом ψ. Группа H содержит группу G в качестве подгруппы. С другой стороны, так как в H

$$u^{-1}au = v(a\varphi)v^{-1} \quad \text{для всех} \quad a \quad \text{из} \quad A,$$

то

$$(uv)^{-1}a(uv) = a\varphi,$$

т. е. элемент uv является искомым элементом h.

Лемма 2. *Пусть в группе G даны подгруппы A_α (α пробегает некоторое множество индексов M) и для каждого α дано изоморфное отображение φ_α подгруппы A_α на некоторую подгруппу B_α. Тогда группу G можно так вложить в некоторую группу H, что для каждого α в H найдется элемент h_α, трансформирование которым подгруппы A_α порождает отображение φ_α. Можно считать при этом, что элементы h_α, $\alpha \in M$, порождают в H свободную подгруппу и являются ее свободными образующими.*

Группу H мы определим следующим образом: ее образующими будут образующие группы G и символы h_α, $\alpha \in M$, а ее определяющими соотношениями — определяющие соотношения группы G и все равенства

$$h_\alpha^{-1} a_\alpha h_\alpha = a_\alpha \varphi_\alpha, \quad \text{где} \quad a_\alpha \in A_\alpha, \quad \alpha \in M \tag{1}$$

(элементы a_α и $a_\alpha \varphi_\alpha$ предполагаются, понятно, записанными через образующие группы G). Элементы h_α действительно будут свободными образующими подгруппы, порождаемой ими в H: полагая все образующие группы G равными единице, мы превращаем соотношения (1) в тождества, а поэтому из них и из соотношений группы G не может вытекать нетривиальное соотношение, связывающее лишь элементы h_α.

Если бы, с другой стороны, образующие элементы группы G были связаны в группе H соотношением, не вытекающим из определяющих соотношений группы G, то это соотношение получилось бы уже после присоединения некоторого конечного числа элементов h_α. Оно тем более должно было бы тогда выполняться, если бы эти элементы h_α присоединялись к группе G последовательно на основании леммы 1, что, однако, не имеет места. Таким образом, группа H содержит в качестве подгруппы группу G и, следовательно, удовлетворяет всем требованиям леммы 2. Для дальнейшего еще раз отметим, что *образующие h_α группы H входят лишь в соотношения* (1).

Применяя лемму 2 к случаю, когда $A_\alpha = G$ для всех α, а φ_α — все автоморфизмы группы G, мы получим группу H, играющую ту же роль, что и голоморф группы G.

Нашей целью является следующая т е о р е м а, высказанная в виде проблемы в первом издании настоящей книги и доказанная в работе Хигмэна и Б. и Х. Нейманов [1].

Всякая счетная группа G может быть изоморфно вложена в группу с двумя образующими [1]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выбираем в группе G систему образующих $g_1, g_2, \ldots$, конечную или счетную. Пусть, далее,

$$K = G * \{u\}, \tag{2}$$

где $\{u\}$ — бесконечная циклическая группа. В качестве системы образующих группы K можно взять элементы u и

$$u_i = u g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

так как $g_i = u^{-1} u_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Порядок всех элементов u_i бесконечен, т. е. порождаемые ими циклические подгруппы изоморфны.

[1]) Для конечных групп эта теорема по существу уже доказана в § 5, так как всякая конечная симметрическая группа обладает ввиду § 6, пример 2, системой из двух образующих.

Поэтому ввиду леммы 2 группу K можно вложить в такую группу L, в которой найдутся элементы h_i, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условиям

$$h_i^{-1} u h_i = u_i, \quad i = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

сверх того, элементы h_i являются свободными образующими порождаемой ими подгруппы H, входят лишь в определяющие соотношения (4) группы L и порождают вместе с K всю группу L. Системой образующих группы L можно считать ввиду (4) элементы u и h_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь W будет свободная группа с двумя образующими x, y. Как мы знаем из § 36, в коммутанте группы W найдется подгруппа S с таким (конечным или счетным) числом свободных образующих $s_1, s_2, \ldots$, сколько у нас элементов h_i, $i = 1, 2, \ldots$. Можно, следовательно, взять свободное произведение Q групп L и W с объединенной подгруппой, склеивая изоморфные подгруппы H и S этих групп при помощи равенств

$$h_i = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Группа Q порождается ввиду (5) элементами u, x и y.

Покажем, что элементы u и x не связаны в группе Q никаким соотношением. Действительно, существует ввиду (2) гомоморфное отображение группы K на бесконечную циклическую группу $\{\overline{u}\}$, при котором u переходит в $\overline{u}$, а все элементы из G — в единицу, и поэтому по (3) все элементы u_i, $i = 1, 2, \ldots$, — в $\overline{u}$. Этот гомоморфизм можно расширить до гомоморфного отображения группы L на группу $\{\overline{u}\}$, при котором элементы h_i, $i = 1, 2, \ldots$, переходят в единицу — действительно, они входят лишь в соотношения (4), которые при таком отображении не нарушаются. С другой стороны, существует гомоморфное отображение свободной группы W на бесконечную циклическую группу $\{\overline{x}\}$, при котором x переходит в $\overline{x}$, а y — в единицу; все элементы коммутанта, в частности все элементы s_i, $i = 1, 2, \ldots$, при этом отображении также переходят в единицу. Теперь можно определить гомоморфное отображение φ группы Q на свободную группу $\{\overline{u}\} * \{\overline{x}\}$, отображая L на $\{\overline{u}\}$ и W на $\{\overline{x}\}$ так, как указано выше. Действительно, на склеиваемых подгруппах H и S эти отображения согласованы, так как обе эти подгруппы отображаются в единицу. Отображение φ переводит элементы u, x соответственно в свободные образующие $\overline{u}$, $\overline{x}$ свободной группы, а поэтому u и x действительно не могут быть связаны в группе Q никаким соотношением.

Таким образом, мы имеем в группе Q две свободные подгруппы ранга 2, а именно $\{x, y\}$ и $\{u, x\}$. По лемме 1 группу Q можно вложить в группу R, порождаемую присоединением к Q такого элемента z, что

$$z^{-1} x z = u, \quad z^{-1} y z = x,$$

откуда $zxz^{-1} = y$. Отсюда следует, что группа R, порождаемая элементами u, x, y, z, на самом деле является группой с двумя образующими — x и z. Теорема доказана. [См. Д.15.1.]

О группах с конечным числом образующих известен ряд по существу отрицательных результатов. Так, существуют группы с конечным числом образующих, изоморфные со своей истинной фактор-группой (Б. Нейман [9], Хигмэн [2]). Этим дано отрицательное решение проблемы, известной под названием проблемы Хопфа. [См. Д.15.1.] Отметим, что для свободных групп конечного ранга, как будет показано в следующем параграфе, имеет место противоположное утверждение. Известно также, что существуют бесконечные простые группы с конечным числом образующих (Хигмэн [3]) — этим дан ответ на вопрос, поставленный в первом издании настоящей книги.

Пока весьма далека от решения следующая очень важная проблема Бернсайда: будет ли конечной всякая периодическая группа с конечным числом образующих?[1]). Эта проблема не поддается решению даже при условии, что порядки элементов группы ограничены в совокупности. Положительное решение получается, очевидно, в случае, когда порядки всех отличных от 1 элементов группы равны двум, так как такая группа будет непременно абелевой. Бернсайдом [2] было найдено также положительное решение для случая, когда порядки элементов равны трем, и, сверх того, для групп с двумя образующими, порядки всех элементов которых равны четырем или делителю четырех; первый из этих двух случаев рассматривался также в работе Леви и Ван-дер-Вардена [1]. Далее, Б. Нейман [3] нашел решение для групп, порядки элементов которых не выше трех, и, наконец, Санов [1] — для групп с любым конечным числом образующих, порядки всех элементов которых не выше четырех. Однако уже для групп с двумя образующими, в которых порядок всех отличных от 1 элементов равен пяти, проблема остается открытой. Заметим, что все такие группы будут фактор-группами приведенной свободной группы с двумя образующими B_5, получающейся наложением тождественного соотношения $x^5 = 1$ (см. § 37). Делались попытки оценить сверху порядок конечных фактор-групп группы B_5, но и они не привели пока к результату. [См. § Д.16.] Санов [3] показал, что для положительного решения проблемы Бернсайда в случае ограниченных в совокупности порядков элементов достаточно решить ее для групп с двумя образующими.

Мы закончим параграф доказательством следующей теоремы (М. Холл [4]):

Группа с конечным числом образующих может иметь лишь конечное число подгрупп данного конечного индекса j.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания эта проблема уже получила решение. [См. § Д.16.]

Пусть, в самом деле, дана группа G с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и в ней подгруппа U индекса j. Обозначим через

$$K_1 = U, K_2, \ldots, K_j \tag{6}$$

все правосторонние смежные классы группы G по подгруппе U. Если g — произвольный элемент из G, то переход от системы классов (6) к системе

$$K_1 g, K_2 g, \ldots, K_j g$$

будет подстановкой в системе (6), которую мы обозначим через $P(g)$. Таким образом, мы получаем отображение φ,

$$g\varphi = P(g), \quad g \in G, \tag{7}$$

группы G в симметрическую группу j-й степени S_j, гомоморфное ввиду равенства

$$P(g_1 g_2) = P(g_1)P(g_2).$$

Гомоморфизм φ вполне определяется заданием образов элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$; существует поэтому лишь конечное число различных гомоморфизмов группы G в группу S_j, а именно не больше $(j!)^n$. Однако введенный в (7) гомоморфизм φ однозначно определяет подгруппу U, так как элемент g тогда и только тогда содержится в U, если подстановка $P(g)$ оставляет класс K_1 на месте. Группа G с n образующими содержит, следовательно, не больше $(j!)^n$ подгрупп индекса j.

§ 39. Теорема Грушко

Переходим к рассмотрению свободных разложений групп с конечным числом образующих; эти разложения представляют особый интерес ввиду связей с некоторыми проблемами комбинаторной топологии. Все вопросы, которые могут быть здесь поставлены, по существу исчерпываются доказываемой в настоящем и следующем параграфах теоремой Грушко [2]. [См. Д.7.2.]

Пусть группа G обладает системой образующих

$$\overline{g}_1, \overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_n, \tag{1}$$

которые не предполагаются непременно различными или отличными от единицы. Если элемент h группы G обладает такой записью через образующие (1), в которую не входит элемент $\overline{g}_j$, то, заменяя в (1) элемент $\overline{g}_j$ элементом $h\overline{g}_j$ или элементом $\overline{g}_j h$, мы снова получим, очевидно, систему образующих группы G. С другой стороны, замена элемента $\overline{g}_j$ в системе (1) элементом $\overline{g}_j^{-1}$ также приводит к системе образующих. Всякая система образующих группы G, получающаяся из системы (1) конечным числом преобразований указанного вида, будет называться *допущенной* (относительно системы (1)).

Пусть, далее, группа G разложена в свободное произведение

$$G = A_1 * A_2 * \ldots * A_k. \tag{2}$$

Несократимые записи элементов из G, их длины, левые половины, середины и правые половины и т. д. будут рассматриваться в дальнейшем по отношению к свободному разложению (2).

Допущенную систему образующих назовем *минимальной*, если сумма длин элементов этой системы, т. е. ее *длина*, не больше длины любой другой допущенной (относительно исходной системы (1)) системы образующих группы G.

Теорема Грушко. *Всякий элемент любой из минимальных допущенных систем образующих содержится в одном из свободных множителей разложения* (2).

До того, как приступать к доказательству этой теоремы, укажем следствия, которые из нее выводятся.

Минимальное число образующих группы с конечным числом образующих равно сумме соответствующих чисел для всех множителей любого из свободных разложений этой группы.

Действительно, если (1) — система образующих группы G с наименьшим возможным числом элементов, (2) — данное свободное разложение этой группы и

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \tag{3}$$

минимальная допущенная относительно (1) система образующих, то те из элементов системы (3), которые лежат в свободном множителе A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, составляют ввиду теоремы Грушко его систему образующих; систем образующих с меньшим числом элементов множитель A_i иметь, понятно, не может [1]).

Отсюда следует, что *свободные разложения группы с n образующими состоят не более чем из n множителей*, а поэтому *всякая группа с конечным числом образующих может быть разложена в свободное произведение конечного числа неразложимых групп*.

Из теоремы Грушко выводятся также следствия иного рода. Всякому выбору в группе G системы из n образующих соответствует, понятно, гомоморфное отображение на группу G свободной группы с n свободными образующими. Рассмотренные выше преобразования системы образующих в случае свободной группы дают переход от одной системы свободных образующих к другой системе образующих, также свободной. Из теоремы Грушко вытекает, следовательно, такая теорема, по существу ей равносильная.

Если свободная группа S с конечным числом образующих гомоморфно отображена на группу G, разложенную в свободное произведение подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_k$, то в S можно выбрать такую систему свободных образующих, что при рассматриваемом

[1]) Доказательству этого следствия посвящена также работа Б. Неймана [8].

гомоморфизме каждый из этих образующих отображается внутрь одного из свободных множителей A_i.

Отсюда следует: *Свободная группа ранга n не может обладать системой образующих, состоящей из меньшего, чем n, числа элементов.* Этот результат можно было бы впрочем получить и непосредственно, применяя переход к фактор-группе по коммутанту.

Всякая система образующих свободной группы ранга n, состоящая из n элементов, является системой свободных образующих.

Действительно, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть система свободных образующих свободной группы S, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — некоторая система образующих этой группы, состоящая из n элементов, то, по теореме Грушко, существует система образующих $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$, допущенная по отношению к системе $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и такая, что всякое b'_i лежит в одной из подгрупп $\{a_j\}$. Так как в каждую из подгрупп $\{a_j\}$ должен попасть хотя бы один из элементов b'_i, то можно считать, используя равенство числа элементов в обеих системах, что $b'_i \in \{a_i\}$. Теперь, как легко видеть, $b'_i = a_i^{\pm 1}$, т. е. система $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ является системой свободных образующих группы S. Образующие $b_1, b_2, \ldots, b_n$ будут, следовательно, также свободными.

Этот результат утверждает, иными словами, что *всякое гомоморфное отображение свободной группы конечного ранга самой на себя является изоморфным*, т. е. что *свободная группа конечного ранга не может быть изоморфной со своей истинной фактор-группой.* Эта теорема была доказана с помощью иных методов Магнусом [6]. Она может быть, впрочем, выведена из более ранних результатов Нильсена [3].

Приступим теперь к доказательству теоремы Грушко. Пусть

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \tag{4}$$

будет минимальная допущенная (относительно системы (1)) система образующих группы G, обладающей свободным разложением (2). Элемент g_i из этой системы, имеющий длину l, $l > 1$, называется *особым*, если в (4) можно найти такие элементы g_j и $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$ и для них такие показатели ε и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, равные ± 1, что выполняются следующие условия (здесь и дальше $l(g)$ есть длина элемента g относительно свободного разложения (2)):

1) $j \neq i$,
2) $l(g_j) = l$,
3) $l(g_{i_1}) < l, , \ldots, l(g_{i_s}) < l$,
4) $l\left(g_i \cdot \prod\limits_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}\right) \leqslant l$,
5) $l\left(\prod\limits_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}\right) = l$,
6) $l\left(\prod\limits_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\right) < l$.

Пусть, далее, g есть элемент из G длины l и пусть его левая половина, середина и правая половина (относительно разложения (2)) сокращенно обозначены через P, Q и R, $g = PQR$; при четном l $Q = 1$ [1]). Элемент g называется *приводимым* (относительно системы (4)), если в (4) можно найти такие элементы $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$ и для них такие показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, что $l(g_{i_\nu}) < l$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, и

$$g \cdot \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} = PQP^{-1},$$

т. е., при четном l, $g \cdot \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} = 1$. В противоположном случае элемент g называется *неприводимым*.

Предположим на время, что уже доказано следующее утверждение.

(В) *Если* (4) *есть минимальная допущенная система образующих группы G и если среди элементов этой системы есть такие, длина которых больше единицы, то в* (4) *имеются неприводимые особые элементы.*

Пусть g_i есть один из имеющих наименьшую длину среди неприводимых особых элементов минимальной допущенной системы (4) и пусть $g_i = PQR$. Если элементы g_j и $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$ и показатели для них выбраны в соответствии с определением особого элемента, то ввиду 4) и 5) будет

$$\overline{g} = \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon} = R^{-1}Q'T,$$

где Q' содержится в том же свободном множителе, что и Q. Мы изменим теперь систему (4), заменяя элемент g_j элементом g_j', определяемым следующим образом:

$$g_j' = g_i\overline{g} = P(QQ')T, \tag{5}$$

если элемент $\overline{g}$ неприводим; если же он приводим и если, в соответствии с определением приводимого элемента,

$$\overline{g} \cdot \prod_{\mu} g_{j_\mu}^{\beta_\mu} = R^{-1}Q'R, \quad l(g_{j_\mu}) < l, \quad \mu = 1, 2, \ldots, t,$$

то

$$g_j' = g_i\overline{g} \cdot \prod_{\mu} g_{j_\mu}^{\beta_\mu} \cdot g_i^{-1} = P(QQ'Q^{-1})P^{-1}. \tag{6}$$

В обоих случаях элемент g_j может быть выражен через g_j' и остальные элементы системы (4), т. е. мы получаем новую систему образующих для группы G; легко видеть, что она остается допущенной и минимальной.

[1]) Такой сокращенной записью мы будем пользоваться в дальнейшем без особых оговорок.

Покажем, что если этим способом будут заменены все элементы системы (4), которые могут играть в соответствии с определением особого элемента роль элемента g_j для рассматриваемого нами элемента g_i, то *элемент g_i перестанет быть особым*. Действительно, если бы новый элемент g_j' с показателем δ и произведение $\prod\limits_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu}$ удовлетворяли требованиям, входящим в определение особого элемента, то было бы

$$\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} \cdot g_j'^{\delta} = R^{-1} Q'' U, \tag{7}$$

где Q'' лежит в одном свободном множителе с Q. Так как, однако, левая половина элемента $g_j'^{\delta}$ равна P, если элемент $\overline{g}$ неприводим и $\delta = +1$, а также если g приводим и $\delta = \pm 1$, и из получающегося в этом случае равенства [1])

$$\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} \cdot P = R^{-1}$$

следовало бы $R \cdot \prod\limits_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} = P^{-1}$ в противоречии с неприводимостью элемента g_i, то остается возможным лишь случай неприводимого $\overline{g}$ и $\delta = -1$. В этом случае, однако, из (5) и (7) следовало бы равенство $\prod\limits_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} \cdot T^{-1} = R^{-1}$, т. е.

$$R = T\Big(\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu}\Big)^{-1}.$$

Элемент $\overline{g}$ оказывается, в противоречии с предположением, приводимым.

При наших преобразованиях системы (4) в этой системе *не могут появиться новые неприводимые особые элементы длины l*. Действительно, элемент длины l, который был приводим в системе (4), остается приводимым и после замены g_j через g_j', так как длины элементов g_{i_ν}, участвующих в определении приводимого элемента, меньше l. Пусть, далее, после замены g_j через g_j' делается особым некоторый элемент g_m, $m \neq i$, $m \neq j$; $l(g_m) = l$. Это означает, что можно подобрать такой показатель ε' для g_j' и такое произведение $\prod\limits_{\sigma} g_{k_\sigma}^{d_\sigma}$, что для элемента g_m и этих элементов будут выполняться все требования, входящие в определение особого элемента. Легко видеть, однако, что элемент g_m был в этом случае особым и до изменения системы (4) — роль элемента g_j для него играл элемент g_i, если $\varepsilon' = +1$ и $\overline{g}$ неприводим, а также если $\varepsilon' = \pm 1$ и $\overline{g}$ приводим (в этих случаях левая половина элемента $g_j'^{\varepsilon'}$ совпадает с левой половиной элемента g_i), и старый элемент g_j, если $\varepsilon' = -1$ и $\overline{g}$ неприводим.

[1]) Учесть условие 6) из определения особого элемента!

Пусть, наконец, оказывается особым сам элемент g_j'. Если элемент $\overline{g} = \prod\limits_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}$ был неприводим, т. е. элемент g_j' определен равенством (5), то при $\varepsilon = -1$ из

$$l(g_j'^{-1}) = l\Big[g_j\Big(\prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\Big)^{-1} g_i^{-1}\Big] = l$$

следует, что был особым сам элемент g_j; лишь условие 5) из определения особого элемента требует некоторой, впрочем весьма простой, проверки, которая предоставляется читателю. Если же $\varepsilon = +1$, то из того, что элемент g_j' особый, следует, что элемент g_j также был особым, так как эти два элемента обладают в этом случае одинаковыми правыми половинами, а их середины содержатся в одном и том же свободном множителе. В случае же приводимого элемента $\overline{g}$, т. е. в случае, когда g_j' определяется по формуле (6), имеет место равенство

$$l(g_j') = l\Big(g_i \cdot \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon} \cdot \prod_{\mu} g_{j_\mu}^{\beta_\mu} \cdot g_i^{-1}\Big) = l,$$

из которого без труда следуют неравенства

$$l\Big(g_i \cdot \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}\Big) \leqslant l,$$
$$l\Big(g_j^{\varepsilon} \cdot \prod_{\mu} g_{j_\mu}^{\beta_\mu} \cdot g_i^{-1}\Big) \leqslant l.$$

Эти два неравенства показывают, что элемент g_j сам был особым: первое неравенство в случае $\varepsilon = -1$, второе в случае $\varepsilon = +1$. Условия 5) и 6) из определения особого элемента выполняются, очевидно, в обоих случаях.

Рассмотренные выше преобразования системы (4) уменьшают, следовательно, число неприводимых особых элементов длины l в этой системе, а поэтому после конечного числа шагов мы приходим к такой системе, в которой неприводимых особых элементов длины l нет совсем. Число l было минимальной длиной неприводимых особых элементов в системе (4). Мы повысили, следовательно, эту минимальную длину [1]), а так как наши преобразования не меняют ни длин элементов заданной системы образующих, ни тем более числа этих элементов, то после конечного числа таких повышений мы получим новую минимальную допущенную систему образующих группы G, некоторые из элементов которой имеют по-прежнему длины, бóльшие чем единица, хотя, в противоречие с утверждением (B), в этой системе уже нет неприводимых особых элементов. Теорема Грушко будет,

[1]) Среди элементов, длина которых меньше l, новые неприводимые особые элементы не могут, очевидно, появиться. См. определение особого элемента.

следовательно, доказана, если мы убедимся в справедливости утверждения (B). Доказательству этого посвящается следующий параграф.

§ 40. Теорема Грушко (окончание)

Мы приступаем теперь к доказательству утверждения (B).

Система (4) из предшествующего параграфа является, по предположению, минимальной допущенной системой образующих группы G, причем длина некоторых элементов из (4) больше единицы. Из минимальности системы (4) следует, что никакой ее элемент, отличный от 1, не может быть выражен через остальные элементы системы: если $l(g_i) \geqslant 1$ и $g_i = \prod_\nu g_{j_\nu}^{\alpha_\nu}$, $j_\nu \neq i$, то замена g_i через $g_i' = g_i^{-1} \cdot \prod_\nu g_{j_\nu}^{\alpha_\nu}$ приводит к новой допущенной системе образующих группы G с меньшей длиной, чем у системы (4), так как $g_i' = 1$.

Всякий элемент любого из свободных множителей $A_1, A_2, \ldots, A_k$ может быть записан через образующие из системы (4), причем найдется такой элемент a, лежащий в некоторой подгруппе A_m, что в любой его записи через эти образующие участвуют элементы, длина которых больше единицы — в противном случае через элементы длины 1 из (4) записывались бы все элементы группы G, в том числе и элементы из (4), длина которых больше 1, а это, как только что показано, невозможно. Среди различных записей элемента a через образующие из системы (4) выбираем те, у которых максимальная длина участвующих в них элементов из (4) наименьшая, среди этих — те, в которых элементы с этой максимальной длиной встречаются наименьшее число раз, среди них — те записи, в которых наименьшее число раз встречаются элементы, длина которых на единицу меньше максимальной длины, и так далее, кончая элементами длины 1.

Пусть

$$a = g_{j_1}^{\varepsilon_1} g_{j_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{j_\omega}^{\varepsilon_\omega}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \omega, \tag{8}$$

будет одна из таких записей; $\omega \geqslant 2$, так как в этой записи должны участвовать элементы, длина которых больше 1. Условимся употреблять следующие обозначения для частей произведения, стоящего в правой части равенства (8):

$$[\mu, \nu] = g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}} \ldots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}, \quad 1 \leqslant \mu < \nu \leqslant \omega.$$

$l[\mu, \nu]$ есть длина элемента $[\mu, \nu]$ относительно свободного разложения (2).

Докажем несколько лемм, относящихся к правой части равенства (8).

I. *Существуют такие* μ *и* ν, $1 \leqslant \mu < \nu \leqslant \omega$, *что*

1) $l(g_{j_\mu}) = l[\mu, \mu+1] = \ldots = l[\mu, \nu-1] > l[\mu, \nu]$,

2) $l(g_{j_\mu} \geqslant l(g_{j_\lambda})$, $\mu < \lambda \leqslant \nu$,

3) $l(g_{j_\mu}) \geqslant 2$.

Действительно, существует такое μ, что $l[1, \mu-1] < l[1, \mu]$, но $l[1, \lambda] \geqslant l[1, \lambda+1]$ при всех $\lambda \geqslant \mu$ [1]). Покажем, что $\mu < \omega$. Так как $l[1, \omega] = l(a) = 1$, то при $\mu = \omega$ было бы $l[1, \omega-1] = 0$, т. е. $[1, \omega-1] = 1$. Отсюда следовало бы, однако, $a = g_{j_\omega}^{\varepsilon_\omega}$, что невозможно ввиду $l(a) = 1$ и предположений, сделанных об элементе a.

Ищем теперь такое ν, $\mu < \nu \leqslant \omega$, что

$$l[1, \mu] = l[1, \mu+1] = \ldots = l[1, \nu-1] > l[1, \nu].$$

Такое ν существует, если $l[1, \mu] \geqslant 2$, так как $l[1, \omega] = l(a) = 1$. Если же $l[1, \mu] = 1$, то $l[1, \mu-1] = 0$, т. е. $[1, \mu-1] = 1$, а поэтому ввиду предположений, сделанных о правой части равенства (8), было бы $\mu = 1$. Иными словами, для всех λ, $1 \leqslant \lambda \leqslant \omega$, было бы $l[1, \lambda] = 1$. Пусть $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$ есть первый среди множителей произведения (8), длина которого больше 1. Тогда из $l[1, \sigma] = 1$ следует, что замена в системе (4) элемента g_{j_σ} через

$$g'_{j_\sigma} = [1, \sigma] = [1, \sigma-1] \cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$$

приводит к новой допущенной системе образующих группы G с меньшей, чем у системы (4), длиной. Этим противоречием с минимальностью системы (4) доказывается существование ν.

Условимся употреблять в дальнейшем обозначение $l(g_{j_\mu}) = l$ и докажем утверждения 1) и 2) леммы I. Из $l[1, \mu-1] < l[1, \mu]$ следует, что в произведении $[1, \mu-1] \cdot g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} = [1, \mu]$ середина элемента $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ остается незатронутой, или, при четном l, левая половина этого элемента сократится не вполне. Пусть уже доказано для некоторого λ, $\mu < \lambda < \nu$, что $l(g_{j_\sigma}) \leqslant l$ для $\mu < \sigma \leqslant \lambda$, что $l[\mu, \lambda] = l$ и что в произведении $[1, \mu-1][\mu, \lambda]$ середина элемента $[\mu, \lambda]$ остается незатронутой или, при четном l, его левая половина не вполне сокращается. Если бы теперь было $l(g_{j_{\lambda+1}}) > l$, то из $l[1, \lambda] \geqslant l[1, \lambda+1]$ следовало бы, что в произведении

$$[1, \lambda+1] = [1, \mu-1][\mu, \lambda] \cdot g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$$

при выполнении сокращений между $[\mu, \lambda]$ и $g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ сократились бы вся правая половина и середина элемента $[\mu, \lambda]$, а при четном l затронулась бы его левая половина. Отсюда следовало бы, что $l[\mu, \lambda+1] < l(g_{j_{\lambda+1}})$, но тогда, так как в произведении $[\mu, \lambda+1]$ элемент $g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ является единственным множителем, длина которого больше l, можно было бы уменьшить длину системы (4), заменяя элемент $g_{j_{\lambda+1}}$ элементом $g'_{j_{\lambda+1}} = [\mu, \lambda+1]$; это, очевидно, снова дает допущенную систему образующих. Поэтому $l(g_{j_{\lambda+1}}) \leqslant l$. Если теперь $\lambda+1 < \nu$, то $l[1, \lambda] = l[1, \lambda+1]$ и поэтому $l[\mu, \lambda+1] = l[\mu, \lambda] = l$, причем

[1]) Иными словами, μ есть номер такого последнего множителя из (8), что умножение на него произведения предшествующих множителей приводит к увеличению длины.

левые половины элементов $[\mu, \lambda+1]$ и $[\mu, \lambda]$ совпадают. Этим для случая $\lambda+1<\nu$ доказаны все индуктивные предположения. Если же $\lambda+1=\nu$, то из $l[1, \lambda]>l[1, \nu]$ следует, что сокращения в произведении $[\mu, \lambda]\cdot g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ уничтожают всю левую половину и середину элемента $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$, а поэтому $l[\mu, \nu]<l$.

Наконец, из $l=1$ следовало бы теперь $l[\mu, \nu]=0$, т. е. $[\mu, \nu]=1$. Это позволило бы, однако, заменить произведение (8) более коротким, что противоречит предположениям, сделанным об этом произведении. Поэтому $l\geqslant 2$. Лемма I доказана.

Мы будем теперь предполагать, что произведение $[\mu, \nu]$ выбрано в соответствии с леммой I. Будем считать, сверх того, что это произведение обладает наименьшим числом множителей среди тех произведений вида $[\sigma, \tau]$ и $[\sigma, \tau]^{-1}$, $1\leqslant\sigma<\tau\leqslant\omega$, которые удовлетворяют всем требованиям леммы I. Можно даже считать, что это произведение $[\mu, \nu]=g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}}\dots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ вообще является произведением с наименьшим числом множителей, какое можно построить из элементов системы (4) с соблюдением всех требований леммы I. Длина элемента g_{j_μ} будет обозначаться, как выше, через I.

II. *Всякий элемент g_i, входящий в произведение $[\mu, \nu]$ и имеющий длину l, встречается в этом произведении по меньшей мере дважды.*

Действительно, если элемент g_i, $l(g_i)=l$, лишь один раз входит в $[\mu, \nu]$, то ввиду $l[\mu, \nu]<l$ замена в системе (4) элемента g_i через $g_i'=[\mu, \nu]$ приводит к новой допущенной системе образующих, имеющей меньшую длину, чем (4).

III. *Если $\mu\leqslant\sigma\leqslant\tau\leqslant\nu$ и если произведение $[\sigma, \tau]$ не содержит множителей длины l, то $l[\sigma, \tau]<l$. Если же в это произведение множители длины l входят и если $\tau<\nu$, то $l[\sigma, \tau]=l$.*

Пусть утверждения леммы уже доказаны для всех частей произведения $[\mu, \nu]$, состоящих из меньшего числа множителей, чем $[\sigma, \tau]$ — при $\sigma=\tau$ они, очевидно, выполняются. Нам нужно рассмотреть теперь следующие случаи:

1) $l[\sigma, \tau-1]<l$, $l(g_{j_\tau})<l$, $\tau\leqslant\nu$. В этом случае из $l[\mu, \sigma-1]=l[\mu, \tau-1]=l$ следует, что в произведении

$$[\mu, \tau-1]=[\mu, \sigma-1]\cdot[\sigma, \tau-1] \tag{9}$$

правая половина второго множителя остается незатронутой. Теперь из

$$[\mu, \tau]=[\mu, \sigma-1]\cdot[\sigma, \tau-1]\cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau} \tag{10}$$

и $l[\mu, \tau]\leqslant l$, $l(g_{i_\tau})<l$ следует, что в произведении $[\sigma, \tau-1]\cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$ сокращения должны пойти так далеко, чтобы уничтожалась или правая половина первого множителя, или же левая половина второго, а середина соответствующего множителя по крайней мере подверглась объединению. Поэтому

$$l[\sigma, \tau\leqslant\max(l[\sigma, \tau-1], l(g_{j_\tau}))<l.$$

2) $l[\sigma, \tau-1]=l$, $l(g_{j_\tau})<l$, $\tau<\nu$. В этом случае в произведении (9) правая половина второго множителя снова остается незатронутой, а поэтому из $l[\mu, \tau]=l$, $l(g_{j_\tau})<l$ и (10) следует, что в произведении $[\sigma, \tau-1]\cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$ сокращения уничтожают левую половину элемента $g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$, а его середина объединяется. Поэтому $l[\sigma, \tau]=l$.

3) $l[\sigma, \tau-1]<l$, $l(g_{j_\tau})=l$, $\tau<\nu$. Из (10) и

$$l[\mu, \sigma-1]=l[\mu, \tau-1]=l[\mu, \tau]=l \tag{11}$$

следует, как выше, что $l[\sigma, \tau]\leqslant l$. Если бы, однако, на самом деле имел место знак неравенства, то можно было бы уменьшить длину системы (4), так как элемент g_{j_τ} является теперь единственным элементом длины l в произведении $[\sigma, \tau]$. Поэтому $l[\sigma, \tau]=l$.

4) $l[\sigma, \tau-1]=l$, $l(g_{j_\tau})=l$, $\tau<\nu$. Снова ввиду (11) будет $l[\sigma, \tau]\leqslant l$. Пусть $l[\sigma, \tau]<l$. Так как, по индуктивному предположению, $l[\lambda, \tau]=l$, $\sigma<\lambda<\tau$, то мы получили бы в этом случае, что произведение $[\sigma, \tau]^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям леммы I, хотя состоит из меньшего числа множителей, чем произведение $[\mu, \nu]$, в противоречии с выбором последнего. Поэтому $l[\sigma, \tau]=l$.

Лемма III доказана.

IV. $l(g_{j_\nu})=l$.

В самом деле, если $l(g_{j_\nu})<l$, то пусть $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ будет последний множитель в $[\mu, \nu]$, длина которого равна l. Так как

$$l[\mu, \lambda]=l[\mu, \lambda-1]=l(g_{j_\lambda})=l,$$

то элементы $[\mu, \lambda]$ и $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ имеют одинаковые правые половины. Далее, из леммы III при наших предположениях следует, что при $\lambda<\sigma\leqslant\nu$ будет $l[\lambda+1, \sigma]<l$. Поэтому при $\sigma<\nu$ из $l[\mu, \sigma]=l$ следует, как легко видеть, $l[\lambda, \sigma]=l$, а из $l[\mu, \nu]<l$ вытекает $l[\lambda, \nu]<l$. Иными словами, произведение $[\lambda, \nu]$ удовлетворяет всем требованиям леммы I, хотя, в противоречии с леммой II, содержит лишь один элемент длины l.

V. *Произведение* $[\mu, \nu]$ *содержит хотя бы один множитель* $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$, $\mu<\lambda<\nu$, *длина которого равна* l.

В самом деле, если $l(g_{j_\lambda})<l$ для всех λ, $\mu<\lambda<\nu$, то по II $g_{j_\mu}=g_{j_\nu}$ и по III $l[\mu+1, \nu-1]<l$. Поэтому, если $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}=PQR$, где P — левая половина элемента $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$, Q — его середина, R — его правая половина, то $[\mu, \nu-1]=PQR'$. Если теперь $\varepsilon_\nu=-\varepsilon_\mu$, т. е. $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, то из

$$l[\mu, \nu]=l([\mu, \nu-1]\cdot g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu})<l$$

следует $R'R^{-1}=1$, откуда $[\mu, \nu]=1$, что невозможно ввиду условий, наложенных на произведение (8). Если же $\varepsilon_\nu=\varepsilon_\mu$, т. е. $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=PQR$, то $R'P=1$, $Q^2=1$ и $[\mu, \nu]=PR$. Так как, однако,

$$R'=R\cdot[\mu+1, \nu-1],$$

то из $P = R'^{-1}$ следует

$$[\mu, \nu] = [\mu + 1, \nu - 1]^{-1} R^{-1} \cdot R = [\mu + 1, \nu - 1]^{-1},$$

что снова позволяет, в противоречии с условиями, наложенными на произведение (8), заменить это произведение более коротким. Лемма V доказана.

VI. *Среди элементов g_{j_λ}, входящих в произведение $[\mu, \nu]$, удовлетворяющих условию $\mu < \lambda < \nu$ и имеющих длину l, найдется хотя бы один неприводимый.*

Сделаем прежде всего следующие замечания. Из определения приводимого элемента непосредственно следует, что если элемент g приводим и если элемент $g_i^{\varepsilon_i}$ таков, что $l(g_i^{\varepsilon_i}) < l(g)$ и $l(g g_i^{\varepsilon_i}) = l(g)$, то произведение $g g_i^{\varepsilon_i}$ также приводимо; приводимым будет также произведение $g_i^{\varepsilon_i} g$ при условии $l(g_i^{\varepsilon_i} g) = l(g)$. Если, далее, элементы g_1 и g_2 приводимы и $l(g_1) = l(g_2) = l(g_1 g_2)$, то произведение $g_1 g_2$ также приводимо. В самом деле, пусть $g_1 = PQR$; тогда $g_2 = R^{-1} Q' S$ и $g_1 g_2 = P(QQ')S$, где Q и Q' лежат в одном свободном множителе и при нечетной длине $QQ' \neq 1$. Если теперь, по определению приводимого элемента,

$$g_1 \cdot \prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k} = PQP^{-1}, \quad g_2 \cdot \prod_l g_{j_l}^{\delta_l} = R^{-1} Q' R,$$

то

$$g_1 g_2 \cdot \prod_l g_{j_l}^{\delta_l} \cdot \prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k} = P(QQ')P^{-1},$$

т. е. элемент $g_1 g_2$ также приводим. Легко видеть, наконец, что из приводимости элемента g следует приводимость элемента g^{-1}, и обратно.

Переходим к доказательству леммы. Она заведомо справедлива при четном l, так как если бы элемент четной длины из системы (4) был приводимым, то эта система не была бы минимальной. Пусть l нечетное. Из леммы V следует существование в произведении $[\mu, \nu]$ множителей $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$, $\mu < \lambda < \nu$, имеющих длину l. Если бы все эти элементы были приводимыми, то, как показывают сделанные выше замечания и лемма III, приводимым было бы и произведение $[\mu + 1, \nu - 1]$. Кроме того, также по лемме III, $l[\mu + 1, \nu - 1] = l$. Пусть $[\mu + 1, \nu - 1] = PQR$ и

$$[\mu + 1, \nu - 1] \cdot \prod_k g_{i_k}^{\alpha_k} = PQP^{-1}.$$

Тогда $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} = SQ_1 P^{-1}$, $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu} = R^{-1} Q_2 T$, причем ввиду $l[\mu, \nu] < l$ должно быть $Q_1 Q Q_2 = 1$ и $[\mu, \nu] = ST$. Если элементы $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ и $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ также приводимы, то пусть

$$g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} \cdot \prod_m g_{x_m}^{\beta_m} = SQ_1 S^{-1}, \quad g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu} \cdot \prod_n g_{y_n}^{\gamma_n} = R^{-1} Q_2 R.$$

Теперь

$$R\cdot\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}=P^{-1},\quad P^{-1}\cdot\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}=S^{-1},\quad T\cdot\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}=R.$$

Отсюда

$$[\mu,\nu]=S\cdot T=\Big(\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}\Big)^{-1}\cdot PR\Big(\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}\Big)^{-1}=$$
$$=\Big(\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}\Big)^{-1}\Big(\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}\Big)^{-1}\Big(\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}\Big)^{-1},$$

т. е. произведение $[\mu,\nu]$ может быть записано через элементы из системы (4), имеющие меньшую длину, чем l. Это противоречит, однако, условиям, наложенным на произведение (8).

Если же хотя бы один из элементов $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$, $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ неприводим, то ввиду леммы II $g_{j_\mu}=g_{j_\nu}$. Если $\varepsilon_\mu=\varepsilon_\nu$, то $S=R^{-1}$, $P^{-1}=T$, откуда

$$[\mu,\nu]=ST=R^{-1}P^{-1}=\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Если же $\varepsilon_\mu=-\varepsilon_\nu$, то $S=T^{-1}$, откуда $[\mu,\nu]=S\cdot T=1$. В обоих случаях мы снова приходим в противоречие с выбором произведения (8). Лемма VI доказана.

VII. *Всякий неприводимый элемент g_{j_λ} длины l, $\mu<\lambda<\nu$, является особым.*

Если $\varepsilon_\lambda=+1$, то берем элемент $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$, ближайший справа от g_{j_λ}, в произведении $[\mu,\nu]$, из имеющих длину l; $\sigma\leqslant\nu$. Тогда, привлекая произведение $[\lambda,\sigma]$, мы убеждаемся, что элемент g_{j_λ} удовлетворяет всем требованиям, входящим в определение особого элемента. Действительно, условия 2) и 3) следуют из выбора элемента $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$, условия 4), 5) и 6) вытекают из леммы III при $\sigma<\nu$. Эти условия выполняются также, как легко видеть, и при $\sigma=\nu$.

Остается доказать справедливость условия 1). Пусть $j_\sigma=j_\lambda$. Если $\varepsilon_\sigma=+1$ и если $g_{j_\lambda}=PQR$, то будет также $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}=PQR$, откуда

$$g_{j_\lambda}\cdot\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}\cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}=PQR\cdot\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}\cdot PQR.$$

Так как $l[\lambda,\sigma]\leqslant l$ и $l[\lambda,\sigma-1]=l$, то отсюда следует

$$R\cdot\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}=P^{-1},$$

что противоречит неприводимости элемента g_{i_λ}. Если же $\varepsilon_\sigma = -1$, т. е. $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} = R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, то

$$g_{j_\lambda} \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} \cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} = PQR \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} \cdot R^{-1}Q^{-1}P^{-1}.$$

Отсюда следует ввиду $l[\lambda, \sigma] \leqslant l$ и $l[\lambda, \sigma - 1] = l$ равенство $\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} = 1$, откуда $[\lambda, \sigma] = 1$, что противоречит условиям, наложенным на произведение (8). Доказано, что элемент g_{j_λ} является особым.

Если бы было $\varepsilon_\lambda = -1$, то мы взяли бы в произведении $[\mu, \nu]$ элемент длины l, ближайший слева от $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$, и провели бы аналогичные рассуждения. Лемма VII доказана.

Этим заканчивается доказательство утверждения (B), а с ним и теоремы Грушко.

§ 41. Группы с конечным числом определяющих соотношений

Если группа G задана в некоторой системе образующих конечной системой определяющих соотношений, то в эти соотношения входит лишь конечное число образующих и, следовательно, группа G является свободным произведением группы, задаваемой конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений, и некоторой свободной группы. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением лишь групп с конечным числом образующих.

Группы с конечным числом образующих и соотношений составляют много более узкий класс групп, чем все группы с конечным числом образующих — последние, как мы знаем из § 38, образуют множество мощности континуум, в то время как множество групп с конечным числом образующих и соотношений будет, как показывают простые теоретико-множественные соображения, лишь счетным.

К числу групп с конечным числом образующих и конечным числом соотношений принадлежат все конечные группы, как вытекает из их задания таблицами Кэли (см. § 18).

Мы хотим доказать несколько теорем, непосредственно примыкающих к определению групп с конечным числом образующих и соотношений и показывающих, что этот класс групп действительно хорошо определен. Укажем сначала, не предполагая конечности числа образующих или соотношений, некоторые типы преобразований системы образующих и определяющих соотношений, т. е. некоторые способы перехода от данной системы образующих и определяющих соотношений к другой системе образующих и определяющих соотношений той же группы.

Пусть группа G задается системой образующих $\mathfrak{M}$, состоящей из символов a_α, a_β, ..., и некоторой системой определяющих соотношений, связывающих эти образующие. Тогда эту же группу можно задать системой образующих $\overline{\mathfrak{M}}$, состоящей из множества $\mathfrak{M}$ и нового символа b, если к числу определяющих соотношений будет присоединено некоторое соотношение вида

$$bw(a) = 1,$$

где $w(a)$ есть произвольное слово относительно символов a_α, a_β, ...

Докажем сначала следующую лемму.

Пусть дана свободная группа W с системой свободных образующих $\mathfrak{M}$. Если b есть элемент из $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — множество всех элементов из $\mathfrak{M}$, кроме b, а B — нормальный делитель группы W, порожденный элементом b, то фактор-группа W/B изоморфна свободной группе с $\mathfrak{M}'$ в качестве системы свободных образующих.

Действительно, подгруппа W' группы W, порожденная множеством $\mathfrak{M}'$, является свободной группой с $\mathfrak{M}'$ в качестве системы свободных образующих. С другой стороны, всякое слово, входящее в B, обладает тем свойством, что если из него будут вычеркнуты все степени символа b и затем произведены все необходимые сокращения, то получится пустое слово. Это утверждение очевидно для слов, сопряженных с b. Его справедливость для любых элементов из B следует из замечания, что если слова w_1 и w_2 из W таковы, что они превращаются в пустое слово после вычеркивания степеней элемента b и последующих сокращений, то этим же свойством обладает и их произведение w_1w_2. Отсюда следует, что пересечение $B \cap W' = E$, а поэтому ввиду теоремы об изоморфизме

$$W/B \simeq W'/E \simeq W'.$$

Переходим к доказательству теоремы. Если W есть свободная группа с $\mathfrak{M}$ в качестве системы свободных образующих, то $G \simeq W/H$, где нормальный делитель H порождается левыми частями заданных определяющих соотношений. Пусть $\overline{W}$ есть свободная группа с системой свободных образующих $\overline{\mathfrak{M}}$ — отсюда следует включение $\overline{W} \supset W$ — и пусть $\overline{H}$ есть нормальный делитель группы $\overline{W}$, порожденный элементами, входящими в H, и элементом $c = bw(a)$. Нужно доказать, что

$$\overline{W}/\overline{H} \simeq W/H.$$

Предположим сначала, что $w(a)$ есть пустое слово, т. е. $c = b$. Если B есть нормальный делитель группы $\overline{W}$, порожденный элементом b, то ввиду леммы

$$\overline{W}/B \simeq W.$$

По теореме о соответствии между подгруппами группы и факторгруппы (§ 10) нормальному делителю H соответствует в $\overline{W}$ нормальный делитель $\overline{H}'$ и

$$\overline{W}/\overline{H}' \simeq W/H.$$

Но нормальный делитель $\overline{H}'$ совпадает в действительности с $\overline{H}$: он содержит как H, так и элемент b, т. е. $\overline{H}' \supseteq \overline{H}$, но, с другой стороны, всякий элемент из $\overline{H}'$ имеет вид hb', где $h \in H$, $b' \in B$, т. е. $\overline{H}' \subseteq \overline{H}$.

Случай произвольного слова $w(a)$ будет сведен на уже рассмотренный случай, если мы покажем, что множество $\mathfrak{M}$ и элемент $c = b \cdot w(a)$ составляют вместе новую систему свободных образующих для группы $\overline{W}$. Для этого достаточно показать, что элементы a_α, a_β, ... и элемент c не связаны никакими соотношениями, так как очевидно, что эти элементы порождают вместе всю группу $\overline{W}$. Пусть в группе $\overline{W}$ имеет место равенство

$$w_1(a)c^{\delta_1}w_2(a)c^{\delta_2}\dots w_k(a)c^{\delta_k} = 1,$$

где $w_1(a)$, ..., $w_k(a)$ являются непустыми словами относительно элементов a_α, a_β, ..., а δ_1, δ_2, ..., δ_k — целые числа, отличные от нуля. После замены в этом равенстве элемента c через $bw(a)$ и выполнения всех сокращений левая часть должна стать пустым словом, так как иначе мы получим соотношение, связывающее в группе $\overline{W}$ символы из $\overline{\mathfrak{M}}$. В действительности же все множители b и b^{-1} останутся несокращенными, так как при $i = 2, 3, \dots, k$

$$c^{-1}w_i(a)c = w^{-1}(a)b^{-1}w_i(a)bw(a),$$
$$cw_i(a)c^{-1} = bw(a)w_i(a)w^{-1}(a)b^{-1},$$

т. е. в обоих случаях элементы b и b^{-1} разделяются непустым словом. Теорема доказана.

Условимся называть *преобразованием типа A* преобразование системы образующих и системы определяющих соотношений, описанное в доказанной сейчас теореме, а также всякое преобразование, ему обратное, т. е. состоящее в удалении из системы образующих одного элемента b, если этот элемент входит лишь в одно определяющее соотношение, имеющее вид $bw(a) = 1$, где $w(a)$ есть слово относительно остающихся образующих; само это соотношение также удаляется из системы определяющих соотношений.

С другой стороны, если группа задана некоторыми образующими и некоторыми определяющими соотношениями, то всякое другое соотношение между теми же образующими будет *следствием* заданных определяющих соотношений, — т. е. его левая часть содержится в нормальном делителе свободной группы, порожденном левыми частями определяющих соотношений, — и поэтому это соотношение может быть добавлено к системе определяющих соотношений. Наоборот, из системы определяющих соотношений можно удалить всякое соотношение,

являющееся следствием остальных определяющих соотношений. Такие преобразования мы будем называть *преобразованиями типа* B.

Преобразования типа B позволяют легко доказать следующее усиление теоремы Дика (см. § 18). *Если группы* G *и* G' *заданы относительно одних и тех же образующих некоторыми системами определяющих соотношений, причем всякое определяющее соотношение группы* G *является следствием определяющих соотношений группы* G', *то группа* G' *изоморфна фактор-группе группы* G. Действительно, группу G' можно определить в этом случае совокупностью заданных определяющих соотношений групп G и G', а тогда остается лишь применить теорему Дика.

Мы отметим, наконец, *преобразования типа* B'. Пусть группа G задана образующими элементами a_α, a_β, ... и b и некоторой системой определяющих соотношений, одно из которых имеет вид

$$bw(a) = 1,$$

причем элемент b может входить и в другие определяющие соотношения. Берем одно из этих соотношений

$$\overline{w}(a; b) = 1 \tag{1}$$

(его левая часть есть слово относительно a_α, a_β и b), заменяем один из входящих в него множителей b через $w^{-1}(a)$ (или b^{-1} — через $w(a)$) и производим необходимые сокращения. Получаем новое соотношение

$$\overline{w}'(a; b) = 1, \tag{2}$$

которым заменяем соотношение (1) в нашей системе определяющих соотношений.

Преобразования типа B' получаются простым применением преобразований типа B. Действительно, если, например,

$$\overline{w}(a; b) = \overline{w}_1(a; b)b\overline{w}_2(a; b),$$

причем выделен подлежащий замене множитель b, то

$$\overline{w}'(a; b) = \overline{w}_1(a; b)(bw(a))^{-1}\overline{w}_1^{-1}(a; b)\overline{w}(a; b),$$

т. е. соотношение (2) является следствием заданных определяющих соотношений и поэтому, по B, его можно присоединить к системе определяющих соотношений. Но теперь, разрешая последнее равенство относительно $\overline{w}(a; b)$, мы убеждаемся, что соотношение (1) является следствием остальных соотношений и поэтому его можно удалить.

Указанные типы преобразований определяющих соотношений позволяют легко доказать несколько важных теорем о группах с конечной системой образующих и соотношений.

Если группа G задана конечной системой образующих, связанных конечным числом определяющих соотношений, то при всякой другой конечной системе образующих эта группа также может быть задана некоторой конечной системой определяющих соотношений.

Пусть группа G задана образующими $a_1, \ldots, a^k$ и определяющими соотношениями $w_1(a) = 1, \ldots, w_s(a) = 1$. Пусть $b_1, \ldots, b_l$ есть другая конечная система образующих для G. Всякое b_i может быть записано в виде произведения степеней элементов первой системы. Выбираем для каждого i одну из возможных записей:

$$b_i = f_i(a), \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Группа G может быть теперь задана (преобразования типа A) образующими $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ и определяющими соотношениями

$$\left.\begin{array}{l} w_1(a) = 1, \ldots, w_s(a) = 1, \\ b_1 = f_1(a), \ldots, b_l = f_l(a). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Записываем, далее, всякое a_j через $b_1, \ldots, b_l$,

$$a_j = \varphi_j(b), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

и присоединяем к определяющим соотношениям (3) соотношения

$$a_1 = \varphi_1(b), \ldots, a_k = \varphi_k(b), \tag{4}$$

которые должны быть следствиями из соотношений (3) (преобразования типа B). Заменяем теперь с помощью соотношений (4) элементы $a_1, \ldots, a_k$ в (3) их выражениями через $b_1, \ldots, b_l$ (преобразования типа B'). Мы получаем $s + l$ соотношений, связывающих элементы $b_1, \ldots, b_l$. Эти соотношения вместе с (4) дают систему определяющих соотношений для группы G относительно образующих $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$. Наконец, применяя преобразования типа A, мы удаляем образующие $a_1, \ldots, a_k$ вместе с соотношениями (4).

Если группа G при некоторой конечной системе образующих задается конечным числом определяющих соотношений, то при любой другой конечной системе образующих этой группы из всякой системы определяющих соотношений, связывающих эти образующие, можно выбрать конечную подсистему, уже достаточную для задания группы.

Доказанная выше теорема позволяет ограничиться следующим случаем: группа G задается относительно образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ как конечной системой определяющих соотношений

$$w_1(a) = 1, \ldots, w_s(a) = 1,$$

так и бесконечной системой определяющих соотношений

$$\overline{w}_1(a) = 1, \overline{w}_2(a) = 1, \ldots.$$

В соответствующей свободной группе слова $w_1(a), \ldots, w_s(a)$ порождают тот же нормальный делитель H, что и слова

$$\overline{w}_1(a), \overline{w}_2(a), \ldots. \tag{5}$$

Всякий элемент $w_i(a)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, может быть записан, однако, в виде произведения конечного числа элементов, сопряженных с некоторыми элементами из последовательности (5). Таким образом, уже конечное число элементов из (5) порождает весь нормальный делитель H. Справедлива, наконец, такая теорема (Тице [1]).

Если группа G задана двумя способами конечными системами образующих и конечными системами определяющих соотношений, то от одного из этих заданий можно перейти к другому конечным числом преобразований типа A и типа B.

Пусть, в самом деле, группа G задается системой образующих $a_1, \ldots, a_k$, связанных определяющими соотношениями

$$w_1(a) = 1, \ldots, w_s(a) = 1, \tag{6}$$

и системой образующих $b_1, \ldots, b_l$ с соотношениями

$$w'_1(b) = 1, \ldots, w'_t(b) = 1. \tag{7}$$

Так как, далее, всякое b_i должно выражаться через первую систему образующих, то пусть $b_i = f_i(a)$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Аналогично $a_j = \varphi_j(b)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Мы можем теперь, применяя преобразования A, задать группу G образующими $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ и определяющими соотношениями (6) и $b_1 = f_1(a), \ldots, b_l = f_l(a)$, а затем, совершая преобразования типа B, присоединить соотношения (7) и соотношения $a_1 = \varphi_1(b), \ldots, a_k = \varphi_k(b)$. Вполне симметричным образом к этой же системе образующих и соотношений можно было бы привести и второй способ задания группы G. Доказательство теоремы завершается теперь замечанием, что преобразования, обратные к преобразованиям типа A и типа B, сами принадлежат к этим же типам. [См. Д.15.2.]

Для групп с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений естественно возникли (см. Дэн [1]) некоторые проблемы алгоритмического характера. Важнейшей среди них является проблема тождества: нужно найти алгоритм, который позволял бы для любой группы, заданной конечным числом образующих и соотношений, в конечное число шагов ответить на вопрос, равно ли единице некоторое данное слово в этих образующих,

или же доказать, что такой алгоритм не может существовать.

Проблему тождества удается пока положительно решить для некоторых более частных классов групп, чем все группы с конечным числом образующих и соотношений. Так, для свободных групп (даже без предположения о конечности числа образующих) решение проблемы тождества вытекает из того, что всякий элемент обладает однозначной несократимой записью. Легко видеть, далее, что проблема тождества решается для свободного произведения, если она решена для каждого из сомножителей. Для групп с одним определяющим соотношением проблему тождества решил Магнус [3]. Новый более общий подход к проблеме тождества содержится в работах Тартаковского [1–6] [1]).

Еще труднее проблема сопряженности, т.е. проблема разыскания алгоритма для ответа на вопрос, будут ли сопряжены в группе с конечным числом образующих и соотношений два данных слова в этих образующих. Для свободных групп эта проблема решается положительно: если в свободной группе W дано слово w в свободных образующих, то, «свертывая это слово в цикл», т.е. приписывая его конец к началу, и выполняя все сокращения, мы получим циклическое слово, соответствующее слову w; в циклическом слове все элементы равноправны, нет первого или последнего. Два слова в свободной группе W будут, очевидно, тогда и только тогда сопряжены, если им соответствует одно и то же циклическое слово.

Наконец, стоит проблема изоморфизма, т.е. проблема разыскания алгоритма для ответа на вопрос, изоморфны ли друг другу две группы, заданные конечным числом образующих и соотношений. Эта проблема не имеет пока решения даже в том случае, когда одна из заданных групп является единичной, а также в том случае, когда каждая из двух групп задается одним определяющим соотношением. Заметим, что задание конечных групп таблицами Кэли приводит к аналогичной проблеме изоморфизма. [См. Д.15.4.]

Группы с одним определяющим соотношением составляют класс групп, в некотором смысле ближайший к свободным группам. Их изучение продвинулось несколько дальше, чем в случае групп с любым конечным числом соотношений, но, например, вопрос о подгруппах группы с одним соотношением пока очень далек от исчерпания. Основным результатом является здесь следующая теорема о свободе (Магнус [1]).

[1]) В корректуре второго издания было отмечено, что отрицательное решение проблемы тождества получено Новиковым [1]. Ко времени подготовки третьего издания получили решение и проблемы, формулируемые ниже. [См. Д.15.4.]

Если группа G задана образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и одним соотношением $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$, если, далее, элемент a_n содержится в этом соотношении и не может быть удален из него трансформированием, то подгруппа $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ будет свободной, а элементы $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — ее свободными образующими.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы [1]). Отметим, что из нее можно вывести (см. Магнус [1]), что два элемента свободной группы W тогда и только тогда порождают в W один и тот же нормальный делитель, если они сопряжены. Это еще раз указывает на большую насыщенность свободной группы нормальными делителями, усмотренную нами из иных соображений в § 36. [См. Д.15.2.]

В работе Уайтхеда [2] указан алгоритм для решения вопроса, будет ли данная группа с одним соотношением изоморфна какой-либо свободной группе.

[1]) См. Рейдемейстер [3].

Глава одиннадцатая

ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ. СТРУКТУРЫ

§ 42. Предварительные замечания

Определение и простейшие свойства прямого произведения групп уже были указаны в § 17. Целью настоящей главы является изложение более глубоких результатов теории прямых произведений.

Мы знаем из теории абелевых групп (см. §§ 25 и 26), что существуют группы, которые разлагаются в прямое произведение, но не могут быть разложены в прямое произведение неразложимых групп. Это приводит к вопросу об условиях, при которых такое разложение возможно. Частичный ответ дает следующая теорема.

Если все убывающие цепи прямых множителей группы G обрываются, то эта группа не может быть разложена в прямое произведение бесконечного множества подгрупп, а всякое ее прямое разложение с конечным числом множителей может быть продолжено до разложения, все множители которого неразложимы.

Действительно, если группа G обладает прямыми разложениями с бесконечным множеством множителей, то существуют разложения, множество множителей в которых счетное, и пусть

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$$

будет одно из них. Если

$$B_k = A_k \times A_{k+1} \times \ldots,$$

то

$$G = B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots$$

будет бесконечной убывающей последовательностью прямых множителей группы G. Первая половина теоремы доказана.

Пусть теперь

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$$

будет таким прямым разложением группы G, которое не может быть продолжено до разложения с неразложимыми множителями. Отсюда следует, что хотя бы один из прямых множителей этого разложения, например H_1, разложим, но не может быть разложен в прямое произведение неразложимых множителей. Берем некоторое прямое разложение $H_1 = H_{11} \times H_{12}$ группы H_1. Хотя бы одна из подгрупп H_{11}, H_{12}, являющихся, очевидно, прямыми множителями и для G, снова

должна быть разложимой, но лишенной разложений с неразложимыми множителями. Продолжая этот процесс, мы приходим к бесконечной убывающей цепочке прямых множителей группы G.

В формулировке доказанной нами теоремы предположение об обрыве убывающих цепочек прямых множителей группы G можно заменить условием *обрыва возрастающих цепочек прямых множителей*. Действительно, если дана бесконечная убывающая последовательность прямых множителей группы G,

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots,$$

то, по VII′ (§ 17), $H_n = H_{n+1} \times F_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Мы приходим поэтому к возрастающей последовательности

$$F_1 \subset (F_1 \times F_2) \subset \ldots \subset (F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n) \subset \ldots,$$

состоящей из прямых множителей группы G. Таким образом, из обрыва возрастающих цепочек прямых множителей вытекает обрыв убывающих цепочек прямых множителей и, следовательно, справедливость доказанной выше теоремы.

Следствие. *Всякая группа, все убывающие или возрастающие инвариантные цепи которой обрываются, и, в частности, всякая группа с главным рядом разлагается в прямое произведение конечного числа неразложимых множителей.*

В § 17 был указан ряд примеров неразложимых групп. Мы знаем, далее, из § 35, что неразложимой в прямое произведение будет всякая группа, разложимая в свободное произведение. Этот результат показывает, в частности, что не существует такой группы, отличной от E, которая служила бы прямым множителем для всякой группы, в которой она содержится в качестве подгруппы. [См. Д.5.1.] Представляет интерес поэтому следующая теорема, позволяющая по-новому посмотреть на совершенные группы (см. § 13).

Всякая совершенная группа выделяется прямым множителем из любой группы, в которой она содержится в качестве нормального делителя.

Доказательство. Пусть группа G содержит нормальный делитель A, являющийся совершенной группой. Обозначим через B централизатор A в G. Он будет, как доказано в конце § 11, нормальным делителем в G. Пересечение нормальных делителей A и B равно E, так как A — группа без центра, а поэтому A и B составляют в G прямое произведение. Это прямое произведение совпадает со всей группой G: если g — произвольный элемент из G, то трансформирование этим элементом нормального делителя A определяет некоторый автоморфизм совершенной группы A, который должен быть внутренним, т. е. порождаться трансформированием некоторым элементом a из A. Отсюда следует, что элемент $b = ga^{-1}$ перестановочен с каждым

элементом из A, т. е. принадлежит к B, а поэтому

$$g = ba \in A \times B,$$

$G = A \times B$.

Можно доказать (см. Бэр [33]), что лишь совершенные группы обладают свойством, рассмотренным в этой теореме. [См. Д.5.1.]

Мы будем интересоваться в дальнейшем двумя вопросами, основными в теории прямых произведений групп. Это будет, во-первых, вопрос об условиях, при которых любые два прямых разложения группы обладают общим продолжением и, следовательно, группа допускает не более одного прямого разложения с неразложимыми множителями. Абелевы группы, в частности конечные, показывают, что случай, когда группа обладает лишь единственным прямым разложением с неразложимыми множителями, является очень редким. В некоммутативном случае он встречается, однако, чаще; мы покажем ниже, что интересующим нас свойством обладают, в частности, все группы без центра, а также все группы, совпадающие со своим коммутантом.

Еще важнее вопрос об условиях, при которых любые два прямых разложения группы обладают изоморфными продолжениями, а поэтому изоморфны между собой любые два прямых разложения с неразложимыми множителями, если группа вообще допускает такие разложения. Многие важные типы абелевых групп обладают, как мы знаем, указанным свойством. Вместе с тем в § 28 было показано, что существуют примарные абелевы группы, обладающие такими прямыми разложениями, которые не имеют изоморфных продолжений. Соответствующие примеры для случая операторных абелевых групп, разлагающихся в прямое произведение конечного числа неразложимых групп, указал Круль [3], а в работе Куроша [16] построен пример группы без операторов, обладающей двумя неизоморфными прямыми разложениями, каждое из которых состоит из двух неразложимых множителей. Этот пример будет сейчас изложен.

Рассмотрим группу A с образующими a_1 и a_2 и одним определяющим соотношением

$$a_1^2 = a_2^2.$$

Это будет (см. § 35) свободное произведение двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой $\{a\}$, где

$$a = a_1^2 = a_2^2.$$

Из результатов § 35 следует, что центром группы A будет подгруппа $\{a\}$ и что A не содержит отличных от 1 элементов конечного порядка. Группа A неразложима, следовательно, в прямое произведение: если бы такое разложение существовало, то центр $\{a\}$ целиком содержался бы в одном из прямых множителей, а тогда компонента

каждого из элементов a_1, a_2 во втором множителе была бы не более чем второго порядка.

Рассмотрим, с другой стороны, группу B с образующими b_1 и b_2 и одним определяющим соотношением

$$b_1^3 = b_2^3.$$

Как и выше, группа B имеет своим центром подгруппу $\{b\}$, где

$$b = b_1^3 = b_2^3,$$

не содержит элементов конечного порядка, отличных от 1, и, наконец, неразложима в прямое произведение.

Искомая группа G есть прямое произведение групп A и B:

$$G = A \times B. \tag{1}$$

Для того чтобы построить другое прямое разложение группы G, не изоморфное с разложением (1), положим

$$\begin{aligned} &c = a^3b^{-2}, \qquad d = a^{-1}b, \\ &c_1 = aa_1b^{-1}, \quad c_2 = aa_2b^{-1}, \quad c_3 = ab^{-1}b_1, \quad c_4 = ab^{-1}b_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \quad D = \{d\}.$$

Так как из (2) вытекают равенства

$$c_1d = a_1, \quad c_2d = a_2, \quad c_3d = b_1, \quad c_4d = b_2,$$

то

$$G = \{C, D\}.$$

Далее, подгруппы C и D поэлементно перестановочны, так как D входит в центр группы G.

Найдем пересечение подгрупп C и D. Из (2) следует, что

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^3 = c_4^3 = c$$

и что каждый из элементов c_1, c_2 перестановочен с каждым из элементов c_3, c_4. Отсюда вытекает, так как элемент c принадлежит к центру группы, что всякий элемент x из подгруппы C можно записать в виде произведения некоторой степени элемента c на слово длины l_1, $l_1 \geqslant 0$, в котором чередуются первые степени элементов c_1 и c_2, и на слово длины l_2, $l_1 \geqslant 0$, в котором чередуются первые и вторые степени элементов c_3 и c_4. Заменяя в этой записи элементы c_1, c_2, c_3, c_4 их выражениями из (2), мы придем к записи элемента x в виде произведения элемента из центра на слово длины l_1, в котором чередуются первые степени элементов a_1 и a_2, и на слово длины l_2, в котором чередуются первые и вторые степени элементов b_1 и b_2. Элемент x будет, следовательно, принадлежать к центру группы G лишь в том

случае, если $l_1 = l_2 = 0$, т. е. если x есть степень элемента c. Отсюда следует, что

$$C \cap D = \{c\} \cap D = E.$$

Этим доказано существование прямого разложения

$$G = C \times D, \tag{3}$$

которое не будет, очевидно, изоморфным с разложением (1). Оба множителя разложения (3) неразложимы: для D это очевидно, а для C доказывается так же, как выше доказывалось для группы A; при этом следует учесть, что, как вытекает из сказанного в предшествующем абзаце, центром группы C служит подгруппа $\{c\}$.

Существование примеров, подобных только что рассмотренному, делает естественным разыскание возможно более широких классов групп, для которых можно утверждать изоморфизм двух любых прямых разложений с неразложимыми множителями или, более общо, существование изоморфных продолжений для произвольных прямых разложений. Для любых конечных групп это было доказано Ремаком [1] и передоказано Шмидтом [1, 2]. Позже Шмидт [4] доказал соответствующую теорему для групп, обладающих главным рядом, причем допускалась произвольная система операторов. Эта теорема Шмидта (называемая также теоремой Ремака–Шмидта) явилась источником многочисленных исследований. Ее различные обобщения, а также результаты, идущие в иных направлениях, можно найти, в частности, в работах Куроша [1, 13, 16], Фиттинга [2], Коржинека [1], Головина [1], Лившица [2], Бэра [37, 38].

Сформулируем следующую теорему Коржинека: *если в центре группы G обрываются убывающие цепи подгрупп, то два любых прямых разложения группы G обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Оказалось, далее, что теорию прямых разложений целесообразно развивать в рамках теории дедекиндовых структур. Перенесение на дедекиндовы структуры самой теоремы Шмидта указал Орэ [2]. Дальнейшие результаты в этом направлении содержатся в указанных выше работах Куроша [13, 16], а также в работах Граева [3], Бэра [39], Лившица [3]. Мы докажем в § 47 одну теорему из работы Куроша [16], из которой вытекает теорема Шмидта; при этом, стремясь достигнуть наибольшей прозрачности, мы используем смешанные теоретико-структурные и теоретико-групповые методы. Перенесение этой теоремы в теорию структур можно найти в работе Лившица [3]. [См. Д.5.3.]

Центральный изоморфизм. Две подгруппы A и B группы G называются *центрально изоморфными*, если они изоморфны, причем между ними существует такой изоморфизм φ (операторный, если рассматривается группа с операторами), что для всякого элемента a из A элемент ab^{-1}, где $b = a\varphi$, лежит в центре группы G. Заметим,

что в этом случае

$$b^{-1}a = b^{-1}(ab^{-1})b = ab^{-1}.$$

Два прямых разложения группы G называются *центрально изоморфными*, если между множителями этих двух разложений существует такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие множители центрально изоморфны. Как правило, изоморфизм прямых разложений группы оказывается центральным изоморфизмом.

В дальнейшем будет использоваться следующая лемма.

Если $G = A_1 \times B = A_2 \times B$, *то подгруппы* A_1 *и* A_2 *центрально изоморфны*.

Действительно, подгруппы A_1 и A_2 изоморфны, так как они по VIII, § 17 изоморфны фактор-группе G/B. Элементы a_1 и a_2, лежащие в A_1 и A_2 и соответствующие друг другу при этом изоморфизме, будут содержаться в одном смежном классе по B, т. е. существует такой элемент b из B, что $a_1 = a_2 b$. Элемент b перестановочен с любым элементом из A_2. С другой стороны, любой элемент из B перестановочен как с a_1, так и с a_2, а поэтому он должен быть перестановочен и с b. Элемент b содержится, следовательно, в центре группы G.

Эта лемма позволяет применить при доказательстве центрального изоморфизма прямых разложений следующий прием. Пусть даны два прямых разложения группы G:

$$G = \prod_{\alpha} A_\alpha = \prod_{\alpha} B_\alpha, \tag{4}$$

между множителями которых уже установлено взаимно однозначное соответствие. Пусть, далее, всякий множитель A_α первого разложения *замещает* во втором разложении соответствующий ему множитель B_α, т. е. для всякого α имеет место прямое разложение

$$G = A_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} B_\beta.$$

В этом случае, как вытекает из леммы, прямые разложения (4) будут центрально изоморфными. Изучение различных вариантов понятия з а м е щ е н и я в теории прямых произведений можно найти в работе Бэра [37].

§ 43. Структуры

Понятие подгруппы играет во всех частях теории групп исключительно важную роль. Эта роль особенно велика в теории композиционных рядов и прямых произведений, где в определениях основных понятий (прямое произведение, главный ряд), а также в значительной степени в формулировках основных теорем участвуют не элементы группы с их умножением, а лишь подгруппы (или нормальные делители) с теоретико-множественным включением и операциями пересечения и объединения. Оказывается целесообразным поэтому выделить

в качестве самостоятельного объекта изучения аксиоматически определяемые образования, подобные множеству всех подгрупп или всех нормальных делителей группы. Образования такого рода, называемые структурами, встречаются в самых различных отделах математики и их теория уже достаточно широко разработана (см. книгу Биркгофа [5]). В этом и следующем параграфах будут изложены лишь некоторые основные определения и элементарные свойства структур, используемые затем в теории прямых произведений.

Множество S называется *частично упорядоченным*, если в нем для некоторых пар элементов a, b определено отношение $a \leqslant b$ (словами: «a содержится в b», «a предшествует b», «a меньше или равно b»), удовлетворяющее условиям:

1) $a \leqslant a$;

2) из $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ следует $a = b$, т. е. элементы a и b совпадают;

3) из $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ следует $a \leqslant c$ (транзитивность).

Символ $a < b$ будет означать, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Символы $a \geqslant b$ («a содержит b», «a следует за b», «a больше или равно b») и $a > b$ равносильны соответственно с $b \leqslant a$ и $b < a$.

Частично упорядоченное множество S называется *структурой*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

I. Для всякой пары элементов a, b из S существует в S такой элемент $c = ab$, *произведение* элементов a и b, что

$$c \leqslant a, \quad c \leqslant b,$$

причем если некоторый элемент c' также обладает свойствами $c' \leqslant a$, $c' \leqslant b$, то $c' \leqslant c$.

II. Для всякой пары элементов a, b из S существует в S такой элемент $d = a + b$, *сумма* элементов a и b, что

$$d \geqslant a, \quad d \geqslant b,$$

причем если некоторый элемент d' также обладает свойствами $d' \geqslant a$, $d' \geqslant b$, то $d' \geqslant d$.

Это определение, опирающееся на теоретико-множественное понятие упорядоченности, может быть заменено следующим вполне алгебраическим определением.

Множество S называется *структурой*, если в нем определены две алгебраические операции, умножение и сложение, ставящие в соответствие всякой паре элементов a, b из S их произведение ab и их сумму $a + b$, причем эти операции коммутативны и ассоциативны,

$$ab = ba, \quad a + b = b + a, \tag{1}$$

$$a(bc) = (ab)c, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \tag{2}$$

удовлетворяют при всяком a из S условиям

$$aa = a, \quad a + a = a \tag{3}$$

и связаны между собою условием:

$$\text{если} \quad ab = a, \quad \text{то} \quad a + b = b \quad \text{и обратно.} \tag{4}$$

Докажем *эквивалентность этих двух определений*. Произведение и сумма двух элементов, введенные при первом определении, однозначны: если, например, в аксиоме I роль элемента c может выполнять также элемент $\overline{c}$, то $c \leqslant \overline{c}$, $\overline{c} \leqslant c$, откуда $\overline{c} = c$. Мы имеем дело, следовательно, с алгебраическими операциями. Справедливость для них условий (1) и (3) очевидна. Проверим условие (2), например, для умножения. Так как по I

$$\begin{aligned} a(bc) &\leqslant a, \\ a(bc) &\leqslant bc \leqslant b, \\ a(bc) &\leqslant bc \leqslant c, \end{aligned}$$

то снова, ввиду I,

$$\begin{aligned} a(bc) &\leqslant ab, \\ a(bc) &\leqslant (ab)c. \end{aligned}$$

Аналогично $(ab)c \leqslant a(bc)$, откуда по 2 $a(bc) = (ab)c$.

Докажем, наконец, справедливость условия (4). Из $ab = a$ следует по I $a \leqslant b$, т. е. $b \geqslant a$, а так как по I будет также $b \geqslant b$, то по II $b \geqslant a + b$. С другой стороны, ввиду II, $b \leqslant a + b$. Поэтому по 2 $a + b = b$. Верно и обратное.

Второе определение выведено, следовательно, из первого. Покажем теперь, что первое может быть выведено из второго. Если в множестве S определены операции со свойствами (1)–(4), то полагаем $a \leqslant b$, если для элементов a и b имеют место эквивалентные ввиду (4) равенства $ab = a$ и $a + b = b$. Этим в множестве S вводится частичная упорядоченность. Действительно, из (3) следует $a \leqslant a$. Если, далее, отношения $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ имеют место одновременно, то $ab = a$, $ba = b$; так как, однако, по (1) $ab = ba$, то $a = b$. Если, наконец, $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, т. е. $ab = a$, $bc = b$, то, ввиду (2),

$$ac = (ab)c = a(bc) = ab = a,$$

т. е. $a \leqslant c$.

Докажем теперь справедливость аксиомы I. Из

$$(ab)a = a(ba) = a(ab) = (aa)b = ab$$

следует $ab \leqslant a$. Аналогично $ab \leqslant b$. Если теперь в S взят произвольный элемент c', удовлетворяющий условиям $c' \leqslant a$, $c' \leqslant b$, т. е. $c'a = c'$, $c'b = c'$, то

$$c'(ab) = (c'a)b = c'b = c',$$

откуда $c' \leqslant ab$. Элемент ab является, следовательно, произведением элементов a, b в смысле аксиомы I. Аналогичным образом доказывается, что элемент $a+b$ будет суммой элементов a и b в смысле аксиомы II.

Примером структуры, основным для теории групп, является множество всех подгрупп некоторой группы G. *Роль отношения порядка в множестве подгрупп играет их теоретико-множественное включение, пересечение двух подгрупп является их произведением в смысле теории структур, объединение двух подгрупп* (*т. е. подгруппа, ими порожденная*) — *их суммой*. Структурой относительно этих же операций будет множество всех нормальных делителей группы, а также вообще множество всех подгрупп данной группы, допустимых относительно некоторой области операторов.

Подмножество S' структуры S называется *подструктурой* в S, если оно является структурой относительно операций, определенных в S, т. е. если оно вместе со всякими двумя своими элементами содержит их произведение и их сумму. Так, структура нормальных делителей будет подструктурой в структуре всех подгрупп некоторой группы, так как пересечение и объединение нормальных делителей снова являются нормальными делителями. Следует особо подчеркнуть, что при определении подструктуры используются операции, определенные в структуре, а не частичная упорядоченность: подмножество структуры S, являющееся структурой относительно частичной упорядоченности, существующей в S, не всегда будет удовлетворять данному выше определению подструктуры.

Среди элементов структуры S может существовать такой элемент, который содержится во всяком другом элементе структуры. Этот (единственный, если он существует) элемент обозначается символом 0 и называется *нулем* структуры; он удовлетворяет, очевидно, при всех a из S условиям

$$a \cdot 0 = 0, \quad a + 0 = a.$$

Структура S может обладать также элементом, содержащим всякий другой элемент. Этот элемент обозначается символом 1 и называется *единицей* структуры; он удовлетворяет при всех a из S условиям

$$a \cdot 1 = a, \quad a + 1 = 1.$$

В структуре всех подгрупп группы G роль нуля играет единичная подгруппа E, роль единицы — сама группа G.

Структуры S и S' называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сумма двух любых элементов из S переходит в сумму их образов в S', произведение этих элементов — в произведение образов. Можно сказать также, используя связь между структурными операциями и частичной упорядоченностью, что изоморфизм структур есть взаимно однозначное соответствие между ними, сохраняющее существующие в этих структурах отношения порядка.

Полные структуры. Говоря о структуре подгрупп или структуре нормальных делителей группы, мы используем лишь существование пересечений и объединений для конечного числа подгрупп или нормальных делителей. В действительности, однако, в группе однозначно определены пересечение и объединение для любого множества подгрупп и любого множества нормальных делителей. Совокупность всех подгрупп группы, а также совокупность всех нормальных делителей или вообще всех подгрупп, допустимых при данной системе операторов, принадлежат к числу образований, называемых полными структурами.

Частично упорядоченное множество S называется *полной структурой*, если для любого множества элементов a_α из S (α пробегает множество индексов M) в S существуют элементы c и d со следующими свойствами:

1) $c \leqslant a_\alpha$ для всех α из M, причем если некоторый элемент c' также удовлетворяет условию $c' \leqslant a_\alpha$ для всех α из M, то $c' \leqslant c$.

2) $d \geqslant a_\alpha$ для всех α из M, причем если некоторый элемент d' также удовлетворяет условию $d' \geqslant a_\alpha$ для всех α из M, то $d' \geqslant d$.

Однозначно определенные элементы c и d называются соответственно *произведением* и *суммой* элементов a_α, $\alpha \in M$, и обозначаются символами

$$c = \prod_{\alpha \in M} a_\alpha, \quad d = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha.$$

Понятно, что всякая полная структура является и просто структурой, а поэтому для конечных произведений и сумм мы будем употреблять также и ту запись, которая использовалась раньше.

Определение полной структуры можно дать также в следующей форме.

Множество S будет полной структурой, если в нем для любого подмножества однозначно определены произведение и сумма, причем выполняются условия (4) из определения структуры, а также следующее условие, частными случаями которого являются условия (1), (2) и (3) из определения структуры: если в S даны элементы a_α, $\alpha \in M$, и если множество индексов M произвольным образом представлено как объединение подмножеств M_β, $\beta \in N$, то

$$\prod_{\beta \in N} \Big(\prod_{\alpha \in M_\beta} \Big) = \prod_{\alpha \in M} a_\alpha, \tag{5}$$

$$\sum_{\beta \in N} \Big(\sum_{\alpha \in M_\beta} a_\alpha \Big) = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha. \tag{6}$$

Из первого определения полной структуры вытекает второе. Действительно, первое определение влечет за собою, как мы знаем, справедливость условия (4). Остается доказать равенства (5) и (6).

Докажем любое из них, хотя бы первое. Пусть

$$\prod_{\alpha\in M} a_\alpha = c, \quad \prod_{\alpha\in M_\beta} a_\alpha = c_\beta, \quad \prod_{\beta\in N} c_\beta = \overline{c}.$$

Тогда $c \leqslant a_\alpha$, $\alpha \in M_\beta$, т. е. $c \leqslant c_\beta$, а поэтому $c \leqslant \overline{c}$. С другой стороны, для любого α из M есть такое β из N, что $\alpha \in M_\beta$, а поэтому $c_\beta \leqslant a_\alpha$. Отсюда следует, что

$$\overline{c} \leqslant c_\beta \leqslant a_\alpha, \quad \alpha \in M,$$

т. е. $\overline{c} \leqslant c$. Мы пришли, следовательно, к равенству $c = \overline{c}$, т. е. доказали (5).

Из второго определения полной структуры вытекает первое. Действительно, из него вытекает, как мы знаем, что S будет структурой, причем $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $ab = a$, и, следовательно, $a + b = b$. Пусть теперь в S дано произвольное множество элементов a_α, $\alpha \in M$, и пусть

$$\prod_{\alpha\in M} a_\alpha = c.$$

Тогда для любого α_0 из M будет ввиду (5)

$$a_{\alpha_0} c = a_{\alpha_0} \cdot \prod_{\alpha\in M} a_\alpha = \prod_{\alpha\in M} a_\alpha = c,$$

т. е. $c \leqslant a_\alpha$ для всех α из M. Если, с другой стороны, элемент c' таков, что $c' \leqslant a_\alpha$ для всех α из M, т. е. $c' a_\alpha = c'$, то снова, ввиду (5),

$$c' c = c' \prod_{\alpha\in M} a_\alpha = \prod_{\alpha\in M} (c' a_\alpha) = \prod_{\alpha\in M} c' = c',$$

откуда $c' \leqslant c$. Для суммы элементов a_α, $\alpha \in M$, можно получить аналогичные результаты.

Всякая полная структура обладает нулем и единицей. Это будут соответственно произведение и сумма всех элементов структуры.

§ 44. Дедекиндовы и вполне дедекиндовы структуры

Связь между структурными операциями умножения и сложения, которая дается аксиомой (4) из определения структуры, весьма слаба. Во многих случаях оказывается необходимым наложить на изучаемые структуры дополнительные ограничения, делающие эту связь более тесной. Наиболее привычным для нас был бы, конечно, закон дистрибутивности

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Структуры, в которых этот закон выполняется для любой тройки элементов, называются *дистрибутивными структурами* и являются для многих отделов математики естественным типом структур. Для теории групп это ограничение было бы, однако, излишне сильным.

Действительно, группы, структуры всех подгрупп которых дистрибутивны, составляют очень узкий класс, как показывает следующая теорема (Орэ [6]).

Группа тогда и только тогда обладает дистрибутивной структурой подгрупп, если она или циклическая, или же является объединением возрастающей последовательности циклических групп.

В самом деле, если дана бесконечная циклическая группа $\{a\}$, то всякая подгруппа этой группы обладает единственным образующим элементом вида a^k, где $k \geqslant 0$. Легко видеть, что при $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$

$$\{a^k\} \cap \{a^l\} = \{a^{[k,l]}\}, \quad \{a^k\} \cdot \{a^l\} = \{a^{(k,l)}\},$$

где $[k, l]$ есть наименьшее общее кратное, (k, l) — наибольший общий делитель чисел k и l. Иными словами, структура подгрупп бесконечной циклической группы оказывается изоморфной структуре целых неотрицательных чисел с операцией взятия наименьшего общего кратного в качестве структурного умножения и операцией взятия наибольшего общего делителя в качестве структурного сложения, т. е. с отношением «m делится на n» в качестве отношения $m \leqslant n$. Доказательство дистрибутивности этой последней структуры не представляет трудностей: если числа k, l и m делятся на простое число p, взятое соответственно с показателями α, β и γ, то числа $[(k, l), m]$ и $([k, m], [l, m])$ делятся на число p, взятое с показателями $\max(\min(\alpha, \beta), \gamma)$ и $\min(\max(\alpha, \gamma), \max(\beta, \gamma))$; легко видеть, однако, что эти показатели равны.

Таким же путем можно показать, что структура подгрупп конечной циклической группы порядка n изоморфна структуре целых положительных чисел, являющихся делителями числа n, с теми же структурными операциями, что и выше. Эта структура будет подструктурой в только что рассмотренной структуре и поэтому также будет дистрибутивной. Что же касается дистрибутивности структуры подгрупп объединения возрастающей последовательности циклических групп, то она легко выводится из сказанного выше.

Переходим к доказательству обратного утверждения. Предположим сперва, что нам дана группа G с двумя образующими, $G = \{a, b\}$, обладающая дистрибутивной структурой подгрупп, но не являющаяся циклической. Введем обозначения

$$A = \{a\}, \quad B = \{b\};$$

условимся, далее, называть порядком некоторого элемента c относительно некоторой подгруппы U наименьший положительный показатель n, с которым элемент c входит в U, если такой показатель существует, и нуль в противоположном случае. Пусть элемент c лежит вне подгрупп A и B и имеет относительно этих подгрупп соответственно порядки n_1 и n_2. Тогда

$$(\alpha) \qquad \{c\} \cap A = \{c^{n_1}\}, \quad \{c\} \cap B = \{c^{n_2}\}.$$

Далее, из

$$\{A, B\} \cap \{c\} = G \cap \{c\} = \{c\}$$

следует на основании дистрибутивного закона

$$\{A \cap \{c\}, B \cap \{c\}\} = \{c\}.$$

Иными словами, $\{c^{n_1}, c^{n_2}\} = \{c\}$, т. е. существуют такие целые числа x и y, что

$$c^{n_1 x + n_2 y} = c.$$

Так как числа n_1 и n_2 отличны от единицы ввиду выбора элемента c и, сверх того, если элемент c имеет в G конечный порядок n, служат для n делителями, то ни одно из них не равно нулю. Отсюда следует, что порядки m_1 и m_2 элементов a и соответственно b относительно пересечения $D = A \cap B$ также отличны от нуля, причем эти порядки не зависят, очевидно, от выбора образующих a и b в подгруппах A и B. Для дальнейшего мы будем считать, что выбор образующих совершен так, что $a^{m_1} = b^{m_2} = d$; возможность такого выбора образующих следует из того, что если в циклической группе дана подгруппа индекса m, то всякий образующий элемент подгруппы является m-й степенью некоторого образующего элемента группы.

Числа n_1 и n_2 взаимно просты. Это очевидно, если элемент c имеет бесконечный порядок, а в противоположном случае следует из

$$n_1 x + n_2 y \equiv 1 \pmod{n},$$

так как n_1 служит для n делителем. Существуют, следовательно, такие числа x_0 и y_0, что $n_1 x_0 + n_2 y_0 = 1$.

Положим теперь $c = b^{-1}ab$. Из равенств (α) следует, что элемент $b^{-1}a^{n_1}b$ содержится в подгруппе A и что элемент a^{n_2} равен некоторой степени элемента b и поэтому с b перестановочен. Отсюда следует

$$b^{-1}ab = b^{-1}a^{n_1 x_0}b \cdot b^{-1}a^{n_2 y_0}b = (b^{-1}a^{n_1}b)^{x_0} \cdot a^{n_2 y_0} \in A.$$

Аналогично $a^{-1}ba \in B$. Этим доказано, что *подгруппы A и B будут в группе G нормальными делителями.*

Докажем теперь, что *числа m_1 и m_2 также взаимно просты.* Действительно, если бы у них существовал общий простой делитель p, то в A и B можно было бы найти элементы a' и соответственно b', лежащие вне D и имеющие относительно D порядок p, причем $a'^p = b'^p = d$. Тогда элемент $c = a'b'$ будет лежать вне подгрупп A и B; однако, используя инвариантность этих подгрупп, мы получим, что $c^p \in A$ и $c^p \in B$. Это противоречит доказанной выше взаимной простоте порядков элемента c относительно A и B.

Легко видеть, что коммутатор $d_0 = a^{-1}b^{-1}ab$ содержится в D. Из равенства $ab = bad_0$ следуют по индукции для всех положительных i и j, так как элемент d_0 перестановочен с элементами a и b, равенства

$$ab^i = b^i a d_0^i, \quad a^j b = b a^j d_0^j.$$

Полагая в этих равенствах $i = m_2$, $j = m_1$, мы получаем

$$d_0^{m_1} = d_0^{m_2} = 1,$$

откуда $d_0 = 1$, т. е. $ab = ba$. Группа G оказалась абелевой. Она будет даже, в противоречие с нашим исходным предположением, циклической с образующим элементом $a^u b^v$, если числа u и v удовлетворяют равенству $m_1 v + m_2 u = 1$.

Пусть теперь дана произвольная группа G с дистрибутивной структурой подгрупп. Из доказанного выше следует, что любые два, а поэтому и любое конечное множество ее элементов порождают циклическую подгруппу. Группа G будет, следовательно, абелевой, притом или группой без кручения, или же периодической. В первом случае она будет группой ранга 1 и поэтому, как показано в § 30, объединением возрастающей последовательности бесконечных циклических групп. Во втором же случае группа G разлагается, по § 19, в прямое произведение примарных групп по различным простым p. Всякий из этих примарных множителей обладает лишь единственной циклической подгруппой порядка p и поэтому будет или конечной циклической группой некоторого порядка p^n, или же группой типа p^∞. Легко видеть, однако, что прямое произведение групп типа p^∞, если p пробегает все различные простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, является объединением возрастающей последовательности конечных циклических групп, имеющих порядками числа p_1, $p_1^2 p_2$, $p_1^3 p_2^2 p_3$ и т. д. Объединением возрастающей последовательности конечных циклических групп будет и всякая подгруппа этой группы. Доказательство теоремы закончено.

Значительно больший интерес для теории групп представляют дедекиндовы структуры, составляющие много более широкий класс структур, чем дистрибутивные. Дедекиндовы структуры отличаются от дистрибутивных тем, что закон дистрибутивности

$$(a + b)c = ac + bc$$

предполагается в них справедливым лишь при условии, что одно из слагаемых стоящей в скобках суммы, например a, содержится в c, и поэтому $ac = a$. Иными словами, структура S называется *дедекиндовой*, если удовлетворяет условию

(D) Если $a \leqslant c$, то $(a + b)c = a + bc$.

Определение дедекиндовой структуры можно было бы дать во многих других формах, эквивалентных (D). Укажем следующее определение, часто очень полезное: *структура S тогда и только тогда дедекиндова, если выполняется условие*

(D′) Если даны элементы a, b и c, причем $a \leqslant b$, и если

$$ac = bc, \quad a + c = b + c,$$

то $a = b$.

Докажем *эквивалентность условий* (D) и (D′). Пусть выполняется условие (D), и пусть в S даны такие элементы a, b и c, что $a \leqslant b$, $ac = bc$ и $a + c = b + c$. Тогда

$$(a + c)b = (b + c)b = b.$$

С другой стороны, ввиду (D) будет

$$(a + c)b = a + cb = a + ac = a,$$

откуда $a = b$.

Пусть теперь выполняется условие (D′), и пусть в S даны элементы a, b и c, причем $a \leqslant c$. Введем обозначения:

$$\overline{a} = a + bc, \quad \overline{b} = (a + b)c, \quad \overline{c} = b.$$

Так как $a + bc \leqslant a + b$ и $a + bc \leqslant c$, то $\overline{a} \leqslant \overline{b}$. Далее, из $a + bc \leqslant c$ следует $(a + bc)b \leqslant bc$, а так как $a + bc \geqslant bc$, $b \geqslant bc$, откуда $(a + bc)b \geqslant bc$, то $\overline{a}\,\overline{c} = bc$. С другой стороны, ввиду $a + b \geqslant b$ будет

$$\overline{b}\overline{c} = (a + b)cb = bc,$$

т. е. $\overline{a}\,\overline{c} = \overline{bc}$. Наконец, ввиду $bc \leqslant b$ будет

$$\overline{a} + \overline{c} = a + bc + b = a + b.$$

С другой стороны, из $(a + b)c \geqslant a$ следует $(a + b)c + b \geqslant a + b$, а так как $(a + b)c \leqslant a + b$, $b \leqslant a + b$, то $(a + b)c + b \leqslant a + b$, т. е. $\overline{b} + \overline{c} = a + b$, откуда следует $\overline{a} + \overline{c} = \overline{b} + \overline{c}$. Применение условия (D′) к элементам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ дает теперь $\overline{a} = \overline{b}$, т. е. $a + bc = (a + b)c$.

Значение дедекиндовых структур для теории групп основано на следующей теореме.

Структура всех нормальных делителей произвольной группы является дедекиндовой.

Для доказательства воспользуемся условием (D′). Пусть в группе G даны нормальные делители A, B и C, причем $A \subseteq B$, $A \cap C = B \cap C$, $\{A, C\} = \{B, C\}$. Так как $B \subseteq \{A, C\}$, то всякий элемент b из B имеет вид $b = ac$, где $a \in A$, $c \in C$. Отсюда $c = a^{-1}b$, т. е. $c \in B$, и поэтому $c \in (B \cap C) = (A \cap C)$, т. е. $c \in A$. Отсюда следует $b \in A$, т. е. $B = A$.

Так как всякая подструктура дедекиндовой структуры будет, очевидно, дедекиндовой, то из только что доказанной георемы следует, что дедекиндовой будет и структура подгрупп группы G, допустимых относительно некоторой области операторов, содержащей все внутренние автоморфизмы. Что же касается структуры всех подгрупп произвольной группы, то она не всегда будет дедекиндовой — противоречащим примером служит, как читатель без труда проверит, структура подгрупп знакопеременной группы 4-й степени. Существуют, с другой стороны, группы, структура всех подгрупп которых дедекиндова, хотя не все их подгруппы являются нормальными делителями; такова, например, симметрическая группа 3-й степени. Изучению групп

с дедекиндовыми структурами подгрупп посвящены работы Ивасавы [1, 3], Джонса [1] и Цаппы [3]. [См. Д.14.2.]

В дальнейшем будет использована также следующая форма определения дедекиндовой структуры.

(D″) Если в структуре S даны элементы

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, \quad n \geqslant 1,$$

причем

$$x_i \leqslant y_j \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)y_1y_2 \ldots y_n = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Действительно, условие (D) будет частным случаем условия (D″): полагая в (D″) $n = 2$ и $y_1 = x_1 + x_2$, мы получаем

$$(x_1 + x_2)y_2 = x_1 + x_2y_2 \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant y_2.$$

Обратно, если выполнено условие (D) и если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ подчинены условию $x_i \leqslant y_j$ при $i \neq j$, то, применяя несколько раз (D), мы получаем

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)y_1y_2 \ldots y_n &= \\ &= (x_1y_1 + x_2 + \ldots + x_n)y_2 \ldots y_n = \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3 + \ldots + x_n)y_3 \ldots y_n = \ldots \\ &\ldots = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.\end{aligned}$$

Нормальные и главные ряды. Пусть дана структура S с нулем и единицей. Упорядоченная конечная система элементов

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1 \tag{1}$$

называется *нормальным рядом структуры* S; число k — *длина* этого ряда. Нормальный ряд

$$0 = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{l-1} < b_l = 1 \tag{2}$$

называется *уплотнением* ряда (1), если всякий элемент a_i из (1) равен некоторому элементу b_j из (2).

В случае дедекиндовых структур справедлива такая теорема.

Всякие два нормальных ряда дедекиндовой структуры обладают уплотнениями одинаковой длины.

Пусть, в самом деле, в дедекиндовой структуре S даны произвольные нормальные ряды (1) и (2). Положим

$$\begin{aligned}a_{ij} &= a_i + a_{i+1}b_j, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad j = 0, 1, \ldots, l; \\ b_{ji} &= b_j + b_{j+1}a_i, \quad j = 0, 1, \ldots, l-1, \quad i = 0, 1, \ldots, k.\end{aligned}$$

Так как

$$a_{i0} = a_i, \quad a_{il} = a_{i+1}$$

и

$$a_{ij} \leqslant a_{i,\,j+1}, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,$$

элементы a_{ij} составляют нормальный ряд, быть может с повторениями, являющийся уплотнением ряда (1). Аналогично элементы b_{ji} составляют уплотнение ряда (2). Эти два новых ряда имеют одну и ту же длину kl, и поэтому остается показать, что они обладают равным числом повторений.

Пусть, в самом деле,

$$a_{ij} = a_{i,\,j+1}. \tag{3}$$

Используя последовательно определение элемента $a_{i,\,j+1}$, равенство (3), неравенство $a_{ij} \leqslant a_{i+1}$, определение элемента a_{ij} и, наконец, условие (D) вместе с неравенством $a_{i+1}b_j < b_{j+1}$, мы получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} a_{i+1}b_{j+1} &= a_{i,\,j+1}(a_{i+1}b_{j+1}) = a_{ij}(a_{i+1}b_{j+1}) = \\ &= a_{ij}b_{j+1} = (a_i + a_{i+1}b_j)b_{j+1} = a_ib_{j+1} + a_{i+1}b_j. \end{aligned}$$

Этот результат вместе с определением элементов b_{ji} и $b_{j,\,i+1}$ и очевидным неравенством $a_{i+1}b_j \leqslant b_j$ приводит к равенствам

$$b_{ji} = b_j + b_{j+1}a_i = b_j + b_{j+1}a_i + a_{i+1}b_j = b_j + a_{i+1}b_{j+1} = b_{j,\,i+1}.$$

Мы доказали, что повторения в построенных нами уплотнениях нормальных рядов (1) и (2) находятся во взаимно однозначном соответствии, т. е. могут быть одновременно удалены. Этим закончено доказательство теоремы.

Будем называть *главным рядом* структуры такой ее нормальный ряд, который не может быть уплотнен без повторений. Как и в § 16, из доказанной нами теоремы вытекают следующие результаты.

Если дедекиндова структура обладает главными рядами, то все ее главные ряды имеют одинаковую длину.

Если дедекиндова структура обладает главными рядами, то всякий ее нормальный ряд может быть уплотнен до главного ряда.

Отсюда следует, что *всякая подструктура дедекиндовой структуры, обладающей главными рядами, сама обладает главными рядами.*

Наконец, *дедекиндова структура тогда и только тогда обладает главными рядами, если в ней обрываются все возрастающие и все убывающие цепи элементов.*

Определение дедекиндовой структуры (условие (D′)) показывает, что всякая недедекиндова структура содержит подструктуру, состоящую из пяти элементов и обладающую двумя главными рядами различной длины, а именно длины два и три. Мы имеем возможность, следовательно, дать новую характеристику дедекиндовых структур: *структура тогда и только тогда будет дедекиндовой,*

если во всякой ее подструктуре, обладающей главными рядами, все главные ряды имеют одинаковую длину.

Теорему о нормальных рядах структуры, доказанную выше, можно было бы несколько усилить так, чтобы из нее целиком вытекала теоретико-групповая теорема об изоморфизме главных рядов (см. Орэ [1], а также § 51 первого издания настоящей книги). Ряд исследований посвящен также вопросу о перенесении в теорию структур (уже не обязательно дедекиндовых) теоремы Жордана–Гёльдера о композиционных рядах группы. Отметим относящиеся сюда работы Орэ [5], Куроша [11], а также цикл работ Узкова [1], Коржинека [4] и Лившица [1].

Вполне дедекиндовы структуры. Понятие дедекиндовой структуры применимо и в том случае, когда рассматриваются полные структуры. Для построения теории прямых разложений приходится, однако, наложить на полные структуры более сильное ограничение (см. Курош [13]), а именно: полная структура S называется *вполне дедекиндовой*, если для любых систем элементов x_α и y_α (α пробегает некоторое множество индексов M), удовлетворяющих условию

$$x_\alpha \leqslant y_\beta \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \in M,$$

выполняется равенство

$$(\overline{\mathrm{D}}) \qquad \Big(\sum_{\alpha\in M} x_\alpha\Big) \cdot \prod_{\alpha\in M} y_\alpha = \sum_{\alpha\in M} x_\alpha y_\alpha.$$

Всякая вполне дедекиндова структура будет дедекиндовой, так как условие (D″) следует из определения вполне дедекиндовой структуры. Обратное, однако, не имеет места — существуют полные структуры, дедекиндовы и даже дистрибутивные, но не вполне дедекиндовы.

Значение этого класса структур для теории групп определяется следующей т е о р е м о й.

Структура (допустимых) нормальных делителей группы с произвольной системой операторов является вполне дедекиндовой.

Действительно, пусть в группе G даны системы нормальных делителей X_α и Y_α (индекс α пробегает множество M), причем

$$X_\alpha \subseteq Y_\beta \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \in M. \tag{4}$$

Если элемент a лежит в произведении всех X_α, то он может быть записан в виде

$$a = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n}, \quad n \geqslant 1, \quad x_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i}, \tag{5}$$

причем все индексы $a_1, a_2, \dots, x_n$ различны. Если элемент a содержится также в пересечении всех Y_α, то он входит, в частности, в Y_{α_i}. Все множители произведения (5), кроме x_{α_i}, также входят в Y_{α_i} ввиду (4), а поэтому и $x_{\alpha_i} \in Y_{\alpha_i}$, т. е. $x_{\alpha_i} \in (X_{\alpha_i} \cap Y_{\alpha_i})$. Этим доказано, что элемент a содержится в произведении всех пересечений $X_\alpha \cap Y_\alpha$, т. е. доказано, что левая часть доказываемого равенства ($\overline{\mathrm{D}}$) содержится

в рассматриваемом случае в правой части этого равенства. Противоположное же включение справедливо в любой полной структуре ввиду условия $x_\alpha \leqslant y_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

§ 45. Прямые суммы во вполне дедекиндовых структурах

Одно из определений прямого разложения группы, известных нам из § 17, использует лишь произведения и пересечения нормальных делителей группы. Это позволяет перенести понятие прямого произведения на случай любых вполне дедекиндовых структур.

Пусть элемент a вполне дедекиндовой структуры S является суммой элементов a_α, где α пробегает множество индексов M,

$$a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha.$$

Введем обозначение

$$\overline{a}_\alpha = \sum_{\beta \in M,\, \beta \neq \alpha} a_\beta.$$

Элемент a есть *прямая сумма* элементов a_α, $\alpha \in M$, если для любого α из M имеет место равенство

$$a_\alpha \overline{a}_\alpha = 0.$$

Для записи разложения элемента a в прямую сумму будет использоваться следующая символика:

$$a = \dot{\sum_{\alpha \in M}} a_\alpha$$

или, в случае конечного числа слагаемых:

$$a = a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n.$$

Элемент $\overline{a}_\alpha$ будет называться *дополнением* к прямому слагаемому a_α рассматриваемого прямого разложения.

Понятно, что *прямые разложения группы совпадают с прямыми разложениями единицы в структуре нормальных делителей этой группы*.

Дальше будут использоваться следующие свойства прямых сумм во вполне дедекиндовой структуре.

I. *Если*

$$a = \dot{\sum_{\alpha}} a_\alpha \tag{1}$$

и если все или некоторые прямые слагаемые a_α сами разложены в прямую сумму,

$$a_\alpha = \dot{\sum_{\beta}} a_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

то

$$a = \dot{\sum_{\alpha,\beta}} a_{\alpha\beta}.$$

Действительно, элемент a будет суммой всех элементов $a_{\alpha\beta}$ — см. второе определение полной структуры в § 43. С другой стороны, фиксируя индексы α и β и последовательно используя неравенство $a_{\alpha\beta} \leqslant a_\alpha$, дедекиндовость структуры и то, что разложения (1) и (2) прямые, мы получим

$$a_{\alpha\beta}\Big(\sum_{\gamma\neq\alpha} a_\gamma + \sum_{\delta\neq\beta} a_{\alpha\delta}\Big) = a_{\alpha\beta}a_\alpha\Big(\sum_{\gamma\neq\alpha} a_\gamma + \sum_{\delta\neq\beta} a_{\alpha\delta}\Big) =$$

$$= a_{\alpha\beta}\Big(a_\alpha \sum_{\gamma\neq\alpha} a_\gamma + \sum_{\delta\neq\beta} a_{\alpha\delta}\Big) = a_{\alpha\beta}\sum_{\delta\neq\beta} a_{\alpha\delta} = 0.$$

II. *Если*

$$a = \dot{\sum_{\alpha\in M}} a_\alpha,$$

N есть истинное подмножество множества M и

$$b = \sum_{\alpha\in N} a_\alpha, \quad c = \sum_{\alpha\in M\setminus N} a_\alpha,$$

то $bc = 0$.

Действительно, используя неравенство $a_\alpha \leqslant \overline{a}_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, а затем определение вполне дедекиндовой структуры (т. е. равенство ($\overline{\mathrm{D}}$)), мы получим

$$bc = \sum_{\alpha\in N} a_\alpha \cdot \sum_{\alpha\in M\setminus N} a_\alpha \leqslant \sum_{\alpha\in N} a_\alpha \cdot \prod_{\alpha\in N} \overline{a}_\alpha = \sum_{\alpha\in N} a_\alpha\overline{a}_\alpha = 0.$$

III. *Если*

$$a = \dot{\sum_{\alpha\in M}} a_\alpha$$

и множество M разложено на непересекающиеся подмножества M_β, причем

$$\sum_{\alpha\in M_\beta} a_\alpha = b_\beta,$$

то

$$a = \dot{\sum_{\beta}} b_\beta.$$

Действительно, элемент a будет суммой элементов b_β, как вытекает из определения полной структуры. С другой стороны, в силу свойства II получаем:

$$b_\beta \cdot \sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma = \sum_{\alpha\in M_\beta} a_\alpha \cdot \sum_{\alpha\in M\setminus M_\beta} a_\alpha = 0.$$

IV. *Если*

$$a = \dot{\sum_{\alpha}} a_\alpha$$

и для каждого α *выбран элемент* c_α,

$$0 \leqslant c_\alpha \leqslant a_\alpha,$$

то сумма с всех элементов c_α *будет их прямой суммой. Эта сумма отлична от* a, *если хотя бы одно* c_α *отлично от соответствующего* a_α.

Действительно,

$$c_\alpha \cdot \sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta \leqslant a_\alpha \cdot \sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta = 0.$$

Если же $c = a$, то, используя дедекиндовость структуры, мы получим для всякого β:

$$a_\beta = a_\beta a = a_\beta \sum_{\alpha} c_\alpha = c_\beta + a_\beta \sum_{\alpha \neq \beta} c_\alpha \leqslant c_\beta + a_\beta \sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha = c_\beta.$$

V. *Если*

$$a = a_1 \dot{+} a_2 \quad \textit{и} \quad a_1 \leqslant b \leqslant a,$$

то

$$b = a_1 \dot{+} ba_2.$$

Действительно, используя (D), получаем

$$b = ba = b(a_1 + a_2) = a_1 + ba_2.$$

С другой стороны,

$$a_1 \cdot ba_2 \leqslant a_1 a_2 = 0.$$

Компоненты. Пусть дано прямое разложение единицы вполне дедекиндовой структуры S

$$1 = \dot{\sum_{\alpha \in M}} a_\alpha. \tag{3}$$

Если b — произвольный элемент этой структуры, то назовем его *компонентой* в прямом слагаемом a_α разложения (3) элемент

$$b\varphi_\alpha = a_\alpha(b + \overline{a}_\alpha), \tag{4}$$

где $\overline{a}_\alpha$, как и раньше, есть дополнение к a_α в прямом разложении (3).

Если дано прямое разложение группы G,

$$G = \dot{\prod_{\alpha}} A_\alpha, \tag{5}$$

и B — нормальный делитель в G, то $B\varphi_\alpha$ *совпадает с компонентой нормального делителя* B *в прямом множителе* A_α *разложения* (5) в смысле § 17. В самом деле, элемент b из B обладает записью

$$b = a_\alpha \overline{a}_\alpha, \quad a_\alpha \in A_\alpha, \quad \overline{a}_\alpha \in \overline{A}_\alpha,$$

откуда

$$a_\alpha = b\overline{a}_\alpha^{-1},$$

т. е. компонента a_α элемента b лежит и в A_α, и в произведении $B\overline{A}_\alpha$. Обратно, если x — произвольный элемент из пересечения $A_\alpha \cap B\overline{A}_\alpha$, то он обладает записью вида

$$x = b\overline{a}_\alpha,$$

а поэтому служит компонентой элемента b в прямом множителе A_α.

Отображение группы G в себя, ставящее в соответствие всякому элементу его компоненту в A_α, является, очевидно, эндоморфизмом группы G, операторным в случае группы с операторами. Эти эндоморфизмы, взятые для всех α, называются *эндоморфизмами рассматриваемого прямого разложения группы* G. Ввиду этого мы и в нашем общем случае назовем отображения φ_α, $\alpha \in M$, структуры S *эндоморфизмами прямого разложения* (3). Это будут монотонные отображения: если $b \leqslant c$, то $b\varphi_\alpha \leqslant c\varphi_\alpha$.

Из прямого разложения (3) следует прямое разложение

$$1 = a_\alpha \dotplus \overline{a}_\alpha.$$

Компонентой элемента b в прямом слагаемом $\overline{a}_\alpha$ этого разложения служит элемент

$$b\overline{\varphi}_\alpha = \overline{a}_\alpha(b + a_\alpha).$$

Отображение $\overline{\varphi}_\alpha$ будет называться *дополнительным* к эндоморфизму φ_α прямого разложения (3).

Отметим некоторые свойства отображений φ_α. Непосредственно из (4) вытекает:

VI. *Для любого элемента* b *из* S

$$b\varphi_\alpha \leqslant a_\alpha.$$

Если $b \geqslant a_\alpha$, *то*

$$b\varphi_\alpha = a_\alpha.$$

VII. *Если* $b \leqslant a_\alpha$, *то*

$$b\varphi_\alpha = b.$$

Действительно, используя (D), получаем:

$$b\varphi_\alpha = a_\alpha(b + \overline{a}_\alpha) = b + a_\alpha\overline{a}_\alpha = b.$$

VIII. *Тогда и только тогда* $b\varphi_\alpha = 0$, *если* $b \leqslant \overline{a}_\alpha$.

Действительно, пусть $b\varphi_\alpha = 0$. Так как $b + \overline{a}_\alpha \geqslant a_\alpha$, то по V и (4),

$$b + \overline{a}_\alpha = (b + \overline{a}_\alpha)a_\alpha + \overline{a}_\alpha = \overline{a}_\alpha, \tag{6}$$

т. е. $b \leqslant \overline{a}_\alpha$. Обратное утверждение следует непосредственно из (4).

Из VI и VIII вытекает

IX. *Для любого элемента* b *из* S *и любого индекса* α

$$b\overline{\varphi}_\alpha\varphi_\alpha = b\varphi_\alpha\overline{\varphi}_\alpha = 0,$$

где $\overline{\varphi}_\alpha$ *есть отображение, дополнительное к эндоморфизму* φ_α *разложения* (3) [1]).

X. *Всякий элемент* b *содержится в сумме своих компонент во всех слагаемых* a_α *прямого разложения* (3).

Действительно, так как $a_\alpha \leqslant b + \overline{a}_\beta$ при $a \neq \beta$, то, используя (D) и (3), получаем

$$\sum_\alpha b\varphi_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha(b + \overline{a}_\alpha) = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \prod_\alpha (b + \overline{a}_\alpha) = \prod_\alpha (b + \overline{a}_\alpha) \geqslant b.$$

XI. *Компонента суммы равна сумме компонент, т. е. если*

$$b = \sum_\beta b_\beta,$$

то

$$b\varphi_\alpha = \sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha.$$

Действительно, из $b_\beta \leqslant b$ следует $b_\beta\varphi_\alpha \leqslant b\varphi_\alpha$, а поэтому и

$$\sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha \leqslant b\varphi_\alpha.$$

С другой стороны, ввиду X и VI,

$$b = \sum_\beta b_\beta \leqslant \sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha + \overline{a}_\alpha,$$

а поэтому, используя (4), (D) и VI, получаем

$$b\varphi_\alpha \leqslant \Big(\sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha + \overline{a}_\alpha\Big)\varphi_\alpha = a_\alpha\Big(\sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha + \overline{a}_\alpha\Big) =$$

$$= \sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha + a_\alpha\overline{a}_\alpha = \sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha.$$

[1]) Здесь, как и дальше, произведение отображений означает их последовательное выполнение.

XII. *Пусть N — подмножество множества индексов M из разложения* (3) *и*

$$a = \sum_{\alpha\in N} a_\alpha, \quad \overline{a} = \sum_{\alpha\in M\setminus N} a_\alpha,$$

т. е., по III, *имеет место прямое разложение*

$$1 = a \dotplus \overline{a}. \tag{7}$$

Если b — произвольный элемент структуры S и $b\psi$ — его компонента в слагаемом a прямого разложения (7), *то*

$$b\psi \leqslant \sum_{\alpha\in N} b\varphi_\alpha.$$

В самом деле, так как

$$b + \overline{a} \leqslant b + \overline{a}_\alpha$$

для всех α из N, т. е.

$$b + \overline{a} \leqslant \prod_{\alpha\in N} (b + \overline{a}_\alpha),$$

то ввиду ($\overline{\mathrm{D}}$)

$$b\psi = a(b+\overline{a}) \leqslant \sum_{\alpha\in N} a_\alpha \cdot \prod_{\alpha\in N} (b+\overline{a}_\alpha) = \sum_{\alpha\in N} a_\alpha(b+\overline{a}_\alpha) = \sum_{\alpha\in N} b\varphi_\alpha.$$

XIII. *Если $b\varphi_\alpha = c$, то для всякого элемента c', $c' \leqslant c$, существует такой элемент b', $b' \leqslant b$, что $b'\varphi_\alpha = c'$.*

Действительно, можно положить

$$b' = b(c' + \overline{a}_\alpha).$$

Условие $b' \leqslant b$ выполняется. С другой стороны, используя (D), (4) и равенство $c\overline{a}_\alpha = 0$, вытекающее из неравенства $c = b\varphi_\alpha \leqslant a_\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} b'\varphi_\alpha &= a_\alpha(b' + \overline{a}_\alpha) = a_\alpha[b(c' + \overline{a}_\alpha) + \overline{a}_\alpha] = \\ &= a_\alpha[(b + \overline{a}_\alpha)(c' + \overline{a}_\alpha)] = c(c' + \overline{a}_\alpha) = c' + c\overline{a}_\alpha = c'. \end{aligned}$$

Свойства I–XIII прямых разложений и их эндоморфизмов будут использоваться дальше в этой главе без указания номера настоящего параграфа.

Существование общего продолжения. Пусть во вполне дедекиндовой структуре S даны два прямых разложения единицы:

$$1 = \sum_{\alpha}^{\bullet} a_\alpha = \sum_{\beta}^{\bullet} b_\beta. \tag{8}$$

Обозначим эндоморфизмы этих разложений соответственно через φ_α и θ_β; через $\overline{\varphi}_\alpha$ обозначим отображения, дополнительные к φ_α.

Теорема (Курош [13]). *Прямые разложения* (8) *тогда и только тогда обладают общим продолжением, если при любых α и β*

отображения $\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$ *переводят единицу* (*а поэтому и всякий элемент структуры*) *в нуль*, *т. е. если*

$$1\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть разложения (8) обладают общим продолжением

$$1 = \dot{\sum_\gamma} c_\gamma.$$

Всякое c_γ содержится в некотором произведении $a_\alpha b_\beta$, а поэтому сумма всех таких произведений (по всем α и β) совпадает с единицей. Эта сумма будет вместе с тем прямой:

$$\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta = \sum_\alpha \Big(\sum_\beta a_\alpha b_\beta\Big),$$

однако каждая из сумм справа будет прямой ввиду свойства IV, после чего остается использовать свойство I. Таким образом,

$$1 = \dot{\sum_{\alpha,\beta}} a_\alpha b_\beta. \tag{10}$$

Отсюда

$$a_\alpha = \dot{\sum_\beta} a_\alpha b_\beta, \quad b_\beta = \dot{\sum_\alpha} a_\alpha b_\beta. \tag{11}$$

Найдем теперь элемент $1\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$. По VI и (11)

$$1\overline{\varphi}_\alpha = \overline{a}_\alpha = \sum_{\gamma\neq\alpha}\sum_\beta a_\gamma b_\beta.$$

Отсюда, используя XI, VII и VIII, получаем

$$1\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta = \overline{a}_\alpha\theta_\beta = \sum_{\gamma\neq\alpha} a_\gamma b_\beta \leqslant \overline{a}_\alpha,$$

а поэтому снова ввиду VIII получаем (9).

Пусть теперь, обратно, дано, что равенства (9) выполняются при всех α и β. Ввиду (8), VI и XI

$$a_\alpha = \sum_\beta b_\beta\varphi_\alpha.$$

Используя (9), покажем, что эта сумма прямая. Действительно, ввиду XI и (D)

$$b_\beta\varphi_\alpha \cdot \sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma\varphi_\alpha = b_\beta\varphi_\alpha \cdot \overline{b}_\beta\varphi_\alpha = a_\alpha(b_\beta + \overline{a}_\alpha)\cdot a_\alpha(\overline{b}_\beta + \overline{a}_\alpha) =$$
$$= a_\alpha(b_\beta + \overline{a}_\alpha)(\overline{b}_\beta + \overline{a}_\alpha) = a_\alpha[b_\beta(\overline{b}_\beta + \overline{a}_\alpha) + \overline{a}_\alpha] =$$
$$= \overline{a}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha = 1\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha = 0.$$

Таким образом,

$$a_\alpha = \sum_\beta^{\bullet} b_\beta \varphi_\alpha,$$

т. е. ввиду I мы приходим к прямому разложению

$$1 = \sum_{\alpha,\beta}^{\bullet} b_\beta \varphi_\alpha, \tag{12}$$

являющемуся продолжением первого из разложений (8).

Переписывая (12) в виде

$$1 = \sum_\beta^{\bullet} \Big(\sum_\alpha^{\bullet} b_\beta \varphi_\alpha \Big)$$

и учитывая, что ввиду X

$$b_\beta \leqslant \sum_\alpha^{\bullet} b_\beta \varphi_\alpha,$$

мы получим на основании (8) и IV, что для всех β

$$b_\beta = \sum_\alpha^{\bullet} b_\beta \varphi_\alpha.$$

Таким образом, прямое разложение (12) служит продолжением и для второго из разложений (8). Теорема доказана.

Применим эту теорему к группам. Пусть даны два прямых разложения группы G с произвольной системой операторов

$$G = \prod_\alpha A_\alpha = \prod_\beta B_\beta. \tag{13}$$

Обозначим через φ_α, θ_β и $\overline{\varphi}_\alpha$ отображения, переводящие каждый элемент группы G соответственно в его компоненту в A_α, в B_β и в $\overline{A}_\alpha = \prod\limits_{\gamma \neq \alpha} A_\gamma$. Они будут, как мы знаем, операторными эндоморфизмами группы G.

Отображение $\overline{\varphi}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha$ также будет, следовательно, операторным эндоморфизмом. Докажем, что *оно переводит всякий элемент группы G в центр этой группы и поэтому отображает всю группу G на допустимую подгруппу центра*. Мы знаем еще из § 17, что компоненты перестановочных элементов группы сами перестановочны, а поэтому, *если даны два перестановочных элемента, то компонента одного из них перестановочна с другим*. Пусть g — произвольный элемент группы G. Тогда элемент $g\overline{\varphi}_\alpha$ лежит в $\overline{A}_\alpha$ и поэтому перестановочен с каждым элементом из A_α. Отсюда следует, что его компонента в прямом множителе B_β второго из разложений (13), т. е. элемент $g\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta$, также перестановочна с каждым элементом из A_α. Это верно, наконец, и для элемента $g\overline{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$, а так как этот элемент сам лежит

в A_α, то он должен принадлежать к центру прямого множителя A_α, т. е. к центру группы G.

Назовем *допустимым центром* операторной группы G объединение всех допустимых подгрупп центра. Мы знаем из § 14, что центр группы не всегда допустим, а поэтому допустимый центр может оказаться меньше центра группы. Из доказанной выше теоремы вытекает следующий результат (Фиттинг [3], Курош [5]).

Пусть группа G с произвольной системой операторов такова, что отображение в единицу является единственным операторно-гомоморфным отображением этой группы (или, что то же самое, ее фактор-группы по коммутанту) в ее допустимый центр [1]*. Тогда любые два прямых разложения этой группы обладают общим продолжением.*

В частности, *любые два прямых разложения группы обладают общим продолжением, если эта группа без центра (или, в операторном случае, хотя бы без допустимого центра), а также если она совпадает со своим коммутантом.* [См. Д.5.2.]

§ 46. Вспомогательные леммы

Пусть во вполне дедекиндовой структуре S даны два прямых разложения единицы с двумя слагаемыми каждое:

$$1 = a_1 \dotplus a_2 = b_1 \dotplus b_2. \tag{1}$$

Обозначим эндоморфизмы этих разложений соответственно через φ_1, φ_2 и θ_1, θ_2 и докажем ряд лемм, которые будут использованы в следующем параграфе при доказательстве основной теоремы.

Лемма 1. *Для любого элемента x из S*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = x\theta_1\varphi_2\theta_2.$$

Справедливы также равенства, получающиеся из указанного переменой ролей θ_1 и θ_2, а также ролей θ и φ.

Действительно, ввиду $x\theta_1 \leqslant b_1$ и условия (D),

$$\begin{aligned} x\theta_1\varphi_1\theta_2 &= b_2[a_1(x\theta_1 + a_2) + b_1] = b_2[x\theta_1 + a_1(x\theta_1 + a_2) + b_1] = \\ &= b_2[(x\theta_1 + a_1)(x\theta_1 + a_2) + b_1]. \end{aligned}$$

В полученное выражение элементы a_1 и a_2 входят, однако, симметричным образом.

Лемма 2. *Если $x \leqslant a_1$, то*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1,$$

[1] Группы с этим свойством встретятся нам в § 47. Условимся называть их *F-группами*.

т. е. по отношению к элементам, содержащимся в a_1, *отображения* $\theta_1\varphi_1$ *и* $\theta_2\varphi_1$ *перестановочны.*

Действительно, применяя несколько раз лемму 1 и равенство $x = x\varphi_1$, вытекающее из свойства VII, получим

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1 = \\ = x\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_1\varphi_1 = x\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

Элементы $n_{ij}^{(k)}$ $(j = 1, 2)$ и $n_1^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим прямое слагаемое a_1 первого из разложений (1). Пусть $n_{11}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, будет сумма всех таких элементов x, содержащихся в a_1, что $x(\theta_2\varphi_1)^k = 0$; здесь $(\theta_2\varphi_1)^k$ означает k-ю степень отображения $\theta_2\varphi_1$. Аналогично через $n_{12}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим сумму всех таких элементов x, $x \leqslant a_1$, что $x(\theta_1\varphi_1)^k = 0$. Ввиду XI

$$n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k = 0, \quad n_{12}^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k = 0. \tag{2}$$

Ясно, что

$$n'_{1j} \leqslant n''_{1j} \leqslant \ldots \leqslant n_{1j}^{(k)} \leqslant \ldots, \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Пусть, далее, $n_1^{(k)}$ будет сумма всех таких элементов x, $x \leqslant a_1$, что $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k = 0$. Снова

$$n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k = 0, \tag{4}$$

$$n'_1 \leqslant n''_1 \leqslant \ldots \leqslant n_1^{(k)} \leqslant \ldots. \tag{5}$$

Лемма 3. $n_{ij}^{(k)} \leqslant n_1^{(k)}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть, например, $j = 1$. Применяя лемму 2 и первое из равенств (2), получаем

$$n_{11}^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k = n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k(\theta_1\varphi_1)^k = 0(\theta_1\varphi_1)^k = 0,$$

т. е. $n_{11}^{(k)} \leqslant n_1^{(k)}$.

Лемма 4. *Если* $x \leqslant a_1$, *то при* $k = 1, 2, \ldots$ *имеют место неравенства*

$$x \leqslant x(\theta_1\varphi_1)^k + x(\theta_1\varphi_1)^{k-1}(\theta_2\varphi_1) + x(\theta_1\varphi_1)^{k-2}(\theta_2\varphi_1)^2 + \ldots + x(\theta_2\varphi_1)^k. \tag{6}$$

Действительно, ввиду X

$$x \leqslant x\theta_1 + x\theta_2,$$

а поэтому по XI

$$x = x\varphi_1 \leqslant (x\theta_1 + x\theta_2)\varphi_1 = x\theta_1\varphi_1 + x\theta_2\varphi_1,$$

т. е. неравенство (6) доказано для случая $k = 1$. Если оно уже доказано для данного k, то его доказательство для случая $k + 1$ достигается заменой каждого из слагаемых правой части соотношения (6) суммой его

образов при отображениях $\theta_1\varphi_1$ и $\theta_2\varphi_1$, что, как доказано, может лишь усилить неравенство, а затем применением леммы 2 и объединением одинаковых слагаемых.

Лемма 5. $n_1^{(k)} \leqslant n_{11}^{(k)} + n_{12}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

По лемме 4

$$n_1' \leqslant n_1'\theta_1\varphi_1 + n_1'\theta_2\varphi_1.$$

Однако из (4) и леммы 2 следует

$$(n_1'\theta_1\varphi_1)\theta_2\varphi_1 = 0, \quad (n_1'\theta_2\varphi_1)\theta_1\varphi_1 = 0,$$

т. е.

$$n_1'\theta_1\varphi_1 \leqslant n_{11}', \quad n_1'\theta_2\varphi_1 \leqslant n_{12}'.$$

Лемма доказана, следовательно, для случая $k = 1$. Пусть она уже доказана для $k-1$. Применим лемму 4 к элементу $n_1^{(k)}$ вместо x. Из (4) следует

$$[n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k](\theta_2\varphi_1)^k = 0,$$

т. е. $n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k \leqslant n_{11}^{(k)}$ и аналогично $n_1^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k \leqslant n_2^{(k)}$. Что же касается остальных слагаемых правой части неравенства (6), то все они обращаются в нуль уже при отображении $(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k-1}$, т. е. содержатся в $n_1^{(k-1)}$, а поэтому, по индуктивному предположению, в $n_{11}^{(k-1)} + n_{12}^{(k-1)}$ и, следовательно, ввиду (3) в $n_{11}^{(k)} + n_{12}^{(k)}$.

Лемма 6. $n_{11}^{(k)} \cdot n_{12}^{(l)} = 0$, $k, l = 1, 2, \ldots$.

Пусть $x \leqslant n_{11}^{(k)} \cdot n_{12}^{(l)}$, т. е. $x(\theta_2\varphi_1)^k = x(\theta_1\varphi_1)^l = 0$. Если $k = l = 1$, то из $x \leqslant x\theta_1\varphi_1 + x\theta_2\varphi_1$ и $x\theta_1\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1 = 0$ следует $x = 0$. Будем теперь вести доказательство индукцией по сумме $k + l$. Если, например, $k > 1$, то из

$$x(\theta_2\varphi_1)(\theta_2\varphi_1)^{k-1} = 0$$

и

$$x(\theta_2\varphi_1)(\theta_1\varphi_1)^l = x(\theta_1\varphi_1)^l(\theta_2\varphi_1) = 0$$

следует $x(\theta_2\varphi_1) = 0$, а отсюда и $x(\theta_1\varphi_1)^l = 0$ вытекает ввиду $1 + l < k + l$ равенство $x = 0$.

Из лемм 3, 5 и 6 вытекает

Лемма 7. $n_1^{(k)} = n_{11}^{(k)} + n_{12}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Ту роль, которую по отношению к прямому слагаемому a_1 играют элементы $n_{11}^{(k)}$, $n_{12}^{(k)}$ и $n_1^{(k)}$, по отношению к прямому слагаемому a_2 пусть играют элементы $n_{21}^{(k)}$, $n_{22}^{(k)}$, $n_2^{(k)}$, а по отношению к прямому слагаемому b_j, $j = 1, 2$, второго из разложений (1) — элементы $m_{j1}^{(k)}$, $m_{j2}^{(k)}$, $m_j^{(k)}$. Для всех этих элементов справедливы леммы, аналогичные доказанным выше.

Лемма 8. $n_1^{(k)} + n_2^{(k)} = m_1^{(k)} + m_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Действительно, применяя несколько раз лемму 1 и используя равенство $m_1^{(k)}(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k = 0$, получим, что $(m^{(k)}\varphi_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k = (m_1^{(k)}\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1)^k = (m^{(k)}\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^k = m_1^{(k)}(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k\varphi_1 = 0$. Этим доказано, что $m_1^{(k)}\varphi_1 \leqslant n_1^{(k)}$, так как $m_1^{(k)}\varphi_1 \leqslant a_1$. Аналогично $m_1^{(k)}\varphi_2 \leqslant n_2^{(k)}$. Отсюда и из $m_1^{(k)} \leqslant m_1^{(k)}\varphi_1 + m_1^{(k)}\varphi_2$ вытекает неравенство

$$m_1^{(k)} \leqslant n_1^{(k)} + n_2^{(k)}.$$

Такое же неравенство справедливо и для $m_2^{(k)}$ вместо $m_1^{(k)}$. С другой стороны, по соображениям симметрии

$$n_i^{(k)} \leqslant m_1^{(k)} + m_2^{(k)}, \quad i = 1, 2.$$

Лемма 9. $n_{11}^{(k)}\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Действительно, используя VII, лемму 1 и равенство (2), получим

$$\begin{aligned} n_{11}^{(k)}\theta_1(\varphi_2\theta_1)^k &= n_{11}^{(k)}\varphi_1\theta_1(\varphi_2\theta_1)^k = n_{11}^{(k)}\varphi_1\theta_2(\varphi_2\theta_1)^k = \\ &= \ldots = n_{11}^{(k)}\varphi_1(\theta_2\varphi_1)^k\theta_1 = n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k\theta_1 = 0, \end{aligned}$$

а так как $n_{11}^{(k)}\theta_1 \leqslant b_1$, то $n_{11}^{(k)}\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k)}$.

Лемма 10. $n_{11}^{(k)}(m_{12}^{(k)} + m_2^{(k)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Обозначим левую часть доказываемого равенства через x. Тогда, по лемме 9,

$$x\theta_1 \leqslant n_{11}^{(k)}\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k)}.$$

С другой стороны, по XI и VII

$$x\theta_1 \leqslant (m_{12}^{(k)} + m_2^{(k)})\theta_1 = m_{12}^{(k)}\theta_1 = m_{12}^{(k)},$$

так как $m_2^{(k)}\theta_1 \leqslant b_2\theta_1 = 0$. Таким образом, учитывая лемму 6, получаем

$$x\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k)} \cdot m_{12}^{(k)} = 0.$$

Отсюда $x\theta_1\varphi_1 = 0$, а так как $x \leqslant n_{11}^{(k)} \leqslant a_1$, то $x \leqslant n'_{12}$. Следовательно, ввиду леммы 6

$$x \leqslant n_{11}^{(k)} \cdot n'_{12} = 0.$$

Лемма 11. $m_{11}^{(k)} \leqslant n_{11}^{(k)} + m_{22}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть сначала $k = 1$. Так как $m'_{11}\varphi_2\theta_1 = 0$, то, по VIII, $m'_{11}\varphi_2 \leqslant b_2$, а поэтому ввиду

$$(m'_{11}\varphi_2)(\varphi_1\theta_2) = m'_{11}(\varphi_2\varphi_1)\theta_2 = 0$$

(см. IX) имеет место неравенство

$$m'_{11}\varphi_2 \leqslant m'_{22}.$$

С другой стороны, по лемме 9 с переменой ролей первого и второго из разложений (1)

$$m'_{11}\varphi_1 \leqslant n'_{11}.$$

Таким образом,

$$m'_{11} \leqslant m'_{11}\varphi_1 + m'_{11}\varphi_2 \leqslant n'_{11} + m'_{22}.$$

Пусть наше утверждение уже доказано для случая $k-1$. Нам известно, что $m_{11}^{(k)} \leqslant m_{11}^{(k)}\varphi_1 + m_{11}^{(k)}\varphi_2$, причем по лемме 9

$$m_{11}^{(k)}\varphi_1 \leqslant n_{11}^{(k)}.$$

С другой стороны,

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2 \leqslant m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 + m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2.$$

Так как $m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 \leqslant b_1$ и

$$(m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1)(\varphi_2\theta_1)^{k-1} = m_{11}^{(k)}(\varphi_2\theta_1)^k = 0,$$

то

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k-1)},$$

а поэтому, по индуктивному предположению,

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 \leqslant n_{11}^{(k-1)} + m_{22}^{(k-1)} \leqslant n_{11}^{(k)} + m_{22}^{(k)}.$$

Наконец,

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2 \leqslant b_2$$

и по лемме 1

$$(m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2)(\varphi_1\theta_2)^k = m_{11}^{(k)}(\varphi_2\theta_1)(\varphi_1\theta_2)^k = \ldots = m_{11}^{(k)}(\varphi_2\theta_1)^k(\varphi_1\theta_2) = 0,$$

т. е. $m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2 \leqslant m_{22}^{(k)}$. Лемма доказана.

Условимся говорить, что элемент c структуры S *обладает главным рядом*, если главным рядом обладает подструктура S_c, составленная из элементов, расположенных между 0 и c, т. е. удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant x \leqslant c.$$

Как мы знаем, это равносильно тому, что в подструктуре S_c обрываются все возрастающие и все убывающие цепи элементов.

Сделаем теперь следующее предположение, которое будет сохранять силу до конца этого параграфа.

(А) Каждое из отображений $\varphi_i\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i$, $i = 1, 2$, и $\theta_j\varphi_1\theta_j\varphi_2\theta_j$, $j = 1, 2$, переводит единицу в элемент, обладающий главным рядом.

Введем обозначение

$$\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = \eta.$$

Лемма 12. *Элементы* $1, 1\eta, 1\eta^2, \ldots, 1\eta^k, \ldots$ *составляют убывающую последовательность*,

$$1 \geqslant 1\eta \geqslant 1\eta^2 \geqslant \ldots \geqslant 1\eta^k \geqslant \ldots. \tag{7}$$

Существует такое k_0, *что*

$$1\eta^{k_0} = 1\eta^{k_0+1} = \ldots. \tag{8}$$

Если введем обозначение $\overline{a}_1 = 1\eta^{k_0}$, *то из* $x \leqslant \overline{a}_1$, $x\eta = 0$ *следует* $x = 0$.

Действительно, (7) вытекает из монотонности отображения η, а существование показателя k_0 со свойством (8) — из предположения (А). Докажем третье утверждение леммы. Пусть $0 < x \leqslant \overline{a}_1$ и $x\eta = 0$. Так как по (8) $\overline{a}_1\eta = \overline{a}_1$, то ввиду $0 < x$ будет $\overline{a}_1 \neq 0$. По свойству XIII, примененному несколько раз, существует такой элемент y, $y \leqslant \overline{a}_1$, что

$$y\eta = x.$$

Так как по XI

$$(x + y)\eta = x\eta + y\eta = y\eta = x,$$

то можно считать, что $y > x$, причем это неравенство будет строгим. Продолжая так далее, мы построим в элементе $\overline{a}_1$, а поэтому в элементе 1η, бесконечную возрастающую последовательность элементов в противоречие с предположением (А).

Лемма 13. $n_1^{(k_0)} = n_1^{(k_0+1)} = \ldots$.

Действительно, для любого натурального числа l

$$n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0} \leqslant 1\eta^{k_0} = \overline{a}_1.$$

Однако

$$n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0+l} = (n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0})\eta^l = 0.$$

Поэтому по предыдущей лемме $n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0} = 0$, т. е. $n_1^{(k_0+l)} \leqslant n_1^{(k_0)}$. Отсюда и из (5) вытекает утверждение леммы.

Лемма 14. $n_{1j}^{(k_0)} = n_{1j}^{(k_0+1)} = \ldots$, $j = 1, 2$.

Вытекает из (3), лемм 7 и 13 и свойства IV.

Обозначим сумму возрастающих последовательностей (5) и (3) соответственно через n_1 и n_{1j}, $j = 1, 2$. Элементы, играющие такую же роль по отношению к элементу a_2, будут обозначаться через n_2 и n_{2j}, $j = 1, 2$, а по отношению к элементу b_i, $i = 1, 2$, — через m_i и m_{ij}, $j = 1, 2$. Леммы 13 и 14 позволяют вывести из лемм 7 и 8 следующие результаты:

$$n_i = n_{i1} \dot{+} n_{i2}, \quad m_i = m_{i1} \dot{+} m_{i2}, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$n_1 + n_2 = m_1 + m_2. \tag{10}$$

Обозначим через v элемент, равный левой и правой частям этого последнего равенства. Так как $n_1 n_2 \leqslant a_1 a_2 = 0$ и аналогично $m_1 m_2 = 0$, то мы имеем для v два прямых разложения

$$v = n_1 \dotplus n_2 = m_1 \dotplus m_2. \tag{11}$$

Применяя (9), мы приходим к двум продолжениям этих прямых разложений:

$$v = n_{11} \dotplus n_{12} \dotplus n_{21} \dotplus n_{22} = m_{11} \dotplus m_{12} \dotplus m_{21} \dotplus m_{22}. \tag{12}$$

Изучим эти новые прямые разложения.

Лемма 15. *В прямых разложениях* (12) *элементы* n_{11} *и* m_{11}, *а также* n_{12} *и* m_{21}, n_{21} *и* m_{12}, n_{22} *и* m_{22} *взаимно замещают друг друга*.

В самом деле, ввиду лемм 13 и 14 из лемм 10 и 11 получаем

$$n_{11}(m_{12} + m_2) = 0, \quad m_{11} \leqslant n_{11} + m_{22},$$

т. е. ввиду (12) и (9)

$$v = n_{11} \dotplus m_{12} \dotplus m_{21} \dotplus m_{22};$$

элемент n_{11} заместил, следовательно, во втором из разложений (12) элемент m_{11}. По соображениям симметрии имеет место и прямое разложение

$$v = m_{11} \dotplus n_{12} \dotplus n_{21} \dotplus n_{22}.$$

Легко проверяется, далее, что, например, элементы n_{12} и m_{21} находятся в таком же отношении друг к другу, в каком находились элементы n_{11} и m_{11}. Это позволяет считать доказанными все утверждения леммы.

Лемма 16. $n_1 \overline{a}_1 = 0$.

Так как по лемме 13 $n_1 = n_1^{(k_0)}$, то $(n_1 \overline{a}_1)\eta^{k_0} = 0$. Отсюда ввиду последнего утверждения леммы 12 следует утверждение нашей леммы.

Лемма 17. $\overline{a}_1(m_1 + b_2) = 0$, *а также* $\overline{a}_1(m_2 + b_1) = 0$.

Действительно, введем обозначение

$$\overline{a}_1(m_1 + b_2) = x.$$

По лемме 13 есть такое k_0, что $m_1 = m_1^{(k_0)}$. Тогда

$$\begin{aligned} x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1} &\leqslant (m_1^{(k_0)} + b_2)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1} = \\ &= m_1^{(k_0)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1} + b_2(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое правой части равно нулю, так как $b_2\theta_1 = 0$. С другой стороны, в силу леммы 1, равенства $m_i^{(k_0)}\theta_1 = m_1^{(k_0)}$ и определения элемента $m_1^{(k_0)}$

$$\begin{aligned} m_1^{(k_0)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1} = m_1^{(k_0)}(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^{k_0+1} = \\ = m_1^{(k_0)}(\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_1)^{k_0}\varphi_2\theta_1\varphi_1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1} = 0$, а так как $x \leqslant a_1$, то $x \leqslant n_1$. Мы знаем, с другой стороны, что $x \leqslant \overline{a}_1$. Таким образом, ввиду предшествующей леммы

$$x \leqslant n_1\overline{a}_1 = 0.$$

Второе утверждение леммы доказывается таким же путем, так как

$$a_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1} = a_1(\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{k_0+1}.$$

Сделаем теперь, наконец, еще два предположения:
(B) Пусть

$$\begin{aligned} a_i &= n_i + \overline{a}_i, \quad i = 1, 2, \\ b_j &= m_j + \overline{b}_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

(C) Пусть

$$\begin{aligned} \overline{b}_1 &\leqslant \overline{a}_i + b_2, \quad \overline{b}_2 \leqslant \overline{a}_i + b_1, \quad i = 1, 2, \\ \overline{a}_1 &\leqslant \overline{b}_j + a_2, \quad \overline{a}_2 \leqslant \overline{b}_j + a_1, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Предположение (B) и лемма 16, а также аналогичные леммы для других слагаемых прямых разложений (1) приводят к следующим прямым разложениям:

$$\begin{aligned} a_i &= n_i \dotplus \overline{a}_i, \quad i = 1, 2, \\ b_j &= m_j \dotplus \overline{b}_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (9) мы получаем такие продолжения для исходных прямых разложений (1):

$$1 = n_{11} \dotplus n_{12} \dotplus \overline{a}_1 \dotplus n_{21} \dotplus n_{22} \dotplus \overline{a}_2 = m_{11} \dotplus m_{12} \dotplus \overline{b}_1 \dotplus m_{21} \dotplus m_{22} \dotplus \overline{b}_2. \tag{13}$$

Лемма 18. *Слагаемые прямых разложений* (13) *можно так поставить во взаимно однозначное соответствие, что соответствующие слагаемые взаимно замещают друг друга.*

Для слагаемых, входящих в прямые разложения (12) элемента v, это было уже доказано в лемме 15 и остается справедливым в нашем общем случае, так как разложения (13) служат продолжениями для прямых разложений

$$1 = v \dotplus \overline{a}_1 \dotplus \overline{a}_2 = v \dotplus \overline{b}_1 \dotplus \overline{b}_2.$$

С другой стороны, предположение (C) и лемма 17 показывают, что любое из прямых слагаемых $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$ второго из разложений (13) может быть замещено каждым из слагаемых $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ первого разложения и наоборот.

§ 47. Основная теорема

Нашей целью является доказательство следующей теоремы (Курош [16]).

Пусть группа G с произвольной системой операторов обладает следующим свойством: всякая (допустимая) подгруппа допустимого центра группы G, на которую операторно гомоморфно отображается сама группа G (или, что то же самое, ее фактор-группа по коммутанту), обладает, как группа с операторами, главным рядом. Тогда для любых двух прямых разложений группы G существуют центрально изоморфные продолжения.

Рассмотрим сначала случай прямых разложений с двумя множителями каждое. В этом случае утверждение теоремы немедленно вытекает из леммы 18 предшествующего параграфа. Нужно лишь доказать, что в структуре нормальных делителей группы G выполняются предположения (A), (B) и (C).

Пусть, следовательно, даны разложения

$$G = A_1 \times A_2 = B_1 \times B_2. \tag{1}$$

Эндоморфизмы этих разложений обозначим через φ_1, φ_2 и соответственно θ_1, θ_2.

Предположение (A). Как мы знаем из § 45, отображение $\theta_1\varphi_1\theta_2$ является операторным эндоморфизмом, отображающим группу G в допустимый центр. Тем более это справедливо для отображения $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2$. С другой стороны, эндоморфизм φ_1 отображает подгруппу центра на подгруппу центра, так как компонента элемента из центра принадлежит к центру. Таким образом, $G\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$, а также $G\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2$ и $G\theta_j\varphi_1\theta_j\varphi_2\theta_j$, $j = 1, 2$, являются допустимыми подгруппами центра и поэтому (A) вытекает из условий теоремы.

Предположение (B). Будем вместо n_1 и $\overline{a}_1$ писать теперь N_1 и $\overline{A}_1$. Нужно доказать, что

$$A_1 = \{N_1, \overline{A}_1\}.$$

Если a_1 — произвольный элемент из A_1, то ввиду леммы 12

$$a_1\eta^{k_0} \in \overline{A}_1.$$

Однако $\overline{A}_1\eta^{k_0} = \overline{A}_1$, т. е. в $\overline{A}_1$ существует такой элемент $\overline{a}_1$, что

$$\overline{a}_1\eta^{k_0} = a_1\eta^{k_0}.$$

Отсюда

$$(\overline{a}_1^{-1}a_1)\eta^{k_0} = 1,$$

т. е. ввиду леммы 13 $\overline{a}_1^{-1}a_1 \in N_1$ и поэтому $a_1 \in \{N_1, \overline{A}_1\}$.

Предположение (C). Будем вместо $\overline{b}_1$ писать $\overline{B}_1$. Нужно доказать включение

$$\overline{B}_1 \subseteq \{\overline{A}_1, B_2\}. \tag{2}$$

Пусть x — произвольный элемент из $\overline{B}_1$. Так как

$$\overline{B}_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1) = \overline{B}_1,$$

то в $\overline{B}_1$ существует такой элемент y, что

$$y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = x.$$

С другой стороны, пусть k_0' — число, играющее по отношению к $\overline{B}_1$ ту же роль, какую число k_0 играет в лемме 12 по отношению к $\overline{A}_1$; через k обозначим большее из этих двух чисел. Тогда в B_1 существует такой элемент b_1, что

$$b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k = y. \tag{3}$$

Записывая поочередно соответствующие элементы через компоненты в первом и во втором из разложений (1), мы получим

$$\begin{aligned} y\varphi_1 = y\varphi_1\theta_1 \cdot y\varphi_1\theta_2 = y\varphi_1\theta_1\varphi_1 \cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2 \cdot y\varphi_1\theta_2 = \\ = y\varphi_1\theta_1\varphi_1 \cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 \cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2 \cdot y\varphi_1\theta_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = (y\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{-1} \cdot y\varphi_1 \cdot (y\varphi_1\theta_2)^{-1}(y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2)^{-1}. \tag{4}$$

Два последних множителя правой части последнего равенства принадлежат, очевидно, к B_2. Покажем, что два первых множителя, принадлежащих к A_1, содержатся в $\overline{A}_1$. Для этого несколько уточним леммы 1 и 2 из предыдущего параграфа, так как мы должны будем применять их к элементам группы, а не к ее подгруппам.

Лемма 1′. *Для любого элемента x группы G*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = x^{-1}\theta_1\varphi_2\theta_2.$$

Справедливы также равенства, получающиеся из указанного переменой ролей θ_1 и θ_2, а также ролей θ и φ.

Действительно, так как

$$x\theta_1 = x\theta_1\varphi_1 \cdot x\theta_1\varphi_2,$$

то

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 \cdot x\theta_1\varphi_2\theta_2 = (x\theta_1\varphi_1 \cdot x\theta_1\varphi_2)\theta_2 = x\theta_1\theta_2 = 1.$$

Лемма 2′. *Если элемент x содержится в подгруппе A_1, то*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

Доказательство такое же, как для леммы 2, причем следует учесть, что в ходе доказательства придется воспользоваться леммой 1′ четыре раза.

Возвращаемся к равенству (4). Используя (3) и леммы $1'$ и $2'$, получаем

$$y\varphi_1 = b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k\varphi_1 = (b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^k = (b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k \in \overline{A}_1;$$
$$y\varphi_1\theta_1\varphi_1 = b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k\varphi_1\theta_1\varphi_1 = (b\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^k\theta_1\varphi_1 =$$
$$= (b\varphi_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k\theta_1\varphi_1 = (b\varphi_1\theta_1\varphi_1)(\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1)^k \in \overline{A}_1.$$

Этим доказано включение (2). Другие утверждения предположения (C) доказываются аналогичным путем.

Рассмотрим теперь два прямых разложения группы G с любым конечным числом множителей:

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_l, \tag{5}$$

и будем индукцией по сумме $k + l$ доказывать существование для разложений (5) таких центрально изоморфных продолжений, что *каждое* A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, *разлагается в произведение* l *множителей*, *каждое* B_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, — *в произведение* k *множителей* (некоторые из них могут, впрочем, равняться E), *причем центрально изоморфное соответствие между этими множителями устанавливается так, что никакие два множителя, входящих в разложение какого-либо* A_i, *не сопоставляются множителям из разложения одного и того же* B_j.

Это утверждение справедливо при $k + l = 4$: оно очевидно при $k = 1$, $l = 3$ и при $k = 3$, $l = 1$, а при $k = l = 2$ следует из доказанного выше. Действительно, в нашем случае разложения (13) из предшествующего параграфа можно превратить в центрально изоморфные продолжения разложений (1), удовлетворяющие поставленным выше условиям, объединяя, например, $\overline{A}_1$ с N_{11}, $\overline{A}_2$ с N_{22}, $\overline{B}_1$ с M_{11} и $\overline{B}_2$ с M_{22}.

Пусть $k + l > 4$, и пусть для всякой группы, удовлетворяющей условиям теоремы, и для всех пар ее прямых разложений с меньшим чем $k + l$ общим числом прямых множителей наше утверждение уже доказано. Если, например, $k > 2$, то введем обозначение

$$A^*_{k-1} = A_{k-1} \times A_k. \tag{6}$$

Тогда прямые разложения

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A^*_{k-1} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_l$$

обладают, по предположению, центрально изоморфными продолжениями:

$$G = (A_{11} \times \ldots \times A_{1l}) \times (A_{21} \times \ldots \times A_{2l}) \times \ldots$$
$$\ldots \times (A^*_{k-1,1} \times \ldots \times A^*_{k-1,l}) =$$
$$= (B_{11} \times \ldots \times B_{1,k-1}) \times (B_{21} \times \ldots \times B_{2,k-1}) \times \ldots$$
$$\ldots \times (B_{l1} \times \ldots \times B_{l,k-1}).$$

Так как группа A^*_{k-1} как прямой множитель группы G также удовлетворяет условиям нашей теоремы и $2 + l < k + l$, то два прямых разложения группы A^*_{k-1}, а именно (6) и

$$A^*_{k-1} = A^*_{k-1,1} \times \ldots \times A^*_{k-1,l},$$

обладают центрально изоморфными продолжениями

$$\begin{aligned} A^*_{k-1} &= (A_{k-1,1} \times \ldots \times A_{k-1,l}) \times (A_{k1} \times \ldots \times A_{kl}) = \\ &= (A^*_{k-1,1,1} \times A^*_{k-1,1,2}) \times \ldots \times (A^*_{k-1,l,1} \times A^*_{k-1,l,2}). \end{aligned}$$

Если $A^*_{k-1,j} \cong B_{j,k-1}$, $j = 1, 2, \ldots, l$, и если этот центральный изоморфизм ставит в соответствие прямому разложению $A^*_{k-1,j} = A^*_{k-1,j,1} \times \times A^*_{k-1,j,2}$ прямое разложение $B_{j,k-1} = B_{j,k-1,1} \times B_{j,k-1,2}$, то, очевидно, прямые разложения

$$\begin{aligned} G = (A_{11} \times \ldots A_{1l}) \times (A_{21} \times \ldots \times A_{2l}) \times \ldots \\ \ldots \times (A_{k-1,1} \times \ldots \times A_{k-1,l}) \times (A_{k1} \times \ldots \times A_{kl}) = \\ = (B_{11} \times \ldots \times B_{1,k-1,1} \times B_{1,k-1,2}) \times \\ \times (B_{21} \times \ldots \times B_{2,k-1,1} \times B_{2,k-1,2}) \times \ldots \\ \ldots \times (B_{l1} \times \ldots \times B_{l,k-1,1} \times B_{l,k-1,2}) \end{aligned}$$

будут искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (5).

Для окончания доказательства теоремы нам остается рассмотреть случай прямых разложений группы G с бесконечным числом множителей. Используя введенное в конце § 45 понятие F-группы, а также теорему, доказанную там об этих группах, мы докажем сначала следующие две леммы, в первой из которых группа G не обязана подчиняться ограничениям, указанным в формулировке основной теоремы.

Лемма 19 (Головин [1]). *Пусть даны два прямых разложения некоторой группы G с произвольной системой операторов*,

$$G = \prod_{\alpha}^{\bullet} A_\alpha \times \prod_{\gamma}^{\bullet} C_\gamma = \prod_{\beta}^{\bullet} B_\beta \times \prod_{\delta}^{\bullet} D_\delta. \tag{7}$$

Если подгруппы

$$C = \prod_{\gamma}^{\bullet} C_\gamma, \quad D = \prod_{\delta}^{\bullet} D_\delta$$

являются F-группами и если прямые разложения

$$G = \prod_{\alpha}^{\bullet} A_\alpha \times C = \prod_{\beta}^{\bullet} B_\beta \times D \tag{8}$$

обладают центрально изоморфными продолжениями, то центрально изоморфными продолжениями обладают и заданные прямые разложения (7).

В самом деле, прямые разложения (8) обладают, по предположению, центрально изоморфными продолжениями

$$G = \prod_{\alpha'}^{\cdot} A'_{\alpha'} \times \prod_{\varepsilon}^{\cdot} C'_{\varepsilon} = \prod_{\beta'}^{\cdot} B'_{\beta'} \times \prod_{\eta}^{\cdot} D'_{\eta}, \tag{9}$$

где

$$\prod_{\varepsilon}^{\cdot} C'_{\varepsilon} = C, \quad \prod_{\eta}^{\cdot} D'_{\eta} = D.$$

Так как C является F-группой, то, как доказано в § 45, ее прямые разложения

$$C = \prod_{\gamma}^{\cdot} C_{\gamma} = \prod_{\varepsilon}^{\cdot} C'_{\varepsilon}$$

обладают общим продолжением

$$C = \prod_{\sigma}^{\cdot} C''_{\sigma}.$$

Подставляя это продолжение разложения $\prod_{\varepsilon}^{\cdot} C'_{\varepsilon}$ в первое из разложений (9) и соответствующим образом разлагая центрально изоморфные множители во втором из разложений (9), мы придем к двум новым центрально изоморфным разложениям группы G:

$$G = \prod_{\alpha'}^{\cdot} A'_{\alpha'} \times \prod_{\sigma}^{\cdot} C''_{\sigma} = \prod_{\beta''}^{\cdot} B''_{\beta''} \times \prod_{\xi}^{\cdot} D''_{\xi}, \tag{10}$$

где

$$\prod_{\xi}^{\cdot} D''_{\xi} = D.$$

Прямые разложения

$$D = \prod_{\delta}^{\cdot} D_{\delta} = \prod_{\xi}^{\cdot} D''_{\xi}$$

F-группы D обладают общим продолжением. Подставляя его вместо $\prod_{\xi}^{\cdot} D''_{\xi}$ во второе из разложений (10) и соответствующим образом разлагая центрально изоморфные множители в первом из этих разложений, мы получим искомые центрально изоморфные продолжения заданных прямых разложений (7).

Лемма 20. *Если группа G удовлетворяет условиям основной теоремы, то из любого прямого разложения этой группы можно так удалить конечное число прямых множителей, что произведение оставшихся множителей будет F-группой.*

Пусть, в самом деле, дано произвольное прямое разложение группы G. Покажем, что в этом разложении содержится лишь конечное число таких множителей, в допустимый центр каждого из которых

можно нетривиальным образом гомоморфно отобразить фактор-группы бесконечного числа прямых множителей заданного разложения по их коммутантам. Действительно, в противном случае можно было бы указать счетную систему прямых множителей, фактор-группы которых по коммутантам нетривиально отображаются в допустимые центры различных прямых множителей. Это приводит, однако, в противоречии с условиями теоремы, к существованию гомоморфного отображения фактор-группы всей группы G по ее коммутанту на такую подгруппу ее допустимого центра, которая является прямым произведением счетного множества подгрупп и поэтому не может обладать главным рядом.

Удалим из заданного прямого разложения те множители (в конечном числе), о которых шла речь в предыдущем абзаце, и покажем, что теперь вообще можно указать лишь конечное число множителей, фактор-группы которых по коммутантам допускают нетривиальное гомоморфное отображение внутрь допустимого центра какого-либо из (оставшихся) множителей. В самом деле, если бы таких множителей было бесконечно много, то, так как в допустимый центр каждого из оставшихся множителей может теперь нетривиально отображаться лишь конечное число указанных фактор-групп, мы снова могли бы указать счетную систему прямых множителей, фактор-группы которых по коммутантам нетривиально отображаются в допустимые центры различных прямых множителей, что опять противоречит условиям теоремы. Если мы удалим и эти множители (в конечном числе), то произведение оставшихся множителей уже будет, как легко видеть, F-группой.

Леммы 19 и 20 сводят общий случай основной теоремы на рассмотренный выше случай разложений с конечным числом прямых множителей. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Условия основной теоремы заведомо выполняются, если допустимый центр группы G или же ее фактор-группа по коммутанту сами обладают главным рядом. Уже отсюда вытекает

Теорема Шмидта. *Если группа с произвольной системой операторов обладает главным рядом, то любые два прямых разложения этой группы с неразложимыми множителями центрально изоморфны.*

§ 47а. Прямое доказательство теоремы Шмидта. Некоторые другие теоремы

Ввиду важности теоремы Шмидта приведем для нее прямое доказательство, лишь в незначительных деталях отличающееся от доказательства из работы Шмидта [4]. При проведении доказательства существенным образом используется наличие произвольной области операторов и вытекающая отсюда возможность ограничиваться подгруппами, допустимыми относительно этой области операторов.

Проведение этого доказательства без использования операторов потребовало бы замены предположения о существовании главного ряда более ограничивающим предположением о существовании в группе композиционного ряда.

Заметим прежде всего, что для доказательства теоремы достаточно показать, что *всякий прямой множитель одного из двух любых разложений с неразложимыми множителями может быть замещен некоторым прямым множителем из другого разложения*, так как замещение любой заданной системы прямых множителей будет достигаться тогда последовательным замещением отдельных множителей, а для доказательства теоремы достаточно будет в качестве подлежащей замещению системы множителей из первого разложения взять все его множители. Доказательство мы будем вести индуктивно, предполагая, что для групп с меньшей, чем у группы G, длиной главного ряда наше утверждение уже доказано. Действительно, группы с равной единице длиной главного ряда являются простыми (относительно данной области операторов) и поэтому неразложимы, т. е. для них справедливость теоремы очевидна.

Мы делаем, далее, предположение, что к области операторов присоединены все внутренние автоморфизмы группы G. Благодаря этому предположению допустимыми подгруппами группы G будут теперь лишь нормальные делители, допустимые при старой области операторов — обстоятельство, которым мы будем пользоваться дальше без особых оговорок. Вместе с тем наше изменение области операторов не оказывает никакого влияния на прямые разложения группы G, так как прямые множители группы являются ее нормальными делителями; это изменение является, следовательно, с точки зрения наших целей вполне законным.

При нашем выборе области операторов понятие главного ряда совпадает с понятием композиционного ряда, что дает нам возможность применять результаты, установленные в § 16 для композиционных рядов. Так, *истинные допустимые подгруппы группы* G, рассматриваемые как группы с той же областью операторов, что и G, *обладают меньшей, чем* G, *длиной главных рядов*, т. е. для них наша теорема уже доказана. Заметим, далее, что если (допустимые) подгруппы A и B порождают вместе всю группу G, если $D = A \cap B$ и если длины главных рядов групп G, A, B и D обозначены соответственно через l, l_1, l_2 и l', то

$$l = l_1 + l_2 - l'. \tag{1}$$

Действительно, если $\overline{l}_1$ есть длина главных рядов группы G/A, то, как показано в § 16, $l = l_1 + \overline{l}_1$; но по теореме об изоморфизме $G/A \simeq B/D$, откуда $\overline{l}_1 = l_2 - l'$. В частности, если $G = A \times B$, т. е. $D = E$, то

$$l = l_1 + l_2. \tag{2}$$

После этих предварительных замечаний переходим к проведению доказательства. Пусть

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_s \tag{3}$$

будут два разложения группы G в прямое произведение неразложимых множителей, и пусть подлежит замещению множитель H_1. Обозначим через F_{i1} компоненту подгруппы H_1 в прямом множителе F_i второго разложения. Предположим сперва, что хотя бы при одном i подгруппа F_{i1} отлична от F_i. Тогда подгруппа

$$\overline{G} = F_{11} \times F_{21} \times \ldots \times F_{s1} \tag{4}$$

отлична от группы G. Так как $H_1 \subseteq \overline{G}$, то по VII′ из § 17

$$\overline{G} = H_1 \times D, \tag{5}$$

где $D = \overline{G} \cap (H_2 \times \ldots \times H_k)$. Для $\overline{G}$ теорема, по индуктивному предположению, уже доказана, т. е. после продолжения разложения (4) до разложения с неразложимыми множителями найдется такой прямой множитель, содержащийся хотя бы в F_{11}, — обозначим его через F'_{11}, — которым может быть замещен множитель H_1 в разложении (5), т. е.

$$\overline{G} = F'_{11} \times D.$$

Отсюда $F'_{11} \cap D = F'_{11} \cap \overline{G} \cap (H_2 \times \ldots \times H_k) = E$ или, так как $F'_{11} \subset \overline{G}$, будет $F'_{11} \cap (H_2 \times \ldots \times H_k) = E$, т. е. подгруппы F'_{11} и $H_2 \times \ldots \times H_k$ составляют прямое произведение. Из изоморфизма между F'_{11} и H_1 и из (2) следует, что это прямое произведение обладает такой же длиной главных рядов, как и G, а поэтому оно совпадает с G,

$$G = F'_{11} \times H_2 \times \ldots \times H_k.$$

Из $F'_{11} \subseteq F_1$ из VII′ (§ 17) следует ввиду неразложимости группы F_1 равенство $F'_{11} = F_1$, т. е.

$$G = F_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k.$$

Этим доказано, что H_1 и F_1 центрально изоморфны, причем H_1 замещается через F_1. Докажем, что со своей стороны *подгруппа* H_1 *замещает множитель* F_1 *во втором из разложений* (3). Действительно, из $F'_{11} \subseteq F_{11} \subseteq F_1$ и $F'_{11} = F_1$ следует $F_{11} = F_1$, т. е. компонента подгруппы H_1 в F_1 совпадает с F_1. Отсюда следует, что произведение подгрупп H_1 и $F_2 \times \ldots \times F_s$, содержащее, очевидно, компоненты в F_1 всех элементов из H_1, содержит всю подгруппу F_1 и поэтому совпадает с G, а из изоморфизма между H_1 и F_1 и равенства (1) следует $H_1 \cap (F_2 \times \ldots \times F_s) = E$, т. е.

$$G = H_1 \times F_2 \times \ldots \times F_s.$$

Пусть теперь компоненты H_1 во всех F_i совпадают с самими F_i, и пусть компонента в H_1 одного из F_i, например F_1, совпадает с H_1.

Так как при этих предположениях подгруппа F_1 содержится в произведении подгрупп H_1 и $F_2 \times \ldots \times F_s$, а подгруппа H_1 — в произведении подгрупп F_1 и $H_2 \times \ldots \times H_k$, то

$$\left.\begin{aligned} H_1(F_2 \times \ldots \times F_s) = G, \\ F_1(H_2 \times \ldots \times H_k) = G. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Докажем, что эти произведения прямые. Если длины главных рядов групп G, H_1, $H_2 \times \ldots \times H_k$, F_1 и $F_2 \times \ldots \times F_s$ будут обозначены соответственно через l, l_1, $\overline{l}_1$, l_2 и $\overline{l}_2$, то ввиду (1), (2) и (6) будет

$$l = l_1 + \overline{l}_1 = l_2 + \overline{l}_2, \quad l \leqslant l_1 + \overline{l}_2, \quad l \leqslant l_2 + \overline{l}_1.$$

Отсюда следует $l_1 = l_2$, $\overline{l}_1 = \overline{l}_2$, а поэтому

$$H_1 \cap (F_2 \times \ldots \times F_s) = F_1 \cap (H_2 \times \ldots \times H_k) = E,$$

откуда

$$G = H_1 \times F_2 \times \ldots \times F_s = F_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k.$$

Пусть, наконец, компоненты подгруппы H_1 во всех F_i снова совпадают с самими F_i, но компоненты всех F_i в H_1 отличны от самого H_1. Все прямые множители, составляющие второе из разложений (3), находятся в таких же условиях, в каких находился в первом из рассмотренных выше случаев множитель H_1. Мы можем, таким образом, замещать множители F_i во втором разложении некоторыми множителями из первого разложения. При *последовательном* выполнении этих замещений мы должны будем использовать различные множители из первого разложения, в том числе и множитель H_1, так как множители из второго разложения не могут исчерпаться раньше, чем будут использованы все множители из первого разложения. Если при этом последовательном замещении подгруппа H_1 будет замещать некоторый множитель F_j, то, как доказано при рассмотрении первого случая, компонента подгруппы F_j в H_1 должна будет совпадать с H_1. Отсюда следует, что этот последний случай вообще невозможен.

Мы получаем, что прямой множитель H_1 из первого разложения (3) во всех возможных случаях может быть замещен некоторым прямым множителем из второго разложения (3), ему центрально изоморфным. Этим заканчивается доказательство теоремы Ремака–Шмидта.

При рассмотрении вопроса о существовании центрально изоморфных продолжений для прямых разложений групп возможен, однако, и иной путь: о самой группе не делается никаких предположений, но изучаются лишь некоторые, обладающие специальными свойствами, прямые разложения этой группы. В качестве примера докажем следующую теорему (Головин [1]).

Два прямых разложения произвольной группы, при каждом из которых центр группы содержится целиком внутри одного из прямых множителей, всегда обладают центрально изоморфными продолжениями. [См. Д.5.5.]

Рассмотрим сперва случай разложений с двумя множителями. Пусть

$$G = C \times A = Z \times X \tag{7}$$

будут два прямых разложения группы G, причем множители C и Z содержат целиком центр группы G. Если A_Z и A_X — компоненты Z и X в A, X_C и X_A — компоненты C и A в X, то из отсутствия центров в множителях A и X следует существование разложений

$$A = A_Z \times A_X, \quad X = X_C \times X_A,$$

откуда

$$G = C \times A_Z \times A_X = Z \times X_C \times X_A. \tag{8}$$

Из $C \times A_X \supseteq X$ следует

$$C \times A_X = X \times D,$$

где $D = (C \times A_X) \cap Z = C \cap Z$, так как $A_X \cap A_Z = E$. Отсюда и из (7) и (8) следует

$$G = X \times Z = X \times D \times A_Z,$$

поэтому Z и $D \times A_Z$ центрально изоморфны, а так как центр группы G содержится в Z, то $Z = D \times A_Z$. Аналогично будет $C = D \times X_C$. Подставляя это в разложения (8), мы получаем

$$G = D \times X_C \times A_Z \times A_X = D \times A_Z \times X_C \times X_A,$$

т. е. приходим к двум продолжениям заданных разложений (7), отличающимся друг от друга лишь одним множителем и поэтому центрально изоморфным.

Общий случай сводится к рассмотренному сейчас случаю разложений с двумя множителями при помощи леммы 19 из предыдущего параграфа.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что *два любых прямых разложения группы с неразложимым центром обладают центрально изоморфными продолжениями*. [См. Д.5.5.]

Аналогичный подход возможен и в вопросе о существовании общего продолжения. Введем сперва некоторые определения, относящиеся к эндоморфизмам и автоморфизмам произвольной группы.

Эндоморфизмы χ и η группы G называются *суммируемыми*, если подгруппы $G\chi$ и $G\eta$ — образы группы G при этих эндоморфизмах — таковы, что всякий элемент одной из них перестановочен со всяким элементом другой. Отображение, переводящее всякий элемент a из G в элемент $a\chi \cdot a\eta$, называется в случае суммируемых эндоморфизмов *суммой* χ *и* η,

$$a(\chi + \eta) = a\chi \cdot a\eta.$$

Это отображение также будет эндоморфизмом группы G, так как

$$(ab)(\chi+\eta) = (ab)\chi \cdot (ab)\eta = a\chi \cdot b\chi \cdot a\eta \cdot b\eta = \\ = a\chi \cdot a\eta \cdot b\chi \cdot b\eta = a(\chi+\eta) \cdot b(\chi+\eta).$$

Эндоморфизмы абелевой группы всегда суммируемы (см. § 21), и поэтому сумма эндоморфизмов всегда определена. В общем случае эндоморфизм χ будет суммируем со всеми эндоморфизмами группы G тогда и только тогда, если подгруппа $G\chi$ принадлежит к центру группы G. К числу эндоморфизмов, суммируемых со всеми эндоморфизмами группы, принадлежит нулевой эндоморфизм ω. Он играет, очевидно, роль нуля при сложении эндоморфизмов.

Два автоморфизма группы будут суммируемыми между собой лишь в случае абелевых групп, причем их сумма не обязана быть автоморфизмом.

Из определения суммируемости следует *коммутативность* сложения эндоморфизмов произвольной группы. Если эндоморфизмы χ_1, χ_2 и χ_3 попарно суммируемы, то суммируемым будет и каждый из них с суммой двух других, причем благодаря ассоциативности операции в группе G это сложение эндоморфизмов будет *ассоциативным*. О сумме нескольких эндоморфизмов мы будем говорить, следовательно, лишь в том случае, если они попарно суммируемы.

Сумма и произведение эндоморфизмов связаны *дистрибутивными законами*: если даны суммируемые эндоморфизмы χ_1 и χ_2 и некоторый эндоморфизм η группы G, то эндоморфизмы $\chi_1\eta$ и $\chi_2\eta$ (и $\eta\chi_1$ и $\eta\chi_2$) также суммируемы между собой и имеют место равенства

$$(\chi_1+\chi_2)\eta = \chi_1\eta + \chi_2\eta, \tag{9}$$

$$\eta(\chi_1+\chi_2) = \eta\chi_1 + \eta\chi_2. \tag{10}$$

Действительно, для любых a и b из G элементы $a\chi_1$ и $b\chi_2$ перестановочны, поэтому перестановочны и элементы $(a\chi_1)\eta$ и $(b\chi_2)\eta$, так как свойство элементов быть перестановочными сохраняется при эндоморфизме. Этим доказана суммируемость эндоморфизмов $\chi_1\eta$ и $\chi_2\eta$. Суммируемость эндоморфизмов $\eta\chi_1$ и $\eta\chi_2$ непосредственно следует из суммируемости χ_1 и χ_2. Теперь для любого a из G будет

$$a[(\chi_1+\chi_2)\eta] = (a\chi_1 \cdot a\chi_2)\eta = (a\chi_1)\eta \cdot (a\chi_2)\eta = \\ = a(\chi_1\eta) \cdot a(\chi_2\eta) = a(\chi_1\eta + \chi_2\eta),$$

чем доказано равенство (9). Равенство (10) доказывается так же просто.

Условимся называть эндоморфизмы χ и η *перестановочными*, если $\chi\eta = \eta\chi$. Это понятие позволяет выделить некоторый класс эндоморфизмов, в дальнейшем играющих особую роль.

Эндоморфизм χ группы G называется *нормальным*, если он перестановочен со всеми внутренними автоморфизмами этой группы, т. е. если для любых a и b из G

$$(b^{-1}ab)\chi = b^{-1}(a\chi)b.$$

К числу нормальных эндоморфизмов принадлежат, как легко видеть, нулевой эндоморфизм и тождественный автоморфизм группы. В случае абелевой группы всякий эндоморфизм будет, очевидно, нормальным.

Произведение двух нормальных эндоморфизмов χ и η и их сумма, если они суммируемы, также нормальны. Это показывают следующие равенства:

$$(b^{-1}ab)\chi\eta = [b^{-1}(a\chi)b]\eta = b^{-1}(a\chi\eta)b,$$
$$(b^{-1}ab)(\chi+\eta) = (b^{-1}ab)\chi\cdot(b^{-1}ab)\eta = b^{-1}(a\chi)b\cdot b^{-1}(a\eta)b =$$
$$= b^{-1}(a\chi\cdot a\eta)b = b^{-1}\cdot a(\chi+\eta)\cdot b.$$

Нормальный эндоморфизм χ отображает всякий нормальный делитель группы G также в нормальный делитель. Действительно, если H нормальный делитель в G, то для всякого h из H и всякого a из G

$$a^{-1}(h\chi)a = (a^{-1}ha)\chi \in H\chi.$$

Этим доказано, что подгруппа $H\chi$ является нормальным делителем в G. Заметим, что это свойство нормальных эндоморфизмов нельзя взять в качестве их определения.

Определение нормальности эндоморфизмов приводит в случае автоморфизмов к понятию *нормального автоморфизма. Нормальные автоморфизмы группы G составляют, очевидно, централизатор группы внутренних автоморфизмов Φ' группы G в группе Φ всех ее автоморфизмов.* Поэтому, ввиду теоремы из § 12 о нормальности Φ' в Φ и теоремы из § 11 о централизаторе нормального делителя, *нормальные автоморфизмы составляют нормальный делитель в группе всех автоморфизмов группы G.*

Нормальные автоморфизмы могут быть охарактеризованы также следующим образом: если мы будем называть автоморфизм φ группы G *центральным* в том случае, когда для всякого b из G элемент $(b\varphi)b^{-1}$ принадлежит к центру группы G, т. е. элемент b и его образ $b\varphi$ отличаются друг от друга на множитель, входящий в центр, то *нормальные автоморфизмы и только они являются центральными.*

Действительно, если автоморфизм φ нормальный, то из

$$(b\varphi)^{-1}(a\varphi)(b\varphi) = (b^{-1}ab)\varphi = b^{-1}(a\varphi)b$$

следует равенство

$$(a\varphi)\cdot(b\varphi\cdot b^{-1}) = (b\varphi\cdot b^{-1})(a\varphi),$$

т. е. элемент $(b\varphi)b^{-1}$ перестановочен со всеми элементами $a\varphi$, т. е. вообще со всеми элементами группы G, так как $a\varphi$ вместе с a пробегает все элементы группы. Обратно, если автоморфизм φ центральный, то

$$(a\varphi)\cdot(b\varphi\cdot b^{-1})=(b\varphi\cdot b^{-1})(a\varphi),$$

откуда

$$(b^{-1}ab)\varphi=(b\varphi)^{-1}(a\varphi)(b\varphi)=b^{-1}(a\varphi)b.$$

Отсюда следует, что *группа без центра не имеет других нормальных автоморфизмов, кроме тождественного*.

Доказанное нами совпадение понятий нормальности и центральности автоморфизмов не сохраняется в случае произвольных эндоморфизмов. Так, нулевой эндоморфизм всегда нормальный, но он не был бы в общем случае центральным, если бы данное выше определение центрального автоморфизма было перенесено на эндоморфизмы.

Эндоморфизмы прямого разложения группы (см. § 45) *всегда нормальны*. Действительно, если $G=A\times B$, $g, g'\in G$, $g=ab$, $g'=a'b'$, и если φ_A — эндоморфизм, соответствующий прямому множителю A, то

$$(g'^{-1}gg')\varphi_A=a'^{-1}aa'=g'^{-1}(g\varphi_A)g'.$$

Будем называть эндоморфизм φ, удовлетворяющий условию $\varphi^2=\varphi$, *идемпотентным*; это будет, иными словами, эндоморфизм, отображающий всякий элемент группы в элемент, остающийся неподвижным. К числу идемпотентных эндоморфизмов принадлежат, очевидно, нулевой и единичный эндоморфизмы, а также все эндоморфизмы прямых разложений.

Группа G тогда и только тогда неразложима в прямое произведение, если нулевой и единичный эндоморфизмы являются ее единственными идемпотентными нормальными эндоморфизмами.

В самом деле, если в группе G дан нормальный идемпотентный эндоморфизм φ, отличный от нулевого и единичного, то обозначим через A множество всех таких элементов a из G, что $a\varphi=a$, а через B множество всех таких элементов b, что $b\varphi=1$. Каждое из этих множеств отлично от G, причем пересечение их содержит лишь 1. Каждое из этих множеств будет, далее, подгруппой и даже, благодаря нормальности эндоморфизма φ, нормальным делителем группы G. Наконец, если g есть произвольный элемент из G, то

$$g=g\varphi(g^{-1}\varphi\cdot g),$$

в так как ввиду условия $\varphi^2=\varphi$ будет $g\varphi\in A$, $g^{-1}\varphi\cdot g\in B$, то $G=A\times B$.

Докажем теперь следующую теорему (Фиттинг [3], Курош [5]).

Прямое разложение группы G,

$$G=\prod_{\alpha}A_{\alpha}, \tag{A}$$

тогда и только тогда обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением этой группы, если все множители A_α являются характеристическими (допустимыми) относительно множества нормальных автоморфизмов группы G.

Докажем сперва *достаточность* этого условия. Пусть A есть один из множителей разложения (A), а B — произведение всех остальных множителей этого разложения. Мы получаем разложение

$$G = A \times B.$$

Пусть φ_1 и φ_2 будут нормальными эндоморфизмами, соответствующими множителям A и B в этом разложении. Если η есть произвольный нормальный эндоморфизм группы G, то эндоморфизм $\varphi_1\eta\varphi_2$ также будет нормальным, причем он будет отображать группу G в центр подгруппы B, т. е. в центр самой группы G: если $g = ab$ и $b' \in B$, то

$$b'^{-1}(g\varphi_1\eta\varphi_2)b' = (b'^{-1}gb')\varphi_1\eta\varphi_2 = (a \cdot b'^{-1}bb')\varphi_1\eta\varphi_2 = \\ = a\varphi_1\eta\varphi_2 = g\varphi_1\eta\varphi_2.$$

Отсюда следует (см. выше), что эндоморфизм $\varphi_1\eta\varphi_2$ суммируем с тождественным автоморфизмом, причем их сумма χ, переводящая всякий элемент g в элемент

$$g\chi = g\varphi_1\eta\varphi_2 \cdot g,$$

снова будет нормальным эндоморфизмом. Заметим, что если $g = ab$ и $a\eta = a'b'$, то $g\chi = a \cdot bb'$. Отсюда следует, что эндоморфизм χ будет даже автоморфизмом: если $g\chi = 1$, то $g \in B$, но тогда $g\chi = g$, т. е. $g = 1$; с другой стороны, всякий элемент g из G, $g = ab$, $a\eta = a'b'$, будет при эндоморфизме χ образом элемента gb'^{-1}. Предположим теперь, что $A\eta \not\subseteq A$, т. е. существует такой элемент $a \in A$, что $a\eta = a'b'$ и $b' \neq 1$. Тогда

$$a\chi = ab',$$

т. е. $a\chi \notin A$. Мы доказали, следовательно, что *из характеристичности всех прямых множителей разложения* (A) *относительно нормальных автоморфизмов следует их характеристичность даже по отношению ко всем нормальным эндоморфизмам группы G.*

Пусть теперь

$$G = \prod_\beta B_\beta \tag{B}$$

есть произвольное прямое разложение группы G, и пусть ψ_β будут эндоморфизмами, соответствующими множителям B_β в этом разложении. Если $A_\alpha \cap B_\beta = C_{\alpha\beta}$, то подгруппы $C_{\alpha\beta}$ составляют, очевидно, прямое произведение. Докажем, что это произведение совпадает при наших предположениях с группой G. Действительно, если a есть произвольный элемент одной из подгрупп A_α и если

$$a = b_{\beta_1}b_{\beta_2}\dots b_{\beta_k},$$

где $b_{\beta_i} \in B_{\beta_i}$, то

$$b_{\beta_i} = a\psi_{\beta_i}.$$

Так как эндоморфизм ψ_{β_i} нормален, то, ввиду доказанного выше, элемент b_{β_i} будет содержаться в A_α, т. е. в $C_{\alpha\beta_i}$. Этим доказано, что A_α есть прямое произведение своих пересечений со всеми подгруппами B_β.

Переходим к доказательству *необходимости* нашего условия. Пусть разложение (A) обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением группы G, и пусть ψ есть произвольный нормальный автоморфизм этой группы. Если мы обозначим через φ_α эндоморфизм, соответствующий множителю A_α в разложении (A), и положим $\beta \neq \alpha$, то таким же путем, как выше, мы докажем, что отображение χ, определенное формулой

$$g\chi = g\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta \cdot g,$$

будет нормальным автоморфизмом группы G, причем при $\gamma \neq \alpha$ будет $A_\gamma\chi = A_\gamma$. Автоморфизм χ превращает разложение (A) в прямое разложение

$$G = \prod_\gamma A_\gamma\chi = A_\alpha\chi \times \prod_{\gamma\neq\alpha} A_\gamma.$$

Это разложение обладает, по предположению, общим продолжением с разложением (A), а так как $A_\gamma \cap A_\alpha = E$ при $\gamma \neq \alpha$, то должно быть $A_\alpha\chi = A_\alpha$.

Если теперь взять элемент a из подгруппы A_α, то $a\chi \in A_\alpha$, т. е. $a\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta \in A_\alpha$. Отсюда, так как элемент $a\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta$ заведомо содержится в A_β, следует ввиду $A_\alpha \cap A_\beta = E$

$$a\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta = (a\psi)\varphi_\beta = 1.$$

Иными словами, элемент $a\psi$ имеет равную единице компоненту во всяком прямом множителе A_β, $\beta \neq \alpha$, т. е. $a\psi \in A_\alpha$. Этим доказана характеристичность прямого множителя A_α относительно нормальных автоморфизмов.

Установленное в § 45 существование общих продолжений для любых двух прямых разложений группы без центра является непосредственным следствием нашего критерия, как это следует из доказанной выше теоремы о том, что единственным нормальным автоморфизмом группы без центра является тождественный автоморфизм. [См. Д.5.2.]

§ 47б. Группы с изоморфными структурами подгрупп

Всякой группе G однозначно соответствует структура $S(G)$, составленная из всех ее подгрупп. Возникает естественный вопрос, не определяется ли группа G заданием структуры $S(G)$, т. е. не будет ли следовать (групповой) изоморфизм групп G и G' из (структурного) изоморфизма структур $S(G)$ и $S(G')$? Легко видеть, что в общем

случае ответ будет отрицательным: все циклические группы различных простых порядков обладают одной и той же структурой подгрупп, хотя не являются изоморфными. Тем не менее сама проблема определения группы при помощи ее структуры подгрупп вполне сохраняет смысл, если допустить, что на изучаемые группы или на рассматриваемые структурные изоморфизмы накладываются те или иные дополнительные ограничения. В этом направлении сделано пока не очень много; основные результаты, лишь частично излагаемые ниже, можно найти в работе Бэра [20] [1]).

Условимся называть в дальнейшем *структурным изоморфизмом группы* G всякое структурно изоморфное отображение ее структуры подгрупп $S(G)$ на структуру подгрупп какой-либо группы G'. Аналогично под структурным изоморфизмом между группами G и G' мы будем понимать структурный изоморфизм между структурами $S(G)$ и $S(G')$.

Одним из возможных ограничений, накладываемых на структурный изоморфизм, является требование *сохранения индексов*: если даны группы G и G', то рассматриваются лишь такие структурные изоморфизмы между ними, что если A и B — подгруппы из G, причем $A \subset B$, и если A', B' — соответствующие им подгруппы из G', то индекс A в B равен индексу A' в B'. Таким путем удается ликвидировать отмеченное выше затруднение с циклическими группами простых порядков. Тем не менее структурный изоморфизм, сохраняющий индексы, может существовать и между неизоморфными группами, даже между абелевой и некоммутативной. В качестве примера, как читатель без труда проверит, можно указать абелеву группу 16-го порядка, являющуюся прямой суммой циклических групп порядков 2 и 8, и некоммутативную группу 16-го порядка с образующими a и b и определяющими соотношениями

$$a^8 = 1, \quad b^2 = 1, \quad ba = a^5 b.$$

Можно рассматривать, далее, *нормальные* структурные изоморфизмы между группами G и G', при которых нормальные делители переходят в нормальные делители, или даже *вполне нормальные* структурные изоморфизмы, т. е. такие, что если A, B, C — подгруппы группы G, причем $A \subset C$, $B \subset C$, а A', B', C' — соответствующие им подгруппы группы G', то A и B тогда и только тогда сопряжены в C, если A' и B' сопряжены в C'. Следует отметить, однако (см. Ротлендер [1]), что *существуют неизоморфные группы, даже конечные, между которыми можно установить структурный изоморфизм, сохраняющий индексы и вполне нормальный*. Указанные ограничения не приводят, таким образом, к интересующей нас цели, и мы не будем в дальнейшем

[1]) Положение существенно изменилось ко времени подготовки третьего издания. [См. § Д.14.]

ими пользоваться, отсылая читателя к работе Бэра [20], содержащей результаты, связанные с этими ограничениями.

С другой стороны, изучение условий, при которых из структурного изоморфизма двух групп следует их групповой изоморфизм, можно вести в предположении, что по крайней мере одна из этих групп принадлежит к некоторому более или менее узкому классу. Достаточно далеко идущие результаты получены пока лишь для случая, когда одна из рассматриваемых групп абелева [1]). Мы начнем с рассмотрения циклических групп. В § 44 было доказано, что циклические группы и объединения их возрастающих последовательностей будут единственными группами с дистрибутивной структурой подгрупп, свойство же структуры быть дистрибутивной сохраняется при структурном изоморфизме. Поэтому, если мы заметим, что в циклической группе всякая подгруппа, отличная от E, содержится лишь в конечном числе подгрупп, т. е. что циклическая группа не может быть структурно изоморфной с объединением истинной возрастающей бесконечной последовательности групп, а также что структура конечной циклической группы конечна, а бесконечной циклической бесконечна, то мы придем к следующему результату.

Бесконечная циклическая группа может быть структурно изоморфной лишь с бесконечной циклической группой, т. е. эта группа определяется своей структурой подгрупп. Если конечная циклическая группа G структурно изоморфна с группой G', то G' также будет конечной циклической группой, хотя, быть может, иного порядка [2]).

Сейчас, не переходя пока к рассмотрению других классов групп, более широких, мы сделаем одно дополнительное замечание. Если G — произвольная группа, а G' — группа, ей изоморфная, то всякий групповой изоморфизм групп G и G' порождает некоторый структурный изоморфизм между ними. Между этими группами могут существовать, однако, и такие структурные изоморфизмы, которые не порождаются никакими групповыми изоморфизмами. Так, бесконечная циклическая группа обладает лишь двумя групповыми автоморфизмами, причем оба порождают один и тот же тождественный структурный автоморфизм; вместе с тем рассмотрение структуры подгрупп этой группы (см. § 44)

[1]) Как уже отмечено выше, ко времени подготовки третьего издания положение существенно изменилось.

[2]) Из этого не следует, конечно, что всякие две конечные циклические группы структурно изоморфны между собой. На самом деле, как легко проверить, циклическая группа G порядка $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа, будет структурно изоморфной с конечной циклической группой G' тогда и только тогда, когда порядок группы G' есть

$$n' = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k},$$

$q_1, q_2, \dots, q_k$ — различные простые числа.

показывает, что мы получим ее различные структурные автоморфизмы, совершая всевозможные взаимно однозначные отображения множества простых чисел на себя. Легко видеть, что *число групповых изоморфизмов между некоторыми группами G и G', порождающих данный структурный изоморфизм* (если такие групповые изоморфизмы вообще существуют), *равно числу групповых автоморфизмов группы G, порождающих тождественный структурный автоморфизм этой группы*. Пользуясь этим, докажем следующую лемму.

Если G есть абелева группа, содержащая элементы бесконечного порядка, и если данный ее структурный изоморфизм порождается групповыми изоморфизмами, то порождается ровно двумя.

Действительно, тождественный автоморфизм группы G и автоморфизм, переводящий всякий элемент в ему обратный, порождают тождественный структурный автоморфизм этой группы. Пусть, с другой стороны, f есть групповой автоморфизм группы G, порождающий тождественный структурный автоморфизм. Если a — произвольный элемент из G, то элемент af будет одним из образующих элементов циклической подгруппы $\{a\}$, т. е. $af = a^{n(a)}$, где $n(a) = \pm 1$, если a бесконечного порядка, и $n(a)$ взаимно просто с порядком элемента a, если этот порядок конечен. Пусть теперь a — фиксированный элемент бесконечного порядка из G, а b — произвольный элемент этой группы. Тогда

$$(ab)f = (ab)^{n(ab)} = a^{n(ab)}b^{n(ab)} = (af)(bf) = a^{n(a)}b^{n(b)}.$$

Отсюда при $\{a\} \cap \{b\} = E$ следует $n(ab) = n(a) = \pm 1$ и $n(b) = n(ab) = n(a)$, если же $\{a\} \cap \{b\} \neq E$, то b будет элементом бесконечного порядка, причем $n(b) = n(a)$, так как некоторые степени элементов a и b совпадают. Таким образом, $n(x) = n(a) = \pm 1$ для всех x из G, т. е. автоморфизм f оказался одним из двух, указанных выше.

В дальнейшем нас будут интересовать условия, при которых всякий структурный изоморфизм двух данных групп не только влечет за собою их групповой изоморфизм, но даже и сам порождается некоторым групповым изоморфизмом. Сейчас будет показано, что этот вопрос может быть сведен на случай групп с конечным числом образующих. Заметим сперва, что если дан структурный изоморфизм φ группы G (т. е. структурно изоморфное отображение структуры $S(G)$ на структуру подгрупп некоторой группы G'), то он определяет для всякой подгруппы H группы G вполне определенный структурный изоморфизм φ_H между структурами $S(H)$ и $S(H')$, где H' есть подгруппа группы G', соответствующая H при изоморфизме φ. Если φ порождается групповым изоморфизмом группы G, то φ_H будет порождаться групповым

изоморфизмом группы H. Следующая теорема может рассматриваться как обращение этого последнего замечания [1]).

Пусть G — произвольная группа, φ — ее структурный изоморфизм, $\mathfrak{M}$ — система подгрупп H_α группы G, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1. Всякая подгруппа H_α, входящая в $\mathfrak{M}$, обладает конечной системой образующих.

2. Всякий элемент группы G содержится хотя бы в одной подгруппе H_α, входящей в $\mathfrak{M}$.

3. Для всяких двух подгрупп H_α, H_β из $\mathfrak{M}$ найдется в $\mathfrak{M}$ подгруппа H_γ, их содержащая.

Если при всяком α структурный изоморфизм φ_α, определяемый структурным изоморфизмом φ в подгруппе H_α из системы $\mathfrak{M}$, порождается некоторым групповым изоморфизмом этой подгруппы, то φ будет порождаться групповым изоморфизмом группы G.

Эта теорема была бы очевидной, если бы φ_α при всех α порождался лишь одним групповым изоморфизмом. В общем же случае φ_α будет порождаться конечным числом групповых изоморфизмов, так как группа с конечным числом образующих может иметь, очевидно, лишь конечное число групповых автоморфизмов, порождающих тождественный структурный автоморфизм. Пусть

$$A_\alpha = (f_\alpha^1, f_\alpha^2, \ldots, f_\alpha^{n_\alpha})$$

есть система всех групповых изоморфизмов группы H_α, порождающих φ_α, а $\mathfrak{A}$ — множество всех систем A_α. Множество $\mathfrak{A}$ можно считать частично упорядоченным, полагая $A_\alpha \leqslant A_\beta$ при $H_\alpha \subseteq H_\beta$. При этом ввиду условия 3 для любых двух систем A_α, A_β можно найти в $\mathfrak{A}$ такую систему A_γ, что $A_\alpha \leqslant A_\gamma$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$.

Для всякой пары систем A_α, A_β, для которой отношение $A_\alpha \leqslant A_\beta$ определено, можно следующим образом установить однозначное (в одну сторону) отображение $\pi_{\beta\alpha}$ системы A_β в систему A_α. Если $f_\beta^i \in A_\beta$, то изоморфизм f_β^i определяет в подгруппе H_α структурный изоморфизм φ_α, т. е. совпадает на этой подгруппе с некоторым изоморфизмом f_α^j, входящим в A_α. Мы считаем теперь f_α^j *образом* для f_β^i при отображении $\pi_{\beta\alpha}$, а f_β^i называем *прообразом* для f_α^j, причем произвольный элемент f_α^j из A_α может иметь один или несколько прообразов в A_β, но может и не иметь их совсем. Отображения $\pi_{\beta\alpha}$ обладают, очевидно, следующими свойствами:

[1]) Эта теорема доказана Бэром [2] для случая счетных групп, а затем Садовским [2] для групп произвольной мощности. Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит Л. Е. Садовскому и использует метод, относящийся по существу к теории частично упорядоченных систем конечных множеств. Один вариант этого метода, более узкий, чем то, что нам здесь необходимо, излагается в § 55.

I. $\pi_{\alpha\alpha}$ есть тождественное отображение системы A_α на себя.

II. Если $\pi_\gamma\beta$ и $\pi_{\beta\alpha}$ определены, то определено и $\pi_{\gamma\alpha}$, причем оно совпадает с результатом последовательного выполнения отображений $\pi_{\gamma\beta}$ и $\pi_{\beta\alpha}$.

III. Для любой пары индексов α и β существует такой индекс γ, что отображения $\pi_{\gamma\alpha}$ и $\pi_{\gamma\beta}$ определены.

Элемент f_α^i из системы A_α называется *особым*, если во всякой системе A_β, $A_\alpha \leqslant A_\beta$, можно найти прообраз для f_α^i относительно отображения $\pi_{\beta\alpha}$. *Всякая система A_α обладает особыми элементами*. В самом деле, пусть для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n_\alpha$, можно указать такой индекс β_i, что $A_\alpha < A_{\beta_i}$, но f_α^i не имеет прообраза в A_{β_i}. Берем тогда на основании III такое γ, что отображения $\pi_{\gamma\beta_i}$ определены для всех i. Ввиду II отображение $\pi_{\gamma\alpha}$ также определено, поэтому некоторый элемент f_α^j обладает прообразом в A_γ, а тогда он должен, в противоречии с предположением, обладать прообразом и в A_{β_j}.

Условимся называть, далее, *особой системой* такое множество элементов, выбранных в некоторых из систем A_α не более чем по одному из каждой из этих систем, что всякое его конечное подмножество обладает общим прообразом во всякой системе A_β, следующей при нашей частичной упорядоченности за теми системами $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_k}$, к которым принадлежат элементы этого конечного подмножества. Очевидно, что все элементы особой системы будут особыми в тех A_α, в которых они лежат.

Предположим теперь, что множество $\mathfrak{A}$ произвольным способом вполне упорядочено; системы A_α мы будем обозначать через $A^1, A^2, \ldots, A^\mu, \ldots$, где μ — трансфинитное число, не превосходящее некоторого τ [1]). В системе A^1 выбираем один из ее особых элементов и обозначаем его через f^1. Пусть в каждой из систем A^μ, $\mu < \nu$, уже выбран элемент f^μ, причем множество всех этих элементов f^μ, $\mu < \nu$, есть особая система. Докажем, что к этой системе можно присоединить такой элемент f^ν из A^ν, что вновь полученная система также будет особой. В самом деле, пусть $A^\nu = (f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{n_\nu}})$, и пусть для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n_\nu$, можно указать такую конечную систему выбранных ранее элементов

$$\text{(i)} \qquad f^{\mu_{i1}}, f^{\mu_{i2}}, \ldots, f^{\mu_{i,\,s(i)}},$$

где $f^{\mu_{ij}} \in A^{\mu_{ij}}$, $\mu_{ij} < \nu$, $j = 1, 2, \ldots, s(i)$, и указать далее такую систему A_{β_i}, что $A^\nu \leqslant A_{\beta_i}$ и $A^{\mu_{ij}} \leqslant A_{\beta_i}$, $j = 1, 2, \ldots, s(i)$, но элементы системы (i) и элемент $f_{\nu i}$; не имеют в A_{β_i} общего прообраза. Берем тогда объединение S всех систем (i) и произвольную систему A_γ, следующую за всеми A_{β_i}, $i = 1, 2, \ldots, n_\nu$. Множество S, являясь

[1]) Эта полная упорядоченность множества $\mathfrak{A}$ никак не связана с существующей в $\mathfrak{A}$ частичной упорядоченностью. Символ $<$ мы продолжаем считать относящимся к частичной упорядоченности множества $\mathfrak{A}$.

конечным подмножеством особой системы, должно обладать в A_γ общим прообразом f_γ. Если $f_{\nu j}$ есть образ элемента f_γ в системе A^ν, то мы получаем, что элемент $f_{\nu j}$ и элементы системы (j) обладают общим прообразом в A_γ, а поэтому, против предположения, и в A_{β_j}.

Этим доказано, что можно найти особую систему, содержащую по одному элементу f^μ из каждой из систем A^μ. Если f^μ, f^ν — два элемента этой системы и если $A^\mu \leqslant A^\sigma$, $A_\nu \leqslant A^\sigma$, то элемент f^σ будет общим прообразом элементов f^μ и f^ν, так как, по определению особой системы, элементы f^μ, f^ν и f^σ обладают общим прообразом во всякой системе A_α, следующей за A^σ. Если мы вспомним теперь, что всякое f^μ есть групповой изоморфизм некоторой подгруппы H^μ группы G, $H^\mu \in \mathfrak{M}$, порождающий ее структурный изоморфизм φ^μ, то мы получаем, что совокупность всех изоморфизмов f^μ однозначно определяет групповой изоморфизм f группы G, порождающий заданный структурный изоморфизм φ этой группы. Доказательство теоремы закончено.

Эта теорема могла бы быть использована при доказательстве следующей *теоремы Бэра* [20], показывающей, что всякая «достаточно большая» абелева группа определяется своей структурой подгрупп.

Если в абелевой группе G можно найти два линейно независимых элемента бесконечного порядка (т. е. ее ранг — см. § 19 — не меньше двух, хотя может быть и бесконечным), *то всякий структурный изоморфизм этой группы порождается групповыми изоморфизмами, притом ровно двумя.*

Мы ограничимся доказательством следующего частного случая этой теоремы.

Если G есть абелева группа без кручения, ранг которой отличен от 1, *то всякий структурный изоморфизм φ между группой G и абелевой группой G' порождается ровно двумя групповыми изоморфизмами этих групп.*

Заметим прежде всего, что ввиду доказанной ранее в этом параграфе леммы достаточно доказать, что существует хотя бы один групповой изоморфизм, порождающий заданный структурный изоморфизм φ. Далее, так как бесконечная циклическая группа вполне определяется своей структурой подгрупп, а циклические подгруппы группы G будут отображаться при изоморфизме φ на циклические подгруппы группы G', то группа G', будучи абелевой, оказывается даже группой без кручения. Наконец, множество $\mathfrak{M}$ всех нециклических подгрупп группы G, обладающих конечным числом образующих, удовлетворяет, очевидно, условиям 1–3 из формулировки предшествующей теоремы. Мы имеем право предполагать, следовательно, что G есть свободная абелева группа, ранг которой конечен, но больше 1.

Основную роль в доказательстве играет следующая лемма.

Лемма. *Если дан структурный изоморфизм φ прямой суммы двух бесконечных циклических групп $H = X + Y$ на группу H' и если образом подгруппы $X = \{x\}$ при φ служит циклическая подгруппа*

$X' = \{x'\}$, *образом подгруппы* $Y = \{y\}$ — *циклическая подгруппа* Y', *то в* Y' *можно найти такой образующий элемент* y', *что подгруппа* $\{x' + y'\}$ *будет образом подгруппы* $\{x + y\}$.

Действительно, так как φ есть структурный изоморфизм, то $H' = \{X, Y'\}$, $X' \cap Y' = O$, т. е. $H' = X' + Y'$. Образом подгруппы $\{x + y\}$ будет некоторая циклическая подгруппа $\{x'_1 + y'_1\}$, где $x'_1 \in X'$, $y'_1 \in Y'$. Если бы элемент x'_1 не был образующим для X', то подгруппа $\{x'_1 + y'_1\}$ содержалась бы в истинной подгруппе $X'_1 + Y'$ группы H', где $X'_1 = \{x'_1\}$. Тогда подгруппа $\{x + y\}$ содержалась бы в истинной подгруппе $X_1 + Y$ группы H, где X_1 содержится в X и имеет X'_1 своим образом при φ. Отсюда следовало бы, однако, $x \in (X_1 + Y)$, что невозможно. Поэтому x'_1 служит образующим элементом для подгруппы X' и соответственно y'_1 есть образующий элемент для Y'. Если теперь x'_1 совпадает с заранее выбранным образующим элементом x', то полагаем $y' = y'_1$, если же $x'_1 = -x'$, то в качестве y' берем элемент $-y'_1$.

Переходим к доказательству теоремы. Условимся указывать символом $U \to U'$, что подгруппа U группы G имеет подгруппу U' из G' своим образом при изоморфизме φ. Пусть

$$G = \{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_n\}, \quad n \geqslant 2,$$

и пусть $\{a_i\} \to B'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$G' = B'_1 + B'_2 + \ldots + B'_n,$$

причем все подгруппы B'_i бесконечные циклические. В подгруппе B'_1 выбираем произвольный образующий элемент b_1, а во всякой подгруппе B'_j, $j = 2, \ldots, n$, на основании леммы выбираем такой образующий элемент b_j, что

$$\{a_1 + a_j\} \to \{b_1 + b_j\}. \tag{1}$$

Теперь, снова ввиду леммы, будет

$$\{a_1 - a_j\} \to \{b_1 - \varepsilon b_j\}, \quad \varepsilon = \pm 1;$$

однако при $\varepsilon = -1$ подгруппы $\{a_1 + a_j\}$ и $\{a_1 - a_j\}$ обладали бы общим образом, т. е. совпадали бы, что приводит к существованию в группе G элемента второго порядка. Поэтому

$$\{a_1 - a_j\} = \{a_j - a_1\} \to \{b_1 - b_j\} = \{b_j - b_1\}, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Отображение, переводящее всякий элемент $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$ группы G в элемент $k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n$ группы G', будет групповым изоморфизмом групп G и G'. Докажем, что этот изоморфизм порождает заданный структурный изоморфизм φ. Для этого, так как всякая подгруппа группы G есть объединение циклических подгрупп, достаточно доказать, что *при любом наборе коэффициентов* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *имеет место при* φ *соответствие*

$$\{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n\} \to \{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n\}.$$

Рассмотрим сперва случай, когда коэффициенты k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, принимают только значения 0, 1, -1. Здесь не требует рассмотрения случай, когда среди коэффициентов k_i лишь один отличен от нуля, а также ввиду (1) и (2) случай, когда отличных от нуля коэффициентов будет два, причем один из них есть k_1. Если нам дан теперь элемент $k_i a_i + k_j a_j$, k_i, $k_j = \pm 1$, $i, j > 1$, то ввиду леммы будет

$$\{k_i a_i + k_j a_j\} \to \{k_i b_i + \varepsilon k_j b_j\}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Так как, однако, при наших предположениях будет

$$\{a_1 - k_i a_i\} \cap \{k_i a_i + k_j a_j\} = O,$$

то возможно применение леммы, т. е. ввиду (1) и (2)

$$\{(a_1 - k_i a_i) + (k_i a_i + k_j a_j)\} = \\ = \{a_1 + k_j a_j\} \to \{(b_1 - k_i b_i) + \eta(k_i b_i + \varepsilon k_j b_j)\}, \quad \eta = \pm 1.$$

Отсюда ввиду $\{a_1 + k_j a_j\} \to \{b_1 + k_j b_j\}$ следует $(\eta - 1)k_i = 0$ и $\eta\varepsilon k_j - k_j$, т. е. $\eta = 1$ и, наконец, $\varepsilon = 1$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь все коэффициенты элемента $g = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$ снова принимают лишь значения 0, 1, -1, но число отличных от нуля коэффициентов больше двух, причем для всех элементов этого же вида, но с меньшим числом отличных от нуля коэффициентов наше утверждение будет считаться доказанным. Отметим три из отличных от нуля коэффициентов, например k_i, k_j, k_l. Тогда ввиду леммы, которая будет здесь применимой, мы получим, используя индуктивное предположение,

$$\{g\} = \{(k_1 a_1 + \ldots + k_{i-1} a_{i-1} + k_{i+1} a_{i+1} + \ldots + k_n a_n) + k_i a_i\} \to \\ \to \{(k_1 b_1 + \ldots + k_{i-1} b_{i-1} + k_{i+1} b_{i+1} + \ldots + k_n b_n) + \varepsilon k_i b_i\}, \ \varepsilon = \pm 1,$$

и аналогично

$$\{g\} \to \{(k_1 b_1 + \ldots + k_{j-1} b_{j-1} + k_{j+1} b_{j+1} + \ldots + k_n b_n) + \eta k_j b_j\}, \ \eta = \pm 1.$$

Сравнивая коэффициенты и учитывая, что при образующем элементе b_l в обоих случаях стоит один и тот же отличный от нуля коэффициент, мы получаем $\varepsilon k_i = k_i$, откуда $\varepsilon = 1$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь среди коэффициентов элемента $g = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n$ имеются такие, абсолютная величина которых больше единицы. Условимся называть *максимальными коэффициентами* элемента g те из коэффициентов, абсолютная величина которых наибольшая, и будем предполагать, что наше утверждение уже доказано для всех элементов группы G, абсолютная величина максимальных коэффициентов которых меньше, чем в случае элемента g, а также для всех элементов с такой же, как у элемента g, абсолютной величиной максимальных коэффициентов, но с меньшим числом таких коэффициентов. Пусть k_i есть один из максимальных коэффициентов элемента g; его можно считать положительным, заменяя элемент g, если нужно, ему обратным.

Если g обладает хотя бы одним отличным от нуля коэффициентом k_j при $j \neq i$, то

$$\{k_1a_1 + \ldots + k_{i-1}a_{i-1} + (k_i - 1)a_i + k_{i+1}a_{i+1} + \ldots + k_na_n\} \cap \{a_i\} = O.$$

Поэтому, применяя лемму и индуктивное предположение, получаем

$$\begin{gathered}\{g\} = \\ = \{(k_1a_1 + \ldots + k_{i-1}a_{i-1} + (k_i - 1)a_i + k_{i+1}a_{i+1} + \ldots + k_na_n) + a_i\} \to \\ \to \{(k_1b_1 + \ldots + k_{i-1}b_{i-1} + (k_i - 1)b_i + k_{i+1}b_{i+1} + \ldots + k_nb_n) + \varepsilon b_j\}, \\ \varepsilon = \pm 1.\end{gathered}$$

При $\varepsilon = -1$, ввиду $k_i \geqslant 2$ и индуктивного предположения, подгруппы $\{g\}$ и $\{k_1a_1 + \ldots + k_{i-1}a_{i-1} + (k_i - 2)a_i + k_{i+1}a_{i+1} + \ldots + k_na_n\}$ обладали бы общим образом при изоморфизме φ, что приводит, однако, к существованию в группе G элемента второго порядка. Поэтому $\varepsilon = 1$, что и требовалось доказать.

Пусть, наконец, k_i есть единственный отличный от нуля коэффициент элемента g, т. е. $g = k_ia_i$, и $k_i \geqslant 2$. Тогда, если $j \neq i$, будет $\{(k_i - 1)a_i + a_j\} \cap \{a_i - a_j\} = O$, и поэтому, снова ввиду леммы и индуктивного предположения,

$$\begin{gathered}\{g\} = \{[(k_i - 1)a_i + a_j] + (a_i - a_j)\} \to \\ \to \{[(k_i - 1)b_i + b_j] + \varepsilon(b_i - b_j), \quad \varepsilon = \pm 1.\end{gathered}$$

При $\varepsilon = -1$ мы имели бы, что при $k_i > 2$ подгруппы $\{g\}$ и $\{(k_i - 2)a_i + 2a_j\}$ обладают общим образом при изоморфизме φ, так как максимальный коэффициент образующего элемента второй из этих подгрупп меньше k_i; это, однако, невозможно. Если же $k_i = 2$, то из $\{g\} \to \{2b_j\}$ и $\{g\} \subset \{a_i\}$ следовало бы, что подгруппы $\{b_i\}$ и $\{b_j\}$ обладают отличным от нуля пересечением. Поэтому $\varepsilon = 1$.

Доказательство теоремы закончено.

Развивая теорему Бэра, Петропавловская [1] показала, что всякая непериодическая абелева группа определяется структурой своих *подполугрупп*, т. е. подмножеств, замкнутых относительно умножения. Укажем также интересную теорему Садовского [3] о том, что всякая группа, разложимая в свободное произведение, определяется структурой своих подгрупп. [См. § Д.14.]

Глава двенадцатая

РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

§ 48. Системы факторов

Как уже было определено в § 10, группа G называется *расширением группы A при помощи группы B*, если A является нормальным делителем в G, а фактор-группа G/A изоморфна B. Если группы A и B даны, то расширения A при помощи B существуют всегда — одним из таких расширений будет, например, прямое произведение групп A и B. Однако (см. § 10) заданием групп A и B группа G, вообще говоря, не определяется однозначно и поэтому возникает потребность в полном обозрении всех различных расширений данной группы A при помощи данной группы B. К необходимости такого обозрения приводят некоторые вопросы самой теории групп, а также и ее приложения в теории полей и в комбинаторной топологии.

Обозрение расширений группы A при помощи группы B проводится обычно с точностью до их эквивалентности. При этом два расширения G и H группы A при помощи группы B называются *эквивалентными*, если между G и H существует изоморфизм, совпадающий на A с тождественным автоморфизмом и отображающий друг на друга смежные классы по A, соответствующие одному и тому же элементу группы B. Понятно, что данные расширения G и H могут оказаться изоморфными и в том случае, когда они не являются эквивалентными (см. в связи с этим Гольфанд [1]).

Первый подход к вопросу об обозрении расширений сделал Шрейер [2, 3]; его теория будет изложена в настоящем параграфе. Позже Бэр [4], идя иными путями, продвинулся несколько дальше и, в частности, в значительной мере свел обозрение расширений группы A при помощи группы B на тот случай, когда группа A абелева. Наконец, в этом последнем случае значительный прогресс достигнут в самое последнее время благодаря так называемым группам гомологий; эти теоретико-групповые конструкции, уже давно используемые в комбинаторной топологии, были в рамках общей теории групп развиты в независимых работах Эйленберга и Маклейна [4, 5] и Фаддеева [1]. [См. § Д. 12]

Мы изложим сейчас исходную теорию Шрейера. Пусть группа G есть расширение своего нормального делителя A при помощи группы B; элементы из A условимся обозначать латинскими буквами: a, b, c, ..., элементы из B — греческими буквами: α, β, γ, ... В каждом смежном классе gA группы G по A выбираем по одному элементу

в качестве представителя, а так как изоморфизм между G/A и B ставит в соответствие всякому смежному классу gA некоторый элемент α из B, то представитель из класса gA будет обозначаться через g_α. Произведение представителей g_α и g_β лежит, снова ввиду изоморфизма между G/A и B, в одном смежном классе по A с представителем $g_{\alpha\beta}$ (в качестве индекса взято произведение элементов α и β в группе B), т. е. в A есть такой элемент $m_{\alpha,\beta}$, что

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta}.$$

В частности, беря в качестве α и β единицу ε группы B, мы получим

$$g_\varepsilon g_\varepsilon = g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon},$$

откуда $g_\varepsilon = m_{\varepsilon,\varepsilon}$.

С другой стороны, трансформирование нормального делителя A элементом g_α будет для A автоморфизмом. Условимся образ элемента a из A при этом автоморфизме обозначать через a^α,

$$g_\alpha^{-1} a g_\alpha = a^\alpha.$$

Соответственно через a^b, $b \in A$, будем обозначать элемент $b^{-1}ab$. Тогда

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{\alpha\beta})^{m_{\alpha,\beta}}. \tag{1}$$

Далее, из ассоциативности умножения в G следует

$$\begin{aligned} g_\alpha g_\beta g_\gamma &= g_\alpha (g_{\beta\gamma} m_{\beta,\gamma}) = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha,\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} = \\ &= (g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta}) g_\gamma = g_{\alpha\beta} (g_\gamma m_{\alpha,\beta}^\gamma) = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta,\gamma} m_{\alpha,\beta}^\gamma, \end{aligned}$$

откуда

$$m_{\alpha,\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} = m_{\alpha\beta,\gamma} m_{\alpha,\beta}^\gamma. \tag{2}$$

Отметим, наконец, что если $g_\alpha a$ и $g_\beta b$ будут два произвольных элемента из G, то они перемножаются следующим образом:

$$g_\alpha a \cdot g_\beta b = g_{\alpha\beta} (m_{\alpha,\beta} a^\beta b). \tag{3}$$

Мы исходили до сих пор из некоторого данного расширения группы A при помощи группы B и поставили в соответствие этому расширению систему элементов $m_{\alpha,\beta}$, называемую *системой факторов*, и систему автоморфизмов $a \to a^\alpha$. Пусть теперь, наоборот, в группе A выбрана система элементов $m_{\alpha,\beta}$, где α и β независимо друг от друга пробегают все элементы группы B и, сверх того, всякому элементу α из B поставлен в соответствие некоторый автоморфизм $a \to a^\alpha$ группы A, причем предполагается выполненность условий (1) и (2). Покажем, что существует такое расширение G группы A при помощи группы B, что заданные элементы $m_{\alpha,\beta}$ и заданные автоморфизмы будут соответствовать этому расширению в описанном выше смысле.

Элементами группы G будут символы $g_\alpha a$, где a есть произвольный, элемент из A, а символы g_α взаимно однозначно соответствуют

элементам α из группы B. Определим умножение в G с помощью формулы (3) и покажем, что G будет группой. Ассоциативность этого умножения легко следует из его определения и условий (1) и (2). Действительно,

$$(g_\alpha a \cdot g_\beta b)\cdot g_\gamma c = (g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta} a^\beta b) g_\gamma c = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta,\gamma} (m_{\alpha,\beta} a^\beta b)^\gamma c =$$
$$= g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta,\gamma} m_{\alpha,\beta}^\gamma (a^\beta)^\gamma b^\gamma c = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta,\gamma} m_{\alpha,\beta}^\gamma (a^{\beta\gamma})^{m_{\beta,\gamma}} b^\gamma c,$$
$$g_\alpha a \cdot (g_\beta b \cdot g_\gamma c) = g_\alpha a \cdot (g_{\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} b^\gamma c) =$$
$$= g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha,\beta\gamma} a^{\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} b^\gamma c = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha,\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} (a^{\beta\gamma})^{m_{\beta,\gamma}} b^\gamma c,$$

но правые части обоих равенств совпадают ввиду (2).

Заметим теперь, что из (1) при $\alpha = \beta = \varepsilon$ следует

$$(a^\varepsilon)^\varepsilon = (a^\varepsilon)^{m_{\varepsilon,\varepsilon}},$$

а так как элемент a^ε вместе с a пробегает всю группу A, то

$$a^\varepsilon = a^{m_{\varepsilon,\varepsilon}}. \tag{4}$$

Далее, из (2) при $\beta = \gamma = \varepsilon$ следует

$$m_{\alpha,\varepsilon} m_{\varepsilon,\varepsilon} = m_{\alpha,\varepsilon} m_{\alpha,\varepsilon}^\varepsilon,$$

откуда, по (4),

$$m_{\varepsilon,\varepsilon} = m_{\alpha,\varepsilon}^\varepsilon = m_{\alpha,\varepsilon}^{m_{\varepsilon,\varepsilon}},$$

а так как трансформирование элемента $m_{\varepsilon,\varepsilon}$ обратным к нему его не меняет, то мы получаем

$$m_{\alpha,\varepsilon} = m_{\varepsilon,\varepsilon}. \tag{5}$$

Наконец, из (2) при $\alpha = \beta = \varepsilon$ следует

$$m_{\varepsilon,\gamma} m_{\varepsilon,\gamma} = m_{\varepsilon,\gamma} m_{\varepsilon,\varepsilon}^\gamma,$$

откуда

$$m_{\varepsilon,\gamma} = m_{\varepsilon,\varepsilon}^\gamma. \tag{6}$$

Если теперь $g_\alpha a$ есть произвольный элемент из G, то ввиду (4) и (5)

$$g_\alpha a \cdot g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1} = g_\alpha m_{\alpha,\varepsilon} a^\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1} = g_\alpha m_{\varepsilon,\varepsilon} a^{m_{\varepsilon,\varepsilon}} m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1} = g_\alpha a,$$

т. е. элемент $g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}$ является правой единицей в G. Далее,

$$g_\alpha a \cdot g_{\alpha^{-1}} (a^{\alpha^{-1}})^{-1} m_{\alpha,\alpha^{-1}}^{-1} m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1} = g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1},$$

т. е. всякий элемент из G обладает правым обратным. Этим доказано, что G является группой.

Покажем, что G есть искомое расширение группы A при помощи группы B. Если мы всякому элементу a из A поставим в соответствие элемент

$$\overline{a} = g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1} a$$

из G, то ввиду (4) и (6)

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a\cdot g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}b=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}ab=\overline{ab},$$

а из $\overline{a}=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}$ (т. е. $\overline{a}$ есть единица группы G) следует $a=1$. Таким образом, элементы $\overline{a}$ составляют в группе G подгруппу $\overline{A}$, изоморфную группе A. Если мы введем, далее, обозначение $\overline{g}_\alpha=g_\alpha\cdot 1$, то, по (5),

$$\overline{g}_\alpha\overline{a}=g_\alpha 1\cdot g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a=g_\alpha m_{\alpha,\varepsilon}m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a=g_\alpha a. \tag{7}$$

Отсюда следует, что элементы $\overline{g}_\alpha$ лежат в различных левых смежных классах по $\overline{A}$, так как если

$$\overline{g}_\beta=\overline{g}_\alpha\overline{a},\quad \beta\neq\alpha,$$

то мы получим равенство

$$g_\beta 1=g_\alpha a,$$

которое явно невозможно — слева и справа стоят ввиду $\beta\neq\alpha$ различные элементы из G. С другой стороны, (7) показывает, что в каждом левом смежном классе по $\overline{A}$ лежит один из элементов $\overline{g}_\alpha$. Из

$$\overline{a}\,\overline{g}_\alpha=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a\cdot g_\alpha 1=g_\alpha m_{\varepsilon,\alpha}(m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1})^\alpha a^\alpha=g_\alpha a^\alpha=\overline{g}_\alpha\overline{a}^\alpha$$

(здесь используются равенства (6) и (7)) следует

$$\overline{g}_\alpha^{-1}\overline{a}\,\overline{g}_\alpha=\overline{a}^\alpha\in\overline{A},$$

т. е. $\overline{A}$ есть нормальный делитель в G, а трансформирование его элементами $\overline{g}_\alpha$ порождает в нем автоморфизмы, совпадающие с исходными автоморфизмами $a\to a^\alpha$ группы A. Наконец, равенство

$$\overline{g}_\alpha\cdot\overline{g}_\beta=g_\alpha 1\cdot g_\beta 1=g_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}=\overline{g}_{\alpha\beta}\overline{m}_{\alpha,\beta}$$

показывает, что фактор-группа $G/\overline{A}$ изоморфна группе B, т. е. что группа G есть расширение группы $\overline{A}$ при помощи B, и что система факторов этого расширения, если в качестве представителей левых смежных классов по $\overline{A}$ берутся как раз элементы $\overline{g}_\alpha$, совпадает с заданными элементами $m_{\alpha,\beta}$.

Наконец, сопоставляя изложенную сейчас конструкцию группы G с тем, что было сказано ранее, при определении систем факторов и учитывая, в частности, равенство (3), мы получаем, что всякое расширение группы A при помощи группы B, которому соответствует система факторов $m_{\alpha,\beta}$ и система автоморфизмов $a\to a^\alpha$, будет эквивалентно построенному выше расширению G.

Мы приходим к следующему результату.

Всякой системе элементов $m_{\alpha,\beta}$ из группы A и системе автоморфизмов $a\to a^\alpha$ этой группы, $\alpha,\beta\in B$, соответствует, если выполняются условия (1) *и* (2), *некоторое расширение группы A при помощи группы B, определяемое однозначно с точностью до эквивалентности. Наоборот, всякое расширение A при помощи B*

может быть задано такой системой элементов и системой автоморфизмов.

Это соответствие между расширениями, с одной стороны, и системами факторов и системами автоморфизмов, — с другой, не является, однако, взаимно однозначным, так как выбор представителей g_α в смежных классах расширения G по группе A был совершенно произвольным. Если G есть расширение группы A при помощи группы B и если при выборе представителей g_α это расширение задается системой факторов $m_{\alpha,\beta}$ и системой автоморфизмов φ_α, а выбор представителей $g'_\alpha = g_\alpha c_\alpha$, $c_\alpha \in A$, приводит к системе факторов $m'_{\alpha,\beta}$ и системе автоморфизмов φ'_α, то эти новые автоморфизмы группы A получаются из старых автоморфизмов, соответствующих тем же α, умножением справа на внутренний автоморфизм, производимый в группе A элементом c_α. Далее, из

$$g'_\alpha \cdot g'_\beta = g_\alpha c_\alpha \cdot g_\beta c_\beta = g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta} c_\alpha^\beta c_\beta = g'_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^{-1} m_{\alpha,\beta} c_\alpha^\beta c_\beta$$

следует

$$m'_{\alpha,\beta} = c_{\alpha\beta}^{-1} m_{\alpha,\beta} c_\alpha^\beta c_\beta. \tag{8}$$

Обратно, если даны два расширения G и G' и если можно найти в A такие элементы c_α, $\alpha \in B$, что системы факторов и системы автоморфизмов, задающие эти два расширения, связаны между собою так, как только что описано, то легко проверить, что соответствие, переводящее элемент $g_\alpha a$ из G в элемент $g'_\alpha c_\alpha^{-1} a$ из G', будет изоморфизмом, устанавливающим эквивалентность между G и G'. Замечая, наконец, что при $c_\alpha = 1$ для всех α система факторов и система автоморфизмов не меняются, мы получаем следующий результат.

Два расширения G и G' группы A при помощи группы B, заданные некоторыми системами факторов $m_{\alpha,\beta}$ и $m'_{\alpha,\beta}$ и системами автоморфизмов φ_α и φ'_α, тогда и только тогда будут эквивалентными, если каждому элементу α из B можно поставить в соответствие элемент c_α из A так, что всякий автоморфизм φ'_α получается умножением автоморфизма φ_α справа на внутренний автоморфизм группы A, производимый элементом c_α, а факторы связаны соотношением (8).

Теория, изложение которой сейчас закончено, не может, понятно, считаться совершенной. Описание различных расширений данной группы A при помощи данной группы B сводится в этой теории на разыскание некоторых систем элементов и систем автоморфизмов группы A, подчиненных довольно сложным условиям и, вообще говоря, не очень облегчающих обозрение всей совокупности неэквивалентных расширений. В следующих параграфах будут указаны пути, по которым можно значительно ближе подойти к такому обозрению, сейчас же мы проведем некоторые подготовительные рассмотрения.

Условимся через $\mathfrak{A}$ обозначать фактор-группу группы автоморфизмов группы A по подгруппе внутренних автоморфизмов; элементы

из $\mathfrak{A}$ будут обозначаться через $\mathfrak{a}$ с индексами и называться *классами автоморфизмов группы* A. Если теперь G есть расширение группы A при помощи группы B и если элементу α из B соответствует смежный класс $g_\alpha A$ из G, то автоморфизмы группы A, вызываемые трансформированием этой группы различными элементами из $g_\alpha A$, получаются друг из друга умножением на внутренние автоморфизмы, т. е. принадлежат к одному классу автоморфизмов. Этим всякому элементу α из B ставится в соответствие элемент $\mathfrak{a}_\alpha$ группы $\mathfrak{A}$, причем из $g_\alpha A \cdot g_\beta A = g_{\alpha\beta} A$ и определения умножения автоморфизмов следует

$$\mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_{\alpha\beta}.$$

Иными словами, расширению G соответствует некоторое вполне определенное гомоморфное отображение группы B в группу $\mathfrak{A}$, которое будет называться *гомоморфизмом, сопровождающим это расширение*.

Пусть даны два эквивалентных расширения группы A при помощи группы B. Как вытекает из установленной выше связи между автоморфизмами $a \to a^\alpha$ группы A, соответствующими эквивалентам расширениям, *эти два расширения будут сопровождаться одним и тем же гомоморфизмом группы B в группу $\mathfrak{A}$*. Это позволяет нам ограничиться в дальнейшем обозрением тех неэквивалентных расширений группы A при помощи группы B, которые сопровождаются некоторым данным гомоморфизмом B в $\mathfrak{A}$; при этом необходимо будет установить, конечно, какие гомоморфизмы B в $\mathfrak{A}$ вообще могут сопровождать какие-либо расширения A при помощи B.

§ 49. Расширения абелевых групп. Группы гомологий

В этом параграфе мы будем изучать расширения абелевой группы A при помощи произвольной группы B. Как сказано выше, можно ограничиться при этом обозрением расширений, сопровождаемых данным гомоморфизмом B в $\mathfrak{A}$. В нашем случае группа $\mathfrak{A}$ совпадает с группой автоморфизмов группы A, а поэтому группу B можно рассматривать как группу операторов для абелевой группы A. Это означает, что определено произведение $a\alpha$, $a \in A$, $\alpha \in B$, причем $a\alpha \in A$ и выполняются следующие условия:

1) $(ab)\alpha = a\alpha \cdot b\alpha$,
2) $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$,
3) $a\varepsilon = a$, где ε — единица группы B.

Желая подчеркнуть, что рассматриваются расширения A при помощи B с данным сопровождающим гомоморфизмом, т. е. что зафиксирован тот способ, каким элементы из B действуют как операторы на группу A, мы будем говорить о расширениях абелевой группы A при помощи группы операторов B.

Если G — одно из таких расширений, то автоморфизм $a \to a^\alpha$ группы A (см. предшествующий параграф) не зависит от выбора представителя в смежном классе $g_\alpha A$ и совпадает с автоморфизмом, производимым оператором α, т. е. $a^\alpha = a\alpha$. Таким образом, *расширение абелевой группы A при помощи группы операторов B полностью определяется системой факторов $m_{\alpha,\beta}$, подчиненной условию* (2) *из предшествующего параграфа*; условие (1) совпадает ввиду коммутативности группы A с условием (2) из определения группы операторов.

Рассмотрим всевозможные системы факторов $m_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in B$, какие могут быть выбраны в группе A с группой операторов B при соблюдении условия (2). Одна такая система заведомо существует, а именно $m_{\alpha,\beta} = 1$ при всех α и β. Если $m_{\alpha,\beta}$, $n_{\alpha,\beta}$ — две такие системы факторов, то произведения

$$m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}$$

будут ввиду коммутативности A также удовлетворять условию (2), т. е. вновь составляют систему факторов.

Это «умножение» систем факторов будет ассоциативным и коммутативным, роль единицы играет система $m_{\alpha,\beta} = 1$ при всех α и β; обратной для системы $m_{\alpha,\beta}$ служит система $m^{-1}_{\alpha,\beta}$, которая, как легко проверяется, также удовлетворяет условию (2). Мы получили, следовательно, абелеву группу, которую обозначим через $F(A, B)$.

Если всякому элементу α из B поставлен в соответствие произвольный элемент c_α из A, то система элементов

$$m_{\alpha,\beta} = c^{-1}_{\alpha\beta}(c_\alpha \beta) c_\beta \tag{9}$$

будет удовлетворять условию (2), т. е. будет системой факторов. Все такие системы факторов составляют в группе $F(A, B)$ подгруппу $T(A, B)$.

Из результатов предшествующего параграфа, в частности из (8), следует, что *все неэквивалентные расширения абелевой группы A при помощи группы операторов B находятся во взаимно однозначном соответствии со смежными классами группы $F(A, B)$ по подгруппе $T(A, B)$, т. е. с элементами фактор-группы*

$$F(A, B)/T(A, B).$$

Назовем эту фактор-группу *группой расширений абелевой группы A при помощи группы операторов B*.

Группу расширений можно было бы построить, понятно, беря в качестве ее элементов сами классы эквивалентных расширений и должным образом определяя умножение этих классов. Умножение расширений, исходное при таком построении, встретится читателю по иному поводу в § 51.

Подобно тому как вопрос об обозрении всех автоморфизмов некоторой группы сводится на вопрос о разыскании ее группы автоморфизмов, вопрос об обозрении всех неэквивалентных расширений абелевой группы A при помощи группы операторов B можно рассматривать теперь как вопрос о разыскании соответствующей группы расширений. Этой цели служат дальнейшие рассмотрения настоящего параграфа.

Группы гомологий. Будем абелеву группу A с элементами $a, b, c, \ldots$ записывать аддитивно, ее группу операторов B с элементами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — мультипликативно. Назовем n-мерной *цепью* всякую функцию $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\alpha)$ от n элементов группы B со значениями в группе A. В частности, 0-мерными цепями мы считаем просто элементы группы A.

Если мы определим сложение n-мерных цепей равенством

$$(f_1 + f_2)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

то получим абелеву группу $C^n(B, A)$. В частности, $C^0(B, A) = A$.

Поставим в соответствие всякой n-мерной цепи f, $n \geqslant 0$, $(n+1)$-мерную цепь ∇f, называемую *границей* цепи f и определяемую равенством

$$(\nabla f)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) = f(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\alpha_{n+1}. \quad (10)$$

Легко проверяется, что

$$\nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2, \quad (11)$$

т. е. *отображение $f \to \nabla f$ является гомоморфизмом группы $C^n(B, A)$ в группу $C^{n+1}(B, A)$.*

Справедливо также следующее важное соотношение:

$$\nabla(\nabla f) = 0, \quad (12)$$

т. е. *граница границы равна нулю.*

Действительно, если f — n-мерная цепь, то $\nabla(\nabla f)$ будет $(n+2)$-мерной цепью, т. е. функцией от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}$. Вычисляя ее на основании (10), мы придем к равенству (12), так как всякое слагаемое будет появляться д в а ж д ы с противоположными знаками. Пусть при развертывании $\nabla(\nabla f)$ данное слагаемое появляется следующим образом: после первого применения равенства (10) берется k-е слагаемое, $0 \leqslant k \leqslant n+2$, к нему снова применяется равенство (10) и берется l-е слагаемое, $0 \leqslant l \leqslant n+1$. Тогда это слагаемое имеет знак $(-1)^{k+l}$. Каковы будут эти k и l для каждого слагаемого, показано в таблице (см. предыдущую страницу), заканчивающей доказательство равенства (12).

Типы слагаемых	k, l	Знак
$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n+2})$, $2 \leqslant k \leqslant n+1$	$k, k-1$	$(-1)^{2k-1}$
	$k-1, k-1$	$(-1)^{2k-2}$
$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n+2})$, $1 \leqslant l, l+1 \leqslant k, k \leqslant n+1$	k, l	$(-1)^{k+l}$
	$l, k-1$	$(-1)^{k+l-1}$
$f(\alpha_2, \ldots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n+2})$, $2 \leqslant k \leqslant n+1$	$k, 0$	$(-1)^{k}$
	$0, k-1$	$(-1)^{k-1}$
$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n+1})\alpha_{n+2}$, $1 \leqslant k \leqslant n$	$n+2, k$	$(-1)^{n+k+2}$
	$k, n+1$	$(-1)^{n+k+1}$
$f(\alpha_3, \ldots, \alpha_{n+2})$	$1, 0$	-1
	$0, 0$	1
$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$	$n+2, n+1$	$(-1)^{2n+3}$
	$n+1, n+1$	$(-1)^{2n+2}$

Назовем n-мерную цепь f n-мерным *циклом*, если $\nabla f = 0$. Из (11) следует, что n-мерные циклы составляют подгруппу группы $C^n(B, A)$, которую обозначим через $Z^n(B, A)$.

С другой стороны, при $n > 0$ n-мерные цепи, служащие границами для некоторых $(n-1)$-мерных цепей, составляют ввиду (11) подгруппу группы $C^n(B, A)$, которую мы обозначим через $D^n(B, A)$. Так как ввиду (12) всякая граница является циклом, то

$$D^n(B, A) \subseteq Z^n(B, A). \tag{13}$$

Для случая $n = 0$ полагаем $D^0(B, A) = O$. Включение (13) остается справедливым и в этом случае.

Фактор-группа

$$H^n(B, A) = Z^n(B, A)/D^n(B, A)$$

называется n-й *группой гомологий* группы B над группой A [1]).

Группы гомологий при $n = 0, 1, 2$. По определению, нульмерной цепью f является элемент a из A. Тогда, по (10),

$$(\nabla f)(\alpha_1) = a - a\alpha_1. \tag{14}$$

Поэтому f будет циклом тогда и только тогда, если $a\alpha_1 = a$ для всех α_1 из B. Учитывая, что $D^0(B, A) = O$, мы получаем:

[1]) Мы были бы ближе к терминологии, принятой в топологии, если бы назвали эту группу *группой верхних гомологий*, или *группой* ∇*-гомологий*, или *группой когомологий*.

Нулевая группа гомологий $H^0(B, A)$ является подгруппой группы A, состоящей из всех тех элементов этой группы, которые отображаются в себя при всех операторах из B.

Если, далее, $f = f(\alpha_1)$ — одномерная цепь, то, по (10),

$$(\nabla f)(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_2) - f(\alpha_1\alpha_2) + f(\alpha_1)\alpha_2. \tag{15}$$

Цепь $f(\alpha_1)$ будет, следовательно, циклом тогда и только тогда, если

$$f(\alpha_1\alpha_2) = f(\alpha_2) + f(\alpha_1)\alpha_2. \tag{16}$$

Отображения группы B в группу A, подчиненные этому условию, называются *скрещенными гомоморфизмами*. Их изучению, в частности в связи с применениями к теории полей, посвящен ряд работ. Отметим первую из них — работу Шура [2], а также работы Бэра [28, 31].

С другой стороны, ввиду (14) цепь $f(\alpha_1)$ тогда и только тогда принадлежит к подгруппе $D^1(B, A)$, если в A существует такой элемент a, что

$$f(\alpha_1) = a - a\alpha_1. \tag{17}$$

Такие скрещенные гомоморфизмы называются *главными*. Таким образом, *первая группа гомологий $H^1(B, A)$ является фактор-группой группы скрещенных гомоморфизмов B в A по подгруппе главных гомоморфизмов.*

Наиболее интересна для нас в т о р а я группа гомологий. Если $f(\alpha_1, \alpha_2)$ — двумерная цепь, то, по (10),

$$(\nabla f)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = f(\alpha_2, \alpha_3) - f(\alpha_1\alpha_2, \alpha_3) + f(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3) - f(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3. \tag{18}$$

Таким образом, f тогда и только тогда будет циклом, если

$$f(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3) + f(\alpha_2,\alpha_3) = f(\alpha_1\alpha_2, \alpha_3) + f(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 \tag{19}$$

или, сравнивая с (2), если f является системой факторов группы A с группой операторов B; поэтому

$$Z^2(B, A) = F(A, B).$$

С другой стороны, по (15), цепь $f(\alpha_1, \alpha_2)$ тогда и только тогда принадлежит к $D^2(B, A)$, если существует такая одномерная цепь $\varphi(\alpha_1)$, что

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1\alpha_2) + \varphi(\alpha_1)\alpha_2. \tag{20}$$

Сравнивая с (9), мы получаем

$$D^2(B, A) = T(A, B).$$

Таким образом, *вторая группа гомологий $H^2(B, A)$ совпадает с группой расширений группы A при помощи группы операторов B.*

Некоторое истолкование групп гомологий $H^n(B, A)$ при $n \geqslant 3$ можно найти в работах Эйленберга и Маклейна [4], [6].

§ 50. Вычисление второй группы гомологий

Полученное выше истолкование группы расширений абелевой группы A при помощи группы операторов B как второй группы гомологий B в A еще не облегчает разыскания этой группы. Существуют, однако, методы, позволяющие сводить вычисление группы $H^n(B, A)$ на вычисление некоторой группы $H^k(B, A')$, где $k < n$, но группа A' обладает, вообще говоря, более сложным строением, чем исходная группа A. Обработку одного из этих методов представляет излагаемый в настоящем параграфе способ вычисления группы $H^2(B, A)$, использующий произвольное представление группы B в качестве фактор-группы свободной группы (см. Маклейн [1]).

Пусть

$$B = S/R,$$

где S — свободная группа с элементами $x, y, \ldots$. Если для любого элемента a из группы A и любого элемента x из S мы положим

$$ax = a(xR) \tag{21}$$

— смежный класс xR рассматривается здесь как элемент группы B, — то группа S станет группой операторов для группы A. Действительно, условия 1)–3) из предшествующего параграфа проверяются без всяких затруднений. Так как R совпадает с единицей группы B, то из (21) следует, что для любого элемента r из R

$$ar = a. \tag{22}$$

С другой стороны, трансформирование нормального делителя R любым элементом группы S порождает в R автоморфизм. Это позволяет считать элементы группы S операторами и для группы R.

Группы R и A являются теперь операторными с одной и той же группой операторов S. *Операторный гомоморфизм* φ группы R в группу A будет, следовательно, таким гомоморфизмом R в A, что

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(r)x, \quad r \in R, \quad x \in S. \tag{23}$$

Если φ и ψ — два операторных гомоморфизма R в A, то их сумма, определяемая равенством

$$(\varphi + \psi)(r) = \varphi(r) + \psi(r),$$

также будет операторным гомоморфизмом. По этому сложению операторные гомоморфизмы R в A составляют абелеву группу, которую мы назовем *группой операторных гомоморфизмов* и обозначим через $Q(R, A; S)$.

Если мы рассмотрим, далее, некоторый скрещенный гомоморфизм $\varphi(x)$ группы S в группу A, т. е. (см. (16))

$$\varphi(xy) = \varphi(y) + \varphi(x)y, \tag{24}$$

то ввиду (22) в применении к элементам из R отображение φ будет гомоморфизмом. Этот гомоморфизм является операторным: ввиду (24) и (22)

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(x) + \varphi(x^{-1}r)x = \varphi(x) + \varphi(r)x + \varphi(x^{-1})rx = \\ = \varphi(x) + \varphi(r)x + \varphi(x^{-1})x.$$

Полагая в этом равенстве $r = 1$ и учитывая, что из (24) следует равенство $\varphi(1) = 0$, мы получаем

$$\varphi(x) + \varphi(x^{-1})x = 0,$$

а поэтому

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(r)x.$$

Обозначим через $Q'(R, A; S)$ совокупность тех операторных гомоморфизмов R в A, которые в указанном смысле порождаются скрещенными гомоморфизмами S в A. Это будет подгруппа в группе $Q(R, A; S)$, так как скрещенные гомоморфизмы S в A составляют по сложению

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

группу, а именно $Z^1(S, A)$.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы Маклейна.

Вторая группа гомологий группы B над группой A изоморфна фактор-группе группы операторных гомоморфизмов $Q(R, A; S)$ по подгруппе $Q'(R, A; S)$:

$$H^2(B, A) \simeq Q(R, A; S)/Q'(R, A; S).$$

Начнем доказательство с того, что в каждом смежном классе группы S по нормальному делителю R выберем по представителю, причем представитель того смежного класса, который является элементом α группы B, обозначим через s_α, так что

$$\alpha = s_\alpha R. \tag{25}$$

Тогда

$$s_\alpha s_\beta = s_{\alpha\beta} r(\alpha, \beta), \tag{26}$$

где $r(\alpha, \beta) \in R$, причем факторы $r(\alpha, \beta)$ связаны, понятно, равенством типа равенства (2). В R в качестве представителя выбираем единицу, т. е. $s_\varepsilon = 1$, где ε — единица группы B.

Пусть теперь $\varphi(r)$ — произвольный операторный гомоморфизм группы R в группу A. Тогда

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \varphi(r(\alpha, \beta)) \tag{27}$$

будет двумерной цепью группы B в группе A, т. е. элементом группы $C^2(B, A)$. *Это будет даже цикл*, так как

$$(\nabla\overline{\varphi})(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi(r(\beta, \gamma)) - \varphi(r(\alpha\beta, \gamma)) + \varphi(r(\alpha, \beta\gamma)) - [\varphi(r(\alpha, \beta))]\gamma.$$

Однако, используя (25), (21) и определение операторного гомоморфизма, т. е. (23), мы получим, что

$$[\varphi(r(\alpha, \beta))]\gamma = [\varphi(r(\alpha, \beta))]s_\gamma = \varphi(s_\gamma^{-1} r(\alpha, \beta) s_\gamma).$$

Учитывая, наконец, что φ является гомоморфизмом R в A, а элементы $r(\alpha, \beta)$ связаны равенством типа (2), мы видим, что

$$(\nabla\overline{\varphi})(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

т. е. $\overline{\varphi}(\alpha, \beta) \in Z^2(B, A)$.

Отображение

$$\varphi(r) \to \overline{\varphi}(\alpha, \beta) \tag{28}$$

переводит сумму двух операторных гомоморфизмов R в A в сумму соответствующих двумерных циклов, т. е. является гомоморфным отображением группы $Q(R, A; S)$ в группу $Z^2(B, A)$. Отображая эту последнюю группу естественным образом на ее фактор-группу $H^2(B, A)$, *мы придем к гомоморфному отображению группы* $Q(R, A; S)$ *в группу* $H^2(B, A)$.

Покажем, что *этот гомоморфизм отображает группу* $Q(R, A; S)$ *на всю группу* $H^2(B, A)$. Для этого возьмем произвольный элемент группы $H^2(B, A)$, т. е. произвольный смежный класс группы $Z^2(B, A)$ по подгруппе $D^2(B, A)$, и выберем в этом классе в качестве представителя некоторый цикл $f(\alpha, \beta)$. При этом можно считать этот цикл *нормализованным*, т. е. удовлетворяющим равенствам

$$f(\alpha, \varepsilon) = f(\varepsilon, \beta) = 0, \tag{29}$$

где ε — единица группы B.

Действительно, цикл $f(\alpha, \beta)$, если он выбран пока произвольно, служит, как мы знаем, системой факторов для некоторого расширения группы A при помощи группы операторов B, связанной с некоторым выбором представителей в смежных классах этого расширения по A. Если мы изменим выбор представителей, взяв единицу в качестве представителя единичного класса, мы получим расширение, эквивалентное первоначальному, т. е. новая система факторов будет оставаться во взятом нами смежном классе группы $Z^2(B, A)$ по подгруппе $D^2(B, A)$. Вместе с тем эта новая система факторов уже будет нормализованной, как показывают равенства (5) и (6).

Построим теперь отображение $\varphi(x)$ группы S в группу A, причем так, чтобы оно обладало следующим свойством: для любых x и y из S

$$\varphi(xy) = \varphi(x)y + \varphi(y) + f(xR, yR). \tag{30}$$

Так как цикл $f(\alpha, \beta)$ нормализованный, то из (30) вытекает

$$\varphi(1) = 0. \tag{31}$$

Если мы выберем, далее, в группе S систему свободных образующих и положим для всякого элемента s из этой системы

$$\varphi(s) = 0, \tag{32}$$

то не придем в противоречие с (30). Из (30) вытекает теперь

$$\varphi(s^{-1}) = -f(sR, s^{-1}R). \tag{33}$$

Пусть $\varphi(y)$ уже определено для всех элементов y, длина несократимой записи которых в выбранных свободных образующих меньше k, и пусть дан элемент x длины k. Представляя слово x в виде произведения двух слов, между которыми нет сокращений, и используя (30), мы определим значение $\varphi(x)$. От выбора представления x в виде произведения двух слов длин l_1 и l_2, где $l_1 + l_2 = k$, это не зависит: легко проверяется на основании (30) и равенства (19), справедливого для цикла f, что

$$\varphi(x \cdot yz) = \varphi(xy \cdot z),$$

а поэтому если слово x имеет вид

$$x = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k},$$

то

$$\varphi(s_1^{\varepsilon_1} \cdot (s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k})) = \varphi((s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2}) \cdot (s_3^{\varepsilon_3} \dots s_k^{\varepsilon_k})) = \dots$$
$$\dots = \varphi((s_1^{\varepsilon_1} \dots s_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}) \cdot s_k^{\varepsilon_k}).$$

Отображение $\varphi(x)$ определено, следовательно, для всех x. Необходимо показать, однако, что *равенство* (30) *будет на самом деле выполняться при любых* x *и* y. Если между словами x и y нет никаких сокращений, то это следует из сказанного в предшествующем абзаце. С другой стороны, наше утверждение справедливо, как легко проверяется, в том случае, когда один из элементов x, y равен 1, а также и в том, когда они оба длины 1. Действительно,

$$\varphi(s^{-1}s) = \varphi(1) = 0,$$

но, по (32) и (33),

$$\varphi(s^{-1})s + \varphi(s) + f(s^{-1}R, sR) = -f(sR, s^{-1}R)s + f(s^{-1}R, sR),$$

правая же часть этого равенства равна нулю, как можно вывести, учитывая (21), из (19), полагая $\alpha_1 = sR$, $\alpha_2 = s^{-1}R$, $\alpha_3 = sR$.

Пусть, следовательно, равенство (30) уже доказано для всякой пары элементов, сумма длин которых меньше суммы длин элементов x и y, и пусть между элементами x и y выполнимо сокращение. Если

$$x = x's, \quad y = s^{-1}y',$$

где s — один из свободных образующих, а записи несократимые, то, по индуктивному предположению,

$$\varphi(xy) = \varphi(x'y') = \varphi(x')y' + \varphi(y') + f(x'R, y'R).$$

С другой стороны, ввиду (32) и (33),

$$\varphi(x) = \varphi(x')s + f(x'R, sR),$$
$$\varphi(y) = -f(sR, s^{-1}R)y' + \varphi(y') + f(s^{-1}R, y'R),$$

а поэтому

$$\varphi(x)y + \varphi(y) + f(xR, yR) = \varphi(x')y' + f(x'R, sR)s^{-1}y' -$$
$$- f(sR, s^{-1}R)y' + \varphi(y') + f(s^{-1}R, y'R) + f(x'sR, s^{-1}y'R) =$$
$$= \varphi(x')y' + \varphi(y') + f(x'R, y'R).$$

Последнее равенство получилось двукратным применением равенства (19), сперва при $\alpha_1 = sR$, $\alpha_2 = s^{-1}R$, $\alpha_3 = y'R$, а затем при $\alpha_1 = x'R$, $\alpha_2 = sR$, $\alpha_3 = s^{-1}y'R$.

Случай $x = x's^{-1}$, $y = sy'$ проверяется этим же методом.

Нами построено отображение $\varphi(x)$ группы S в группу A, обладающее свойством (30). Если $r \in R$, то, ввиду (22) и (29),

$$\varphi(xr) = \varphi(x) + \varphi(r). \tag{34}$$

В частности, при $r_1, r_2 \in R$

$$\varphi(r_1r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2),$$

т. е. отображение $\varphi(r)$, $r \in R$, *будет гомоморфизмом* R *в* A. *Этот гомоморфизм является операторным*:

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(x^{-1}r)x + \varphi(x) + f(x^{-1}rR, \quad xR)$$

или, ввиду (34),

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(x^{-1})x + \varphi(r)x + \varphi(x) + f(x^{-1}R, \quad xR).$$

При $r = 1$ получаем

$$\varphi(x^{-1}x) = \varphi(1) = 0 = \varphi(x^{-1})x + \varphi(x) + f(x^{-1}R, \quad xR),$$

а поэтому

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(r)x.$$

Покажем теперь, что *операторный гомоморфизм* $\varphi(r)$ *переводится отображением* (28) *в выбранный нами класс группы* $Z^2(B, A)$

по подгруппе $D^2(B, A)$. В самом деле, ввиду (27), (26), (21), (25), (30),

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \varphi(r(\alpha, \beta)) = \varphi(s_{\alpha\beta}^{-1} s_\alpha s_\beta) = \\ = \varphi(s_{\alpha\beta}^{-1})\alpha\beta + \varphi(s_\alpha s_\beta) + f(s_{\alpha\beta}^{-1} R,\ s_\alpha s_\beta R) = \\ = \varphi(s_{\alpha\beta}^{-1})\alpha\beta + \varphi(s_\alpha)\beta + \varphi(s_\beta) = f(\alpha, \beta) + f((\alpha\beta)^{-1}, \alpha\beta).\end{aligned}$$

Однако

$$0 = \varphi(1) = \varphi(s_{\alpha\beta}^{-1} s_{\alpha\beta}) = \varphi(s_{\alpha\beta}^{-1})\alpha\beta + \varphi(s_{\alpha\beta}) + f((\alpha\beta)^{-1}, \alpha\beta).$$

Поэтому

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta) = \varphi(s_\alpha)\beta + \varphi(s_\beta) - \varphi(s_{\alpha\beta}),$$

а так как $\varphi(s_\alpha)$ можно считать отображением группы B в группу A, т. е. элементом группы $C^1(B, A)$, то, ввиду (20),

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta) \in D^2(B, A), \tag{35}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, *мы имеем гомоморфное отображение группы* $Q(R, A; S)$ *на всю группу* $H^2(B, A)$. Основная теорема будет доказана, если мы покажем, что ядром этого гомоморфизма служит подгруппа $Q'(R, A; S)$, т. е. что *элементы из* $Q'(R, A; S)$ *и только они переходят при отображении* (28) *в элементы из* $D^2(B, A)$.

Пусть $\varphi(r)$ — такой операторный гомоморфизм группы R в группу A, который порождается скрещенным гомоморфизмом $\varphi(x)$ группы S в группу A. Равенство (24), определяющее скрещенный гомоморфизм, является частным случаем равенства (30), а именно получается, если в качестве $f(\alpha, \beta)$ берется нулевой цикл,

$$f(\alpha, \beta) = 0. \tag{36}$$

Так как в последнем абзаце предшествующего доказательства не использовались никакие свойства отображения $\varphi(x)$, кроме (30), то в нашем случае ввиду (36) включение (35) принимает вид

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) \in D^2(B, A),$$

т. е. операторный гомоморфизм $\varphi(r)$ действительно отображается при (28) в подгруппу $D^2(B, A)$.

Пусть, обратно, операторный гомоморфизм $\varphi(r)$ таков, что при (28) он отображается в $D^2(B, A)$. Существует, следовательно, такая одномерная цепь $\psi(a) \in C^1(B, A)$, что

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \psi(\beta) - \psi(\alpha\beta) + \psi(\alpha)\beta. \tag{37}$$

Заметим, что

$$\psi(\varepsilon) = 0, \tag{38}$$

где ε — единица группы B. Действительно, ввиду $s_\varepsilon = 1$ равенство (26) приводит к равенству $r(\varepsilon, \beta) = 1$, а так как φ гомоморфно отображает R в A, то

$$\overline{\varphi}(\varepsilon, \beta) = \varphi(r(\varepsilon, \beta)) = \varphi(1) = 0.$$

Поэтому ввиду (37)

$$\psi(\beta) - \psi(\beta) + \psi(\varepsilon)\beta = \psi(\varepsilon) = 0.$$

Полагая $\beta = \varepsilon$, мы приходим к (38) ввиду условия 3) из определения группы операторов.

Определим теперь следующим образом отображение $f(x)$ группы S в группу A. Всякий элемент x из S единственным способом записывается в виде

$$x = s_\alpha r, \quad r \in R.$$

Мы полагаем

$$f(x) = \psi(\alpha) + \varphi(r). \tag{39}$$

Если $x \in R$, то $\alpha = \varepsilon$, а поэтому ввиду равенств $s_\varepsilon = 1$ и (38)

$$f(r) = \varphi(r) \quad \text{для} \quad r \in R.$$

Нам остается показать, что *отображение $f(x)$ является скрещенным гомоморфизмом группы S в группу A*. Если

$$x = s_\alpha r, \quad y = s_\beta r',$$

то, ввиду (26),

$$xy = s_{\alpha\beta}[r(\alpha, \beta)(s_\beta^{-1} r s_\beta) r'].$$

Поэтому, используя (39), (37), (27), (23) и (21), мы получим:

$$\begin{aligned} f(xy) &= \psi(\alpha\beta) + \varphi[r(\alpha, \beta)(s_\beta^{-1} r s_\beta) r'] = \\ &= \psi(\beta) + \psi(\alpha)\beta - \overline{\varphi}(\alpha, \beta) + \varphi(r(\alpha, \beta)) + \varphi(s_\beta^{-1} r s_\beta) + \varphi(r') = \\ &= \psi(\beta) + \psi(\alpha)\beta + \varphi(r)\beta + \varphi(r') = f(y) + f(x)\beta = f(y) + f(x)y. \end{aligned}$$

Сравнивая с (24), мы видим, что $f(x)$ действительно будет скрещенным гомоморфизмом.

Доказательство теоремы Маклейна закончено.

§ 51. Расширения некоммутативных групп

Мы переходим теперь к обозрению расширений некоммутативной группы A при помощи группы B, следуя работе Эйленберга и Маклейна [5]. Как показано в конце § 48, можно ограничиться при этом рассмотрением расширений, сопровождаемых данным гомоморфизмом θ группы B в группу $\mathfrak{A}$ классов автоморфизмов группы A.

Не всякий гомоморфизм B в $\mathfrak{A}$ сопровождает, однако, какое-либо расширение A при помощи B (см. пример в работе Бэра [4]), и мы начнем с установления условий, при которых это имеет место.

Пусть θ — произвольный гомоморфизм B в $\mathfrak{A}$. В каждом классе автоморфизмов $\theta(\alpha)$, $\alpha \in B$, выбираем некоторый автоморфизм φ_α. Автоморфизмы $\varphi_\alpha\varphi_\beta$ и $\varphi_{\alpha\beta}$ лежат в одном классе автоморфизмов, а поэтому автоморфизм $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}\varphi_\alpha\varphi_\beta$ является внутренним и порождается некоторым элементом $h(\alpha, \beta)$ группы A.

Условимся обозначать через $\langle a\rangle$ внутренний автоморфизм группы A, производимый элементом a. Таким образом,

$$\varphi_\alpha\varphi_\beta = \varphi_{\alpha\beta}\langle h(\alpha, \beta)\rangle. \tag{40}$$

Используя ассоциативность умножения автоморфизмов и учитывая, что для любого автоморфизма φ группы A и элемента a этой группы выполняется равенство

$$\varphi^{-1}\langle a\rangle\varphi = \langle a\varphi\rangle, \tag{41}$$

мы из рассмотрения произведения $\varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\gamma$ придем к равенству

$$\langle h(\alpha, \beta\gamma)h(\beta, \gamma)\rangle = \langle h(\alpha\beta, \gamma)\cdot h(\alpha, \beta)\varphi_\gamma\rangle.$$

Элементы, производящие один и тот же внутренний автоморфизм, отличаются друг от друга на элемент из центра. Существует, следовательно, в центре Z группы A такой элемент $z(\alpha, \beta, \gamma)$, что

$$h(\alpha, \beta\gamma)h(\beta, \gamma)z(\alpha, \beta, \gamma) = h(\alpha\beta, \gamma)\cdot h(\alpha, \beta)\varphi_\gamma. \tag{42}$$

Мы получили трехмерную цепь $z(\alpha, \beta, \gamma)$ группы B в абелевой группе Z. Можно было бы доказать, что эта цепь будет даже циклом; это, однако, для нас несущественно.

Цепь $z(\alpha, \beta, \gamma)$ зависит от выбора автоморфизмов φ_α и элементов $h(\alpha, \beta)$. Докажем, что *смежный класс группы $C^3(B, Z)$ по подгруппе границ $D^3(B, Z)$, в котором лежит эта цепь, однозначно определяется самим гомоморфизмом θ.*

Пусть, в самом деле, элементы $h(\alpha, \beta)$ заменены элементами $h'(\alpha, \beta)$, производящими тот же самый внутренний автоморфизм группы A. Тогда в центре Z группы A существуют такие элементы $f(\alpha, \beta)$, что

$$h'(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta)f(\alpha, \beta).$$

Вычисляя теперь по формуле (42) цепь $z'(\alpha, \beta, \gamma)$, соответствующую элементам $h'(\alpha, \beta)$, мы получим

$$z'(\alpha, \beta, \gamma) = [f^{-1}(\beta, \gamma)f^{-1}(\alpha, \beta\gamma)f(\alpha\beta, \gamma)\cdot f(\alpha, \beta)\varphi_\gamma]z(\alpha, \beta, \gamma).$$

В квадратных скобках ввиду (18) стоит граница двумерной цепи $-f(\alpha, \beta)$, а поэтому цепи z и z' лежат в одном смежном классе по подгруппе $D^3(B, Z)$.

Заметим, что $f(\alpha, \beta)$ является произвольной двумерной цепью группы B в группе Z, а поэтому *в качестве* $z'(\alpha, \beta, \gamma)$ *можно получить любую цепь из того смежного класса по* $D^3(B, Z)$, *в котором лежит цепь* $z(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть, с другой стороны, автоморфизмы φ_α заменены автоморфизмами φ'_α, лежащими в тех же классах автоморфизмов $\theta(\alpha)$. Существуют, следовательно, в группе A такие элементы k_α, что

$$\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha \langle k_\alpha \rangle. \tag{43}$$

Тогда, ввиду (40) и (41),

$$\varphi'_\alpha \varphi'_\beta = \varphi_{\alpha\beta} \langle h(\alpha, \beta)(k_\alpha \varphi_\beta) k_\beta \rangle = \varphi'_{\alpha\beta} \langle k_{\alpha\beta}^{-1} h(\alpha, \beta)(k_\alpha \varphi_\beta) k_\beta \rangle.$$

Так как, по доказанному выше, выбор элементов $h'(\alpha, \beta)$ находится в нашем распоряжении, положим

$$h'(\alpha, \beta) = k_{\alpha\beta}^{-1}(\alpha, \beta)(k_\alpha \varphi_\beta) k_\beta,$$

откуда, ввиду (43),

$$k_{\alpha\beta} h'(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) k_\beta (k_\alpha \varphi'_\beta). \tag{44}$$

Используя несколько раз это последнее равенство, беря в качестве α и β сперва элементы $\alpha\beta$ и γ, затем сами α и β, затем β и γ и т. д., а также учитывая (43), (40) и (42), мы получаем:

$$\begin{aligned}
k_{\alpha\beta\gamma} h'(\alpha\beta, \gamma)[h'(\alpha, \beta)\varphi'_\gamma] &= h(\alpha\beta, \gamma) k_\gamma [k_{\alpha\beta} h'(\alpha, \beta)]\varphi'_\gamma = \\
&= h(\alpha\beta, \gamma) k_\gamma [h(\alpha, \beta) k_\beta (k_\alpha \varphi'_\beta)]\varphi'_\gamma = \\
&= h(\alpha\beta, \gamma)(h(\alpha, \beta)\varphi_\gamma) k_\gamma [k_\beta (k_\alpha \varphi'_\beta)]\varphi'_\gamma = \\
&= h(\alpha, \beta\gamma) h(\beta, \gamma) z(\alpha, \beta, \gamma) k_\gamma (k_\beta \varphi'_\gamma)(k_\alpha \varphi'_\beta \varphi'_\gamma) = \\
&= h(\alpha, \beta\gamma) k_{\beta\gamma} h'(\beta, \gamma)(k_\alpha \varphi'_\beta \varphi'_\gamma) z(\alpha, \beta, \gamma) = \\
&= h(\alpha, \beta\gamma) k_{\beta\gamma} (k_\alpha \varphi'_{\beta\gamma}) h'(\beta, \gamma) z(\alpha, \beta, \gamma) = \\
&= k_{\alpha\beta\gamma} h'(\alpha, \beta\gamma) h'(\beta, \gamma) z(\alpha, \beta, \gamma).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$h'(\alpha\beta, \gamma)[h'(\alpha, \beta)\varphi'_\gamma] = h'(\alpha, \beta\gamma) h'(\beta, \gamma) z(\alpha, \beta, \gamma),$$

т. е. при нашем выборе элементов $h'(\alpha, \beta)$ цепь $z(\alpha, \beta, \gamma)$ остается без изменения. Этим вместе с доказанным выше заканчивается доказательство нашего утверждения.

Тогда и только тогда гомоморфизм θ *группы* B *в группу* $\mathfrak{A}$ *сопровождает некоторое расширение группы* A *при помощи группы* B, *если смежный класс по* $D^3(B, Z)$, *в котором лежит цепь* $z(\alpha, \beta, \gamma)$, *определяемая равенством* (42), *совпадает с самой подгруппой* $D^3(B, Z)$.

Действительно, пусть существует расширение G группы A при помощи группы B, сопровождаемое гомоморфизмом θ. При некотором

выборе представителей g_α в смежных классах по A это расширение определяется системой факторов $m_{\alpha,\beta}$ и системой автоморфизмов $a \to a^\alpha$, причем выполняются условия (1) и (2). В качестве автоморфизмов φ_α можно взять теперь автоморфизмы $a \to a^\alpha$, а в качестве элементов $h(\alpha, \beta)$ — факторы $m_{\alpha,\beta}$. Из условия (1) вытекает справедливость равенства (40), а условие (2) показывает, что в равенстве (42) следует положить

$$z(\alpha, \beta, \gamma) = 1 \quad \text{при всех} \quad \alpha, \beta, \gamma \in B. \tag{45}$$

Этим теорема в одну сторону доказана.

Пусть, обратно, гомоморфизм θ таков, что цепь $z(\alpha, \beta, \gamma)$, полученная при некотором выборе автоморфизмов φ_α и элементов $h(\alpha, \beta)$, принадлежит к подгруппе $D^3(B, Z)$. Выше было показано, что, меняя, если это нужно, элементы $h(\alpha, \beta)$, можно в качестве $z(\alpha, \beta, \gamma)$ получить любой элемент из $D^3(B, Z)$, в том числе и цепь (45). В этом последнем случае, однако, равенства (40) и (42) превращаются в (1) и (2), т. е. существует расширение группы A при помощи группы B, задаваемое системой факторов $h(\alpha, \beta)$ и системой автоморфизмов φ_α. Это расширение сопровождается, очевидно, гомоморфизмом θ.

Переходим к обозрению неэквивалентных расширений группы A при помощи группы B, сопровождаемых гомоморфизмом θ. Заметим сначала, что так как всякий автоморфизм группы A индуцирует автоморфизм центра Z этой группы, причем автоморфизмы группы A, лежащие в одном классе автоморфизмов, индуцируют один и тот же автоморфизм группы Z, то гомоморфизм θ делает группу B группой операторов для Z. Именно в этом смысле, связанном с данным гомоморфизмом θ, понимается дальше группа операторов B для группы Z.

Пусть существуют расширения A при помощи B, сопровождаемые гомоморфизмом θ. Мы докажем, что *между всеми неэквивалентными расширениями группы A при помощи группы B, сопровождаемыми гомоморфизмом θ, и всеми неэквивалентными расширениями абелевой группы Z — центра группы A — при помощи соответствующей гомоморфизму θ группы операторов B существует взаимно однозначное соответствие*. Этим интересующий нас вопрос сводится на результаты предшествующих двух параграфов.

Пусть G — одно из расширений A при помощи B, сопровождаемых гомоморфизмом θ, а H — произвольное расширение Z при помощи группы операторов B. Рассмотрим всевозможные пары

$$(g, h), \quad g \in G, \quad h \in H,$$

подчиненные условию, что смежные классы gA и hZ соответствуют одному и тому же элементу α группы B. Операция

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

над такими парами превращает множество всех этих пар в группу, которую мы обозначим через $\widetilde{G}$. Пары вида (a, z), $a \in A$, $z \in Z$, составляют в ней нормальный делитель $\widetilde{A}$, а пары вида (z, z^{-1}), $z \in Z$, — нормальный делитель N.

Группа

$$G' = \widetilde{G}/N$$

обладает нормальным делителем $A' = \widetilde{A}/N$, который изоморфен A, так как во всяком смежном классе $\widetilde{A}$ по N содержится один и только один элемент вида $(a, 1)$. Фактор-группа

$$B' = G'/A' \simeq \widetilde{G}/\widetilde{A}$$

изоморфна группе B: если (g, h) — элемент из $\widetilde{G}$, то в смежном классе $(g, h)\widetilde{A}$ собраны все элементы вида (g_1, h_1), где $g_1 \in gA$, $h_1 \in hZ$, и только они. Ставя в соответствие классу $(g, h)\widetilde{A}$ тот элемент α из B, который соответствует смежным классам gA и hZ, мы получим изоморфное соответствие между B' и B. *Группа G' является, следовательно, расширением группы A при помощи группы B.*

Пусть расширение G группы A при выборе представителей g_α в смежных классах по A задавалось системой факторов $m_{\alpha,\beta}$ и системой автоморфизмов $a \to a^\alpha$ (см. § 48), а расширение H группы Z при выборе представителей h_α в смежных классах по Z — системой факторов $n_{\alpha,\beta}$; автоморфизмы в этом случае определяются тем, что B — группа операторов. Из сказанного выше следует, что в смежных классах G' по A в качестве представителей могут быть выбраны элементы

$$g'_\alpha = (g_\alpha, h_\alpha)N. \tag{46}$$

Найдем факторы и автоморфизмы, определяющие расширение G' при таком выборе представителей.

$$\begin{aligned} g'_\alpha g'_\beta &= (g_\alpha, h_\alpha)N \cdot (g_\beta, h_\beta)N = (g_\alpha g_\beta, h_\alpha h_\beta)N = \\ &= (g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta}, h_{\alpha\beta} n_{\alpha,\beta})N = (g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta})N \cdot (m_{\alpha,\beta}, n_{\alpha,\beta})N. \end{aligned}$$

Однако элемент $(n_{\alpha,\beta}, n_{\alpha,\beta}^{-1})$ содержится в N, а поэтому

$$(m_{\alpha,\beta}, n_{\alpha,\beta})N = (m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}, 1)N,$$

что соответствует элементу $m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}$ группы A. Таким образом, искомую систему факторов составляют элементы

$$m'_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}. \tag{47}$$

С другой стороны, трансформируя элементом g'_α элемент a группы A, т. е. смежный класс $(a, 1)N$, мы получим:

$$(g_\alpha^{-1}, h_\alpha^{-1})N \cdot (a, 1)N \cdot (g_\alpha, h_\alpha)N = (a^\alpha, 1)N = a^\alpha. \tag{48}$$

Автоморфизм, производимый в группе A элементом g'_α расширения G', совпадает, следовательно, с автоморфизмом, производимым в A элементом g_α расширения G. Отсюда вытекает, в частности, что *расширение G' сопровождается тем же гомоморфизмом θ, что и расширение G.*

Так как расширение G' группы A вполне определяется выбором расширения G группы A и расширения H группы Z, мы введем для него следующее обозначение:

$$G' = (G, H). \tag{49}$$

Считая расширение G фиксированным, мы покажем, что *любое расширение G' группы A при помощи группы B, сопровождаемое гомоморфизмом θ, эквивалентно расширению вида (G, H) при некотором выборе расширения H группы Z при помощи группы операторов B.*

Действительно, так как расширение G' сопровождается гомоморфизмом θ, то представители g'_α в смежных классах по A могут быть выбраны так, что автоморфизмы, производимые ими в группе A, совпадают с автоморфизмами $a \to a^\alpha$, производимыми элементами g_α расширения G. Пусть при этом выборе представителей систему факторов для G' составляют элементы $m'_{\alpha,\beta}$. Из (1) следует, что элементы $m_{\alpha,\beta}$ и $m'_{\alpha,\beta}$ производят один и тот же внутренний автоморфизм группы A, т. е. отличаются на элемент из центра,

$$m'_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}, \quad n_{\alpha,\beta} \in Z. \tag{50}$$

Используя равенство (2) для элементов $m'_{\alpha,\beta}$ и учитывая, что элементы $n_{\alpha,\beta}$ лежат в центре группы A, а элементы $m_{\alpha,\beta}$ также удовлетворяют равенству (2), мы получим, что и элементы $n_{\alpha,\beta}$ удовлетворяют этому равенству, т. е. служат системой факторов для некоторого расширения H группы Z при помощи группы операторов B. Сравнивая (50) и (47) и учитывая равенство (48) и то, что системы автоморфизмов, соответствующие расширениям G и G', совпадают, мы обнаруживаем, что расширения G' и (G, H) эквивалентны.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что *если H_1 и H_2 — два расширения группы Z при помощи группы операторов B, то расширения*

$$G'_1 = (G, H_1) \quad \text{и} \quad G'_2 = (G, H_2)$$

тогда и только тогда эквивалентны, если эквивалентны расширения H_1 и H_2.

В самом деле, пусть φ — эквивалентное отображение H_1 на H_2. Тогда

$$(g, h_1) \to (g, h_1\varphi) = (g, h_2)$$

будет изоморфным отображением группы $\overline{G}_1$ на группу $\overline{G}_2$, при котором подгруппа $\widetilde{A}$, а поэтому и N, тождественно отображается на себя. Отсюда легко выводится эквивалентность расширений G'_1 и G'_2.

Пусть, обратно, дано эквивалентное отображение ψ расширения G'_1 на расширение G'_2. Пусть расширение G задано, как и раньше, системой факторов $m_{\alpha,\beta}$ и системой автоморфизмов $a \to a^\alpha$, а расширение H_i, $i = 1, 2$ — системой факторов $n^{(i)}_{\alpha,\beta}$. Тогда расширение G'_i, $i = 1, 2$, будет при выборе представителей $g'_{i\alpha}$ в соответствии с (46) задаваться, как мы знаем, той же системой автоморфизмов $a \to a^\alpha$ и, по (47), системой факторов $m_{\alpha,\beta}n^{(i)}_{\alpha,\beta}$.

Так как изоморфизм ψ является эквивалентностью, то элементы $g'_{1\alpha}\psi$ и $g'_{2\alpha}$ лежат в одном смежном классе по A, т. е.

$$g'_{1\alpha}\psi = g'_{2\alpha}b_\alpha, \quad b_\alpha \in A. \tag{51}$$

Мы знаем, что для любого a из A

$$ag'_{1\alpha} = g'_{1\alpha}a^\alpha.$$

Применяя к этому равенству отображение ψ и учитывая (51), получаем

$$ag'_{2\alpha}b_\alpha = g'_{2\alpha}b_\alpha a^\alpha.$$

Однако

$$ag'_{2\alpha} = g'_{2\alpha}a^\alpha,$$

а поэтому

$$g'_{2\alpha}a^\alpha b_\alpha = g'_{2\alpha}b_\alpha a^\alpha,$$

откуда

$$a^a b_\alpha = b_\alpha a^\alpha.$$

Элемент a^α пробегает, однако, вместе с a всю группу A, а поэтому b_α лежит в центре,

$$b_\alpha \in Z. \tag{52}$$

Мы знаем, далее, что

$$g'_{1\alpha}g'_{1\beta} = g'_{1,\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}n^{(1)}_{\alpha,\beta}.$$

Применяя к этому равенству отображение ψ и учитывая (51), получаем

$$g'_{2\alpha}b_\alpha g'_{2\beta}b_\beta = g'_{2,\alpha\beta}b_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}n^{(1)}_{\alpha,\beta}.$$

Однако

$$g'_{2\alpha}g'_{2\beta} = g'_{2,\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}n^{(2)}_{\alpha,\beta},$$

а поэтому, так как $b_{\alpha\beta} \in Z$,

$$b^\beta_\alpha b_\beta = b_{\alpha\beta}n^{(2)-1}_{\alpha,\beta}n^{(1)}_{\alpha,\beta}.$$

Переходя в группе Z к аддитивной записи, мы получаем, что разность циклов $n^{(1)}_{\alpha,\beta}$ и $n^{(2)}_{\alpha,\beta}$ является границей одномерной цепи b_α, а это,

как мы знаем из § 49, влечет за собою эквивалентность расширений H_1 и H_2.

Этим заканчивается доказательство теоремы.

§ 52. Частные случаи

Обозрение неэквивалентных расширений группы A при помощи группы B, полученное в предшествующих параграфах, заметно упрощается при тех или иных частных ограничениях, накладываемых на группы A и B или на рассматриваемые расширения.

Центральные расширения. Расширение G абелевой группы A при помощи группы B называется *центральным*, если A лежит в центре группы G. Это равносильно тому, что автоморфизмы $a \to a^\alpha$ группы A, соответствующие этому расширению в смысле § 48, все являются тождественными. Иными словами (см. начало § 49), *центральные расширения абелевой группы A при помощи группы B являются теми расширениями, которые мы получим, рассматривая B как группу операторов для A, действующих просто, т. е. удовлетворяющих условию*

$$a\alpha = a \tag{53}$$

при всех a из A и α из B. Можно говорить, таким образом, *о группе центральных расширений*.

Применим к этому случаю теорему из § 50, считая группу B представленной в виде

$$B = S/R,$$

где S — свободная группа. Равенство (21) превратится теперь в

$$ax = a, \quad a \in A, \quad x \in S,$$

а поэтому операторный гомоморфизм φ группы R в группу A будет, по (23), определяться равенством

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(r), \quad r \in R, \quad x \in S;$$

он отображает, следовательно, в один и тот же элемент все элементы группы R, сопряженные в группе S, т. е. переводит в нуль всякий коммутатор вида $r^{-1}x^{-1}rx$. Наконец, (24) показывает, что скрещенные гомоморфизмы S в A будут просто гомоморфизмами. Справедлива, следовательно, т е о р е м а:

Группа центральных расширений абелевой группы A при помощи группы B, представленной в виде фактор-группы S/R свободной группы S, изоморфна фактор-группе группы гомоморфизмов R в A, отображающих в нуль взаимный коммутант $[R, S]$, по подгруппе тех гомоморфизмов R в A, которые индуцируются гомоморфизмами S в A.

В связи с центральными расширениями см. также Бэр [32].

Абелевы расширения. Не всякое центральное расширение абелевой группы A при помощи абелевой же группы B будет абелевым, как следует из существования метабелевых групп. Покажем, как в группе всех центральных расширений A при помощи B выделяются абелевы расширения.

Мы знаем, что центральные расширения A при помощи B определяются тождественными автоморфизмами и системами факторов $m_{\alpha,\beta}$. Если группа B абелева, то из (3) следует, что *расширение G тогда и только тогда будет абелевым, если система факторов $m_{\alpha,\beta}$ симметрична*, т. е.

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\alpha} \quad \text{при всех} \quad \alpha, \beta \quad \text{из} \quad B.$$

Симметричные системы факторов составляют, очевидно, подгруппу в группе $F(A, B)$ всех систем факторов (см. начало § 49). С другой стороны, ввиду (53) и коммутативности группы B равенство (9) показывает, что подгруппа $T(A, B)$ будет состоять в нашем случае из симметричных систем факторов. Ввиду этого *неэквивалентные абелевы расширения группы A при помощи абелевой группы B составляют подгруппу в группе всех центральных расширений A при помощи B.*

Найдем эту *группу абелевых расширений*, используя полученное выше обозрение центральных расширений. Пусть абелева группа B представлена в виде фактор-группы S_0/R_0 свободной абелевой группы S_0. Возьмем свободную некоммутативную группу S с теми же свободными образующими, что и S_0. Тогда

$$B = S/R,$$

причем если S' — коммутант группы S, то $S' \subseteq R$ и

$$S/S' = S_0, \quad R/S' = R_0. \tag{54}$$

Как показывает начало доказательства теоремы § 50, нам нужно выделить те элементы группы $Q(R, A; S)$, которые отображением (28) переводятся в цикл $\overline{\varphi}(\alpha, \beta)$, обладающий свойством

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \overline{\varphi}(\beta, \alpha). \tag{55}$$

Мы помним при этом, что группа $Q(R, A; S)$ состоит теперь из тех гомоморфизмов R в A, которые отображают в нуль взаимный коммутант $[R, S]$.

Если в S выбраны представители s_α по R в соответствии с (25), то выполняется равенство (26), а поэтому и равенство

$$s_\beta s_\alpha = s_{\beta\alpha} r(\beta, \alpha).$$

Так как теперь $\alpha\beta = \beta\alpha$, то

$$s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha s_\beta = r^{-1}(\beta, \alpha) r(\alpha, \beta).$$

Пусть φ — любой элемент из $Q(R, A; S)$. Тогда ввиду (27) и коммутативности группы A, которую мы считаем записанной аддитивно,

$$\varphi(s_\alpha^{-1}s_\beta^{-1}s_\alpha s_\beta) = \overline{\varphi}(\alpha, \beta) - \overline{\varphi}(\beta, \alpha).$$

Таким образом, равенство (55) будет выполняться тогда и только тогда, если гомоморфизм φ отображает в нуль всякий коммутатор вида $s_\alpha^{-1}s_\beta^{-1}s_\alpha s_\beta$. Гомоморфизмы φ с этим свойством составляют в группе $Q(R, A; S)$ подгруппу, которую мы обозначим через $\overline{Q}(R, A; S)$.

Если φ принадлежит к $\overline{Q}(R, A; S)$, то он отображает в нуль вообще всякий коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$ из S, т. е. весь коммутант S'. Действительно, если

$$x = s_\alpha r_1, \quad y = s_\beta r_2, \quad r_1, r_2 \in R,$$

то

$$x^{-1}y^{-1}xy = r_1^{-1}s_\alpha^{-1}r_2^{-1}s_\beta^{-1}s_\alpha r_1 s_\beta r_2 = \\ = r_1^{-1}(s_\alpha^{-1}r_2^{-1}s_\alpha)(s_\alpha^{-1}s_\beta^{-1}s_\alpha s_\beta)(s_\beta^{-1}r_1 s_\beta)r_2.$$

Учитывая же, что φ отображает $[R, S]$ в нуль и, по предположению, переводит в нуль также и $s_\alpha^{-1}s_\beta^{-1}s_\alpha s_\beta$, мы получим, что

$$\varphi(x^{-1}y^{-1}xy) = -\varphi(r_1) - \varphi(r_2) + \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = 0.$$

Таким образом, группа $\overline{Q}(R, A; S)$ состоит из всех гомоморфизмов R в A, отображающих в нуль подгруппу S'. С другой стороны, всякий элемент из подгруппы $Q'(R, A; S)$ отображает, очевидно, весь коммутант S' в нуль. Таким образом, *группа абелевых расширений A при помощи B изоморфна фактор-группе группы $\overline{Q}(R, A; S)$ по подгруппе $Q'(R, A; S)$*; используя же равенства (54), мы приходим к следующему окончательному результату (Эйленберг и Маклейн [1]).

Группа абелевых расширений абелевой группы A при помощи абелевой группы B, представленной в виде фактор-группы S_0/R_0 свободной абелевой группы S_0, изоморфна фактор-группе группы всех гомоморфизмов R_0 в A по подгруппе тех гомоморфизмов, которые индуцируются гомоморфизмами S_0 в A. [См. Д.33.1.]

Расширения группы без центра. Пусть A — группа без центра, т. е. $Z = E$. Если θ — произвольный гомоморфизм группы B в группу $\mathfrak{A}$ классов автоморфизмов группы A, то, как показывает теорема из § 51, этот гомоморфизм всегда сопровождает некоторое расширение A при помощи B, так как из $Z = E$ следует, что цепь $z(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть лишь нулевой.

С другой стороны, существует лишь одно-единственное расширение единичной группы при помощи B, а именно само B, а поэтому, по § 51, лишь одно расширение A при помощи B, сопровождаемое данным гомоморфизмом θ. Мы приходим к следующему результату.

Неэквивалентные расширения группы A без центра при помощи группы B находятся во взаимно однозначном соответствии

с различными гомоморфизмами группы B в группу $\mathfrak{A}$ классов автоморфизмов группы A.

Расщепляемые расширения. Пусть расширение G группы A при помощи группы B таково, что в смежных классах gA могут быть выбраны представители $g\alpha$, $\alpha \in B$, со свойством

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta},$$

т. е.

$$m_{\alpha,\beta} = 1.$$

Представители g_α составляют, следовательно, в группе G подгруппу B', изоморфную группе B, причем подгруппы A и B' порождают вместе всю группу G, а их пересечение равно E. Такое расширение G называется *расщепляемым*; говорят также, что G есть *полупрямое произведение* нормального делителя A и подгруппы B'. К числу расщепляемых расширений принадлежит, понятно, прямое произведение групп A и B. [См. Д.3.2, Д.13.1, Д.22.1.]

Неэквивалентные расщепляемые расширения абелевой группы A при помощи группы B находятся во взаимно однозначном соответствии с различными гомоморфизмами группы B в группу автоморфизмов группы A.

Действительно, в § 49 было показано, что если рассматривается абелева группа A с группой операторов B, то существует расширение, определяемое системой факторов $m_{\alpha,\beta} = 1$.

Всякое расширение G произвольной группы A при помощи свободной группы B расщепляемо.

Действительно, произвольно выбирая представителей в тех смежных классах G по A, которые соответствуют свободным образующим группы B, и естественным образом определяя представителей во всех остальных смежных классах, мы получим расщепление группы G.

Часть четвертая

РАЗРЕШИМЫЕ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Глава тринадцатая

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ, СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 53. Условия конечности

Многие теоремы, доказанные сперва для конечных групп, удается перенести на более широкие классы групп, накладывая на рассматриваемые группы те или иные ограничения, более слабые, чем конечность числа элементов. Мы хотим дать обзор таких условий конечности, ограничиваясь лишь наиболее употребительными.

Одним из условий конечности, притом весьма широким, является периодичность группы. Иногда его приходится заменять более сильным ограничением — условием локальной конечности: группа называется *локально конечной*, если всякое ее конечное подмножество порождает конечную подгруппу.

Периодичность локально конечной группы очевидна, вопрос же о совпадении этих двух классов групп есть иная формулировка проблемы Бернсайда, указанной в § 38 [1]). В следующих главах читатель ознакомится с некоторыми теоремами, в которых при различных

[1]) Как было отмечено, ко времени подготовки третьего издания эта проблема уже получила решение.

дополнительных ограничениях доказывается локальная конечность периодических групп; для абелевых групп эти два условия, очевидно, совпадают. [См. Д.16.5.]

В дальнейшем будет использована следующая теорема (Шмидт [7]).

Расширение G локально конечной группы A при помощи локально конечной же группы B само локально конечно.

В самом деле, периодичность группы G очевидна. Пусть, далее, в G выбрано конечное множество M элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из локальной конечности группы B следует конечность фактор-группы H/A, где

$$H = \{A, M\}.$$

Будем считать, что в каждом смежном классе H по A содержится хотя бы один элемент из M; для этого, возможно, потребуется пополнить множество M конечным числом элементов. Всякое произведение $x_i x_j$ лежит в одном из смежных классов H по A и поэтому хотя бы одним способом может быть представлено в виде произведения элемента из M на элемент из A. Выбираем для каждой пары индексов i, j одно из этих представлений:

$$x_i x_j = x_k a_{ij}, \quad a_{ij} \in A.$$

Ввиду периодичности группы G всякий элемент подгруппы $\{M\}$ может быть представлен в виде произведения элементов x_i с показателями $+1$, а поэтому и в виде произведения элемента из M на элемент, являющийся произведением элементов вида a_{ij}, т. е. на элемент из подгруппы, порожденной всеми элементами a_{ij}. Эта последняя подгруппа будет, однако, конечной ввиду локальной конечности группы A и конечности числа элементов a_{ij}. Отсюда следует конечность подгруппы $\{M\}$, т. е. локальная конечность группы G.

Много более узким, чем локальная конечность, является условие локальной нормальности: группа G называется *локально нормальной*, если всякое ее конечное подмножество лежит в конечном нормальном делителе группы G. С группами этого типа мы встретимся в § 55. [См. Д.16.7.]

К локально нормальным группам близки группы, все классы сопряженных элементов которых конечны, т. е., короче, группы с конечными классами. К этому типу групп принадлежат не только все конечные, но и все абелевы группы. Справедлива следующая теорема.

Всякая периодическая группа с конечными классами является локально нормальной и обратно.

Ясно, что локально нормальная группа и периодична, и каждый ее элемент лежит в конечном классе сопряженных элементов. Прямое же утверждение теоремы вытекает из следующей леммы Дицмана [1].

Если в произвольной группе G дано конечное инвариантное множество $\mathfrak{M}$, состоящее из элементов конечного порядка, то подгруппа, порожденная этим множеством, будет конечной.

В самом деле, пусть $\mathfrak{M}$ состоит из k элементов, пусть m есть наименьшее общее кратное порядков всех элементов из $\mathfrak{M}$ и пусть $A = \{\mathfrak{M}\}$. Всякий элемент из A может быть записан в виде произведения элементов из $\mathfrak{M}$. Для доказательства леммы нам достаточно показать, что среди этих записей для каждого элемента a из A найдутся и такие, которые состоят не более чем из $k(m-1)$ множителей. Пусть дана некоторая запись:

$$a = a_1 a_2 \dots a_s, \quad a_i \in \mathfrak{M}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \tag{1}$$

и пусть $s > k(m-1)$. В этом случае хотя бы один из элементов из $\mathfrak{M}$, например a_0, встречается в записи (1) не меньше чем m раз. Если a_i есть первый из элементов записи (1), равный a_0, то, полагая $a_0^{-1} a_j a_0 = a'_j$, мы получим

$$a = a_0 a'_1 \dots a'_{i-1} a_{i+1} \dots a_s,$$

причем $a'_j \in \mathfrak{M}$, так как множество $\mathfrak{M}$ инвариантно. Применяя этот же прием к первому из элементов $a_{i+1}, \dots, a_s$, равному a_0, затем к первому из оставшихся элементов с этим же свойством и т. д., мы через конечное число шагов получим для элемента a запись через элементы из $\mathfrak{M}$, имеющую вид

$$a = a_0^m \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_{s-m},$$

что ввиду $a_0^m = 1$ приводит к записи с $s-m$ множителями. Конечность подгруппы A доказана.

Для того чтобы вывести из леммы Дицмана доказываемую теорему, остается лишь заметить, что подгруппа, порожденная инвариантным множеством, является нормальным делителем и что всякое конечное множество элементов группы с конечными классами содержится в конечном инвариантном множестве. [См. Д.17.6.]

Отметим, далее, условие слойной конечности. Группа называется *слойно конечной*, если она содержит лишь конечное число элементов любого данного порядка. Слойно конечная группа не может содержать элементов бесконечного порядка, так как их заведомо было бы бесконечно много, и поэтому является периодической. С другой стороны, в этой группе всякий элемент может иметь лишь конечное число сопряженных элементов. Применяя предшествующую теорему, мы получаем: *всякая слойно конечная группа является локально нормальной.*

В работе Черникова [12] дано почти исчерпывающее обозрение слойно конечных групп. Некоторые свойства этих групп приведены также в работе Бэра [40]. [См. Д.17.7.]

Ряд условий конечности относится к структуре подгрупп рассматриваемой группы. Важнейшим среди них является условие минимальности для подгрупп, т. е. условие обрыва убывающих цепочек подгрупп. Всякая группа с этим свойством будет периодической, так как бесконечная циклическая подгруппа условию минимальности не удовлетворяет. Пока не известно, однако, будут ли группы с условием минимальности для подгрупп локально конечными и будут ли они счетными.

Если в группе G и нормальный делитель N, и фактор-группа G/N являются группами с условием минимальности, то группа G сама удовлетворяет условию минимальности.

Действительно, пусть в G даны подгруппы A и B, причем $A \subseteq B$, $A \cap N = B \cap N$ и $AN = BN$. Если b есть произвольный элемент из B, то ввиду $b \in AN$ будет $b = ax$, где $a \in A$, $x \in N$. Отсюда $x = a^{-1}b \in \in B$, т. е. $x \in (B \cap N)$, а поэтому $x \in (A \cap N) \subseteq A$. Этим доказано, что $b = ax \in A$, т. е. $A = B$. Таким образом, существование в группе G бесконечной убывающей цепочки подгрупп приводит к существованию такой же цепочки хотя бы в одной из групп N и G/N: если дана цепочка подгрупп

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots,$$

то или в цепочке пересечений этих подгрупп с N, или в цепочке подгрупп группы G/N, соответствующих произведениям данных подгрупп с N, должно содержаться бесконечно много различных членов.

Из этой теоремы следует, что *прямое произведение двух и поэтому вообще любого конечного числа групп с условием минимальности само удовлетворяет условию минимальности*. В прямое произведение бесконечного числа групп никакая подгруппа группы с условием минимальности не может, понятно, разлагаться. [См. Д.17.2.]

Всякая абелева группа с условием минимальности является прямым произведением конечной абелевой группы и конечного числа групп типа p^∞ по некоторым простым p, не обязательно различным. Обратно, всякое такое прямое произведение удовлетворяет условию минимальности.

Второе утверждение теоремы вытекает из сказанного выше о прямом произведении, так как все истинные подгруппы группы типа p^∞ конечны (см. § 7) и поэтому эта группа удовлетворяет условию минимальности. Для доказательства первого утверждения разложим абелеву группу G с условием минимальности, как периодическую абелеву группу, в прямое произведение конечного числа примарных групп. В § 25 доказано, что примарная абелева группа или разлагается в прямое произведение конечных циклических групп и групп типа p^∞, или же вообще не может быть разложена в прямое произведение неразложимых групп, т. е. любое ее прямое разложение содержит хотя бы один разложимый множитель. Для группы с условием минимальности этот второй случай не может иметь места, так как он приводит

к бесконечной убывающей цепочке подгрупп, поэтому остается первый случай, причем число прямых множителей должно быть конечным.

Из этой теоремы следует:

Всякая абелева группа с условием минимальности счетна.

Для полученных нами прямых разложений примарной абелевой группы G с условием минимальности справедлива следующая теорема об изоморфизме.

Если

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times H = A'_1 \times A'_2 \times \ldots \times A'_l \times H',$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k, A'_1, A'_2, \ldots, A'_l$ *— группы типа* p^∞, *а* H *и* H' *— конечные группы, то* $k = l$ *и* $H \simeq H'$.

Легко видеть, действительно, рассматривая первое разложение, что подгруппа $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ состоит из всех тех элементов a группы G, для которых уравнение $x^{p^n} = a$ имеет в G решение при всяком n. Эта подгруппа не зависит, следовательно, от выбора разложения, т. е.

$$B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = A'_1 \times A'_2 \times \ldots \times A'_l.$$

Число элементов в этой подгруппе, порядок которых не выше p, равно p^k. Отсюда следует, что число k также не зависит от выбора разложения, т. е. $k = l$. Наконец, подгруппы H и H' обе изоморфны фактор-группе G/B, т. е. изоморфны между собой.

Если G есть любая абелева группа с условием минимальности, то число прямых множителей типа p^∞ (p — фиксированное простое число) в ее прямых разложениях рассмотренного выше вида — это число, как только что нами доказано, не зависит от выбора разложения — будет называться *p-весом* группы G.

Если G есть абелева группа с условием минимальности и N — ее подгруппа, то p-вес группы G равен сумме p-весов групп N и G/N.

Легко видеть, что подгруппа N разлагается вместе с группой G в прямое произведение примарных групп, относящихся к различным простым числам. Это позволяет доказывать теорему в предположении, что группа G сама примарна. Пусть k и l будут соответственно p-веса групп G и N, и пусть $N = B \times H$, где B есть прямое произведение l групп типа p^∞, а H — конечная группа. При выделении из группы G прямых множителей, изоморфных группе типа p^∞, мы могли бы начать с множителей, входящих в B. Отсюда следует, что B служит для G прямым множителем, а поэтому p-вес группы G/B равен $k - l$. Для получения группы G/N остается взять фактор-группу группы G/B по некоторой конечной подгруппе, что, как читатель легко докажет, не влияет на p-вес: достаточно рассмотреть случай циклической группы H и учесть, что фактор-группа группы типа p^∞ по любой ее циклической подгруппе снова будет группой типа p^∞.

Иногда используется также условие максимальности для подгрупп, т. е. условие обрыва возрастающих цепочек подгрупп.

Заметим, что *это условие эквивалентно предположению, что как сама группа, так и все ее подгруппы обладают конечным числом образующих*. В самом деле, пусть в группе G обрываются все возрастающие цепочки подгрупп и пусть A есть подгруппа из G. Выбираем в A элемент a_1 и обозначаем его циклическую подгруппу через A_1. Пусть в A уже выбрана подгруппа A_n с конечным числом образующих. Если она еще отлична от A, то выбираем в A, но вне A_n, элемент a_{n+1} и полагаем $A_{n+1} = \{A_n, a_{n+1}\}$. Возрастающая цепочка подгрупп $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ должна оборваться, т. е. при некотором n будет $A_n = A$. Отсюда следует конечность числа образующих в подгруппе A. Обратно, если в группе G существует бесконечная возрастающая цепочка подгрупп $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$, то объединение этой цепочки не может, как мы знаем из § 7, обладать конечной системой образующих. [См. Д.17.5.]

По аналогии с условиями минимальности и максимальности для подгрупп можно ввести много более слабые условия минимальности и максимальности для нормальных делителей. Группы с условием минимальности для нормальных делителей изучаются в работе Бэра [41]. Для некоторых частных типов групп из условия минимальности для нормальных делителей удается вывести справедливость условия минимальности для подгрупп — см. Дженингс [1], Адо [3], Черников [11], Глушков [4]. [См. Д.17.3.]

Одним из условий конечности можно считать условие конечности числа образующих группы; группы с этим свойством изучались в десятой главе. Отметим также условие конечности числа классов сопряженных элементов. Группы этого типа могут иметь весьма сложное строение, как показывает следующая теорема (Хигмэн, Б. и Х. Нейманы [1]).

Всякая группа без кручения G может быть вложена в группу без кручения, все элементы которой, отличные от единицы, сопряжены между собой, т. е. в группу с двумя классами сопряженных элементов.

Применяя лемму 2 из § 38, вложим группу G в группу G', порождаемую группой G и элементами $h_{a,b}$ для всех упорядоченных пар a, b отличных от 1 элементов группы G, причем

$$h_{a,b}^{-1} a h_{a,b} = b.$$

В группе G' все элементы группы G, отличные от единицы, сопряжены между собой. Группа G' остается группой без кручения, как показывает доказательство леммы 1 из § 38. Применяя к G' эту же конструкцию и продолжая так далее, мы получим возрастающую последовательность групп без кручения

$$G \subset G' \subset G'' \subset \ldots \subset G^{(n)} \subset \ldots,$$

объединение которой удовлетворяет требованиям теоремы. [См. Д.17.8.]

Отметим, наконец, условия конечности ранга, введенные Мальцевым [4].

Группа G имеет конечный *общий ранг* r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякое конечное множество элементов из G содержится в подгруппе, обладающей не более чем r образующими.

Группа G имеет конечный *специальный ранг* r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякое конечное множество элементов из G порождает подгруппу с не более чем r образующими.

Ясно, что *общий ранг группы меньше или равен ее специальному рангу*. Счетная симметрическая группа (см. § 4) является примером группы, общий ранг которой конечен — он равен двум, так как всякое конечное множество элементов этой группы содержится в конечной симметрической подгруппе, т. е. в подгруппе с двумя образующими, — в то время как специальный ранг бесконечен. Действительно, в счетной симметрической группе содержится любая конечная группа, однако минимальное число образующих для конечных групп не является ограниченным.

Для абелевых групп общий и специальный ранги совпадают, так как всякая подгруппа абелевой группы с n образующими имеет не более n образующих. Для абелевых групп без кручения эти ранги равны рангу в смысле § 19.

§ 54. Силовские подгруппы. Центры p-групп

Среди многих теорем о конечных группах, выводящих глубокие свойства этих групп из арифметических свойств их порядков, одной из важнейших является следующая первая теорема Силова:

Если порядок n конечной группы G делится на k-ю степень простого числа p, то G обладает подгруппами порядка p^k.

Доказывать эту теорему мы будем индукцией по n, так как при $n = 1$ она очевидна. Мы полагаем вместе с тем, что $k > 0$.

Если порядок центра группы G делится на p, то, как следует хотя бы из основных теорем о конечных абелевых группах (§ 20), центр будет содержать элемент a порядка p, причем циклическая подгруппа $\{a\}$ будет в G нормальным делителем. Фактор-группа $G/\{a\}$ имеет порядок $\frac{n}{p}$, делящийся на p^{k-1}, и поэтому, по индуктивному предположению, обладает подгруппой порядка p^{k-1}. Этой подгруппе соответствует в самой группе G подгруппа порядка p^k.

Если же порядок центра на p не делится, то поступаем следующим образом: элементы группы G, лежащие вне центра, распределяем по различным классам сопряженных элементов и обозначаем через

$l_1, l_2, \ldots, l_s$ число элементов в этих классах. Тогда, если c есть порядок центра, $c \geqslant 1$, то

$$n = c + \sum_{i=1}^{s} l_i.$$

Так как n делится на p, но $(c, p) = 1$, то хотя бы одно из чисел l_i также должно быть взаимно просто с p. Отсюда следует, что в G существует истинная подгруппа N (нормализатор одного из элементов), индекс которой взаимно прост с p, т. е. порядок которой делится на p^k. По индуктивному предположению N обладает подгруппой порядка p^k. Доказательство теоремы закончено.

Частным случаем этой теоремы (при $k = 1$) является теорема Коши.

Если порядок конечной группы G делится на простое число p, то G обладает элементами порядка p.

С другой стороны, если p^m является наивысшей степенью простого числа p, на которую делится порядок n конечной группы G, то, как вытекает из первой теоремы Силова, группа G обладает подгруппами порядка p^m. Эти подгруппы называются *силовскими p-подгруппами* конечной группы G.

Силовские подгруппы конечных групп обладают рядом важных свойств, которые мы установим сразу для произвольных (т. е. не обязательно конечных) групп, должным образом обобщая на этот случай понятие силовской подгруппы (Дицман, Курош и Узков [1]).

Пусть Π есть непустое множество простых чисел, конечное или бесконечное. Периодическая группа G будет называться Π-*группой*, если все простые делители порядка любого элемента группы G принадлежат к множеству Π. Если множество Π состоит из одного простого числа p, то мы приходим к понятию *p-группы*: это будет группа, порядки всех элементов которой являются степенями числа p. В абелевом случае это понятие совпадает с понятием группы, примарной по p.

Конечная группа G тогда и только тогда является p-группой, если ее порядок есть степень числа p.

Действительно, если порядок группы G равен p^n, то порядок всякого элемента из G будет, по теореме Лагранжа, делителем числа p^n, т. е. степенью числа p. Если же порядок группы G делится на простое число q, отличное от p, то, по теореме Коши, G обладает элементом порядка q и поэтому не будет p-группой.

Π-группу, являющуюся подгруппой некоторой большей группы, уже не обязательно периодической, мы будем называть Π-*подгруппой* этой большей группы. Частным случаем этого будет понятие *p-подгруппы*.

Π-подгруппа Q группы G называется *силовской* Π-*подгруппой* этой группы, если она не содержится ни в какой большей Π-подгруппе группы G.

В частности, *силовская p-подгруппа* произвольной группы G есть такая p-подгруппа, которая не содержится ни в какой большей p-подгруппе этой группы. Совпадение этого понятия для конечных групп с тем, которое под таким же названием было введено выше, в связи с первой теоремой Силова, будет показано в конце параграфа.

Будем считать пока множество Π произвольным, но фиксированным.

Всякая группа обладает силовскими Π-*подгруппами*.

В самом деле, такой подгруппой будет E, если группа не содержит никаких отличных от E Π-подгрупп. Если же группа G обладает нетривиальными Π-подгруппами, то пусть Q_1 будет одна из них. Предположим, что в G уже найдена вполне упорядоченная возрастающая последовательность Π-подгрупп

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_\alpha \subset \ldots,$$

где α пробегает все порядковые числа, меньшие некоторого β. Если число $\beta - 1$ существует и если подгруппа $Q_{\beta-1}$ еще не является силовской Π-подгруппой, то она содержится в некоторой большей Π-подгруппе, которую мы обозначим через Q_β. Если же число β предельное, то в качестве Q_β можно взять объединение возрастающей последовательности подгрупп Q_α, $\alpha < \beta$, которое снова будет Π-подгруппой. Этот процесс построения возрастающей последовательности подгрупп должен, однако, остановиться на некотором порядковом числе, мощность которого не превосходит мощности самой группы G. Этим доказано существование в G силовской Π-подгруппы.

Мы доказали вместе с тем, что *всякая* Π-*подгруппа группы* G *содержится в некоторой силовской* Π-*подгруппе*. Действительно, мы могли при проведении предшествующего доказательства брать в качестве Q_1 произвольную Π-подгруппу.

Если H *есть подгруппа группы* G, *то различные силовские* Π-*подгруппы* Q_1 *и* Q_2 *группы* H *не могут содержаться в одной* Π-*подгруппе группы* G. Действительно, в противном случае они содержались бы в пересечении этой подгруппы с H, которое снова будет Π-подгруппой. Столь же очевидно следующее утверждение: если группа G есть объединение возрастающей последовательности групп $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ и если в группе H_n выбрана силовская Π-подгруппа Q_n, $n = 1, 2, \ldots$, причем $Q_n \subseteq Q_s$ при $n < s$, то *объединение возрастающей последовательности групп* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ *будет силовской* Π-*подгруппой группы* G. Следует заметить, впрочем, что, вообще говоря, не всякая силовская Π-подгруппа группы G может быть этим путем получена (при заданной последовательности H_n).

Мы переходим к вопросу о нормализаторах силовских подгрупп, играющему в дальнейшем существенную роль. Пусть в группе G даны две Π-подгруппы A и B, из которых первая есть нормальный делитель в G. Всякий элемент произведения AB имеет

вид ab, где $a \in A$, $b \in B$. Если b имеет порядок n, то

$$(ab)^n = \overline{a}b^n = \overline{a}, \quad \overline{a} \in A.$$

Если, далее, $\overline{a}$ имеет порядок m, то

$$(ab)^{nm} = \overline{a}^m = 1,$$

откуда следует, что *подгруппа AB также будет* П-*подгруппой*. Если B есть теперь силовская П-подгруппа группы G, то $AB = B$, т. е. $A \subseteq B$. Этим доказано, что П-подгруппа группы G, являющаяся в G нормальным делителем, содержится во всякой силовской П-подгруппе этой группы. *Если же рассматриваемый нормальный делитель сам есть силовская* П-*подгруппа, то он будет единственной силовской* П-*подгруппой группы G*. Иными словами, так как всякая подгруппа есть нормальный делитель в своем нормализаторе, мы приходим к теореме:

Всякая силовская П-*подгруппа произвольной группы является единственной силовской* П-*подгруппой в своем нормализаторе, т. е. содержит все элементы нормализатора, все простые делители порядков которых принадлежат множеству* П.

Дальнейшие свойства нормализаторов силовских П-подгрупп основываются на следующем замечании.

Всякая подгруппа группы G, сопряженная с силовской П-*подгруппой Q, сама будет силовской* П-*подгруппой. В частности, силовская* П-*подгруппа не может быть сопряженной со своей истинной подгруппой.*

Действительно, если $Q' = g^{-1}Qg$ и если Q' содержится в большей П-подгруппе Q'' группы G, то $gQ''g^{-1}$ содержит Q в качестве истинной подгруппы в противоречии с определением силовской подгруппы.

Отсюда следует без труда теорема:

Нормализатор силовской П-*подгруппы совпадает со своим собственным нормализатором.*

В самом деле, пусть Q есть силовская П-подгруппа группы G и пусть N — ее нормализатор в G. Если элемент x лежит вне N, то $x^{-1}Qx \neq Q$. Если тем не менее $x^{-1}Nx = N$, то $x^{-1}Qx \subset N$, что противоречит, однако, доказанной выше единственности силовской подгруппы в ее нормализаторе. Этим доказано, что элемент x, лежащий вне N, не может быть с N перестановочным.

Основным в теории силовских подгрупп является вопрос об условиях, при которых все силовские П-подгруппы данной группы между собою сопряжены, т. е. составляют один класс сопряженных подгрупп. Сперва мы отметим, однако, два результата, которые могут быть получены в предположении, что эта сопряженность уже доказана.

Если все силовские П-*подгруппы группы G между собою сопряжены и если A есть нормальный делитель в G, то пересечение A с силовской* П-*подгруппой Q группы G будет силовской* П-*подгруппой в A.*

В самом деле, если $A \cap Q = D$ не есть силовская П-подгруппа группы A, то она содержится в силовской П-подгруппе D' этой группы, которая, в свою очередь, входит в силовскую П-подгруппу Q' группы G. По условию, $g^{-1}Q'g = Q$, $g \in G$, поэтому $g^{-1}D'g \subseteq Q$, а так как (ввиду нормальности A) $g^{-1}D'g \subseteq A$, то $g^{-1}D'g \subseteq D$. Отсюда следует, однако, $D' \subseteq gDg^{-1}$, благодаря чему $D' \subset gD'g^{-1}$, а так как $gD'g^{-1} \subset A$, то мы приходим в противоречие с тем, что D' есть силовская П-подгруппа группы A.

Если Q есть силовская П-*подгруппа группы G, N ее нормализатор в G и если в подгруппе H, содержащей N, все силовские* П-*подгруппы между собою сопряжены, то H совпадает со своим нормализатором в G.*

Действительно, если элемент g из G таков, что $g^{-1}Hg = H$, то $g^{-1}Qg \subset H$. Поэтому, по условию, существует в H такой элемент h, что $h^{-1}g^{-1}Qgh = Q$, откуда $gh \in N$, т. е. $gh \in H$ и $g \in H$.

Используя понятие свободного произведения и теорему о подгруппах свободного произведения (см. § 34), можно было бы построить примеры групп, показывающие, что эти две теоремы перестают быть справедливыми без тех предположений о сопряженности силовских подгрупп, при которых они доказаны. С другой стороны, пример симметрической группы третьей степени показывает, что в первой из этих теорем нельзя заменить нормальный делитель произвольной подгруппой.

Вопрос об условиях, при которых имеет место сопряженность силовских подгрупп данной группы, будет сейчас рассматриваться лишь для случая силовских p-подгрупп; со случаем силовских П-подгрупп мы встретимся в следующей главе.

Докажем сперва следующее утверждение, относящееся к p-группам.

Если p-группа G содержит подгруппу A конечного индекса j, то j есть степень числа p.

Действительно, мы знаем из § 11, что в A при наших предположениях содержится нормальный делитель D группы G, также имеющий конечный индекс. Фактор-группа G/D будет конечной p-группой, т. е., по доказанному выше, ее порядок есть степень числа p, например p^n. Подгруппе A соответствует в G/D подгруппа A/D, также имеющая индекс j. Число j является, следовательно, делителем числа p^n.

Перейдем теперь к доказательству следующей теоремы (Курош [15]).

Если группа G содержит p-подгруппу A, обладающую конечным числом сопряженных подгрупп, то для всякой p-подгруппы B группы G можно указать хотя бы одну подгруппу, сопряженную с A и порождающую вместе с B p-подгруппу. Если, сверх того, ни одна из подгрупп, сопряженных с A, не порождает вместе с A

p-подгруппу, то число подгрупп, сопряженных с A, сравнимо с 1 по модулю p.

Пусть подгруппы $A', \ldots, A^{(k)}$, сопряженные с A, таковы, что подгруппа

$$C = \{A, A', \ldots, A^{(k)}\}$$

является p-подгруппой, но ни одну из сопряженных с A подгрупп больше нельзя добавить к C с сохранением этого свойства. Если выполняется предположение второй половины теоремы, то, понятно, $C = A$. Всякая подгруппа, сопряженная с C, порождается подгруппами, сопряженными с A, а поэтому C обладает лишь конечным числом сопряженных подгрупп. Никакие две подгруппы, сопряженные с C, не порождают вместе p-подгруппу, так как иначе C вместе с одной из своих сопряженных подгрупп порождала бы p-подгруппу, что противоречит определению подгруппы C.

Возьмем теперь произвольную p-подгруппу Q группы G и обозначим через $\mathfrak{M}$ систему всех тех подгрупп, сопряженных с C, нормализатор которых не содержит Q. Система $\mathfrak{M}$ может быть и пустой. Если она не пуста и если к ней принадлежит подгруппа C', то *число подгрупп, сопряженных с C' при помощи элементов из Q, конечно и будет положительной степенью числа p*: это число равно индексу в Q пересечения Q с нормализатором подгруппы C', но это пересечение отлично от Q, после чего остается сослаться на доказанный выше результат об индексах подгрупп в p-группах.

Если

$$C'' = q^{-1}C'q, \quad q \in Q,$$

то подгруппа C'' принадлежит к $\mathfrak{M}$: если бы нормализатор подгруппы C'' содержал Q, то обратным трансформированием мы получили бы, что Q входит и в нормализатор подгруппы C'. Используя то, что Q является подгруппой, мы получаем, что система $\mathfrak{M}$ распадается на непересекающиеся подсистемы подгрупп, сопряженных между собою при помощи элементов из Q, а поэтому, если $\mathfrak{M}$ не пусто, *общее число подгрупп, входящих в $\mathfrak{M}$, делится на p.*

Возьмем в качестве Q подгруппу C. Нормализатор никакой подгруппы C', сопряженной с C и отличной от нее, не может содержать C, так как иначе, как было показано в этом параграфе, C и C' порождали бы вместе p-подгруппу, что невозможно. Таким образом, в этом случае система $\mathfrak{M}$ состоит из всех подгрупп, сопряженных с C, кроме самого C, а поэтому *общее число подгрупп, сопряженных с C, сравнимо с единицей по модулю p.* Этим уже доказано второе утверждение теоремы.

Возьмем, наконец, в качестве Q заданную p-подгруппу B. В систему $\mathfrak{M}$, построенную для этого случая, не могут входить все подгруппы, сопряженные с C, так как их число сравнимо с 1 по модулю p, тогда как число подгрупп, входящих в $\mathfrak{M}$, должно делиться на p или же $\mathfrak{M}$ пусто. Существует, следовательно, такая подгруппа C',

сопряженная с C, что ее нормализатор содержит B, а тогда $\{C', B\}$ будет p-подгруппой. Тем более всякая подгруппа, сопряженная с A и входящая в C, будет порождать вместе с B p-подгруппу. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующая т е о р е м а, доказанная в работе Дицмана, Куроша и Узкова [1].

Если силовская p-подгруппа P группы G обладает конечным числом сопряженных подгрупп, т. е. ее нормализатор N имеет в G конечный индекс, то этими сопряженными с P подгруппами исчерпываются все силовские p-подгруппы группы G. Число этих подгрупп сравнимо с единицей по модулю p.

Другое доказательство этой теоремы дано Бэром [25]; его метод использован в доказательстве предшествующей теоремы. Некоторые обобщения этой теоремы можно найти в работах Куроша [15] и Дицмана [6, 7]. [См. Д.18.2.]

В формулировке теоремы не может быть отброшено предположение о конечности числа подгрупп, сопряженных с P. Действительно, пусть P_1 и P_2 — две любые p-группы, а G — их свободное произведение,

$$G = P_1 * P_2.$$

Если P_1 не является силовской p-подгруппой группы G, то она содержится в силовской p-подгруппе $\overline{P}_1$. Эта последняя, как вообще всякая p-группа, неразложима в свободное произведение, а поэтому, по теореме о подгруппах (§ 34), сопряжена с подгруппой одного из свободных множителей P_1, P_2. Так как, однако, никакой элемент из P_1 не может быть сопряжен с элементом из P_2, то силовская p-подгруппа $\overline{P}_1$ сопряжена с некоторой подгруппой из P_1, т. е. со своей истинной подгруппой, что, как мы знаем, невозможно. Этим доказано, что P_1 и P_2 будут силовскими p-подгруппами в G, хотя не являются сопряженными и могут даже не быть изоморфными.

Счетная симметрическая группа S является примером периодической группы, обладающей неизоморфными силовскими p-подгруппами. Так, если представить группу S как объединение возрастающей последовательности конечных симметрических групп, один раз степеней $p, p^2, \ldots, p^n, \ldots$, а другой раз степеней $p+p, p^2+p, \ldots, p^n+p, \ldots$, и взять объединения возрастающих последовательностей силовских p-подгрупп этих групп, то при соответствующем подборе этих последовательностей можно получить две силовские p-подгруппы группы S, одна из которых не имеет центра (см. Курош [9]), а другая имеет прямым множителем циклическую группу порядка p и поэтому центром обладает.

С другой стороны, в работе Бэра [25] указан пример группы, все силовские p-подгруппы которой сопряжены между собой, хотя число их бесконечно. [См. Д.18.1.]

В случае конечных групп полученная выше теорема превращается во вторую теорему Силова, доказанную Силовым [1] и передоказанную, в частности, Фробениусом [1].

Все силовские p-подгруппы конечной группы сопряжены между собой и число их сравнимо с единицей по модулю p.

В формулировке этой теоремы мы пользуемся определением силовской p-подгруппы как p-подгруппы, не содержащейся в большей p-подгруппе. Из первой теоремы Силова уже было выведено, что если p^m является наивысшей степенью числа p, на которую делится порядок конечной группы G, то G обладает подгруппами порядка p^m. Эти подгруппы не могут содержаться в бóльших p-подгруппах ввиду теоремы Лагранжа. С другой стороны, если бы существовала в G подгруппа порядка p^l, $l < m$, которая не содержится в большей p-подгруппе, то, по доказанной сейчас теореме, она была бы сопряженной с подгруппой порядка p^m, что явно невозможно. *Этим доказана равносильность двух приведенных выше определений силовской p-подгруппы конечной группы.*

Переходим к вопросу о *максимальных периодических подгруппах* произвольных групп. Все сказанное выше о силовских Π-подгруппах (при произвольном Π) применимо и к этому случаю и будет дальше использоваться без особых оговорок. Существуют группы, обладающие бесконечным множеством максимальных периодических подгрупп [1]). Вместе с тем для случая максимальных периодических подгрупп имеет место следующая теорема, в некотором смысле параллельная теореме Силова.

Если G — произвольная группа, то или она обладает единственной максимальной периодической подгруппой, или же всякая ее максимальная периодическая подгруппа имеет в ней бесконечно много сопряженных подгрупп.

Этой теоремой исключается, следовательно, случай конечного числа (большего чем 1) максимальных периодических подгрупп. Для доказательства заметим, прежде всего, что если группа G обладает максимальной периодической подгруппой, являющейся нормальным делителем, то эта подгруппа будет, как мы знаем, единственной, а именно, она будет состоять из всех элементов конечного порядка. Нам остается поэтому показать, что *предположение о существовании в группе G максимальной периодической подгруппы Q, не являющейся нормальным делителем, но имеющей лишь конечное число сопряженных подгрупп, приводит к противоречию.*

Предположим сперва, что подгруппа Q *конечна*. Тогда элементы подгруппы Q и всех сопряженных с нею подгрупп составляют конечное инвариантное множество $\mathfrak{M}$, состоящее из элементов конечного

[1]) Соответствующие примеры можно было бы построить, используя, например, свободные произведения.

порядка. Множество $\mathfrak{M}$ порождает, однако, по лемме Дицмана (§ 53), конечную подгруппу; эта подгруппа содержит Q и отлична от нее, что противоречит максимальности периодической подгруппы Q.

Переходим к *общему случаю*. Пусть N есть нормализатор подгруппы Q в G. Он отличен, по предположению, от G, но имеет в G конечный индекс. Если Q' есть подгруппа, сопряженная с Q, то $Q' \cap N = Q' \cap Q$, так как все элементы конечного порядка из N содержатся в Q. Пересечение $Q' \cap Q$ имеет поэтому в Q' (а следовательно, по соображениям симметрии, и в Q) конечный индекс [1]). Отсюда следует, ввиду теоремы Пуанкаре, что пересечение D всех подгрупп, сопряженных с Q, также будет иметь в Q конечный индекс; оно будет вместе с тем нормальным делителем в G. В фактор-группе G/D подгруппа Q/D будет конечной максимальной периодической подгруппой, причем она имеет конечное число сопряженных подгрупп, но не является нормальным делителем. Это приводит нас, однако, к случаю, рассмотренному в предшествующем абзаце. Доказательство теоремы закончено. [См. Д.21.2.]

Центры *p*-групп. В теории конечных групп большую роль играет теорема

Всякая конечная p-группа обладает центром, отличным от E.

Эта теорема может быть выведена из следующей теоремы Дицмана [1], относящейся уже к произвольным (т. е. не обязательно конечным) p-группам.

Если p-группа обладает конечным классом сопряженных элементов, отличным от единичного, то ее центр отличен от E.

Пусть в p-группе G дан конечный класс сопряженных элементов $\mathfrak{A}$. Подгруппа (даже нормальный делитель) $A = \{\mathfrak{A}\}$ будет, по лемме Дицмана (см. предшествующий параграф), конечной. Отсюда следует, что всякий элемент из A содержится в конечном классе сопряженных (в группе G) элементов, т. е. индекс его нормализатора в G конечен и поэтому, как доказано выше, есть степень числа p. Пусть нормальный делитель A распадается на q классов сопряженных элементов, состоящих соответственно из $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \ldots, p^{\alpha_q}$ элементов. Если p^n есть порядок группы A, то

$$p^n = p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2} + \ldots + p^{\alpha_q}.$$

Так как, однако, среди этих классов содержится и единичный, т. е., например, $p^{\alpha_1} = 1$, то получаем, что некоторые из чисел $p^{\alpha_2}, \ldots, p^{\alpha_q}$ также должны быть равными единице, откуда следует существование в группе G нетривиального центра. Теорема Дицмана доказана.

Бесконечные p-группы обладают центром далеко не всегда. Пример p-группы без центра впервые опубликовал Курош [9]. Следующий

[1]) Действительно, индекс $Q' \cap N$ в Q' не больше индекса N в G.

более простой пример такой группы построен Шмидтом [6] (см. также Бэр [24]).

Обозначим через P_n подгруппу симметрической группы степени p^{n+1}, порожденную подстановками

$$b_k = (kp - p + 1,\ kp - p + 2,\ \ldots,\ kp), \quad k = 1, 2, \ldots, p^n$$

(эти подстановки являются циклами длины p), и подстановкой a, являющейся произведением p циклов длины p^n [1]),

$$a = \prod_{l=1}^{p} (l,\ p + l,\ 2p + l,\ \ldots,\ kp - p + l,\ \ldots,\ p^{n+1} - p + l).$$

Легко проверяется справедливость в P_n следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} a^{p^n} &= 1; \quad b_k^p = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, p^n; \\ b_i b_j &= b_j b_i, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant p^n; \\ a^{-1} b_k a &= b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, p^n - 1; \\ a^{-1} b_{p^n} a &= b_1. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Из этих соотношений следует, что подгруппа $B_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_{p^n}\}$ будет в группе P_n нормальным делителем. Всякий элемент x из P_n может быть записан в виде $x = a^s b$, где $0 \leqslant s < p^n$, $b \in B_n$, притом однозначно, так как $a^{p^{n-1}} \notin B_n$, и поэтому $\{a\} \cap B_n = E$. Отсюда следует, что P_n есть p-группа порядка p^{2n+1}. Этим доказано вместе с тем, что *соотношения* (1) *составляют для группы* P_n *систему определяющих соотношений*, так как уже из этих соотношений следует, что группа, ими определяемая, имеет порядок, не превосходящий p^{2n+1}.

Введем следующие обозначения:

$$a' = a^p,$$
$$b'_1 = b_1,\ b'_2 = b_{p+1},\ \ldots,\ b'_k = b_{kp-p+1},\ \ldots,\ b'_{p^{n-1}} = b_{p^n-p+1}.$$

Очевидно, что порядок подгруппы $P'_n = \{a', b'_1, b'_2, \ldots, b'_{p^{n-1}}\}$ не меньше $p^{2(n-1)+1}$. С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что в группе P'_n выполняются соотношения (1′), получающиеся из соотношений (1) после замены n на $n - 1$ и снабжения всех a и b штрихами, а поэтому порядок P'_n не больше числа $p^{2(n-1)+1}$. Мы получаем, таким образом, что *группа* P'_n *изоморфна группе* P_{n-1}. Осуществляя эти изоморфные вложения группы P_{n-1} в группу P_n для всех n, мы приходим к бесконечной возрастающей последовательности конечных p-групп, объединение которой будет бесконечной p-группой P.

[1]) Если все p^n циклов b_k будут подписаны один под другим, то циклы, составляющие элемент a, будут соответствовать столбцам полученной матрицы.

Докажем, что *центр группы P равен E*. Рассмотрим для этой цели центр группы P_n. Он не может содержать элемент a или его степень ввиду равенства

$$a^{-p^{n-1}} b_1 a^{p^{n-1}} = b_{p^{n-1}+1}.$$

Поэтому вообще для всякого элемента из P_n, лежащего вне подгруппы B_n, можно найти неперестановочный с ним элемент из B_n. Центр группы P_n лежит, следовательно, в подгруппе B_n. Легко видеть, далее, что всякий отличный от 1 элемент из подгруппы $B'_n = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{p^{n-1}}\}$ неперестановочен с элементом a и поэтому лежит вне центра группы P_n. Этим доказано ввиду $P'_n \cap B_n = B'_n$, что *пересечение центра группы P_n с подгруппой P'_n равно E*. Если бы теперь в центре группы P существовал отличный от единицы элемент c, то он содержался бы в некоторой группе P_n и во всех группах P_m, $m \geqslant n$, причем входил бы в центры этих групп. Это противоречит, однако, только что доказанному утверждению.

§ 55. Локальные свойства

Пусть W — некоторое свойство, которым могут обладать группы, и пусть группа G такова, что все ее подгруппы, порожденные конечным числом элементов, обладают свойством W. Отсюда вовсе не обязательно следует, что группа G обладает свойством W, и на этом пути можно прийти к определению ряда естественных классов групп. Таковы, например, локально конечные группы и локально свободные группы.

С другой стороны, свойство W может быть и таким, что из справедливости его для всех подгрупп группы G, порожденных конечным числом элементов, следует справедливость этого свойства и для самой группы G; простейшим примером служит коммутативность группы. С такого рода «локальными теоремами» приходится встречаться во многих разделах теории групп. При этом обычно нет необходимости использовать в с е подгруппы с конечным числом образующих, а также связывать вопрос о справедливости локальной теоремы непременно с подгруппами, обладающими конечным числом образующих. Естественная постановка этого вопроса такова (см. Курош и Черников [1]): некоторое множество L подгрупп группы G называется *локальной системой подгрупп* этой группы, если

1) всякий элемент группы G содержится хотя бы в одной подгруппе из L,

2) любые две подгруппы из L (а поэтому и любое конечное число таких подгрупп) содержатся в некоторой подгруппе из L.

Примерами локальных систем группы G служат система всех ее подгрупп с конечным числом образующих, а также система всех нормальных делителей, порожденных конечным числом элементов. Локальными системами будут, понятно, также система всех подгрупп

группы, система всех ее нормальных делителей и, с другой стороны, система, состоящая лишь из самой данной группы.

Будем говорить, что группа G *локально обладает свойством* W, если в G существует хотя бы одна такая локальная система подгрупп, что все подгруппы, в нее входящие, обладают свойством W. Доказать *локальную теорему для свойства* W означает теперь доказать, что группа обладает свойством W, если она обладает этим свойством локально. Иногда, впрочем, приходится накладывать на рассматриваемую локальную систему дополнительные ограничения, например требовать, чтобы все подгруппы, входящие в эту систему, являлись нормальными делителями.

Один общий метод для доказательства локальных теорем указал Мальцев [3]. Этот метод использует аппарат математической логики и опирается на одну теорему Мальцева, относящуюся к узкому исчислению предикатов. Сама эта теорема легко может быть доказана, впрочем, при помощи излагаемого ниже метода, идущего из работы Куроша по теории бикомпактных топологических пространств (см. также Курош [12]). Этот метод и сам часто используется для доказательства локальных теорем теории групп — см. § 47б.

Пусть дана система S конечных множеств A_α, A_β, A_γ, ..., частично упорядоченная (см. § 43) при помощи отношения

$$A_\alpha \leqslant A_\beta$$

(словами: множество A_α *предшествует* множеству A_β, множество A_β *следует* за множеством A_α). О частичной упорядоченности в S мы делаем следующее предположение:

1) Для любых двух множеств A_α, A_β из S существует в S такое множество A_γ, что $A_\alpha \leqslant A_\gamma$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$.

Мы предполагаем, далее, что для всякой пары множеств A_α и A_β, для которой имеет место отношение $A_\alpha \leqslant A_\beta$, установлено некоторое однозначное отображение $\pi_{\beta\alpha}$ множества A_β на все множество A_α, называемое проекцией A_β на A_α. Всякий элемент из A_β обладает при этой проекции одним-единственным образом в A_α; для всякого элемента из A_α существует в A_β хотя бы один прообраз. Определенные в системе S проекции должны удовлетворять следующим условиям:

2) Если $A_\alpha \leqslant A_\beta$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$, то проекция $\pi_{\gamma\alpha}$ совпадает с результатом последовательного выполнения проекций $\pi_{\gamma\beta}$ и $\pi_{\beta\alpha}$.

3) Проекция $\pi_{\alpha\alpha}$ совпадает с тождественным отображением множества A_α на себя.

Множество P, составленное из элементов, взятых в некоторых из множеств A_α, т. е. являющееся подмножеством объединения всех A_α из системы S, называется *проекционным множеством*, если для любых двух элементов a и b из P в этом же множестве содержится и некоторый элемент c, являющийся общим прообразом для a и b. Примерами проекционных множеств будут множество из одного

элемента a, взятого в одном из A_α, и множество, составленное из элемента a и его образов во всех множествах A_γ, предшествующих A_α.

Из определения проекционного множества P следует, что P может содержать не более одного элемента из каждого из множеств A_α: два различных элемента из A_α не могут ввиду однозначности проекции обладать общим прообразом в каком-либо множестве, следующем за A_α. Если, далее, P содержит элементы a и b соответственно из множеств A_α и A_β и $A_\alpha < A_\beta$, то ввиду условия 2) элемент a будет образом элемента b.

Проекционное множество, содержащее по одному элементу из каждого из множеств A_α, составляющих систему S, называется полным.

Имеет место следующая общая теорема.

Всякое проекционное множество P системы S является частью некоторого полного проекционного множества.

Доказательство. Пусть система S вполне упорядочена, причем эта упорядоченность не предполагается связанной с исходной частичной упорядоченностью системы S. Множества A_α, снабженные некоторыми трансфинитными индексами, будут теперь записываться через A^λ, A^μ, A^ν, ... Мы предполагаем лишь, что при рассматриваемой полной упорядоченности всякое множество A_α, из которого в P вошел один элемент, предшествует всякому A_β, имеющему с P пустое пересечение. В каждом из множеств A^λ мы хотим так отметить по одному элементу a^λ, чтобы всякая конечная система отмеченных элементов обладала в S общим прообразом. Полагаем, что элементы проекционного множества P являются отмеченными в тех множествах A_α, в которых они содержатся.

Пусть элементы a^λ уже отмечены во всех множествах A^λ для $\lambda < \mu$. Пусть, далее, множество A^μ составлено из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, и пусть для каждого b_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, можно указать такую конечную систему

$$a_i^{\lambda_1}, a_i^{\lambda_2}, \ldots, a_i^{\lambda_{s(i)}}, \quad \lambda_j < \mu, \quad j = 1, 2, \ldots, s(i), \tag{i}$$

отмеченных ранее элементов, что элементы системы (i) и элемент b_i не имеют в S общего прообраза. Объединение всех систем (i), $i = 1, 2, \ldots, n$, дает конечную систему отмеченных элементов, для которой существует, следовательно, общий прообраз c, принадлежащий некоторому множеству A_β. Берем множество A_γ, следующее за A_β и A^μ, и в нем элемент d — один из прообразов элемента c. Образом элемента d в множестве A^μ будет некоторый элемент b_{i_0}. Мы получаем, что элемент b_{i_0} и система (i_0) обладают общим прообразом, что противоречит нашему предположению.

Мы доказали, что отмеченный элемент a^μ может быть выбран в каждом из множеств A^μ. Если несколько элементов из A^μ могут служить в качестве отмеченных элементов, то для определенности

можно считать элементы множества A^μ перенумерованными и каждый раз брать элемент с наименьшим номером.

Множество $\overline{P}$ всех отмеченных элементов будет проекционным множеством. Действительно, если в множествах A^μ и A^ν отмечены элементы a^μ и a^ν, то в некотором множестве A^λ, следующем за A^μ и A^ν, эти два элемента обладают общим прообразом. В A^λ отмечен элемент a^λ, а так как элементы a^μ, a^ν и a^λ должны обладать общим прообразом, то ввиду 2) a^λ будет общим прообразом для a^μ и a^ν. Проекционное множество $\overline{P}$ содержит множество P и является полным. Этим завершается доказательство теоремы.

Если определение проекции $\pi_{\beta\alpha}$ изменить так, что это есть однозначное отображение множества A_β в множество A_α, а не обязательно на все множество A_α, то и для этого случая, опираясь на доказанную сейчас теорему, *можно установить существование в системе S полных проекционных множеств*.

Действительно, в множестве A_α существуют такие элементы x, которые обладают прообразом во всяком A_β, $A_\beta \geqslant A_\alpha$: если A_α состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и если для всякого i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно указать такое множество A_{β_i}, что $A_{\beta_i} > A_\alpha$, но элемент x_i не имеет в A_{β_i} прообраза, то множество A_γ, $A_\gamma \geqslant A_{\beta_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вообще не сможет отображаться в A_α, что невозможно. Обозначим через A'_α множество всех элементов x из A_α, обладающих указанным свойством. При отображении $\pi_{\beta\alpha}$ множество A'_β отображается на все множество A'_α: если ни один из прообразов $y_1, \ldots, y_k$ в A_β элемента x из A'_α не принадлежит к A'_β, то существует такое A_γ, $A_\gamma > A_\beta$, в котором ни один из этих элементов $y_1, \ldots, y_k$ не имеет прообраза. Тогда, однако, в A_γ не будет прообраза и для x, что невозможно. К системе множеств A'_α уже можно применить доказанную выше теорему.

Применим изложенный метод для доказательства одной теоремы о силовских p-подгруппах (Бэр [25]; доказательство, приводимое ниже, содержится в работе Гольберга [2]). Введем сначала следующие новые понятия.

Автоморфизм φ группы G называется *локально внутренним*, если для любого конечного множества элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ этой группы можно указать в G такой элемент g, зависящий, вообще говоря, от выбранного множества, что

$$a_i\varphi = g^{-1}a_ig, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Две подгруппы A и B группы G называются *локально сопряженными*, если существует локально внутренний автоморфизм группы G, отображающий A на B.

Мы хотим доказать т е о р е м у:

Любые две силовские p-подгруппы локально нормальной группы локально сопряжены и, следовательно, изоморфны.

Пусть, в самом деле, в локально нормальной группе G дана силовская p-подгруппа P. Докажем, что *пересечение подгруппы P с любым конечным нормальным делителем H_α группы G будет силовской p-подгруппой в H_α.*

Действительно, обозначим через A_α множество тех силовских p-подгрупп конечной группы H_α, которые содержат пересечение $P \cap H_\alpha$. Множество A_α конечно и не пусто. Система S конечных множеств A_α, получающихся, когда H_α пробегает все конечные нормальные делители группы G, станет частично упорядоченной, если мы положим $A_\alpha \leqslant A_\beta$ при $H_\alpha \subseteq H_\beta$. Это будет даже структура, и поэтому условие 1) выполняется.

При $A_\alpha \leqslant A_\beta$ проекция $\pi_{\beta\alpha}$ определяется следующим образом. Если силовская p-подгруппа P' группы H_β принадлежит к A_β, т. е.

$$P' \supseteq P \cap H_\beta,$$

то рассмотрим пересечение $P' \cap H_\alpha = P''$. Так как H_α является нормальным делителем в H_β, а все силовские p-подгруппы конечной группы H_β сопряжены между собой, то, как доказано в предшествующем параграфе, P'' будет силовской p-подгруппой в H_α. Так как

$$P'' = P' \cap H_\alpha \supseteq (P \cap H_\beta) \cap H_\alpha = P \cap H_\alpha,$$

то P'' принадлежит к множеству A_α. Отображение

$$P' \to P''$$

будет проекцией множества A_β в множество A_α, причем условия 2) и 3) выполняются: если

$$H_\alpha \subset H_\beta \subset H_\gamma$$

и P' — силовская p-подгруппа в H_γ, то

$$P' \cap H_\alpha = (P' \cap H_\beta) \cap H_\alpha.$$

В системе S существует, следовательно, полное проекционное множество. Иными словами, в каждом из множеств A_α можно так выбрать по одной силовской p-подгруппе P_α, что любые две из этих подгрупп, P_α и P_β, содержатся в некоторой третьей подгруппе P_γ. Отсюда следует, что объединение всех подгрупп P_α будет p-подгруппой группы G, содержащей силовскую p-подгруппу P и, следовательно, с нею совпадающей, а поэтому при любом α силовская p-подгруппа P_α группы H_α будет совпадать с пересечением $P \cap H_\alpha$, что и требовалось доказать [1]).

[1]) Как сообщил автору М. И. Эйдинов, доказанное сейчас утверждение можно также вывести из приведенной в § 54 теоремы из работы автора [15], полагая $B = P$ и беря в качестве A любую силовскую p-подгруппу группы H_α.

Переходим к доказательству самой теоремы. Пусть в локально нормальной группе G даны две силовские p-подгруппы P_1 и P_2. Если H_α — произвольный конечный нормальный делитель группы G, то, по доказанному выше, пересечения $P_1 \cap H_\alpha$ и $P_2 \cap H_\alpha$ будут силовскими p-подгруппами в H_α и, следовательно, в H_α сопряжены. Обозначим через A_α множество всех автоморфизмов группы H_α, являющихся следствиями внутренних автоморфизмов группы G и отображающих $P_1 \cap H_\alpha$ на $P_2 \cap H_\alpha$. Множество A_α конечно и не пусто. Полагаем, что $A_\alpha \leqslant A_\beta$ при $H_\alpha \subseteq H_\beta$, а проекцию $\pi_{\beta\alpha}$ определим так: если φ — автоморфизм группы H_β, принадлежащий к A_β, то он индуцируется внутренним автоморфизмом группы G и поэтому сам индуцирует автоморфизм φ' нормального делителя H_α; так как φ отображает $P_1 \cap H_\beta$ на $P_2 \cap H_\beta$, то φ' отображает $P_1 \cap H_\alpha$ на $P_2 \cap H_\alpha$, т. е. φ' принадлежит к A_α. Тогда считаем, что проекция $\pi_{\beta\alpha}$ переводит φ в φ'.

Условия 1), 2) и 3) будут, очевидно, выполняться, и поэтому можно применить теорему о существовании полного проекционного множества. В каждом из множеств A_α так можно выбрать, следовательно, по одному автоморфизму φ_α, что любые два из этих автоморфизмов, φ_α и φ_β, индуцируются некоторым автоморфизмом φ_γ. Группа G — локально нормальная, поэтому совокупность автоморфизмов φ_α определяет автоморфизм группы G, который будет локально внутренним и вместе с тем отображает P_1 на P_2. Теорема доказана.

Как показывает пример счетной симметрической группы, уже отмеченный в предшествующем параграфе, в формулировке этой теоремы локальную нормальность группы G нельзя заменить локальной конечностью. [См. Д.18.1.]

§ 56. Нормальные и инвариантные системы

В следующих главах мы будем использовать одно обобщение понятия конечного нормального ряда (см. § 16) и некоторые связанные с ним обобщения теорем Шрейера и Жордана–Гёльдера. Эти результаты, подготовленные в работах Куроша [4] и Биркгофа [2], содержатся в работе Куроша [14]; см. также Курош и Черников [1].

Пусть в группе G с произвольной системой операторов дана система допустимых подгрупп $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$, содержащая единичную подгруппу $E = A_0$ и всю группу $G = A_\mu$. Пусть, далее, индексы α пробегают множество индексов $\mathfrak{M}$, упорядоченное при помощи отношения $<$, причем из $\alpha < \beta$ следует $A_\alpha \subset A_\beta$, т. е. система подгрупп $\mathfrak{A}$ упорядочена по отношению к теоретико-множественному включению. Если в множестве $\mathfrak{M}$ есть элемент, непосредственно следующий за α, то условимся обозначать его через $\alpha + 1$ и будем говорить, что подгруппы A_α и $A_{\alpha+1}$ (причем, как сказано выше, $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$) составляют *скачок* в системе $\mathfrak{A}$.

Упорядоченную систему подгрупп $\mathfrak{A}$ назовем *полной*, если для любой ее подсистемы и объединение, и пересечение подгрупп, составляющих эту подсистему, принадлежат к $\mathfrak{A}$, т. е. если для всякого дедекиндова сечения, взятого в $\mathfrak{A}$, к $\mathfrak{A}$ принадлежат как объединение подгрупп, составляющих первый класс этого сечения, так и пересечение подгрупп, составляющих его второй класс. *Всякая упорядоченная система подгрупп $\mathfrak{A}$ может быть пополнена*: для этого достаточно добавить к $\mathfrak{A}$ объединения первых классов и пересечения вторых классов всех сечений; легко проверяется, что полученная система подгрупп остается упорядоченной и уже будет полной.

Всякая полная система подгрупп $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$ обладает скачками, причем скачки в этой системе даже плотно распределены. В самом деле, всякий элемент x группы G, $x \neq 1$, определяет скачок в системе $\mathfrak{A}$: мы получим сечение в системе $\mathfrak{A}$, если к первому классу отнесем те из подгрупп A_α, которые не содержат элемента x, а ко второму классу — подгруппы A_α, содержащие этот элемент. Ввиду полноты системы $\mathfrak{A}$ она содержит объединение подгрупп первого класса и пересечение подгрупп второго класса, причем эти две подгруппы различны — первая не содержит элемента x, вторая его содержит — и, следовательно, составляют скачок.

Теперь может быть определено основное понятие этого параграфа. *Нормальной системой* группы G называется всякая полная упорядоченная система (допустимых) подгрупп $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$ этой группы, содержащая E и G и удовлетворяющая следующему дополнительному условию: для всякого скачка A_α, $A_{\alpha+1}$ системы $\mathfrak{A}$ подгруппа A_α будет нормальным делителем в подгруппе $A_{\alpha+1}$. Всякий конечный нормальный ряд группы принадлежит, понятно, к числу ее нормальных систем.

Нормальная система $\mathfrak{A}'$ называется *уплотнением* нормальной системы $\mathfrak{A}$, если всякая подгруппа, входящая в $\mathfrak{A}$, содержится и в $\mathfrak{A}'$. Заметим, что *при этом всякая подгруппа A', входящая в $\mathfrak{A}'$, но не принадлежащая к $\mathfrak{A}$, попадает в некоторый скачок системы $\mathfrak{A}$*, а именно она будет расположена между объединением всех подгрупп из $\mathfrak{A}$, содержащихся в A', и пересечением всех подгрупп из $\mathfrak{A}$, содержащих A'.

Нормальная система группы G, не допускающая дальнейших уплотнений, называется *композиционной системой*.

Всякая нормальная система $\mathfrak{A}$ группы G может быть уплотнена до композиционной системы.

Для доказательства положим $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$. Пусть для всех порядковых чисел γ, меньших некоторого δ, уже определены нормальные системы $\mathfrak{A}_\gamma$, составляющие возрастающую последовательность. Если число $\delta - 1$ существует и если система $\mathfrak{A}_{\delta-1}$ еще не является композиционной, то в качестве $\mathfrak{A}_\delta$ возьмем одно из уплотнений системы $\mathfrak{A}_{\delta-1}$. Если же число δ предельное, то обозначим объединение всех $\mathfrak{A}_\gamma$, $\gamma < \delta$, через $\mathfrak{A}'_\delta$. Эта система не будет, вообще говоря, полной, но ее пополнение, полученное указанным выше способом, уже будет удовлетворять всем

требованиям, входящим в определение нормальной системы, и поэтому может быть принято в качестве $\mathfrak{A}_\delta$.

В самом деле, очевидно, что *система $\mathfrak{A}_\delta$ упорядочена по включению*. Далее, *система $\mathfrak{A}_\delta$ будет полной* — всякое сечение в $\mathfrak{A}_\delta$ порождает некоторое сечение во всяком $\mathfrak{A}_\gamma$, $\gamma < \delta$, первые (соответственно вторые) классы всех этих сечений обладают объединениями (пересечениями), принадлежащими к $\mathfrak{A}_\gamma$ и поэтому к $\mathfrak{A}'_\delta$, а тогда объединение (пересечение) всех этих объединений (пересечений), по условию содержащееся в $\mathfrak{A}_\delta$, и будет объединением всего первого класса (пересечением всего второго класса) заданного сечения. Наконец, *система $\mathfrak{A}_\delta$ удовлетворяет условию нормальности в скачках*. Действительно, всякий скачок A_α, $A_{\alpha+1}$ в системе $\mathfrak{A}_\delta$ определяет скачок $A_{\alpha\gamma}$, $A_{\alpha\gamma+1}$ в системе $\mathfrak{A}_\gamma$, причем при $\gamma < \gamma'$ будет $A_{\alpha\gamma} \subseteq A_{\alpha\gamma'}$, $A_{\alpha\gamma+1} \supseteq A_{\alpha\gamma'+1}$. Тогда A_α будет объединением всех $A_{\alpha\gamma}$, $A_{\alpha+1}$ — пересечением всех $A_{\alpha\gamma+1}$, а так как всякое $A_{\alpha\gamma}$ является нормальным делителем в $A_{\alpha\gamma+1}$ и поэтому в $A_{\alpha+1}$, то и A_α будет нормальным делителем в $A_{\alpha+1}$.

Процесс построения систем $\mathfrak{A}_\delta$ остановится на некотором $\delta = \delta_0$, причем система $\mathfrak{A}_{\delta_0}$ будет искомой композиционной системой. Теорема доказана.

Если в качестве операторов берутся все внутренние автоморфизмы группы, то понятие нормальной системы превращается в понятие *инвариантной системы* — это будет всякая упорядоченная по включению полная система нормальных делителей группы G, содержащая E и G; требование нормальности в скачках будет здесь выполняться автоматически. Понятие композиционной системы превращается теперь в понятие *главной системы*, т. е. такой инвариантной системы, которая не допускает дальнейших инвариантных уплотнений.

Нормальная система, вполне упорядоченная по возрастанию, называется *возрастающим нормальным рядом*; конечный нормальный ряд является частным случаем этого понятия. Аналогичный смысл имеют понятия *возрастающего инвариантного ряда*, *возрастающего композиционного ряда*, *возрастающего главного ряда*. С другой стороны, нормальную систему, вполне упорядоченную по убыванию, мы будем называть *убывающим нормальным рядом* и т. д.

Переходим к обобщению основных теорем из § 16. Если в группе G задана нормальная система $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$, то всякому скачку A_α, $A_{\alpha+1}$ этой системы соответствует фактор-группа $A_{\alpha+1}/A_\alpha$, называемая *фактором* системы $\mathfrak{A}$. Справедлива следующая теорема о подгруппах.

Если в группе G с произвольной системой операторов задана нормальная система $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$, то всякая (*допустимая*) *подгруппа F этой группы обладает нормальной системой, факторы которой изоморфны подгруппам некоторых различных факторов системы $\mathfrak{A}$.*

Положим

$$B_\alpha = F \cap A_\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \mu.$$

Система $\mathfrak{B} = [B_\alpha]$ будет упорядоченной системой подгрупп группы F, быть может с повторениями, причем $B_0 = E$, $B_\mu = F$. Из полноты системы $\mathfrak{A}$ следует, что система $\mathfrak{B}$ также будет полной, если мы условимся упорядоченную систему подгрупп с повторениями считать *полной* в том случае, когда для всякого сечения в этой системе реализуется одна из трех возможностей: 1) первый класс сечения обладает последней подгруппой, а второй класс — первой подгруппой, 2) первый класс сечения обладает последней подгруппой, которая служит пересечением для подгрупп второго класса, 3) второй класс сечения обладает первой подгруппой, которая служит объединением для подгрупп первого класса.

Всякому скачку $B_\alpha, B_{\alpha+1}$ системы $\mathfrak{B}$ соответствует скачок A_α, $A_{\alpha+1}$ системы $\mathfrak{A}$. Используя нормальность A_α в $A_{\alpha+1}$ и равенство

$$B_\alpha = B_{\alpha+1} \cap A_\alpha$$

и применяя лемму Цасенхауза, мы придем к нормальности B_α в $B_{\alpha+1}$ и к изоморфизму

$$B_{\alpha+1}/B_\alpha \simeq A_\alpha B_{\alpha+1}/A_\alpha.$$

Однако

$$A_\alpha B_{\alpha+1} \subseteq A_{\alpha+1},$$

поэтому фактор-группа $A_\alpha B_{\alpha+1}/A_\alpha$ изоморфна подгруппе факторгруппы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$. Наконец, ввиду полноты системы $\mathfrak{B}$ всякая совокупность равных между собой подгрупп этой системы обладает как первой, так и последней подгруппой, и поэтому, заменяя каждую такую совокупность одной подгруппой, мы не создаем новых скачков, т. е. приходим к искомой нормальной системе подгруппы F.

Теорема о подгруппах доказана. Дополнительно заметим, что *если система* $\mathfrak{A}$ *была возрастающим нормальным рядом, то это же справедливо и для системы* $\mathfrak{B}$.

Обобщения теорем Шрейера и Жордана–Гёльдера. Нормальные системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ группы G называются *изоморфными*, если между факторами этих двух систем можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие факторы изоморфны. Изоморфизм систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ как упорядоченных множеств при этом не предполагается.

Утверждать изоморфизм любых двух композиционных систем произвольной группы в общем случае невозможно — противоречащим примером служит хотя бы аддитивная группа целых чисел. В этой группе системы подгрупп

$$\{1\} \supset \{2\} \supset \{4\} \supset \ldots \supset \{2^n\} \supset \ldots \supset O,$$
$$\{1\} \supset \{3\} \supset \{9\} \supset \ldots \supset \{3^n\} \supset \ldots \supset O$$

являются убывающими главными рядами, однако все факторы первого ряда — циклические группы второго порядка, а все факторы второго

ряда — циклические третьего порядка. Некоторые результаты, обобщающие теоремы Шрейера и Жордана–Гёльдера, могут быть, тем не менее, доказаны.

Пусть в группе G с произвольной системой операторов даны нормальные системы $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \mu$, и $\mathfrak{B} = [B_\beta]$, $0 \leqslant \beta \leqslant \nu$. Положим

$$A_{\alpha\beta} = A_\alpha (A_{\alpha+1} \cap B_\beta)$$

для всех α, для которых существует $\alpha + 1$, и для всех β, и

$$B_{\beta\alpha} = B_\beta (B_{\beta+1} \cap A_\alpha)$$

для всех β, для которых существует $\beta + 1$, и для всех α. Вставляя все $A_{\alpha\beta}$ в систему $\mathfrak{A}$, все $B_{\beta\alpha}$ — в систему $\mathfrak{B}$, мы получим упорядоченные системы подгрупп группы G, быть может с повторениями; обозначим их через $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$.

Всякий скачок в системе $\overline{\mathfrak{A}}$ имеет вид $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha,\beta+1}$, где α таково, что $\alpha + 1$ существует. Ставя ему в соответствие скачок $B_{\beta\alpha}$, $B_{\beta,\alpha+1}$ системы $\overline{\mathfrak{B}}$, мы получим взаимно однозначное соответствие между скачками этих двух систем. Лемма Цасенхауза позволяет утверждать, что $A_{\alpha\beta}$ будет нормальным делителем в $A_{\alpha,\beta+1}$, а $B_{\beta\alpha}$ — нормальным делителем в $B_{\beta,\alpha+1}$, и что соответствующие факторы изоморфны,

$$A_{\alpha,\beta+1}/A_{\alpha\beta} \simeq B_{\beta,\alpha+1}/B_{\beta\alpha}.$$

Системы $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ могут, однако, не быть полными в смысле того определения полноты для систем подгрупп с повторениями, которое было дано выше. Возьмем, в самом деле, сечение в системе $\overline{\mathfrak{A}}$. Легко проверяется, что объединение первого класса этого сечения всегда принадлежит к $\overline{\mathfrak{A}}$. Пересечение же второго класса уже может к $\overline{\mathfrak{A}}$ не принадлежать: если B_β является пересечением подгрупп $B_{\beta'}$, $\beta' > \beta$, то $A_{\alpha+1} \cap B_\beta$ будет пересечением подгрупп $A_{\alpha+1} \cap B_{\beta'}$, но произведение $A_\alpha (A_{\alpha+1} \cap B_\beta)$ уже может оказаться меньше пересечения произведений $A_\alpha (A_{\alpha+1} \cap B_{\beta'})$, $\beta' > \beta$.

Сделаем следующее предположение:

(C) Нормальные системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы, что системы $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ содержат пересечение второго класса каждого из своих сечений, т.е. являются полными.

В этом случае каждая совокупность равных между собою подгрупп из системы $\overline{\mathfrak{A}}$ (а также и из системы $\overline{\mathfrak{B}}$) обладает как первой, так и последней подгруппой. Оставляя в каждой из таких совокупностей равных между собою подгрупп лишь по одной подгруппе, мы получим системы без повторений $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$, содержащие соответственно исходные системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. При переходе от $\overline{\mathfrak{A}}$ к $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и от $\overline{\mathfrak{B}}$ к $\widetilde{\mathfrak{B}}$ не появляются новые скачки и не пропадают старые, кроме тех, которым соответствовал фактор, равный единице, а из полноты систем $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ следует полнота систем $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Таким образом, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *будут нормальными системами*

без повторений, изоморфными между собой и являющимися уплотнениями соответственно для $\mathfrak{A}$ *и для* $\mathfrak{B}$.

Применим этот метод для доказательства следующих т е о р е м.

Всякие два возрастающих нормальных ряда произвольной группы G *обладают изоморфными уплотнениями, также являющимися возрастающими нормальными рядами. В частности, если группа* G *обладает возрастающими композиционными рядами, то все такие ряды изоморфны между собой.*

Действительно, если системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ вполне упорядочены по возрастанию, то это же имеет место и для систем $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$, а поэтому предположение (C) выполняется. Системы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$, как подсистемы систем $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$, также будут вполне упорядоченными.

Если в группе G *даны возрастающий инвариантный ряд* $\mathfrak{A}$ *и произвольная инвариантная система* $\mathfrak{B}$, *то они обладают такими инвариантными уплотнениями* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{B}}$, *что совокупность факторов системы* $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *будет частью* (*не обязательно истинной*) *совокупности факторов системы* $\widetilde{\mathfrak{A}}$. *В частности, если группа* G *обладает возрастающим главным рядом* $\mathfrak{A}$, *то совокупность факторов любой другой главной системы группы* G *будет частью совокупности факторов ряда* $\mathfrak{A}$.

Действительно, для заданных систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ строим системы $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$. Система $\overline{\mathfrak{B}}$ будет полной, так как она получена из системы $\mathfrak{B}$ заполнением каждого скачка некоторой вполне упорядоченной по возрастанию системой подгрупп. Система $\overline{\mathfrak{A}}$ может, однако, не быть полной, и мы ее пополняем до системы $\overline{\mathfrak{A}}'$, добавляя пересечения вторых классов всех сечений; из инвариантности системы $\overline{\mathfrak{A}}$ следует инвариантность системы $\overline{\mathfrak{A}}'$ [1]). Все факторы системы $\overline{\mathfrak{A}}$ сохраняются, но могут добавиться также новые скачки и, следовательно, новые факторы, которые не соответствуют никаким факторам системы $\overline{\mathfrak{B}}$. Переход от систем $\overline{\mathfrak{A}}'$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ к инвариантным системам без повторений $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$ заканчивает доказательство теоремы.

Пусть группа G *обладает возрастающим главным рядом* $\mathfrak{A} = [A_n]$, *упорядоченным по типу натурального ряда чисел, т.е., точнее, имеющим вид*

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\omega = G.$$

Тогда все главные системы группы G *изоморфны ряду* $\mathfrak{A}$, *т.е. изоморфны между собой.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{B} = [B_\beta]$ будет произвольная главная система группы G. Строим системы $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$. Так как система $\mathfrak{A}$ главная, а система $\overline{\mathfrak{A}}$ содержит, как мы знаем, объединения первых классов всех своих

[1]) Если бы мы рассматривали не инвариантные, а лишь нормальные системы, то доказать нормальность системы $\overline{\mathfrak{A}}'$ уже не удалось бы.

сечений, то для всякого n, $n \geqslant 0$, можно указать такой индекс β_n, что $A_{n,\beta_n} = A_n$, но $A_{n,\overline{\beta}} = A_{n+1}$ для всех $\overline{\beta} > \beta_n$; иными словами,

$$A_{n+1} \cap B_{\beta_n} \subseteq A_n, \tag{1}$$

$$A_n(A_{n+1} \cap B_{\overline{\beta}}) = A_{n+1}, \quad \overline{\beta} > \beta_n. \tag{2}$$

Учитывая сказанное при доказательстве предшествующей теоремы, можно утверждать, что наша теорема будет доказана, если для всякого n будет установлено существование индекса $\beta_n + 1$. Действительно, в этом случае система $\overline{\mathfrak{A}}$ будет полной, а поэтому при переходе к системе $\widetilde{\mathfrak{A}}$, т. е. в нашем случае к $\mathfrak{A}$, новые факторы не будут появляться и, следовательно, главные системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ окажутся изоморфными.

Докажем сперва следующую лемму.

Лемма. *Если индексы β' и β'', $\beta' < \beta''$, таковы, что при данном n ни один индекс β_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, не удовлетворяет неравенствам $\beta' \leqslant \beta_i < \beta''$, то*

$$A_{n+1} \cap B_{\beta'} = A_{n+1} \cap B_{\beta''}.$$

В самом деле, если $n = 0$, то, по (1) и (2),

$$A_1 \cap B_{\beta_0} = E, \quad A_1 \subseteq B_{\overline{\beta}} \quad \text{при} \quad \overline{\beta} > \beta_0.$$

Поэтому при $\beta'' < \beta_0$ будет

$$A_1 \cap B_{\beta'} = A_1 \cap B_{\beta''} = E,$$

а при $\beta_0 < \beta'$ —

$$A_1 \cap B_{\beta'} = A_1 \cap B_{\beta''} = A_1.$$

Пусть лемма уже доказана для $n - 1$. Если $\beta'' < \beta_n$, то, по (1),

$$A_{n+1} \cap B_{\beta'} \subseteq A_n, \quad A_{n+1} \cap B_{\beta''} \subseteq A_n,$$

откуда

$$A_{n+1} \cap B_{\beta'} = A_n \cap B_{\beta'}, \quad A_{n+1} \cap B_{\beta''} = A_n \cap B_{\beta''}.$$

Правые части этих равенств совпадают, однако, ввиду индуктивного предположения и условий леммы. Если же $\beta_n < \beta'$, то возьмем произвольный элемент x из $A_{n+1} \cap B_{\beta''}$. Для него ввиду (2) существует запись $x = yz$, где

$$y \in A_n, \quad z \in (A_{n+1} \cap B_{\beta'}).$$

Отсюда следует, что

$$y = xz^{-1} \in B_{\beta''},$$

т. е.

$$y \in (A_n \cap B_{\beta''}).$$

По индуктивному предположению

$$A_n \cap B_{\beta''} = A_n \cap B_{\beta'},$$

а поэтому $y \in B_{\beta'}$, откуда

$$x \in (A_{n+1} \cap B_{\beta'}),$$

что и требовалось доказать.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть для данного n индекс $\beta_n + 1$ не существует. В этом случае B_{β_n} будет пересечением всех $B_{\beta'}$, $\beta' > \beta_n$, так как иначе это пересечение можно было бы вставить в систему $\mathfrak{B}$ в противоречие с тем, что она является главной. Если индекс β_k является наименьшим среди тех индексов β_i, $i < n$, которые больше, чем β_n (если такие индексы вообще существуют), то ввиду леммы для всех таких β', что $\beta_n < \beta' < \beta_k$ (или просто для всех таких β', что $\beta_n < \beta'$, если β_k не существует) пересечения $A_{n+1} \cap B_{\beta'}$ равны между собой. Им равно, следовательно, и пересечение A_{n+1} с пересечением всех $B_{\beta'}$, т. е. пересечение $A_{n+1} \cap B_{\beta_n}$. Это приводит, однако, к противоречию с (1) и (2). Теорема доказана.

Как показывают примеры (см. Курош [14]), в формулировке этой теоремы нельзя ни предположить, что $\mathfrak{A}$ является произвольным возрастающим главным рядом, ни заменить главные ряды и системы композиционными. С другой стороны, группы, к которым эта теорема применима, могут обладать главными системами весьма сложного вида. Рассмотрим, например, прямую сумму счетного множества циклических групп второго порядка. Эта группа обладает, очевидно, возрастающим главным рядом, упорядоченным по типу натурального ряда чисел. С другой стороны, пронумеруем прямые слагаемые при помощи рациональных чисел и произведем в системе рациональных чисел всевозможные сечения, относя в случае рационального сечения соответствующее рациональное число ко второму классу. Беря для каждого сечения сумму прямых слагаемых, соответствующих первому классу сечения, и пополняя полученную систему подгрупп, мы придем к главной системе континуальной мощности, упорядоченной по типу совершенного всюду разрывного множества, причем скачки в этой системе будут соответствовать рациональным сечениям. [См. Д.2.5.]

Глава четырнадцатая

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

§ 57. Разрешимые и обобщенные разрешимые группы

Мы переходим к изучению весьма широкого класса групп, к которому принадлежат, в частности, все абелевы группы. Значение этого класса групп исторически определилось его связью с вопросом о разрешимости уравнений в радикалах.

Конечный нормальный или инвариантный ряд группы называется *разрешимым рядом*, если все его факторы абелевы. Группа G называется *разрешимой*, если она удовлетворяет одному из следующих требований, эквивалентность которых будет сейчас доказана:

1) Группа G обладает конечным разрешимым нормальным рядом.

2) Группа G обладает конечным разрешимым инвариантным рядом.

3) Убывающая цепь коммутантов группы G (см. § 14) через конечное число шагов обрывается на единичной подгруппе.

Ясно, что из 2) следует 1). Далее, из 3) следует 2), так как убывающая цепь коммутантов, если она на конечном месте достигает единицы, превращается в *ряд коммутантов*, являющийся конечным разрешимым инвариантным рядом.

Покажем, что из 1) следует 3). Пусть $K^{(i)}$ — i-й коммутант группы G и пусть G обладает конечным разрешимым нормальным рядом

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n = E.$$

Ввиду коммутативности фактор-группы G/H_1 будет $H_1 \supseteq K'$. Пусть уже доказано, что $H_i \supseteq K^{(i)}$. Из коммутативности группы H_i/H_{i+1} следует, что H_{i+1} содержит коммутант группы H_i и, тем более, коммутант группы $K^{(i)}$, т. е. $H_{i+1} \supseteq K^{(i+1)}$. Из $H_n = E$ следует теперь $K^{(n)} = E$.

Так как уплотнение разрешимого ряда само разрешимо, то ввиду теоремы Шрейера *всякий нормальный ряд разрешимой группы может быть уплотнен до разрешимого ряда, а поэтому всякий нормальный делитель разрешимой группы содержится в некотором разрешимом ряду*. Отсюда следует, что *всякая фактор-группа разрешимой группы сама разрешима*. С другой стороны, применяя к случаю разрешимого ряда доказанную в § 16 теорему о том, что если в некоторой группе задан нормальный ряд, то в подгруппе этой группы можно найти нормальный ряд, факторы которого изоморфны

подгруппам факторов заданного ряда, мы получаем, что *всякая подгруппа разрешимой группы сама разрешима*.

Расширение G разрешимой группы A при помощи разрешимой группы B является разрешимой группой.

Действительно, беря разрешимый ряд группы A и дополняя его до нормального ряда группы G при помощи подгрупп, соответствующих подгруппам некоторого разрешимого ряда группы B, мы получим разрешимый ряд группы G.

Отсюда следует, что *всякая группа, обладающая конечным нормальным рядом с разрешимыми факторами, будет разрешимой*. В частности, *прямое произведение конечного числа разрешимых групп само разрешимо*. Для прямого произведения бесконечного множества разрешимых групп соответствующее утверждение уже не имеет места.

Отметим, наконец, что простые неабелевы группы являются простейшими примерами неразрешимых групп.

Конечные разрешимые группы. Если разрешимая группа G *конечна*, то ее разрешимый ряд можно уплотнить до композиционного ряда. *Композиционные факторы конечной разрешимой группы будут простыми абелевыми группами, т. е. циклическими группами простых порядков*. Это свойство конечной разрешимой группы может служить ее определением. Вместе с тем всякая разрешимая группа, обладающая композиционным рядом, будет конечной, так как конечна всякая простая абелева группа.

Конечные разрешимые группы, в отличие от конечных абелевых групп, составляют очень широкий класс групп, полное обозрение которого получить не удается. Больше того, пока остается открытым следующий вопрос, равносильный проблеме Бернсайда о простых конечных группах (см. § 61): не будет ли разрешимой всякая конечная группа нечетного порядка? [1])

Всякая конечная p-группа разрешима при любом простом p.

Действительно, если G есть конечная p-группа, то, как мы уже знаем из § 54, ее центр Z отличен от E. Фактор-группа G/Z снова является конечной p-группой, но уже меньшего порядка. Считая для p-групп, порядок которых меньше порядка группы G, теорему доказанной, мы получаем, что группа G будет расширением абелевой группы Z при помощи разрешимой группы G/Z, т. е. сама разрешима.

Обобщенные разрешимые группы. Понятие разрешимого ряда группы легко обобщается до понятия *разрешимой нормальной* и *разрешимой инвариантной системы*, т. е. нормальной или инвариантной системы с абелевыми факторами. Это позволяет ввести следующие весьма широкие обобщения разрешимых групп.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания эта проблема уже получила решение. [См. предисловие к Дополнению.]

Группа G называется *RN-группой*, если она обладает разрешимой нормальной системой, и *RI-группой*, если она обладает разрешимой инвариантной системой. Вопрос о совпадении этих двух классов групп остается пока открытым [1]).

Другие формы определения разрешимых и конечных разрешимых групп также допускают соответствующее обобщение, причем получающиеся на этом пути классы групп уже перестают быть совпадающими. Класс RN-групп будет при этом самым широким. Мы укажем сейчас эти классы групп и некоторые из их свойств, отсылая за дополнительными деталями к статье Куроша и Черникова [1].

Определение разрешимой группы при помощи ряда коммутантов приводит к понятию *RK-группы*, т. е. группы, убывающая цепь коммутантов которой, продолжаемая, быть может, трансфинитно, доходит до единичной подгруппы. RK-группы принадлежат к числу RI-групп, а поэтому и RN-групп.

Как показано в § 36, свободные группы являются RK-группами, а так как всякая группа представляется как фактор-группа свободной группы, то фактор-группа RK-группы (а также RI- и RN-группы) может уже к соответствующему классу групп не принадлежать. Наоборот, подгруппы RK-, RI- и RN-групп сами обладают соответствующим свойством. Это очевидно для RK-групп, а для RI- и RN-групп вытекает из теоремы о подгруппах, доказанной в предшествующем параграфе.

Соответственно более узкими, чем классы RN- и RI-групп, будут классы $\overline{RN}$*-групп* и $\overline{RI}$*-групп*, т. е. групп, всякая композиционная (соответственно главная) система которых разрешима. *Эти классы групп замкнуты по отношению к взятию фактор-группы.* Так, пусть группа G является $\overline{RI}$-группой и пусть в фактор-группе G/H дана произвольная главная система. Ей соответствует инвариантная система группы G, проходящая через H. Уплотняя последнюю до главной системы, учитывая, что она должна быть разрешимой, и переходя к фактор-группе G/H, мы докажем разрешимость заданной главной системы этой фактор-группы.

Близки к $\overline{RI}$-группам, быть может с ними даже совпадают [2]), группы, изучавшиеся в работе Шмидта [7], а именно группы, любая фактор-группа всякой подгруппы которых является RI-группой.

Укажем, наконец, классы RN^**-групп* и RI^**-групп*, ближайшие к разрешимым группам классы обобщенных разрешимых групп. Это будут группы, обладающие разрешимым возрастающим нормальным рядом и соответственно разрешимым возрастающим инвариантным рядом.

---

[1]) Ко времени подготовки третьего издания этот вопрос уже получил решение. [См. Д.23.1.]

[2]) Ко времени подготовки третьего издания этот вопрос уже получил решение. [См. Д.23.1.]

Классы RN^*- и RI^*-групп замкнуты по отношению к взятию подгруппы, как вытекает из теоремы о подгруппах (см. § 56). *Они замкнуты и по отношению к взятию фактор-группы*. В самом деле, пусть в группе G, обладающей разрешимым возрастающим нормальным (или инвариантным) рядом $\mathfrak{A}$, задан нормальный делитель H. Применяя к ряду $\mathfrak{A}$ и нормальному (даже инвариантному) ряду

$$E \subset H \subset G \tag{1}$$

теорему из § 56 о существовании изоморфных уплотнений, снова являющихся возрастающими нормальными (или инвариантными) рядами, мы уплотним ряд (1) до разрешимого ряда. Отсюда следует существование в фактор-группе G/H разрешимого возрастающего нормального (или инвариантного) ряда.

Всякая RI^*-группа будет $\overline{RI}$-группой. В самом деле, если $\mathfrak{A}$ — разрешимый возрастающий инвариантный ряд группы G, а $\mathfrak{B}$ — произвольная инвариантная система этой группы, то по теореме из § 56 существуют такие инвариантные уплотнения $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$ этих систем, что совокупность факторов системы $\widetilde{\mathfrak{B}}$ будет частью совокупности факторов системы $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Система $\widetilde{\mathfrak{A}}$, как уплотнение разрешимого ряда, разрешима, поэтому разрешима и система $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Отсюда следует, что все главные системы группы G разрешимы.

Аналогичным способом может быть доказано, что *всякая RN^*-группа будет $\overline{RN}$-группой*. Для этих двух классов групп открыт пока вопрос, не будут ли они в действительности совпадать [1]).

§ 58. Локальные теоремы. Локально разрешимые группы

Справедлива следующая локальная теорема Мальцева для обобщенных разрешимых групп (см. Мальцев [3], Курош и Черников [1]).

Всякая группа, локально обладающая свойствами RN, RI, $\overline{RN}$ или $\overline{RI}$, сама будет соответственно RN-группой, RI-группой, $\overline{RN}$-группой или $\overline{RI}$-группой.

Мы будем доказывать отдельно каждое из четырех утверждений теоремы.

Доказательство локальной теоремы для RN-групп. Пусть в группе G задана локальная система подгрупп L и пусть все подгруппы A^α, A^β, ... этой системы являются RN-группами. В каждой подгруппе A^α из L отметим некоторую определенную разрешимую нормальную систему $\mathfrak{E}^\alpha$.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания этот вопрос уже получил решение.

Пусть a и b — два любых элемента группы G. Для каждого такого α, что подгруппа A^α содержит оба этих элемента, в системе $\mathfrak{E}^\alpha$ существует наибольшая подгруппа, не содержащая хотя бы одного из элементов a, b; обозначим эту подгруппу через $C^\alpha_{a,b}$. Если $\overline{C}^\alpha_{a,b}$ будет наименьшая подгруппа системы $\mathfrak{E}^\alpha$, содержащая оба элемента a, b, то подгруппы $C^\alpha_{a,b}$, $\overline{C}^\alpha_{a,b}$ составляют в системе $\mathfrak{E}^\alpha$ скачок с абелевым фактором, а поэтому *коммутатор* $[a, b]$ *заведомо принадлежит к* $C^\alpha_{a,b}$.

Все подгруппы A^α из системы L, содержащие a и b, принадлежат к одному из следующих трех классов: соответствующая подгруппа $C^\alpha_{a,b}$ или содержит a, но не содержит b, или содержит b, но не содержит a, или же не содержит ни a, ни b. *Хотя бы один из этих трех классов будет локальной системой подгрупп группы* G.

Пусть, в самом деле, для каждого из этих трех классов можно указать или такой «противоречащий» элемент группы G, который не содержится ни в одной подгруппе этого класса, или же такую пару «противоречащих» подгрупп, которые сами принадлежат к этому классу, но не содержатся ни в какой третьей подгруппе этого класса. По определению локальной системы подгрупп в L можно найти такую подгруппу A^α, которая содержит как элементы a и b, так и указанные «противоречащие» элементы и подгруппы для всех трех классов. Подгруппа A^α должна, однако, принадлежать к одному из рассматриваемых трех классов, и это приводит нас к противоречию.

Всякую локальную систему подгрупп, полученную этим путем, мы будем называть *связанной с парой элементов* (a, b); таких локальных систем будет одна, две или три [1]).

Возьмем теперь две пары элементов (c, d) и (c', d'). Всякая подгруппа A^α из системы L, содержащая все эти элементы, принадлежит хотя бы к одному из двух классов: или

$$C^\alpha_{c,d} \subseteq C^\alpha_{c',d'},$$

или же

$$C^a_{c,d} \supseteq C^\alpha_{c',d'}.$$

Как и выше, можно показать, что *хотя бы один из этих двух классов будет локальной системой подгрупп группы* G. Это будут локальные системы (одна или две), *связанные с системой пар* (c, d), (c', d').

Назовем *пересечением* нескольких локальных систем систему подгрупп, принадлежащих к каждой из данных локальных систем. Если дано конечное число пар (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, и конечное число систем пар (c_j, d_j), (c'_j, d'_j), $j = 1, 2, \ldots, s$, то *из локальных систем*,

[1]) Ю. И. Мерзляков в письме к редактору третьего издания отметил, что в этом доказательстве локальную систему, связанную с парой элементов (a, b), можно не вводить, заменив ее системой всех подгрупп, содержащих элементы a, b.

связанных с каждой из этих пар и систем пар, можно хотя бы одним способом так выбрать по одной, что их пересечение также будет локальной системой подгрупп группы G.

В самом деле, пусть для каждого из таких пересечений, которых будет лишь конечное число, можно указать «противоречащий» элемент или пару «противоречащих» подгрупп в определенном выше смысле. Выберем также «противоречащие» элементы или пары подгрупп для всех тех классов по каждой из пар (a_i, b_i) и по каждой из систем пар (c_i, d_i), (c_i', d_i'), которые не являются локальными системами, связанными с этими парами или системами пар. В системе L существует, однако, подгруппа A^α, содержащая как все перечисленные в этом абзаце «противоречащие» элементы и подгруппы, так и все элементы заданных пар и систем пар. По каждой из этих пар или систем пар подгруппа A^α будет принадлежать, очевидно, к одной из локальных систем, связанных с этой парой или системой пар, а поэтому будет принадлежать к пересечению всех этих локальных систем. Это противоречит, однако, тому, что подгруппа A^α содержит элемент или пару подгрупп, «противоречащие» указанному пересечению.

Опираясь на этот результат, докажем, что *для всякой пары (a, b) и всякой системы пар (c, d), (c', d') можно так выбрать по одной связанной с ними локальной системе группы G — обозначим их соответственно через $L_{(a,b)}$ и $L_{(c,d),(c',d')}$, — что пересечение любого конечного числа этих локальных систем само будет локальной системой подгрупп группы G.*

Для доказательства будем считать множество $\mathfrak{M}$ всех пар и всех систем пар вполне упорядоченным и будем вести доказательство индукцией по этому множеству. Пусть выбран α-й элемент множества $\mathfrak{M}$ и пусть (при $\alpha > 1$) для всех предшествующих элементов уже так отмечено по одной из связанных с ними локальных систем, что выполняется следующее требование: для любого конечного числа L', L'', …, $L^{(k)}$ отмеченных систем и любого конечного числа элементов множества $\mathfrak{M}$, стоящих, например, на α'-м, α''-м, …, $\alpha^{(l)}$-м местах, можно так выбрать для этих последних элементов связанные с ними локальные системы $L_0^{(\alpha')}$, $L_0^{(\alpha'')}$, …, $L_0^{(\alpha^{(l)})}$, что пересечение локальных систем

$$L', L'', \ldots, L^{(k)}, L_0^{(\alpha')}, L_0^{(\alpha'')}, \ldots, L_0^{(\alpha^{(l)})}$$

само будет локальной системой подгрупп группы G. Тогда и для α-го элемента $\mathfrak{M}$ можно так отметить одну из конечного числа связанных с ним локальных систем, что указанное сейчас свойство отмеченных локальных систем будет сохраняться. В самом деле, если для каждой локальной системы, связанной с α-м элементом, можно указать «противоречащий» конечный набор отмеченных локальных систем и элементов из $\mathfrak{M}$, то, беря объединение всех этих наборов и добавляя сам α-й элемент, мы придем в противоречие с индуктивным предположением.

Множество всех локальных систем $L_{(a,b)}$ и $L_{(c,d),(c',d')}$ будет обозначаться дальше через $\mathfrak{S}$.

Теперь мы переходим к конструированию разрешимой нормальной системы группы G. Выберем произвольную пару элементов (a, b) и следующим образом определим подгруппу $H_{a,b}$ группы G:

1. Берем пересечение локальной системы $L_{(a,b)}$ и любого конечного множества других локальных систем из множества $\mathfrak{S}$; это будет, как мы знаем, локальная система.

2. Берем пересечение подгрупп $C^{\alpha}_{a,b}$, взятых для всех тех A^{α}, которые принадлежат к локальной системе, построенной в 1-м пункте.

3. Берем объединение всех пересечений, указанных во 2-м пункте, полученных при фиксированной паре (a, b), но различных локальных системах, построенных в 1-м пункте, и обозначаем это объединение через $H_{a,b}$.

$H_{a,b}$ действительно будет подгруппой, так как любые два таких пересечения, о которых сказано во 2-м пункте, содержатся в некотором третьем пересечении этого же вида.

Подгруппа $H_{a,b}$ или содержит лишь один из элементов a, b, или же не содержит ни одного из них; *она всегда содержит*, *однако*, *коммутатор $[a, b]$ этих элементов*. Действительно, именно этим свойством обладают подгруппы $C^{\alpha}_{a,b}$, взятые для всех A^{α}, принадлежащих к локальной системе $L_{(a,b)}$.

Множество $\mathfrak{H}$ подгрупп $H_{a,b}$, построенных для всех пар (a, b), упорядочено по теоретико-множественному включению. Действительно, возьмем подгруппы $H_{a,b}$ и $H_{c,d}$. По определению локальной системы $L_{(a,b),(c,d)}$, для всех подгрупп A^{α}, входящих в эту систему, будет иметь место лишь одно из двух возможных включений, $C^{\alpha}_{a,b} \subseteq C^{\alpha}_{c,d}$ или $C^{\alpha}_{a,b} \supseteq C^{\alpha}_{c,d}$; пусть имеет место первое. Так как, однако, пересечение, о котором говорилось во 2-м пункте определения подгруппы $H_{a,b}$, может лишь увеличиться, если к локальным системам, о которых говорилось в 1-м пункте, добавить еще систему $L_{(a,b),(c,d)}$, то мы получаем, что

$$H_{a,b} \subseteq H_{c,d}.$$

Удаляя из упорядоченной системы подгрупп $\mathfrak{H}$ все повторения и пополняя ее объединениями и пересечениями всех ее подмножеств, мы получим полную упорядоченную систему подгрупп $\overline{\mathfrak{H}}$.

К системе $\overline{\mathfrak{H}}$ принадлежит подгруппа E. В самом деле, если a — отличный от единицы элемент группы G, то подгруппа $H_{1,a}$, заведомо содержащая единицу, не будет содержать a. Пересечение всех подгрупп системы $\mathfrak{H}$ равно, таким образом, E.

Нельзя доказать, однако, что к системе $\overline{\mathfrak{H}}$ принадлежит сама группа G, так как объединение G' всех подгрупп системы $\mathfrak{H}$ может быть отличным от G. Тем не менее, если мы возьмем два любых элемента a, b группы G, то, как мы знаем, коммутатор $[a, b]$ этих элементов принадлежит к подгруппе $H_{a,b}$, а поэтому и к G'. Для доказательства

теоремы остается, следовательно, лишь показать, что *полная система $\overline{\mathfrak{H}}$ является разрешимой нормальной системой группы G'.*

Система $\overline{\mathfrak{H}}$ является нормальной. В самом деле, возьмем в этой системе произвольный скачок $\overline{H}_\beta$, $\overline{H}_{\beta+1}$. Если элементы a и b таковы, что

$$a \in \overline{H}_\beta, \quad b \in \overline{H}_{\beta+1}, \quad b \notin \overline{H}_\beta,$$

то $H_{a,b} \subseteq \overline{H}_\beta$, так как в противном случае подгруппа $H_{a,b}$, как принадлежащая к $\overline{\mathfrak{H}}$, содержала бы подгруппу $\overline{H}_{\beta+1}$, т. е. содержала бы оба элемента a, b. Так как, однако, коммутатор $[a, b]$ содержится в $H_{a,b}$, то он принадлежит к $\overline{H}_\beta$, а поэтому ввиду $a \in \overline{H}_\beta$ в подгруппу $\overline{H}_\beta$ входит и элемент $b^{-1}ab$. Этим доказано, что $\overline{H}_\beta$ является нормальным делителем в $\overline{H}_{\beta+1}$.

Система $\overline{\mathfrak{H}}$ является разрешимой. В самом деле, пусть в этой системе существует скачок $\overline{H}_\beta$, $\overline{H}_{\beta+1}$ с неабелевым фактором. Это означает, что в подгруппе $\overline{H}_{\beta+1}$ можно найти такие элементы a, b, что и они сами, и их коммутатор $[a, b]$ лежат вне $\overline{H}_\beta$. Это невозможно, однако, так как подгруппа $H_{a,b}$ содержит элемент $[a, b]$ и вместе с тем не может содержать оба элемента a, b, т. е. сама содержится в $\overline{H}_\beta$, откуда $[a, b] \in \overline{H}_\beta$. Теорема доказана.

Доказательство локальной теоремы для RI-групп проводится этим же методом. Нужно лишь доказать, что *всякая подгруппа $H_{a,b}$ будет нормальным делителем в G.*

Пусть c — произвольный элемент подгруппы $H_{a,b}$, d — произвольный элемент группы G. Определение подгруппы $H_{a,b}$ показывает, что элемент c содержится в пересечении подгрупп $C^\alpha_{a,b}$, взятых для всех A^α, составляющих пересечение локальной системы $L_{(a,b)}$ с некоторым конечным числом других локальных систем из множества $\mathfrak{S}$. При этом можно считать, как мы знаем, что к числу этих локальных систем принадлежит и система $L_{(a,b),(c,d)}$. Все указанные подгруппы A^α содержат поэтому элемент d, а так как $C^\alpha_{a,b}$ является теперь нормальным делителем в A^α, то все рассматриваемые подгруппы $C^\alpha_{a,b}$ и, следовательно, их пересечение содержат элемент $d^{-1}cd$. Этот элемент принадлежит, таким образом, к подгруппе $H_{a,b}$, что и требовалось доказать.

Доказательство локальной теоремы для $\overline{RI}$-групп. Пусть в группе G задана локальная система подгрупп L и пусть все подгруппы A^α этой системы являются $\overline{RI}$-группами. Для доказательства теоремы достаточно, ввиду уплотняемости всякой инвариантной системы до главной системы, доказать следующее:

Если в нашей группе G даны нормальные делители B_1 и B_2, причем B_1 содержится в B_2 и фактор-группа B_2/B_1 некоммутативна, то между B_1 и B_2 содержится отличный от них нормальный делитель C группы G.

Из некоммутативности фактор-группы B_2/B_1 следует существование в B_2 таких двух элементов x и y, что подгруппа B_1 не содержит ни самих этих элементов, ни их коммутатора $[x, y]$. Если A^α будет произвольной подгруппой, содержащей x и y, из локальной системы L, то пересечения

$$B_1^\alpha = A^a \cap B_1, \quad B_2^\alpha = A^\alpha \cap B_2$$

будут нормальными делителями в A^α, причем B_1^α содержится в B_2^α и отлично от него, так как элементы x, y и $[x, y]$ принадлежат к B_2^α, но не принадлежат к B_1^α.

Так как A^α является $\overline{RI}$-группой, то ее инвариантную систему

$$E \subseteq B_1^\alpha \subset B_2^\alpha \subseteq A^\alpha$$

можно уплотнить до разрешимой главной системы. Выбираем одно из таких уплотнений. В нем найдется такой скачок C^α, $\overline{C}^\alpha$, что $\overline{C}^\alpha$ содержит оба элемента x и y, а C^α не содержит хотя бы одного из них, хотя и содержит коммутатор $[x, y]$ ввиду коммутативности фактор-группы $\overline{C}^\alpha/C^\alpha$. Таким образом,

$$B_1^\alpha \subset C^\alpha \subset \overline{C}^\alpha \subseteq B_2^\alpha.$$

Будем считать, что нормальный делитель C^α построен указанным способом в каждой подгруппе A^α, содержащей элементы x и y, из локальной системы L. Тогда все эти подгруппы A^α распределяются по следующим трем классам: соответствующий нормальный делитель C^α или содержит x, но не содержит y, или содержит y, но не содержит x, или же не содержит ни x, ни y. Как и в доказательстве предшествующих теорем, можно показать, что *хотя бы один из этих трех классов будет локальной системой подгрупп группы G*. Выбираем одну из этих локальных систем, обозначаем ее через L' и в дальнейшем используем лишь подгруппы A^α, принадлежащие к L'.

Обозначим через C множество всех таких элементов z группы G, которые обладают следующим свойством: в локальной системе L' найдется такая подгруппа A^α, что для всякой подгруппы $A^{\alpha'}$ из L', содержащей A^α, элемент z принадлежит к нормальному делителю $C^{\alpha'}$.

Множество C будет подгруппой группы G. В самом деле, если к множеству C принадлежат элементы z_1 и z_2, то в локальной системе L' берем такие подгруппы A^{α_1} и A^{α_2}, что элемент z_i, $i = 1, 2$, содержится в C^α для всякой подгруппы A^α, содержащей подгруппу A^{α_i}. В L' существует, однако, подгруппа A^{α_3}, содержащая обе подгруппы A^{α_1}, A^{α_2}. Для всякой подгруппы A^α из L', содержащей A^{α_3}, нормальный делитель C^α содержит, таким образом, оба элемента z_1, z_2, а поэтому и их произведение, и обратный элемент для каждого из них.

Подгруппа C будет нормальным делителем группы G. Пусть, в самом деле, $z \in C$, $g \in G$. Если подгруппа A^α из L' такова, что для всякой подгруппы $A^{\alpha'}$, содержащей A^α, элемент z принадлежит к $C^{\alpha'}$,

и если A^{α_1} будет подгруппа из L', содержащая A^α и элемент g, то для всякой подгруппы $A^{\alpha_1'}$, содержащей A^{α_1}, ее нормальный делитель $C^{\alpha_1'}$ будет содержать не только z, но и $g^{-1}zg$, а поэтому $g^{-1}zg \in C$.

Нормальный делитель C расположен между B_1 и B_2. Действительно, если элемент b принадлежит к B_1 и если он содержится в подгруппе A^α из локальной системы L', а поэтому и во всех подгруппах $A^{\alpha'}$, содержащих A^α, то он будет принадлежать для всех этих α' к $B_1^{\alpha'}$ и, следовательно, к $C^{\alpha'}$. Этим доказано, что $b \in C$. С другой стороны, если элемент z принадлежит к C, то существует такая подгруппа A^α, что $z \in C^\alpha \subset B_2^\alpha$, т. е. $z \in B_2$.

Нормальный делитель C отличен от B_1 и B_2. Для доказательства нужно рассмотреть отдельно каждый из трех случаев, которые могут представиться при выборе локальной системы L'. Если эта система составлена из подгрупп A^α первого класса, т. е. таких, что соответствующий нормальный делитель C^α содержит элемент x, но не содержит элемент y, то и нормальный делитель C содержит x и этим отличается от B_1, но не содержит y и этим отличается от B_2. Аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда локальная система L' состоит из подгрупп A^α второго класса. Если же L' состоит из подгрупп A^α третьего класса, т. е. таких, что соответствующее C^α не содержит ни x, ни y, но содержит коммутатор $[x, y]$, то и нормальный делитель C не будет содержать ни одного из элементов x, y и этим отличается от B_2, но содержит $[x, y]$ и этим отличается от B_1. Теорема доказана.

Доказательство локальной теоремы для $\overline{RN}$-групп требует комбинирования методов, использованных в доказательствах предшествующих теорем, и мы его опускаем.

Вопрос о справедливости локальной теоремы для RN^*-групп остается открытым [1]). С другой стороны, *локальные теоремы не могут быть доказаны для RI^*-групп и RK-групп*, как показывают примеры локально конечных p-групп, не содержащих абелевых нормальных делителей (Шмидт [7]) и локально конечных p-групп, совпадающих со своим коммутантом (Адо [1], Шмидт [7]).

Локальная теорема не имеет места, понятно, и для разрешимых групп. Это приводит к следующему важному классу обобщенных разрешимых групп: группа G называется *локально разрешимой*, если она обладает локальной системой из разрешимых подгрупп. Так как всякая подгруппа разрешимой группы сама разрешима, то это равносильно тому, что всякая подгруппа группы G, порождаемая конечным числом элементов, разрешима [2]).

[1]) Ко времени подготовки третьего издания этот вопрос уже получил решение. [См. Д.23.1.]

[2]) В определении локально разрешимых групп не предполагается их локальная конечность.

Очевидно, что *локально разрешимые группы принадлежат ко всякому классу обобщенных разрешимых групп, для которого справедлива локальная теорема*. Вообще, классы RN^*-, $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-групп и локально разрешимых групп, а также групп, изучавшихся в работе Шмидта [7], весьма близки друг к другу, и было бы интересно точно выяснить отношения, существующие между ними. [См. § Д.23.]

§ 59. Наложение условий конечности

Между изучавшимися выше классами обобщенных разрешимых групп появляются новые связи, если дополнительно будет предположено, что эти группы удовлетворяют тем или иным условиям конечности (см. § 53). Отметим некоторые результаты этого рода.

При условии локальной конечности все классы обобщенных разрешимых групп, для которых справедлива локальная теорема, совпадают с локально разрешимыми группами и, следовательно, совпадают друг с другом.

Действительно, если G — локально конечная RN-группа, то все ее конечные подгруппы разрешимы, а поэтому она локально разрешима.

Заметим, что проблема Бернсайда о периодических группах для RN-групп еще не решена. Доказана лишь следующая т е о р е м а (Черников [4], Бэр [24]; для доказателиства см. Шмидт [7]).

Всякая периодическая RN^*-группа локально конечна.

Эта теорема непосредственно вытекает из того, что периодическая абелева группа локально конечна, что расширение локально конечной группы при помощи локально конечной же группы само локально конечно (см. § 53) и что объединение возрастающей последовательности локально конечных групп само локально конечно.

Из этой теоремы следует *локальная конечность всякой периодической разрешимой группы*, а поэтому и *локальная конечность любой периодической локально разрешимой группы.*

Докажем, далее, т е о р е м у (Черников [7]):

Всякая RI-группа (*в частности, всякая разрешимая группа*), *имеющая конечное число классов сопряженных элементов, конечна.*

Действительно, никакая группа с конечным числом классов сопряженных элементов не может обладать, очевидно, бесконечной инвариантной системой, а поэтому рассматриваемая нами RI-группа G будет разрешимой. Пусть

$$E \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k = G \tag{1}$$

будет произвольный разрешимый нормальный ряд группы G. Фактор G/H_{k-1}, как фактор-группа группы с конечным числом классов сопряженных элементов, сам обладает конечным числом классов сопряженных элементов. Являясь вместе с тем абелевой, *группа G/H_{k-1} будет просто конечной.*

Докажем, что *группа H_{k-1} обладает конечным числом классов сопряженных элементов*. Если это не так, то в H_{k-1} можно найти бесконечное множество элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

которые попарно не сопряжены в группе H_{k-1}, но все сопряжены друг с другом в группе G, т. е. лежат в одном классе. Существуют, следовательно, в G такие элементы x_i, что

$$x_i^{-1} a_i x_i = a_1, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Так как фактор-группа G/H_{k-1} конечна, то найдутся такие индексы i и j, что $i \neq j$, но

$$x_i H_{k-1} = x_j H_{k-1},$$

откуда

$$x_j = x_i h_{k-1}, \quad h_{k-1} \in H_{k-1}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает

$$a_i = (x_i h_{k-1} x_i^{-1})^{-1} a_j (x_i h_{k-1} x_i^{-1}),$$

а так как элемент $x_i h_{k-1} x_i^{-1}$ лежит в нормальном делителе H_{k-1}, то элементы a_i и a_j оказываются сопряженными в H_{k-1} против предположения.

Теперь может быть доказана конечность фактора H_{k-1}/H_{k-2} и, продолжая так далее, конечность всех факторов ряда (1). Отсюда вытекает конечность группы G. Теорема доказана.

Следующая теорема Черникова [4, 5] о разрешимых группах с условием минимальности для подгрупп исчерпывающим образом сводит описание этих групп на описание конечных разрешимых групп.

Всякая RN-группа с условием минимальности для подгрупп является разрешимой группой. Группа G тогда и только тогда будет разрешимой группой с условием минимальности для подгрупп, если она является расширением полной абелевой группы с условием минимальности при помощи конечной разрешимой группы.

Доказательство (см. Шмидт [7]). Пусть дана RN-группа G с условием минимальности для подгрупп. Ввиду условия минимальности всякая разрешимая нормальная система группы G должна быть вполне упорядоченной по возрастанию, т. е. G будет RN^*-группой. С другой стороны, из условия минимальности следует периодичность группы G, а поэтому, как периодическая RN^*-группа, G будет даже локально конечной. Выше показано, однако, что в локально конечном случае всякая RN-группа будет RI-группой, поэтому G будет RI-группой и, следовательно, снова ввиду условия минимальности, даже RI^*-группой.

В группе G ввиду условия минимальности существует минимальная подгруппа конечного индекса F, уже не содержащая подгрупп конечного индекса. F будет единственной подгруппой этого рода, так как пересечение двух подгрупп конечного индекса само имеет конечный индекс. Следовательно, F будет нормальным делителем в G. Докажем, что *центр Z группы F отличен от E*.

Группа F как подгруппа RI^*-группы сама будет RI^*-группой и поэтому обладает отличным от E абелевым нормальным делителем A. Как вытекает из описания абелевых групп с условием минимальности, данного в § 53, в A будет содержаться лишь конечное число элементов любого данного порядка, а поэтому, так как A — нормальный делитель, нормализатор в F всякого элемента из A будет иметь в F конечный индекс, т. е. должен с F совпадать. Отсюда следует, что A лежит в центре группы F, т. е. $A \subseteq Z$, а поэтому $Z \neq E$.

Покажем теперь, что Z *совпадает с* F. Действительно, пусть $Z \neq F$. Тогда F/Z, как фактор-группа RI^*-группы, сама будет RI^*-группой. Она удовлетворяет, далее, условию минимальности и, как и F, не содержит истинных подгрупп конечного индекса. К группе F/Z применимы, следовательно, рассмотрения предшествующего абзаца, т. е. эта группа должна обладать нетривиальным центром Z'/Z, $Z' \neq Z$. Если z' будет любой элемент из Z', то всякий элемент z'', сопряженный с z' в группе F, будет содержаться в смежном классе $z'Z$, т. е. будет иметь вид

$$z'' = z'z, \quad z \in Z.$$

Так как элементы z' и z'' имеют один и тот же порядок, а

$$zz' = z'z,$$

то порядок элемента z должен быть делителем порядка z'. Таких элементов z в абелевой группе Z с условием минимальности будет лишь конечное число, т. е. элемент z' имеет в группе F лишь конечное число сопряженных элементов. Отсюда следует, что нормализатор элемента z' в F будет иметь в F конечный индекс, а поэтому с F совпадает, т. е. $z' \in Z$. Это противоречие с неравенством $Z' \neq Z$ доказывает справедливость равенства $Z = F$.

Таким образом, F оказалось абелевым нормальным делителем группы G. Как абелева группа с условием минимальности, не содержащая истинных подгрупп конечного индекса, группа F будет полной, т. е., по § 53, разлагается в прямое произведение конечного числа групп типа p^∞ по некоторым простым p.

Далее, фактор-группа G/F конечна и одновременно будет RI^*-группой, т. е. является конечной разрешимой группой. Поэтому группа G, как расширение абелевой группы при помощи разрешимой группы, сама разрешима.

Для окончания доказательства отметим, что расширение любой абелевой группы с условием минимальности при помощи конечной

разрешимой группы само и разрешимо, и (см. § 53) удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Из теоремы Черникова следует, в частности, что *всякая разрешимая группа с условием минимальности для подгрупп счетна*.

Отметим следующее очевидное утверждение: *разрешимая группа тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, если все факторы ее разрешимых нормальных рядов являются абелевыми группами с условием минимальности*.

Отметим, далее (см. Шмидт [7], Черников [21]), что для периодических разрешимых групп и для некоторых более общих классов групп из условия минимальности для абелевых подгрупп вытекает условие минимальности для всех подгрупп. С другой стороны (см. Чарин [1]), для периодических разрешимых групп из условия минимальности для нормальных делителей не вытекает условие минимальности для всех подгрупп.

Для разрешимых групп с условием максимальности для подгрупп получены пока менее законченные результаты. Изучению этих групп посвящены работы Гирша [1, 2, 4] и Цаппы [2, 4]. В работе Мальцева [10] показано, что для разрешимых групп из условия максимальности для абелевых подгрупп вытекает условие максимальности для всех подгрупп. Отметим следующий результат (Гирш [1]).

Если разрешимая группа G обладает разрешимым нормальным рядом, все факторы которого являются абелевыми группами с конечным числом образующих, то в G выполняется условие максимальности для подгрупп. Обратно, если в группе G выполняется условие максимальности для подгрупп, то все факторы всех разрешимых нормальных рядов этой группы обладают конечным числом образующих, т. е. эти ряды могут быть уплотнены до нормальных рядов с циклическими факторами.

В самом деле, пусть каждый из факторов разрешимого ряда

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = E \tag{4}$$

группы G обладает конечным числом образующих. Докажем прежде всего, что *G есть группа с конечным числом образующих*. Это утверждение верно для группы $G_{n-1} = G_{n-1}/E$. Если конечность числа образующих уже доказана для G_i, то для G_{i-1} она доказывается следующим образом: в фактор-группе G_{i-1}/G_i берем конечную систему образующих и в каждом из составляющих ее смежных классов по G_i выбираем по представителю. Полученная конечная система элементов порождает вместе с системой образующих группы G_i всю группу G_{i-1}. Этим доказано, что все группы G_i, в том числе и $G_0 = G$, обладают конечным числом образующих.

Если теперь U есть произвольная подгруппа группы G, то U обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны подгруппам некоторых из факторов ряда (4), т. е. ввиду § 20 снова будут абелевыми

группами с конечным числом образующих. Отсюда следует конечность числа образующих и во всякой подгруппе группы G, т. е. следует ввиду сказанного в § 53 обрыв возрастающих цепочек подгрупп.

Обратное утверждение очевидно: из обрыва возрастающих цепочек подгрупп разрешимой группы следует конечность числа образующих во всех подгруппах этой группы, а поэтому и во всех фактор-группах последних, в том числе и во всех факторах любого разрешимого ряда. Каждый из этих факторов обладает, следовательно, конечным нормальным рядом с циклическими факторами. Отсюда вытекает последнее утверждение теоремы.

Этот результат и отмеченный выше аналогичный результат для разрешимых групп с условием минимальности указывает на целесообразность изучения специальных классов разрешимых групп, определяемых теми или иными ограничениями, накладываемыми на факторы разрешимых рядов этих групп. Так, Мальцев [10] получил ряд результатов, относящихся к разрешимым группам, все факторы разрешимых рядов которых являются абелевыми группами конечного ранга, и к некоторым более узким классам разрешимых групп; см. также Смирнов [1]. [См. Д.23.4 и Д.24.]

§ 60. Силовские П-подгруппы разрешимых групп

Пусть дана конечная группа G порядка n и пусть число n разложено в произведение двух взаимно простых множителей,

$$n = kl, \quad (k, l) = 1.$$

Обозначим через П множество всех тех простых чисел, на которые делится число k. Ясно, что порядок всякой силовской П-подгруппы группы G будет делителем числа k. Он не обязан, однако, совпадать с k и группа G может вообще не содержать подгрупп порядка k. Как мы узнаем ниже, в случае конечной разрешимой группы положение иное — *все силовские* П*-подгруппы конечной разрешимой группы имеют порядок k и все они даже сопряжены между собой*.

Мы хотим доказать сперва следующую теорему Холла (см. Ф. Холл [1]; другие доказательства — в книге Цасенхауза [2] и в работах Орэ [9] и Гохина [1]).

Если k — делитель порядка n конечной разрешимой группы G и если

$$n = kl, \quad (k, l) = 1, \tag{1}$$

то группа G обладает подгруппами порядка k и все эти подгруппы сопряжены между собой [1]).

[1]) Как показали Ф. Холл [4] и Чунихин [1], справедливо и обратное утверждение, даже в следующей форме: *если конечная группа G обладает подгруппами порядка k для всех таких делителей k своего порядка n,*

Приведем формулировку еще одной теоремы Холла. Введем сперва следующее определение.

Пусть П — множество некоторых (не обязательно всех) простых чисел, входящих в порядок n конечной группы G. *Силовской* П*-базой* $\mathfrak{S}$ группы G называется набор силовских p-подгрупп P_p группы G, по одной для каждого p из П, если выполняется следующее условие: если

$$P_{p_1}, P_{p_2}, \ldots, P_{p_r}$$

— некоторые из подгрупп, входящих в $\mathfrak{S}$, то порядок всякого элемента, принадлежащего к порожденной ими подгруппе

$$\{P_{p_1}, P_{p_2}, \ldots, P_{p_r}\},$$

является произведением неотрицательных степеней простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Если множество П состоит из в с е х простых делителей порядка n группы G, то силовская П-база группы G называется *полной силовской базой* этой группы. Подгруппы, составляющие полную силовскую базу, порождают вместе всю группу G.

Две силовские П-базы $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ группы G называются *сопряженными*, если в G существует элемент, трансформирование которым всех подгрупп базы $\mathfrak{S}_1$ превращает их в соответствующие подгруппы базы $\mathfrak{S}_2$.

Если П — произвольное множество простых чисел, а Π_0 — его подмножество, состоящее из всех тех простых чисел из П, которые входят в порядок конечной группы G, то под силовской П-базой группы G мы будем понимать ее силовскую Π_0-базу.

Справедлива следующая т е о р е м а Ф. Х о л л а [6].

Всякая конечная разрешимая группа обладает полными силовскими базами и все эти базы между собою сопряжены [1]).

Мы будем выводить обе теоремы Холла из некоторых более общих теорем. Пусть П — произвольное непустое множество простых чисел. Следуя С. А. Чунихину, назовем конечную группу G П-*отделимой*, если она обладает нормальным рядом, порядок каждого фактора которого делится не более чем на одно простое число из П. Если, в частности, П состоит из всех простых чисел или хотя бы из всех тех простых чисел, которые входят в порядок группы G, то П-отделимая

что справедливо (1) *и соответствующие дополнения l являются степенями простых чисел, то группа G разрешимая.*

Доказательство этого утверждения опирается на следующую т е о р е м у Б е р н с а й д а, являющуюся его частным случаем: *всякая конечная группа, порядок которой делится лишь на два различных простых числа, разрешима.* Доказательство этой, последней теоремы использует методы, выходящие за рамки нашей книги, а именно теорию характеров конечных групп.

[1]) Холл доказал также следующее обратное утверждение: *если конечная группа обладает полной силовской базой, то она разрешима.*

группа G будет разрешимой группой, так как она будет обладать нормальным рядом, все факторы которого являются p-группами. Обратно, всякая разрешимая группа при таком выборе Π будет Π-отделимой группой. Если же имеет место второй крайний случай, когда Π состоит лишь из одного простого числа, то всякая конечная группа G будет Π-отделимой.

Из теоремы о подгруппах, доказанной в § 16, вытекает, что *всякая подгруппа* Π-*отделимой группы сама будет* Π-*отделимой*.

Справедлива следующая теорема Чунихина [4, 6].

Если k *— такой делитель порядка* n *конечной* Π-*отделимой группы* G, *что*

$$n = kl, \quad (k, l) = 1,$$

причем все простые делители числа k *входят в* Π, *то* G *обладает подгруппами порядка* k, *причем все эти подгруппы сопряжены в* G.

Если множество Π состоит из всех простых чисел, то эта теорема превращается в первую из указанных выше теорем Холла, а при Π, состоящем из одного простого числа p — в основные утверждения теорем Силова, доказанных в § 54.

Мы будем доказывать, впрочем, еще более общую теорему Гольберга [3].

Если G *— конечная* Π-*отделимая группа, а* Π' *— любое подмножество множества* Π, *то группа* G *обладает силовскими* Π'-*базами и все эти базы сопряжены между собой*.

Эта теорема превращается во вторую из указанных выше теорем Холла, если множество Π состоит из всех простых делителей порядка группы G и $\Pi' = \Pi$. Покажем, что *из нее вытекает и теорема Чунихина*.

Пусть число k таково, как указано в теореме Чунихина. Если Π' — множество всех простых делителей числа k, то, по теореме Гольберга, группа G обладает силовской Π'-базой $\mathfrak{S}'$. Подгруппа A группы G, порожденная всеми подгруппами базы $\mathfrak{S}'$, имеет порядок k: этот порядок делится, очевидно, на k, но порядок всякого элемента из подгруппы A сам является делителем числа k. Если теперь A_1 и A_2 — любые две подгруппы порядка k Π-отделимой группы G, то они Π'-отделимы (см. теорему о подгруппах из § 16) и поэтому разрешимы. По второй теореме Холла, вытекающей, как сказано выше, из теоремы Гольберга, подгруппы A_1 и A_2 обладают полными силовскими базами $\mathfrak{S}'_1$ и $\mathfrak{S}'_2$. Для группы G это будут силовские Π'-базы, по теореме Гольберга они сопряжены, а поэтому сопряжены и порождаемые ими подгруппы A_1 и A_2.

Доказательство теоремы Гольберга. Без ограничения общности будем считать, что все простые числа из множества Π делят порядок конечной Π-отделимой группы G, и будем доказывать теорему индукцией по порядку группы. Пусть подмножество Π' состоит из простых чисел

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \quad k \geqslant 1.$$

Если $k = 1$, то все утверждения теоремы следуют из теорем Силова, поэтому полагаем $k > 1$.

В этом случае Π содержит не менее двух простых чисел и поэтому, как показывает определение Π-отделимой группы, в G существует нетривиальный нормальный делитель H, индекс которого в G делится не более чем на одно простое число из Π. Если этот индекс не делится ни на одно простое число из Π', то силовская Π'-база группы H, существующая по индуктивному предположению, будет силовской Π'-базой и для группы G. С другой стороны, всякая силовская Π'-база группы G будет содержаться в H, а поэтому, снова по индуктивному предположению, все эти базы в H сопряжены.

Пусть, однако, индекс нормального делителя H в G делится на число p_1 из Π'. Положим, что $p_1^{\alpha_1}$ и $p_1^{\alpha_1'}$ будут наивысшие степени числа p_1, входящие соответственно в порядки групп G и H:

$$\alpha_1 > \alpha_1' \geqslant 0.$$

Группа H обладает, по предположению, силовской Π'-базой

$$P_1', P_2, \ldots, P_k, \tag{2}$$

где P_i, $i = 2, 3, \ldots, k$, является силовской p_i-подгруппой группы G, а P_1' имеет порядок $p_1^{\alpha_1'}$. Обозначим через $N(G)$ и $N(H)$ нормализаторы теоретико-множественного объединения подгрупп (2) соответственно в G и в H. Так как H — нормальный делитель группы G, а все силовские Π'-базы группы H сопряжены между собой, то индексы этих нормализаторов соответственно в G и в H должны совпадать; пусть они делятся на p_1^{β}, $\beta \geqslant 0$.

Пересечение $P_1' \cap N(H)$ будет силовской p_1-подгруппой в $N(H)$ — иначе P_1' не было бы силовской p_1-подгруппой в H — и поэтому имеет порядок $p_1^{\alpha_1'-\beta}$. Дополняем это пересечение до силовской p_1-подгруппы P_1'' группы $N(G)$; она имеет порядок $p_1^{\alpha_1-\beta}$. Так как

$$P_1'P_1'' = P_1''P_1',$$

то подгруппа $P_1 = P_1'P_1''$ будет p_1-подгруппой. Ее порядок равен

$$p_1^{\alpha_1'+(\alpha_1-\beta)-(\alpha_1'-\beta)} = p_1^{\alpha_1},$$

т. е. это силовская p_1-подгруппа группы G. Так как, наконец, $P_iP_1'' = P_1''P_i$, $i = 2, 3, \ldots, k$, то система подгрупп

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \tag{3}$$

будет силовской Π'-базой группы G.

Пусть теперь в G даны две силовские Π'-базы, (3) и

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k. \tag{4}$$

Пересечения $P_1 \cap H$ и $Q_1 \cap H$ будут силовскими p_1-подгруппами в группе H, поэтому

$$P_1 \cap H, P_2, \ldots, P_k; \quad Q_1 \cap H, Q_2, \ldots, Q_k$$

являются, как легко проверить, силовскими Π'-базами в H. Они, по предположению, в H сопряжены. Пусть вторая из этих баз переводится в первую трансформированием элементом x. Тогда трансформирование этим элементом базы (4) превращает ее в силовскую Π'-базу группы G

$$R_1 = x^{-1}Q_1x, P_2, \ldots, P_k. \tag{5}$$

Нам остается доказать сопряженность баз (3) и (5).

Пусть

$$A = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}, \quad B = \{R_1, P_2, \ldots, P_k\}.$$

Из

$$x^{-1}(Q_1 \cap H)x = P_1 \cap H$$

следует

$$R_1 \cap H = P_1 \cap H,$$

а так как $P_i \subset H$, $i = 2, 3, \ldots, k$, то и

$$A \cap H = B \cap H.$$

Обозначим это пересечение через H'; оно будет нормальным делителем и в A, и в B, а поэтому и в $\{A, B\}$. Силовские p_1-подгруппы P_1 и R_1 сопряжены в $\{A, B\}$, поэтому сопряжены и подгруппы $A = \{H', P_1\}$ и $B = \{H', R_1\}$. Таким образом, база (5) трансформированием переводится в некоторую силовскую Π'-базу группы A, которая, однако, будет сопряжена с базой (3), если только A является истинной подгруппой группы G.

Пусть, однако, $A = G$, а тогда и $B = G$. Это возможно, конечно, лишь в том случае, если $\Pi' = \Pi$, а Π состоит из всех простых делителей порядка группы G. Положим при $i = 2, 3, \ldots, k$:

$$A_i = \{P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k\},$$
$$B_i = \{R_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k\}.$$

По доказанному выше подгруппы A_i и B_i сопряжены в G. Так как теперь $G = B = B_iP_i$, то в P_i можно найти такой элемент x_i:

$$x_i \in P_i, \tag{6}$$

что

$$x_i^{-1}B_ix_i = A_i. \tag{7}$$

Покажем, что при любом j, $j = 2, 3, \ldots, k$, $j \neq i$,

$$x_i^{-1}P_jx_i = P_j. \tag{8}$$

Действительно, по (6)

$$x_i^{-1}P_jx_i \subset \{P_i, P_j\}$$

и по (7)

$$x_i^{-1}P_jx_i \subset A_i.$$

Поэтому

$$x_i^{-1}P_jx_i \subseteq \{P_i, P_j\} \cap A_i = P_j$$

— учесть определение силовской базы! Отсюда следует (8).

Элемент

$$x = x_2x_3 \dots x_k$$

переводит базу (5) *в базу* (3). Действительно, из (6) и (8) вытекает, что

$$x^{-1}P_ix = P_i, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

С другой стороны, (6) и (7) дают при $i = 2, 3, \dots, k$:

$$x^{-1}R_1x = (x_{i+1} \dots x_k)^{-1}x_i^{-1}(x_2 \dots x_{i-1})^{-1}R_1(x_2 \dots x_{i-1})x_i(x_{i+1} \dots x_k) \subset$$
$$\subset (x_{i+1} \dots x_k)^{-1}x_i^{-1}B_ix_i(x_{i+1} \dots x_k) =$$
$$= (x_{i+1} \dots x_k)^{-1}A_i(x_{i+1} \dots x_k) = A_i.$$

Поэтому $x^{-1}R_1x$ лежит в пересечении всех A_i, $i = 2, 3, \dots, k$, т. е. в P_1, откуда

$$x^{-1}R_1x = P_1.$$

Теорема доказана.

Ф. Холл [1] доказал следующую теорему.

Если порядок конечной разрешимой группы G имеет вид

$$n = kl, \quad (k, l) = 1,$$

то всякая подгруппа группы G, порядок которой делит число k, содержится в подгруппе порядка k.

Будем вести доказательство индукцией по порядку группы. Пусть в группе G дана подгруппа A, порядок которой k_0 делит k. Возьмем в G нетривиальный нормальный делитель H, порядок которого n' запишем в виде

$$n' = k'l',$$

где k' и l' делят соответственно числа k и l, и предположим, что

$$l' < l. \tag{9}$$

Фактор-группа G/H имеет порядок

$$\frac{n}{n'} = \frac{k}{k'} \cdot \frac{l}{l'}.$$

Порядок ее подгруппы AH/H делит число k/k', поэтому, по индуктивному предположению, подгруппа AH/H содержится в подгруппе F/H

порядка k/k'. Подгруппа F группы G имеет, следовательно, порядок kl', т. е. ввиду (9) отлична от G. Применяя еще раз индуктивное предположение, на этот раз к группе F, мы получим, так как $A \subset F$, а порядок F делится на k, что подгруппа A содержится в подгруппе порядка k.

Пусть, однако, в G нельзя найти нормального делителя H со свойством (9), т. е. порядок всякого нетривиального нормального делителя делится на l. Обозначим теперь через H наименьший из отличных от E членов главного ряда группы G. Нормальный делитель H должен быть абелевой группой, порядок которой есть степень простого числа — в противном случае H не было бы минимальным нормальным делителем в G. Этот порядок делится, как мы знаем, на l, а поэтому он просто совпадает с l.

Подгруппа AH имеет теперь порядок $k_0 l$, причем $(k_0, l) = 1$. Далее, по доказанной в этом параграфе теореме Холла группа G обладает некоторой подгруппой B порядка k. Так как

$$\{AH, B\} = HB = G,$$

то пересечение

$$AH \cap B = A'$$

будет подгруппой порядка k_0. Применяя ту же теорему Холла, но к подгруппе AH, мы получим, что подгруппы A и A' сопряжены,

$$x^{-1} A' x = A.$$

Тогда $x^{-1} B x$ будет подгруппой порядка k, содержащей подгруппу A.

Теорема доказана. Соответствующая теорема для П-отделимых групп еще не получена.

Из теоремы, сейчас доказанной, немедленно вытекает утверждение, высказанное в первом абзаце настоящего параграфа.

Переход к бесконечным группам сделан в работах Бэра [25] и Гольберга [2], где доказанные в этом параграфе теоремы Холла распространены на случай локально нормальных локально разрешимых групп. При этом используются или метод, изложенный в § 55, или же методы, ему близкие. [См. Д.18.3.]

В вопросе о сопряженности силовских П-подгрупп несколько дальше пошел Казачков [1, 2]. Он доказал локальную теорему для свойства сопряженности всех силовских П-подгрупп группы (при данном П), если только среди них содержится хотя бы один конечный класс сопряженных подгрупп. Отсюда вытекает, что *если локально конечная и локально разрешимая группа обладает конечным классом сопряженных силовских* П*-подгрупп, то все силовские* П*-подгруппы этой группы сопряжены между собой.*

Теорема Шура. В теории конечных групп часто оказывается полезной следующая теорема Шура (см. Цасенхауз [2]).

Если конечные группы A и B имеют взаимно простые порядки, то всякое расширение группы A при помощи группы B расщепляемо.

Пусть порядками групп A и B служат соответственно числа k и l, $(k, l) = 1$, и пусть дано расширение G группы A при помощи группы B. Нужно доказать, что группа G обладает подгруппой порядка l. Будем вести доказательство индукцией по числу k.

Пусть p — один из простых делителей числа k, P — некоторая силовская p-подгруппа группы G, N — ее нормализатор в G. Ясно, что все силовские p-подгруппы группы G, в том числе и P, содержатся в A. Пересечение $N \cap A$ будет нормальным делителем в N, причем индекс его в N равен l, так как индексы N в G и $N \cap A$ в A совпадают — они равны числу силовских p-подгрупп группы G. Поэтому группа N/P содержит нормальный делитель $(N \cap A)/P$ индекса l. Применяя индуктивное предположение, так как порядок $(N \cap A)/P$ меньше k, мы найдем в группе N/P подгруппу H/P порядка l.

Обозначим через Z центр p-группы P; он, как мы знаем из § 54, отличен от E. Группа H/Z содержит нормальный делитель P/Z индекса l. Применяя еще раз индуктивное предположение, так как порядок P/Z меньше k, мы найдем в группе H/Z подгруппу F/Z порядка l.

Применить снова индуктивное предположение нельзя, так как сама исходная группа A могла быть абелевой p-группой. Мы используем поэтому результаты § 48. Расширение F абелевой p-группы Z при помощи группы F/Z порядка l задается некоторой системой факторов $m_{\alpha,\beta}$ и системой автоморфизмов. Положим

$$c_\beta = \prod_{\alpha \in F/Z} m_{\alpha,\beta}.$$

В равенстве (2) из § 48 применяем к левой и к правой частям произведение по α, считая β и γ фиксированными. Ввиду коммутативности группы Z мы придем к равенству

$$m^l_{\beta,\gamma} = c^{-1}_{\beta\gamma} c_\gamma c^\gamma_\beta; \tag{10}$$

следует учесть, что элемент $\alpha\beta$ вместе с α пробегает всю группу F/Z.

Обозначим через k' порядок группы Z. Так как $(k', l) = 1$, то существует число l', удовлетворяющее сравнению $ll' \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k')$. Возводя обе части равенства (10) в l'-ю степень, мы получим, снова ввиду коммутативности группы Z:

$$m_{\beta,\gamma} = (c^{l'}_{\beta\gamma})^{-1} c^{l'}_\gamma (c^{l'}_\beta)^\gamma.$$

Сравнивая с равенством (8) из § 48, мы получаем, что расширение F группы Z эквивалентно расширению с единичными факторами, т. е. расщепляемо (см. § 52). Этим доказано, что подгруппа F, а поэтому и сама группа G, обладают подгруппой порядка l. Теорема доказана.

Тот частный случай теоремы Шура, когда группа B разрешимая, можно вывести также из теоремы Чунихина — группа G будет в этом

случае П-отделимой, если через П обозначить множество всех простых делителей порядка l группы B. При этом получается даже, что *все подгруппы порядка l группы G сопряжены между собой*. Сопряженность этих подгрупп Цасенхауз [2] доказал также и при том предположении, когда разрешима группа A. Вопрос о справедливости этого утверждения в общем случае пока не решен [1]). [См. Д.18.2].

§ 61. Конечные полупростые группы

Конечная группа называется *полупростой*, если она не содержит ни одного разрешимого нормального делителя, отличного от E. Так как всякая разрешимая группа обладает отличной от единицы абелевой характеристической подгруппой — это будет предпоследний член ряда коммутантов, — то конечную полупростую группу можно определить также как группу, не содержащую ни одного абелева нормального делителя, отличного от E.

Фиттинг [6] доказал следующую теорему.

Всякая конечная группа G является расширением разрешимой группы при помощи полупростой группы.

Действительно, пусть в группе G даны разрешимые нормальные делители A и B. Тогда *их произведение AB также будет разрешимым нормальным делителем*. В самом деле,

$$AB/A \simeq B/(A \cap B).$$

Справа стоит разрешимая группа, а поэтому группа AB, как расширение разрешимой группы A при помощи разрешимой группы AB/A, сама разрешима (см. § 57).

Группа G, являясь, по условию, конечной, обладает максимальным разрешимым нормальным делителем H. Из доказанного выше вытекает его единственность. Фактор-группа G/H будет уже полупростой: если бы она содержала нетрививальный разрешимый нормальный делитель F/H, то нормальный делитель F группы G, будучи расширением разрешимой группы H при помощи разрешимой же группы F/H, был бы разрешимым в противоречие с максимальностью H.

Теорема доказана. Напомним, что максимальный разрешимый нормальный делитель определяется в группе однозначно, и заметим, что всякое расширение разрешимой группы A при помощи полупростой группы B имеет, очевидно, A своим максимальным разрешимым нормальным делителем. Мы получим, следовательно, все конечные группы, причем лишь по одному разу, если заставим группу A пробегать все конечные разрешимые группы, группу B — все конечные

[1]) Ко времени подготовки третьего издания этот вопрос уже получил решение. (См. предисловие к Дополнению.]

полупростые группы и возьмем все неэквивалентные расширения A при помощи B.

В работе Фиттинга [6] показано, что обозрение конечных полупростых групп может быть полностью сведено на описание некоммутативных простых групп и их групп автоморфизмов. Гольберг [1] перенес результаты Фиттинга на бесконечный случай, что потребовало некоторого изменения определения полупростой группы. Мы ограничимся случаем конечных полупростых групп, т. е. изложим результаты Фиттинга.

Рассмотрим сперва несколько иной класс групп, довольно часто используемый за пределами теории групп. Мы не будем при этом предполагать группу конечной и, кроме того, допустим наличие произвольной области операторов.

Группа G называется *вполне приводимой*, если она разлагается в прямое произведение конечного числа простых групп (в операторном случае — простых относительно данной области операторов).

Всякая вполне приводимая группа обладает главным рядом.

Действительно, если группа

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{1}$$

вполне приводима и все A_i — простые группы, то ряд

$$E \subset A_1 \subset (A_1 \times A_2) \subset \ldots \subset G$$

будет главным (даже композиционным) рядом этой группы.

К вполне приводимым группам применима, следовательно, теорема Шмидта (§ 47) и поэтому любые два прямых разложения вида (1) вполне приводимой группы центрально изоморфны. Если же, сверх того, группа G без центра, что равносильно предположению о некоммутативности всех прямых множителей A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в разложении (1), то G *обладает единственным прямым разложением вида* (1).

Всякий (*допустимый*) *нормальный делитель* B *вполне приводимой группы* G *сам вполне приводим и является прямым множителем для* G.

Докажем сперва второе утверждение. Если (1) есть разложение группы G в прямое произведение простых групп, то прямой множитель A_i будет называться множителем первого рода, если он содержится в произведении нормальных делителей B и $A_1 \times \ldots \times A_{i-1}$, и множителем второго рода в противоположном случае. Если A_i множитель второго рода, то он образует с подгруппой $B(A_1 \times \ldots \times A_{i-1})$ прямое произведение; действительно, из простоты множителя A_i будет в этом случае следовать, что его пересечение с указанным произведением равно E. Легко видеть теперь, что подгруппа B и все множители второго рода из (1) составляют прямое произведение, которое совпадает с G, так как в нем содержатся все множители первого рода из (1).

Мы получаем прямое разложение группы G, в котором нормальный делитель B является одним из прямых множителей. Для доказательства первого утверждения теоремы берем продолжение этого разложения, получаемое заменой множителя B его разложением в прямое произведение неразложимых групп. Это продолжение будет центрально изоморфным с разложением (1), откуда следует, что группа B сама разлагается в прямое произведение простых групп. Теорема доказана. [См. Д.5.1.]

Конечная вполне приводимая группа G без центра является полупростой.

Действительно, если бы группа G обладала разрешимым нормальным делителем B, то, по предыдущей теореме, он был бы вполне приводимым и поэтому абелевым. Кроме того, он служил бы для G прямым множителем, что, однако, невозможно, так как G не имеет центра.

Если в произвольной группе G даны вполне приводимые нормальные делители A и B без центра, то их произведение AB также вполне приводимо и не имеет центра.

В самом деле, если

$$D = A \cap B,$$

то D будет нормальным делителем в G, а также и в A, а поэтому ввиду полной приводимости группы A

$$A = D \times A'. \tag{2}$$

Трансформируя это равенство любым элементом g группы G, мы получим

$$A = D \times (g^{-1}A'g). \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) показывают ввиду леммы из § 42, что подгруппы A' и $g^{-1}A'g$ центрально изоморфны в A, а так как группа A без центра, то

$$A' = g^{-1}A'g.$$

Этим доказано, что A' является нормальным делителем в группе G, причем вполне приводимым и без центра. Так как

$$AB = \{D, A', B\} = \{A', B\}, \quad A' \cap B = E,$$

то

$$AB = A' \times B,$$

откуда следует и полная приводимость группы AB, и отсутствие в ней центра.

Из этой теоремы вытекает, что *всякая конечная группа обладает единственным максимальным вполне приводимым нормальным делителем без центра*. В общем случае этот нормальный делитель может, понятно, совпасть с E. Справедлива, однако, т е о р е м а:

Если G — конечная полупростая группа, отличная от E, то ее максимальный вполне приводимый нормальный делитель H — он ввиду полупростоты G не имеет центра — также будет отличным от E.

Сперва докажем лемму:

Всякий нормальный делитель A конечной полупростой группы G сам полупрост.

Действительно, в противном случае группа A обладала бы отличным от E максимальным разрешимым нормальным делителем, который, как характеристическая подгруппа группы A, был бы нормальным делителем и в группе G в противоречие с полупростотой этой группы.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, которое будем вести индукцией по порядку группы G. Действительно, если конечная полупростая группа G, отличная от E, имеет наименьший порядок, возможный для таких групп, то она ввиду леммы будет простой и поэтому совпадает со своим максимальным вполне приводимым нормальным делителем.

Будем считать поэтому теорему доказанной для всех конечных полупростых групп, отличных от E, порядок которых меньше порядка группы G. Если группа G простая, то теорема верна по тем же соображениям, как и выше. В противном же случае G обладает нетривиальным нормальным делителем A, который конечен, отличен от E и, по лемме, полупрост. По индуктивному предположению группа A обладает отличным от E максимальным вполне приводимым нормальным делителем B. Являясь характеристической подгруппой группы A, подгруппа B будет нормальным делителем группы G, а поэтому G обладает отличными от E вполне приводимыми нормальными делителями, что и требовалось доказать.

Можно доказать даже больше: *если G — конечная полупростая группа, отличная от E, то централизатор C ее максимального вполне приводимого нормального делителя H совпадает с E.*

В самом деле, C будет нормальным делителем в G (см. § 11) и поэтому, по лемме, полупрост. Кроме того, $C \cap H = E$, так как это пересеченна будет центром группы H; следовательно,

$$\{C, H\} = C \times H.$$

Если C отлично от E, то, по предыдущей теореме, ее максимальный вполне приводимый нормальный делитель H' также будет отличным от E. Отсюда следует, однако, что группа G обладает вполне приводимым нормальным делителем $H' \times H$, не содержащимся в нормальном делителе H в противоречие с максимальностью последнего. Таким образом, $C = E$, что и требовалось доказать.

После этих предварительных рассмотрений мы можем перейти к обозрению полупростых групп. Пусть G — произвольная конечная полупростая группа, H — ее максимальный вполне приводимый нормальный делитель, Γ — группа всех автоморфизмов

группы H. Так как группа H без центра, то она изоморфна своей группе внутренних автоморфизмов и поэтому можно считать, что *группа H содержится в группе* Γ.

Трансформируя группу H любым элементом x группы G, мы получаем автоморфизм φ_x группы H. Отображение $x \to \varphi_x$ группы G в группу Γ будет гомоморфным и даже изоморфным, так как централизатор H в G равен E. Таким образом, *группа G изоморфна подгруппе группы* Γ, *причем эта подгруппа содержит, очевидно, H*.

Обратно, пусть H — произвольная конечная вполне приводимая группа без центра, Γ — ее группа автоморфизмов, так что, отождествляя группу H с ее группой внутренних автоморфизмов, можно считать, что H содержится в Γ, притом в качестве нормального делителя. Пусть, далее, в группе Γ дана произвольная подгруппа F, содержащая H. Тогда *F будет полупростой группой, а H — ее максимальным вполне приводимым нормальным делителем*.

Действительно, пусть элемент γ группы Γ перестановочен, как автоморфизм группы H, с любым внутренним автоморфизмом этой группы, т. е. при любых x, y из H

$$y^{-1}(x\gamma)y = (y^{-1}xy)\gamma = (y\gamma)^{-1}(x\gamma)(y\gamma).$$

Отсюда

$$(x\gamma)[y(y\gamma)^{-1}] = [y(y\gamma)^{-1}](x\gamma).$$

Так как элемент $x\gamma$ пробегает вместе с x всю группу H, то элемент $y(y\gamma)^{-1}$ принадлежит к центру группы H, т. е. равен единице, откуда

$$y = y\gamma$$

при любом y из H. Автоморфизм γ оказался, следовательно, тождественным. Таким образом, централизатор подгруппы H в группе Γ равен E.

Пусть теперь K — разрешимый нормальный делитель группы F. Тогда $H \cap K$ будет разрешимым нормальным делителем в H и поэтому ввиду полупростоты H это пересечение равно E. Таким образом, нормальные делители H и K группы F составляют прямое произведение, а поэтому K входит в централизатор подгруппы H в группе Γ, т. е. ввиду доказанного выше равен единице. Этим доказана полупростота группы F.

Если, наконец, H содержится в большем вполне приводимом нормальном делителе $\overline{H}$ группы F, то, как мы знаем, нормальный делитель H служит для вполне приводимой группы $\overline{H}$ прямым множителем,

$$\overline{H} = H \times H^*.$$

Подгруппа H^* содержится, следовательно, в централизаторе подгруппы H в группе Γ, т. е. равна E, откуда $\overline{H} = H$. Этим доказано последнее утверждение теоремы.

При тех же предположениях об H и Γ, что и в предыдущей теореме, можно доказать, что *если F_1 и F_2 — две подгруппы группы Γ, содержащие H и изоморфные между собой, то они сопряжены в Γ.*

Для того чтобы сделать доказательство этой теоремы вполне ясным, мы откажемся от предположения, что элементы группы H отождествлены с соответствующими им внутренними автоморфизмами. Внутренний автоморфизм, производимый элементом x группы H, условимся обозначать через $\overline{x}$, а всю группу внутренних автоморфизмов группы H — через $\overline{H}$. Таким образом, $\overline{H}$ является нормальным делителем группы Γ.

Обозначим, далее, через $\overline{\Gamma}$ группу автоморфизмов группы $\overline{H}$. Из изоморфизма групп H и $\overline{H}$ следует, понятно, изоморфизм групп Γ и $\overline{\Gamma}$: если $\gamma \in \Gamma$, то элементу γ соответствует такой элемент γ' группы $\overline{\Gamma}$, что для любого x из H

$$\overline{x}\gamma' = \overline{x\gamma}. \tag{4}$$

Покажем, что для любого γ из Γ

$$\gamma' = \overline{\gamma}, \tag{5}$$

где $\overline{\gamma}$ — автоморфизм группы $\overline{H}$, порожденный трансформированием этой группы, как нормального делителя группы Γ, элементом γ.

Действительно, для любого y из H

$$y(\gamma^{-1}\overline{x}\gamma) = [x^{-1}(y\gamma^{-1})x]\gamma = (x\gamma)^{-1}y(x\gamma),$$

т. е. $\gamma^{-1}\overline{x}\gamma = \overline{x\gamma}$. Отсюда ввиду (4)

$$\overline{x}\gamma' = \gamma^{-1}\overline{x}\gamma,$$

а так как $\overline{x}$ — произвольный элемент из $\overline{H}$, то равенство (5) доказано. Обозначим изоморфное отображение $\gamma \to \overline{\gamma}$ через φ, т. е. $\gamma\varphi = \overline{\gamma} = \gamma'$.

Подгруппы F_1 и F_2, о которых сказано в формулировке теоремы, содержат теперь подгруппу $\overline{H}$, причем в силу предшествующей теоремы $\overline{H}$ будет максимальным вполне приводимым нормальным делителем в каждой из этих подгрупп. Отсюда следует, что существующее, по предположению, изоморфное отображение θ подгруппы F_1 на подгруппу F_2 индуцирует автоморфизм $\overline{\gamma}$ подгруппы $\overline{H}$, т. е. для всех $\overline{x}$ из $\overline{H}$

$$\overline{x}\theta = \overline{x}\,\overline{\gamma}. \tag{6}$$

Ясно, что $\overline{\gamma}$ является элементом группы $\overline{\Gamma}$.

Образы подгрупп F_1 и F_2 при изоморфизме φ обозначим через $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Отображение

$$\overline{f}_1 \to \overline{f_1\theta}$$

будет изоморфизмом между $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Мы знаем, что $\overline{f}_1$ есть следующий автоморфизм группы $\overline{H}$:

$$\overline{x} \to f_1^{-1}\overline{x}f_1, \quad \overline{x} \in \overline{H}. \tag{7}$$

Аналогично $\overline{f_1\theta}$ есть автоморфизм

$$\overline{x} \to (f_1\theta)^{-1}\overline{x}(f_1\theta), \quad \overline{x} \in \overline{H},$$

или, так как $\overline{x}\,\overline{\gamma} = \overline{x}\theta$ пробегает вместе с $\overline{x}$ всю группу $\overline{H}$, а также ввиду (6):

$$\overline{x}\,\overline{\gamma} = \overline{x}\theta \to (f_1\theta)^{-1}(\overline{x}\theta)(f_1\theta) = (f_1^{-1}\overline{x}f_1)\theta = (f_1^{-1}\overline{x}f_1)\overline{\gamma}.$$

Однако ввиду (7) автоморфизм $\overline{\gamma}^{-1}\overline{f}_1\overline{\gamma}$ группы $\overline{H}$ также переводит всякий элемент $\overline{x}\,\overline{\gamma}$ в элемент $(f_1^{-1}\overline{x}f_1)\overline{\gamma}$:

$$(\overline{x}\,\overline{\gamma})(\overline{\gamma}^{-1}\overline{f}_1\overline{\gamma}) = \overline{x}(\overline{f}_1\overline{\gamma}) = (f_1^{-1}\overline{x}f_1)\overline{\gamma}.$$

Этим доказано равенство

$$\overline{f_1\theta} = \overline{\gamma}^{-1}\overline{f}_1\overline{\gamma}$$

для всех $\overline{f}_1$ из $\overline{F}_1$, т. е. доказана сопряженность подгрупп $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ в группе $\overline{\Gamma}$. Отсюда следует сопряженность подгрупп F_1 и F_2 в группе Γ, что и требовалось доказать.

Доказанные нами теоремы приводят к следующему результату.

Мы получим все конечные полупростые группы, причем лишь по одному разу каждую, если

1) *возьмем все конечные вполне приводимые группы без центра,*

2) *каждую вполне приводимую группу без центра H вложим в ее группу автоморфизмов Γ, отождествляя с группой внутренних автоморфизмов,*

3) *все подгруппы группы Γ, содержащие H, разобьем на классы сопряженных подгрупп и*

4) *в каждом из этих классов выберем по одному представителю.*

Мы свели обозрение конечных полупростых групп на обозрение конечных вполне приводимых групп без центра и их групп автоморфизмов. Выше было доказано, что задача обозрения вполне приводимых групп без центра целиком сводится на обозрение простых групп. В работе Фиттинга [6] (см. также Гольберг [1]) показано, что и группа автоморфизмов вполне приводимой группы без центра

$$G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

где все A_i — простые группы, вполне обозримым способом строится при помощи групп автоморфизмов групп $A_1, \ldots, A_n$.

Следует подчеркнуть, однако, что проблема описания всех некоммутативных простых конечных групп очень трудна и весьма далека от исчерпания. В § 9 мы познакомились с одной бесконечной серией таких групп, а именно со знакопеременными группами n-й степени при $n \geqslant 5$. Сейчас известно несколько аналогичных серий,

а также несколько отдельных простых конечных групп, лежащих вне этих серий [1]).

Все некоммутативные простые конечные группы, которые до сих пор найдены, имеют четный порядок. Вопрос о существовании простых конечных групп нечетного составного порядка составляет известную проблему Бернсайда. Так как все композиционные факторы группы нечетного порядка сами имеют нечетные порядки, то, как уже отмечалось в § 57, эта проблема равносильна вопросу, не будет ли всякая конечная группа нечетного порядка разрешимой? Пока известно (Фробениус, Бернсайд, В. К. Туркин), что *конечная группа нечетного порядка, состоящего не более чем из семи простых сомножителей, действительно будет разрешимой* [2]).

Приведем некоторые другие теоремы (в основном идущие от Фробениуса и Бернсайда), которые связывают вопрос о непростоте конечной группы (уже не обязательно нечетного порядка) со свойствами порядка этой группы и с некоторыми другими свойствами самой группы. Доказательства некоторых из этих теорем требуют использования теории представлений и характеров групп и поэтому не могут быть приведены в нашей книге.

Конечная группа, в порядок которой входят степени не более чем двух различных простых чисел, будет разрешимой.

Конечная группа, порядок которой не делится на квадрат никакого простого числа, будет разрешимой.

Если число элементов в некотором классе сопряженных элементов конечной группы является степенью простого числа, то группа не будет простой.

Если силовская p-подгруппа конечной группы содержится в центре своего нормализатора, то группа не будет простой.

Если конечная группа G обладает истинной подгруппой A, которая совпадает со своим нормализатором и имеет равное E пересечение с каждой из своих сопряженных подгрупп, то группа G не может быть простой.

Существует большое число обобщений указанных теорем, а также многочисленные другие теоремы этого типа. Ряд подобных «критериев непростоты» опубликовали, в частности, В. К. Туркин, А. А. Кулаков, С. А. Чунихин, А. П. Дицман, П. Е. Дюбюк.

[1]) Ко времени подготовки третьего издания в этом вопросе достигнуты существенные продвижения.

[2]) Как было сказано выше, ко времени подготовки третьего издания эта проблема уже получила решение. [См. предисловие к Дополнению.]

Глава пятнадцатая

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

§ 62. Нильпотентные и конечные нильпотентные группы

Разрешимые группы представляют собою очень широкое обобщение абелевых групп и лишь весьма немногие нетривиальные свойства последних удается распространить на разрешимые группы. В этом отношении более интересен один класс групп, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами. Изучению этого класса групп и его обобщений посвящается настоящая глава.

Пусть в группе G дан инвариантный ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots \subset A_n = G. \tag{1}$$

Назовем этот ряд *центральным рядом*, если при $i = 0, 1, \ldots, n-1$ фактор-группа A_{i+1}/A_i лежит в центре фактор-группы G/A_i; иными словами, если взаимный коммутант $[A_{i+1}, G]$ (см. § 14) лежит в A_i,

$$[A_{i+1}, G] \subseteq A_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Заметим, что инвариантности ряда (1) можно было бы и не требовать, так как из (2) вытекает для всех i включение

$$[A_i, G] \subseteq A_i,$$

равносильное тому, что A_i нормально в G.

Группа G, обладающая хотя бы одним центральным рядом, называется *нильпотентной*. Ясно, что всякая абелева группа нильпотентна. С другой стороны, всякая нильпотентная группа разрешима, так как центральный ряд будет, понятно, разрешимым рядом.

Эти три класса групп уже в конечном случае отличны друг от друга. Действительно, существуют разрешимые группы без центра, например, симметрическая группа 3-й степени, в то время как центр нильпотентной группы содержит подгруппу A_1 из центрального ряда (1) и поэтому отличен от E. С другой стороны, мы узнаем ниже, что всякая конечная p-группа нильпотентна, хотя и не обязана быть абелевой.

Всякая подгруппа и всякая фактор-группа нильпотентной группы сами нильпотентны.

Действительно, пусть в нильпотентной группе G с центральным рядом (1) дана подгруппа H. Если

$$B_i = A_i \cap H, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

то ввиду (2) при $i = 0, 1, \ldots, n-1$ будет

$$[B_{i+1}, H] \subseteq [A_{i+1}, G] \cap H \subseteq A_i \cap H = B_i.$$

Подгруппы (3) составят, следовательно, после удаления повторений центральный ряд для подгруппы H.

Пусть, с другой стороны, дано гомоморфное отображение φ нильпотентной группы G с центральным рядом (1) на группу $\overline{G}$. Обозначим через $\overline{A}_i$ образ подгруппы A_i при этом гомоморфизме, $i = 0, 1, \ldots, n$. Пусть $\overline{a}_{i+1}$ и $\overline{g}$ — элементы соответственно из $\overline{A}_{i+1}$ и $\overline{G}$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, а a_{i+1} и g — некоторые их прообразы при гомоморфизме φ в A_{i+1} и G,

$$a_{i+1}\varphi = \overline{a}_{i+1}, \quad g\varphi = \overline{g}.$$

Так как, по (2), $[a_{i+1}, g] \in A_i$, то

$$[\overline{a}_{i+1}, \overline{g}] = [a_{i+1}, g]\varphi \in \overline{A}_i.$$

Подгруппы $\overline{A}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, составят, следовательно, после удаления повторений центральный ряд группы $\overline{G}$.

Прямое произведение конечного числа нильпотентных групп нильпотентно.

В самом деле, пусть

$$G = \prod_{k=1}^{s} G_k,$$

причем все группы G_k нильпотентны. Выбираем в этих группах по одному центральному ряду, причем считаем, что длины этих рядов совпадают, допуская, если нужно, ряды с повторениями. Пусть

$$E = A_{k0} \subseteq A_{k1} \subseteq \ldots \subseteq A_{ki} \subseteq \ldots \subseteq A_{kn} = G_k$$

будет центральный ряд группы G_k, $k = 1, 2, \ldots, s$. Тогда подгруппы

$$B_i = \prod_{k=1}^{s} A_{ki}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

будут составлять центральный ряд группы G.

Заметим, что расширение нильпотентной группы при помощи нильпотентной не обязано быть нильпотентным, так как иначе все разрешимые группы оказались бы нильпотентными.

В § 14 было определено понятие нижней центральной цепи произвольной группы G: это будет цепь подгрупп

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_k \supseteq \ldots,$$

где

$$G_{k+1} = [G_k, G], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Построим эту цепь в нильпотентной группе G с центральным рядом (1). По (2)

$$G_1 = [G, G] = [A_n, G] \supseteq A_{n-1}.$$

Пусть уже доказано, что $G_k \subseteq A_{n-k}$. Тогда

$$G_{k+1} = [G_k, G] \subseteq [A_{n-k}, G] \subseteq A_{n-k-1}.$$

Отсюда следует, что

$$G_n \subseteq A_0 = E,$$

т. е. $G_n = E$.

Этим доказано, что в нильпотентной группе нижняя центральная цепь в конечное число шагов доходит до единицы, т. е. превращается в *нижний центральный ряд*, причем *длина этого ряда не больше длины любого центрального ряда группы*. Нижний центральный ряд удовлетворяет, очевидно, данному выше определению центрального ряда и поэтому существование конечного нижнего центрального ряда можно принять в качестве одного из определений нильпотентной группы.

Во всякой группе G можно построить также *верхнюю центральную цепь*: это будет такая последовательность подгрупп

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_k \subseteq \ldots,$$

что Z_1 есть центр группы G, Z_2/Z_1 — центр группы G/Z_1, вообще Z_{k+1}/Z_k — центр группы G/Z_k. Эту цепь, состоящую, как легко видеть, из характеристических подгрупп, в общем случае можно продолжать трансфинитно, причем она стабилизируется, не обязательно доходя до самой группы G. [См. Д.3.3.]

Построим верхнюю центральную цепь в нильпотентной группе G с центральным рядом (1). Так как, по (2), $[A_1, G] = E$, то $A_1 \subseteq Z_1$. Пусть уже доказано, что $A_k \subseteq Z_k$. Тогда, по (2),

$$[A_{k+1}, G] \subseteq A_k \subseteq Z_k.$$

Это показывает, что при естественном гомоморфном отображении группы G на фактор-группу G/Z_k подгруппа A_{k+1} будет отображаться в центр этой фактор-группы, а поэтому $A_{k+1} \subseteq Z_{k+1}$. Отсюда следует, что

$$A_n = G \subseteq Z_n,$$

т. е. $Z_n = G$.

Этим доказано, что в нильпотентной группе верхняя центральная цепь в конечное число шагов доходит до самой группы, т. е. превращается в *верхний центральный ряд*, причем *длина этого ряда не превосходит длину любого центрального ряда группы*.

Существование верхнего центрального ряда также может быть принято в качестве определения нильпотентной группы.

Из сказанного выше следует, что *в нильпотентной группе нижний и верхний центральные ряды имеют одну и ту же длину*, равную минимальной длине центральных рядов группы. Эта длина называется *классом* нильпотентной группы. В частности, нильпотентными группами класса 1 будут абелевы группы, нильпотентными группами класса 2 — некоммутативные метабелевы группы. [См. Д.27.1.]

Пусть G — нильпотентная группа, класс которой не превосходит k. Тогда k-й член G_k нижней центральной цепи этой группы равен E. Иными словами, в группе G будет тождественно выполняться соотношение

$$[\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_{k+1}] = 1.$$

Поэтому, по § 37, группа G будет фактор-группой некоторой приведенной свободной группы, соответствующей этому тождественному соотношению. Это будет, как легко видеть, фактор-группа свободной группы F по k-му члену F_k ее нижней центральной цепи.

Фактор-группа F/F_k сама будет нильпотентной группой класса k; назовем ее *свободной нильпотентной группой класса k*. Число свободных образующих группы F назовем *рангом* группы F/F_k. Это будет инвариант этой группы ввиду теоремы Бэра, доказанной в § 37.

Таким образом, *всякая нильпотентная группа, класс которой не выше k, является фактор-группой некоторой свободной нильпотентной группы класса k. При этом нильпотентная группа с n образующими будет фактор-группой свободной нильпотентной группы ранга n*. При $k = 1$ это будет известная нам теорема о том, что всякая абелева группа является фактор-группой свободной абелевой группы. [См. Д.27.3.]

Некоторые теоремы об автоморфизмах свободных нильпотентных групп доказаны в работе Мальцева [9]. В работах Головина [2–5] введены и изучены *k-е нильпотентные произведения групп*, $k = 1, 2, \dots$. Эта конструкция находится в таком же отношении к свободным нильпотентным группам класса k, в каком прямое произведение стоит к свободным абелевым группам или свободное произведение — к свободным группам. Ряд свойств прямых и свободных произведений удалось доказать и для нильпотентных произведений; в частности, эта конструкция, рассматриваемая как операция в множестве групп, оказалась ассоциативной. Еще один пример конструкции с этими же свойствами указал Ляпин [7]. [См. § Д.11.]

Конечные нильпотентные группы. Сейчас будет указан ряд свойств нильпотентных групп, в случае конечных нильпотентных групп равносильных их определению.

Всякая подгруппа нильпотентной группы может быть включена в нормальный ряд этой группы, т. е. является достижимой.

В самом деле, пусть G — нильпотентная группа,

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = G$$

ее центральный ряд, H — истинная подгруппа группы G. Существует такое i, $i < n$, что

$$A_i \subseteq H, \quad A_{i+1} \not\subseteq H.$$

Однако, по (2), коммутатор любого элемента из A_{i+1} с любым элементом из H содержится в A_i, т. е. содержится в H. Поэтому нормализатор H_1 подгруппы H в группе G содержит A_{i+1} и, следовательно, отличен от H. Если подгруппа H_1 еще отлична от G, то по тем же соображениям ее нормализатор H_2 будет строго больше, чем H_1, причем он во всяком случае содержит подгруппу A_{i+2}. Продолжая так далее, мы не более чем через $n - i$ шагов дойдем до группы G. Подгруппы

$$E \subset H \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset G$$

составляют, следовательно, нормальный ряд группы G.

Пока не решен вопрос о том, можно ли доказанное сейчас свойство принять в качестве определения нильпотентной группы.

Как мы только что видели, *всякая истинная подгруппа нильпотентной группы отлична от своего нормализатора*. О группах с этим последним свойством говорят, что в них выполняется нормализаторное условие.

Если в группе G выполняется нормализаторное условие, то всякая силовская p-подгруппа этой группы при любом p будет нормальным делителем в G.

Действительно, в § 54 доказано, что нормализатор силовской подгруппы совпадает со своим нормализатором. В нашем случае нормализаторы силовских подгрупп будут совпадать, следовательно, с самой группой G, т. е. все силовские подгруппы нормальны в G.

Таким образом, снова ввиду § 54, *группа G, в которой выполняется нормализаторное условие, обладает по каждому простому p единственной силовской p-подгруппой. Эти силовские подгруппы, взятые по всем p, составляют в G прямое произведение, содержащее те и только те элементы группы G, порядок которых конечен*, — мы знаем, что всякая конечная циклическая группа разлагается в прямое произведение примарных циклических групп.

Применяя изложенные выше результаты к конечным группам, мы получаем, что *всякая конечная нильпотентная группа разлагается в прямое произведение p-групп*.

Справедливо и обратное утверждение, и это делает конечные нильпотентные или, как говорили раньше, конечные специальные группы особенно интересными.

Всякая конечная группа, разложимая в прямое произведение p-групп, нильпотентна.

Выше было показано, что прямое произведение конечного числа нильпотентных групп само нильпотентно, поэтому достаточно доказать следующую теорему, из которой еще раз вытекает доказанная в § 57 разрешимость конечной p-группы:

Всякая конечная p-группа нильпотентна.

В самом деле, конечная p-группа G обладает, как доказано в § 54, нетривиальным центром Z. Фактор-группа G/Z снова будет конечной p-группой, ее центр Z_1/Z снова нетривиален, а поэтому Z_1 строго больше Z. Продолжая так далее, мы построим в группе G верхний центральный ряд, т. е. докажем нильпотентность этой группы.

Мы нашли несколько свойств конечных групп, каждое из которых может быть принято в качестве определения конечной нильпотентной группы; таковы существование центрального ряда, нормализаторное условие, разложимость в прямое произведение p-групп. Конечные нильпотентные группы допускают и многие другие определения, эквивалентные указанным выше. Отметим некоторые из них, далеко не стремясь исчерпать все, что по этому поводу может быть сказано.

Конечная группа тогда и только тогда нильпотентна, если все ее максимальные (истинные) подгруппы являются нормальными делителями.

Действительно, конечная нильпотентная группа удовлетворяет нормализаторному условию и поэтому ее максимальные подгруппы должны быть нормальными делителями в самой группе. Пусть, обратно, все максимальные подгруппы группы G нормальны в G. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G при некотором p, N — ее нормализатор. Если N отлично от G, то обозначим через A одну из максимальных подгрупп группы G, содержащих N. Так как в G справедлива теорема о сопряженности силовских p-подгрупп, то, по § 54, всякая подгруппа, содержащая N, в том числе и A, должна совпадать со своим нормализатором. Это противоречит, однако, нормальности A в G. Таким образом, N совпадает с G, т. е. P является нормальным делителем группы G. Нормальность силовских p-подгрупп по всем p влечет за собой, однако, нильпотентность конечной группы.

Определим теперь одну новую для нас характеристическую подгруппу произвольной группы G. Назовем Ф-*подгруппой* группы G пересечение всех максимальных истинных подгрупп этой группы, если G такими подгруппами обладает; если же максимальных подгрупп в G нет, то само G считается своей Ф-подгруппой.

Справедлива теорема (Б. Нейман [5], Цасенхауз [2]):

Ф-подгруппа группы G состоит из тех и только тех элементов x этой группы, каждый из которых может быть удален из любой системы образующих группы G, в которую он входит, т. е. если $G = \{M, x\}$, то $G = \{M\}$.

В самом деле, если элемент x не принадлежит к Ф-подгруппе, то он не содержится в некоторой максимальной подгруппе A, т. е. $\{x, A\} = G$, хотя $\{A\} = A \neq G$. Пусть, обратно, существует такое множество M, что

$$G = \{M, x\}, \tag{4}$$

но $G \neq \{M\}$. Обозначим через A одну из максимальных среди подгрупп, содержащих M, но не содержащих x. Подгруппа A будет максимальной истинной подгруппой группы G, так как всякая бóльшая подгруппа должна содержать x и поэтому, по (4), она совпадает с G. Таким образом, элемент x не содержится в максимальной подгруппе A и поэтому не входит в Ф-подгруппу.

Из этой теоремы вытекает, что *если* Ф*-подгруппа группы* G *конечна* (например, в случае конечной группы), *то всякое множество* M, *порождающее вместе с* Ф*-подгруппой всю группу* G, *само будет системой образующих для* G. Примером такого M является система представителей смежных классов группы G по Ф-подгруппе.

Теперь может быть указан еще один способ определения конечной нильпотентной группы (Виланд [2]).

Конечная группа G *тогда и только тогда нильпотентна*, *если ее коммутант содержится в ее* Ф*-подгруппе*, *т. е. если всякое множество* M, *порождающее вместе с коммутантом всю группу* G, *само порождает* G.

Действительно, если коммутант содержится в Ф-подгруппе Ф группы G, то фактор-группа G/Φ будет абелевой. Все подгруппы группы G, содержащие Ф, и, в частности, все максимальные подгруппы группы G будут, следовательно, нормальными делителями в G, а отсюда следует нильпотентность группы G.

Обратно, если группа G нильпотентна, то всякая максимальная подгруппа A нормальна в G. Фактор-группа G/A не содержит истинных подгрупп, т. е. является циклической группой простого порядка и, следовательно, абелева. Подгруппа A содержит, таким образом, коммутант группы G, а поэтому коммутант содержится в пересечении всех максимальных подгрупп, т. е. в Ф-подгруппе.

Как читатель без труда проверит, доказательство утверждения, что *коммутант нильпотентной группы содержится в ее* Ф*-подгруппе*, не требует конечности этой группы [1]). Одно обобщение доказанной выше теоремы на случай групп с конечным числом образующих читатель найдет в работе Бэра [24]. [См. Д.27.4.]

[1]) Таким образом, из любой системы образующих всякой нильпотентной группы можно исключить любое конечное множество элементов коммутанта. На самом деле это верно и для бесконечных подмножеств коммутанта, как доказывается индукцией по классу нильпотентности группы.

§ 63. Обобщенные нильпотентные группы

Определение нильпотентной группы, данное в предшествующем параграфе, допускает естественные обобщения. С другой стороны, различные формы определения конечной нильпотентной группы приводят при переходе к бесконечным группам к таким классам групп, которые уже перестают, как правило, совпадать друг с другом. Мы рассмотрим сейчас некоторые из этих классов групп, отсылая читателя за дальнейшими подробностями к статье Куроша и Черникова [1]. Некоторые классы обобщенных нильпотентных групп рассматриваются также в работе Конторовича [8].

Обобщением понятия центрального ряда служит понятие *центральной системы*: это будет такая инвариантная система $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$ группы G (см. § 56), что для всякого скачка A_α, $A_{\alpha+1}$ этой системы имеет место включение

$$[A_{\alpha+1}, G] \subseteq A_\alpha,$$

т. е., иными словами, фактор-группа $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ содержится в центре фактор-группы G/A_α.

Назовем *Z-группой* или *группой со свойством Z* всякую группу, обладающую хотя бы одной центральной системой. Это обобщение понятия нильпотентной группы весьма широко — ввиду теоремы Магнуса (см. § 36) к Z-группам принадлежат все свободные группы.

Как доказал Мальцев [3], для свойства Z справедлива л о к а л ь н а я т е о р е м а:

Всякая группа, локально обладающая свойством Z, будет Z-группой.

Доказательство этой теоремы проводится тем же методом, что и доказательство локальной теоремы для свойства RN (см. § 58), и мы укажем лишь те изменения, которые придется теперь внести. Подгруппа $C^\alpha_{a,b}$ должна определяться теперь как наибольшая подгруппа системы $\mathfrak{C}^\alpha$, не содержащая н и о д н о г о из отличных от 1 элементов a и b; поэтому, в частности, нет необходимости рассматривать локальные системы, связанные с одной парой (a, b). Подгруппа $H_{a,b}$ также не будет содержать ни a, ни b, хотя и будет содержать их коммутатор. Доказательство того, что система $\overline{\mathfrak{H}}$, дополненная, если нужно, самой группой G, будет центральной системой группы G, проходит теперь без всяких затруднений. [См. Д.25.7.]

Много более узкий класс групп составляют *ZA-группы*, т. е. группы, обладающие центральной системой, вполне упорядоченной по возрастанию, или, как мы будем дальше говорить, *возрастающим центральным рядом*. На этот класс групп легко переносятся многие свойства нильпотентных групп. Так, почти дословно повторяя соответствующие рассуждения из предшествующего параграфа и лишь используя иногда простую трансфинитную индукцию, читатель докажет следующие утверждения.

Всякая подгруппа и всякая фактор-группа ZA-группы сами являются ZA-группами.

Группа тогда и только тогда будет ZA-группой, если ее верхняя центральная цепь, продолженная, быть может, трансфинитно, доходит до самой группы G.

Во всякой ZA-группе выполняется нормализаторное условие.

Для ZA-групп локальная теорема не может быть доказана, как вытекает из существования локально конечных p-групп без центра. Справедлива, однако, следующая т е о р е м а (Черников [20]).

Всякая группа, все счетные подгруппы которой являются ZA-группами, сама будет ZA-группой.

Докажем сперва следующую л е м м у.

Группа G тогда и только тогда будет ZA-группой, если для всякого ее элемента a и всякой последовательности элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ можно указать такой номер k, что [1])

$$[\ldots[[a, x_1], x_2], \ldots, x_k] = 1.$$

Пусть, в самом деле, G будет ZA-группой с возрастающим центральным рядом

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots \subset A_\mu = G \tag{1}$$

и пусть в G даны элементы a и $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$. Если ни один из элементов

$$a_k = [\ldots[[a, x_1], x_2], \ldots, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

не равен единице, то найдется такой индекс α, $\alpha \geqslant 0$, что подгруппа A_α не содержит ни одного из элементов a_k, в то время как в подгруппе $A_{\alpha+1}$ содержится хотя бы один из этих элементов, например a_l [2]). Тогда, однако, ввиду определения центральной системы,

$$a_{l+1} = [a_l, x_{l+1}] \in A_\alpha,$$

и мы пришли в противоречие с выбором индекса α.

Для доказательства обратного утверждения леммы сначала покажем, что если в группе G для любых элементов a и $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ хотя бы один из элементов (2) равен 1, то *это же выполняется в фактор-группе группы G по ее центру Z*. Пусть в G/Z заданы элементы aZ и $x_1Z, x_2Z, \ldots, x_kZ, \ldots$. Если элементы a_k группы G определены в соответствии с (2), то, по условию, есть такой номер k,

[1]) Напомним, что $[a, b]$ есть коммутатор элементов a и b.

[2]) Как следует из определения нормальной системы, подгруппа A_α из ряда (1) при предельном α будет объединением предшествующих подгрупп.

что $a_k = 1$. Поэтому

$$Z = a_k Z = [\ldots[[aZ, x_1 Z], x_2 Z], \ \ldots, x_k Z],$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если в группе G для любых элементов a и $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ хотя бы один из элементов (2) равен 1, то *G обладает нетривиальным центром*. В самом деле, если элемент a группы G не лежит в центре, то найдется такой элемент x_1, что коммутатор $a_1 = [a, x_1]$ отличен от единицы. Если он еще не лежит в центре, то найдется такой элемент x_2, что коммутатор $a_2 = [a_1, x_2]$ снова отличен от единицы. Этот процесс не может продолжаться до бесконечности, так как мы пришли бы в противоречие с предположением, сделанным о группе G, поэтому некоторое a_k будет отличным от единицы элементом из центра.

Из сказанного в двух предшествующих абзацах вытекает обратное утверждение леммы, так как возрастающая центральная цепь группы G будет доходить до самой группы.

Доказательство теоремы проводим теперь без труда. Если группа G не является ZA-группой, то, по лемме, в ней найдутся такие элементы a и $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, что ни один из элементов (2) не равен единице. Подгруппа $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ счетна, но снова, по лемме, не является ZA-группой. Теорема доказана. [См. Д.25.4.]

N-группы. Перейдем теперь к рассмотрению групп, в которых выполняется нормализаторное условие, или, короче, *N-групп*. Выше было отмечено, что *всякая ZA-группа будет N-группой*. Вопрос о справедливости обратного утверждения пока открыт.

Группа G тогда и только тогда будет N-группой, если через всякую подгруппу этой группы проходит возрастающий нормальный ряд.

В самом деле, если в N-группе G дана подгруппа A, то можно построить возрастающий нормальный ряд $[A_\alpha]$, полагая $A_0 = E$, $A_1 = A$, а затем при непредельном α беря в качестве A_α нормализатор подгруппы $A_{\alpha-1}$, а при предельном α — объединение всех A_β при $\beta < \alpha$. Эта система доходит, очевидно, до самой группы G. Обратно, если всякая подгруппа группы G входит в некоторый возрастающий нормальный ряд, то всякая истинная подгруппа будет нормальным делителем в некоторой большей подгруппе и, следовательно, отлична от своего нормализатора.

Пользуясь этим результатом, легко доказать, что *всякая подгруппа и всякая фактор-группа N-группы сами будут N-группами*. Так, если в N-группе G дана подгруппа A, содержащая, в свою очередь, подгруппу B, то пересечение с A возрастающего нормального ряда группы G, проходящего через B, дает после удаления повторений возрастающий нормальный ряд в A. Этим доказано, что A будет N-группой.

Естественным обобщением понятия N-группы является понятие $\widetilde{N}$-*группы*; это будет группа, через всякую подгруппу которой проходит некоторая нормальная система. Так же, как выше для N-групп, доказывается, что *всякая подгруппа и всякая фактор-группа* $\widetilde{N}$-*группы сами будут* $\widetilde{N}$-*группами*.

Заметим, что не всякая Z-группа является $\widetilde{N}$-группой, — в противном случае $\widetilde{N}$-группами были бы все свободные группы, а поэтому и все их фактор-группы, т. е. вообще все группы, что явно не имеет места. Вопрос о том, будет ли всякая $\widetilde{N}$-группа обладать свойством Z, пока открыт.

Следующая теорема указывает на другую форму определения $\widetilde{N}$-групп.

Группа G *тогда и только тогда будет* $\widetilde{N}$-*группой, если из того, что ее подгруппа* A *содержится в подгруппе* B*, причем между* A *и* B *нет промежуточных подгрупп, всякий раз вытекает, что* A *будет нормальным делителем в* B.

В самом деле, подгруппа B сама будет, как мы знаем, $\widetilde{N}$-группой, а поэтому в ней через подгруппу A проходит нормальная система. Так как, однако, между A и B нет промежуточных подгрупп, то эти две подгруппы составляют скачок в указанной нормальной системе, а поэтому A будет нормальным делителем в B.

Для доказательства обратного утверждения возьмем в группе G произвольную подгруппу A и покажем, что она содержится в некоторой нормальной системе. Для этого систему подгрупп

$$E \subset A \subset G,$$

которая не обязана, конечно, быть нормальной, уплотняем до такой упорядоченной системы подгрупп, которая уже не допускает дальнейших уплотнений. Эта новая система будет, очевидно, полной. Далее, ни в один скачок этой системы нельзя вставить ни одной промежуточной подгруппы, а поэтому, как вытекает из условий теоремы, первая подгруппа всякого скачка будет нормальным делителем в его второй подгруппе, т. е. построенная нами система подгрупп оказывается нормальной.

Бэр [24] доказал для $\widetilde{N}$-групп локальную теорему.

Всякая группа, локально обладающая свойством $\widetilde{N}$*, будет* $\widetilde{N}$-*группой*.

Пусть группа G обладает локальной системой, состоящей из подгрупп U^{α}, обладающих свойством $\widetilde{N}$, и пусть в G даны подгруппы A и B, причем $A \subset B$ и между A и B нет промежуточных подгрупп. Если A не будет нормальным делителем в B, то найдутся такие элементы $a \in A$ и $b \in B$, причем $b \notin A$, что

$$c = b^{-1}ab \notin A,$$

хотя, конечно, $c \in B$. Отсюда следует, что $\{A, c\} \neq A$, а поэтому $\{A, c\} = B$. Существует, следовательно, такая конечная система элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ подгруппы A, что элемент b может быть выражен через эти элементы и элемент c. В заданной локальной системе можно найти подгруппу U, содержащую элемент a, все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и элемент c. Поэтому $b \in U$, однако

$$b \notin V = U \cap A.$$

Если через W мы обозначим одну из максимальных среди подгрупп группы U, содержащих подгруппу V, но не содержащих элемента b, то между подгруппами W и $\{W, b\}$ уже не будет промежуточных подгрупп. Отсюда следует, так как U является $\widetilde{N}$-группой, что W будет нормальным делителем в $\{W, b\}$, а поэтому, так как

$$a \in V \subseteq W,$$

мы получим, что

$$c = b^{-1}ab \in W.$$

Но теперь и элемент b, записываемый, как мы знаем, через элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и c, должен содержаться в W в противоречие с предположением. Теорема доказана.

Локально нильпотентные группы. Назовем группу G *локально нильпотентной*, если она обладает локальной системой, состоящей из нильпотентных групп. Так как всякая подгруппа нильпотентной группы сама нильпотентна, то это определение равносильно тому, что всякая подгруппа группы G, порожденная конечным числом элементов, нильпотентна.

Всякая подгруппа и всякая фактор-группа локально нильпотентной группы сами локально нильпотентны, как вытекает из справедливости соответствующих утверждений для нильпотентных групп.

Все локально нильпотентные группы принадлежат, понятно, ко всякому классу обобщенных нильпотентных групп, для которого справедлива локальная теорема, т.е. и к классу Z-групп, и к классу $\widetilde{N}$-групп. Вспоминая определение Z-группы, мы получаем, что *локально нильпотентная группа, не являющаяся циклической группой простого порядка, не может быть простой*.

Мальцев [6] доказал следующую теорему.

Всякая ZA-группа локально нильпотентна.

Пусть, в самом деле, дана ZA-группа G с возрастающим центральным рядом

$$E = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_\alpha = G. \tag{3}$$

Назовем порядковое число α *длиной* этого центрального ряда и будем предполагать теорему доказанной для всех ZA-групп, обладающих возрастающим центральным рядом меньшей длины — при $\alpha = 1$,

т. е. для абелевых групп, теорема явно справедлива. Возьмем в G конечную систему элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{4}$$

Если число α предельное, то элементы (4) лежат в некоторой подгруппе Z_β, $\beta < \alpha$, а так как эта подгруппа обладает возрастающим центральным рядом длины β и $\beta < \alpha$, то, по индуктивному предположению, подгруппа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ нильпотентна.

Пусть, однако, число α непредельное. Тогда существуют такое предельное число β и такое натуральное число k, что $\alpha = \beta + k$. Возьмем всевозможные последовательные коммутаторы вида $[\ldots[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}], \ldots, a_{i_{k+1}}]$ при различных выборах $k+1$ элемента из системы (4). Таких коммутаторов конечное число, все они лежат в подгруппе Z_β, а поэтому, так как число β предельное, в некоторой подгруппе Z_γ, $\gamma < \beta$. Пусть

$$H = \{Z_\gamma, a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

В H можно следующим образом построить возрастающую центральную цепь. Началом этой цепи будет отрезок ряда (3) до Z_γ включительно. Дальше следует $Z'_{\gamma+1}$, соответствующее центру фактор-группы H/Z_γ, затем $Z'_{\gamma+2}$, соответствующее центру фактор-группы $H/Z'_{\gamma+1}$, и т. д. Так как подгруппа $Z'_{\gamma+1}$ заведомо содержит все последовательные коммутаторы k элементов из системы (4), то подгруппа $Z'_{\gamma+2}$ содержит все последовательные коммутаторы $k-1$ элемента из (4) и т. д. Таким образом, эта возрастающая центральная цепь доходит до H не более чем через k шагов, т. е. превращается в возрастающий центральный ряд, длина которого не превосходит $\gamma + k$. Так как число β предельное, а $\gamma < \beta$, то $\gamma + k$ строго меньше β и тем более меньше α. Отсюда, по индуктивному предположению, следует нильпотентность подгруппы $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Теорема доказана.

Опираясь на этот результат, Плоткин [2] доказал следующую т е о р е м у.

Всякая N-группа локально нильпотентна.

Доказательство использует следующие леммы.

Л е м м а 1 (Шмидт [6]). *Если нормальный делитель H N-группы G обладает нетривиальным центром Z и фактор-группа G/H циклическая, то и сама группа G имеет нетривиальный центр.*

По предположению, в G существует такой элемент a, что

$$G = \{H, a\}.$$

Центр Z характеристичен в H и поэтому будет нормальным делителем в G. С другой стороны, $\{Z, a\}$ как подгруппа N-группы сама будет N-группой, а поэтому или $Z \subset \{a\}$, или же подгруппа $\{a\}$ отлична в $\{Z, a\}$ от своего нормализатора. Всякий элемент из $\{Z, a\}$ имеет вид za^k, $z \in Z$, поэтому в обоих случаях нормализатор подгруппы $\{a\}$

в $\{Z, a\}$ содержит отличный от 1 элемент z из Z. Если коммутатор $[z, a]$ равен единице, то элемент z, лежащий в центре группы H, будет перестановочен и с a, т. е. принадлежит к центру группы G. Если же коммутатор $[z, a]$ отличен от единицы, то он входит и в центр Z подгруппы H, и в подгруппу $\{a\}$ — последнее ввиду выбора элемента z, — а поэтому элемент $[z, a]$ содержится в центре группы G.

Лемма 2. *Если нормальный делитель H N-группы G обладает возрастающим центральным рядом и фактор-группа G/H циклическая, то и сама группа G будет ZA-группой.*

По лемме 1 группа G обладает нетривиальным центром Z_1. Пусть в G уже построены члены верхней центральной цепи Z_α для всех α, меньших β. Если число β предельное, то полагаем, что Z_β есть объединение всех Z_α. Если же число $\beta - 1$ существует, то группа

$$HZ_{\beta-1}/Z_{\beta-1} \simeq H/(H \cap Z_{\beta-1})$$

как фактор-группа ZA-группы H обладает нетривиальным центром, группа $G/Z_{\beta-1}$ является ее расширением при помощи циклической группы, а поэтому, снова по лемме 1, центр группы $G/Z_{\beta-1}$ нетривиален. Его прообраз в G обозначим через Z_β. Верхняя центральная цепь группы G не может, следовательно, остановиться, пока не дойдет до самой группы G.

Лемма 3. *Если в N-группе G даны элементы a и x и если*

$$x_1 = x,\ x_{i+1} = [x_i, a], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то существует такое k, что $x_k = 1$.

Действительно, пусть $A_1 = \{a\}$. По определению N-группы через подгруппу A_1 проходит возрастающий нормальный ряд группы G,

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots \subset G. \tag{5}$$

Пусть все элементы x_i отличны от единицы и пусть A_{α_i} будет наименьшая среди подгрупп ряда (5), содержащих элемент x_i, $i = 1, 2, \ldots$. Индекс α_i не может быть предельным. Он не может, с другой стороны, быть единицей, так как мы получили бы тогда $x_{i+1} = 1$ в противоречие с предположением. Отсюда следует, что число $\alpha_i - 1$ существует и отлично от нуля, а поэтому

$$a \in A_{\alpha_i - 1}.$$

Так как ряд (5) нормальный, то и

$$x_i^{-1} a^{-1} x_i \in A_{\alpha_i - 1},$$

а поэтому и

$$x_i^{-1} a^{-1} x_i \cdot a = x_{i+1} \in A_{\alpha_i - 1}.$$

Этим доказано, что индексы α_i составляют строго убывающую последовательность

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_i > \ldots,$$

что противоречит, однако, полной упорядоченности ряда (5).

Лемма 4. *Если H — локально нильпотентный нормальный делитель N-группы G, причем*

$$G = \{H, a\},$$

то и группа G локально нильпотентна.

Всякая конечная система элементов группы G выражается через элемент a и конечное число элементов из H, поэтому достаточно доказать нильпотентность подгруппы, порожденной в G любой системой элементов вида

$$a, h', h'', \ldots, h^{(n)}, \quad h^{(k)} \in H, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Обозначим через F подгруппу, порожденную элементами

$$h^{(k)} = h_1^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

и всеми элементами

$$h_{i+1}^{(k)} = [h_i^{(k)}, a], \quad i = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Все элементы (7) и (8) лежат в H и отличных от единицы среди них, по лемме 3, лишь конечное число, а поэтому подгруппа F нильпотентна. Далее, F будет нормальным делителем в подгруппе $\overline{F}$, порожденной элементами (6), так как

$$a^{-1} h_i^{(k)} a = h_i^{(k)} h_{i+1}^{(k)}.$$

Фактор-группа $\overline{F}/F$ циклическая, поэтому, по лемме 2, $\overline{F}$ является ZA-группой. Используя, наконец, конечность числа образующих подгруппы $\overline{F}$ и доказанную выше теорему о локальной нильпотентности ZA-групп, мы получаем, что подгруппа $\overline{F}$ нильпотентна.

Переходим к доказательству теоремы. В N-группе G можно построить такой возрастающий нормальный ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\gamma = G, \tag{9}$$

что

$$H_{\alpha+1} = \{H_\alpha, a_\alpha\}, \quad 0 \leqslant \alpha < \gamma, \tag{10}$$

где a_α — лежащий вне H_α элемент из нормализатора подгруппы H_α в группе G. Если группа G не является локально нильпотентной, то пусть H_α будет первой среди подгрупп ряда (9), не являющихся локально нильпотентными. Число α не может быть предельным, так как объединение возрастающей последовательности локально нильпотентных групп само локально нильпотентно. Подгруппа $H_{\alpha-1}$ будет

уже локально нильпотентной и, ввиду леммы 4, мы приходим к противоречию. Теорема доказана. [См. Д.25.3.]

В связи с этой теоремой отметим, что в работах Черникова [4] и Шмидта [6] можно найти примеры локально нильпотентных групп, не удовлетворяющих нормализаторному условию. [См. Д.25.1.]

§ 64. Связи с разрешимыми группами. S-группы. Наложение условий конечности

Все нильпотентные группы, как мы знаем, разрешимы. Подобно этому для каждого класса обобщенных нильпотентных групп можно указать хотя бы один содержащий его класс обобщенных разрешимых групп.

Очевидны следующие утверждения: *всякая Z-группа является RI-группой*, *всякая локально нильпотентная группа будет локально разрешимой*, *а всякая ZA-группа принадлежит к классу RI^*-групп*.

Для ZA-групп можно указать еще один содержащий их класс обобщенных разрешимых групп (см. Бэр [30]; для доказательства см. Черников [3]).

Всякая ZA-группа G является RK-группой.

Действительно, если группа G абелева, то доказывать нечего. Если, же она некоммутативна, то воспользуемся следующей леммой Грюна [1].

Если некоторая группа G обладает отличным от E центром Z и если центр фактор-группы G/Z также отличен от E, то существует гомоморфное отображение группы G на отличную от E подгруппу группы Z.

В самом деле, предположения леммы показывают, что в возрастающей центральной цепи группы G подгруппа Z_2 отлична от подгруппы $Z_1 = Z$. Выбираем в Z_2 элемент a, лежащий вне Z, и всякому элементу x из G ставим в соответствие коммутатор $[a, x]$. Из того, что элемент a входит в подгруппу Z_2, соответствующую центру группы G/Z, следует $[a, x] \in Z$, а из $a \notin Z$ вытекает существование такого x_0, что $[a, x_0] \neq 1$. Гомоморфизм полученного нами нетривиального отображения G в Z следует из равенства

$$[a, x] \cdot [a, y] = [a, xy].$$

Действительно, ввиду $[x, a^{-1}] \in Z$, будет

$$[a, x] \cdot [a, y] = a^{-1}x^{-1}ax \cdot a^{-1}y^{-1}ay = a^{-1}y^{-1}(x^{-1}axa^{-1})ay = [a, xy].$$

Из этой леммы вытекает, что некоммутативная ZA-группа G обладает нетривиальной абелевой фактор-группой и поэтому отлична от своего коммутанта. Так как всякая подгруппа ZA-группы сама будет ZA-группой, то теорема доказана.

Докажем, наконец, следующие теоремы.

Всякая $\widetilde{N}$-группа является $\overline{RN}$-группой.

В самом деле, произвольную нормальную систему $\widetilde{N}$-группы G можно уплотнить до такой полной упорядоченной системы подгрупп, ни в один скачок которой уже нельзя вставить никакой промежуточной группы. Первая подгруппа всякого скачка будет поэтому ввиду свойства $\widetilde{N}$ нормальным делителем во второй подгруппе скачка, т. е. эта система оказывается нормальной, причем все ее факторы будут, очевидно, циклическими простых порядков.

Всякая N-группа является RN^*-группой.

Действительно, в конце предшествующего параграфа в любой N-группе G строился возрастающий нормальный ряд (9) со свойством (10). Факторы этого ряда будут, очевидно, циклическими.

Группы, обладающие инвариантной системой с циклическими факторами. Во всякой абелевой группе существует, очевидно, возрастающий инвариантный ряд с циклическими факторами. Пользуясь этим, можно доказать, что *всякая ZA-группа также обладает возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, а всякая Z-группа — инвариантной системой с циклическими факторами.*

Действительно, если дана, например, Z-группа G с центральной системой $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$, то во всякий скачок A_α, $A_{\alpha+1}$ этой системы может быть вставлен, как сказано выше, возрастающий ряд с циклическими факторами. Все члены этого ряда будут нормальными в группе G, так как фактор $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ лежит в центре фактор-группы G/A_α.

Обратное утверждение не имеет места уже для конечных групп. Так, симметрическая группа 3-й степени обладает главным рядом с циклическими факторами, но не является нильпотентной. Мы пришли, следовательно, к некоторому классу групп, промежуточному между разрешимыми и нильпотентными группами.

Справедлива следующая теорема (Черников [7]), в случае конечных групп превращающаяся в теорему Вендта.

Коммутант всякой группы, обладающей инвариантной системой с циклическими факторами, является Z-группой.

Пусть в группе G существует инвариантная система $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$ с циклическими факторами; так как все подгруппы циклической группы в ней характеристичны, то можно считать, что все факторы системы $\mathfrak{A}$ конечны. Пусть K — коммутант группы G. Пересечения

$$B_\alpha = A_\alpha \cap K$$

составят после удаления повторений инвариантную систему $\mathfrak{B}$ группы K, снова с конечными циклическими факторами. Пусть B_α, $B_{\alpha+1}$ — скачок системы $\mathfrak{B}$ и фактор-группа $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ является циклической группой порядка n, т. е. состоит из элементов $c^i B_\alpha$, где $c \in B_{\alpha+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Если x и y — произвольные элементы группы G,

то, так как подгруппы B_α и $B_{\alpha+1}$ нормальны в G, существуют такие показатели k и l, что

$$(xB_\alpha)(cB_\alpha)(xB_\alpha)^{-1} = c^k B_\alpha,$$
$$(yB_\alpha)(cB_\alpha)(yB_\alpha)^{-1} = c^l B_\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$(xyB_\alpha)(cB_\alpha)(xyB_\alpha)^{-1} = (yxB_\alpha)(cB_\alpha)(yxB_\alpha)^{-1} = c^{kl} B_\alpha,$$

т. е. элемент $[x, y]B_\alpha$ перестановочен с элементом cB_α. Этим доказано, что фактор-группа $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ лежит в центре фактор-группы K/B_α, т. е. что $\mathfrak{B}$ является центральной системой группы K. Теорема доказана. [См. Д. 23.4.]

Теперь может быть показано, по крайней мере для конечных групп, истинное место, которое занимают группы, обладающие инвариантным рядом с циклическими факторами. Мы знаем, что всякая разрешимая группа обладает инвариантным рядом с абелевыми факторами. Обратно, всякая группа, обладающая инвариантным рядом с любыми нильпотентными факторами, разрешима. Это позволяет классифицировать разрешимые группы по минимальной длине их инвариантных рядов с нильпотентными факторами. [См. Д.24.6.] Если эта длина не больше двух, т. е. если группа является расширением нильпотентной группы при помощи нильпотентной же, то назовем ее, по аналогии с метабелевыми группами, *метанильпотентной*.

Как показывает теорема Вендта, *всякая конечная группа, обладающая инвариантным рядом с циклическими факторами, метанильпотентна*.

Отметим, наконец, не приводя доказательства, следующую теорему, относящуюся к рассматриваемым нами классам групп (Бэр [24], см. также Курош и Черников [1]).

Всякая N-группа, обладающая инвариантной системой с циклическими факторами или возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, будет Z-группой или, соответственно, ZA-группой.

***S*-группы.** Мы до сих пор не пытались переносить на бесконечные группы одно из самых важных среди определений конечной нильпотентной группы, а именно представимость этих групп в виде произведения p-групп. Это может быть сделано следующим образом.

Назовем группу G *S-группой*, если по каждому простому числу p она обладает единственной силовской p-подгруппой, т. е. если в этой группе множество всех элементов конечного порядка является подгруппой, притом разложимой в прямое произведение p-групп. Назовем эту подгруппу *периодической частью* группы G.

Класс S-групп очень широк. К нему принадлежат, в частности, все p-группы, которые сами составляют весьма мало обозримый класс

групп. С другой стороны, всякая группа без кручения также удовлетворяет определению S-группы. Мы будем интересоваться поэтому лишь отношениями, существующими между S-группами и классами обобщенных нильпотентных групп, введенными в предшествующем параграфе.

Отметим сперва следующие очевидные свойства S-групп, используемые в дальнейшем: *всякая подгруппа S-группы сама является S-группой*. Обратно, *если группа G обладает локальной системой $\mathfrak{A} = [A^\alpha]$, составленной из S-подгрупп, то она сама будет S-группой*. Действительно, мы получим единственную силовскую p-подгруппу группы G, если объединим элементы силовских p-подгрупп всех подгрупп A^α.

В § 62 уже показано, что все N-группы, а поэтому и все нильпотентные группы, являются S-группами. Так как для свойства S справедлива локальная теорема, то мы приходим к такому более общему результату: *всякая локально нильпотентная группа является S-группой*.

С другой стороны, не всякая Z-группа будет S-группой (см. Мальцев [7]). Для $\widetilde{N}$-групп соответствующий вопрос пока открыт; некоторые частные результаты содержатся в работе Бэра [24].

Наложение условий конечности. Наложение того или иного условия конечности приводит, понятно, к появлению дополнительных связей между рассматриваемыми нами классами обобщенных нильпотентных групп. Так, справедлива следующая т е о р е м а.

В случае локально конечных групп следующие свойства эквивалентны друг другу: Z, $\widetilde{N}$, S *и локальная нильпотентность*.

Действительно, если локально конечная группа G обладает свойством Z, $\widetilde{N}$ или S, то все ее конечные подгруппы также будут обладать соответствующим свойством, т. е., по § 62, будут нильпотентными, а поэтому сама группа G локально нильпотентна. Обратно, если локально конечная группа G локально нильпотентна, то все ее конечные подгруппы обладают каждым из свойств Z, $\widetilde{N}$ и S, а тогда из справедливости для этих свойств локальных теорем вытекает, что сама группа G будет и Z-группой, и $\widetilde{N}$-группой, и S-группой.

Отметим, что из доказанной в § 59 локальной конечности периодических локально разрешимых групп вытекает, что *всякая периодическая локально нильпотентная группа локально конечна*. Последовательно сужая этот результат, мы получим *локальную конечность периодических N-групп, ZA-групп и нильпотентных групп*.

Наложим теперь на рассматриваемые группы у с л о в и е м и н и м а л ь н о с т и д л я п о д г р у п п. При этом условии свойство $\widetilde{N}$ превращается, очевидно, в свойство N, а свойство Z — в свойство ZA; поэтому, как только что было отмечено, периодичность группы, вытекающая из условия минимальности, превращается в каждом из этих двух случаев в локальную конечность. Таким образом, теорема,

доказанная выше для локально конечных групп, приводит к следующему результату (Черников [3]).

В случае групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, эквивалентны друг другу: 1) *свойство* ZA, 2) *свойство* N *и* 3) *объединение локальной конечности и свойства* S.

Группы, для которых эта теорема дает три эквивалентных определения, и периодичны, и обладают свойством S, а поэтому разложимы в прямое произведение p-групп. Назовем *p-группами Черникова* группы, удовлетворяющие любому из следующих эквивалентных между собою определений: это будут

1) p-группы с условием минимальности для подгрупп, обладающие возрастающим центральным рядом;

2) p-группы, удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп и нормализаторному условию;

3) локально конечные p-группы с условием минимальности для подгрупп.

Для p-групп Черникова можно дать также ряд других определений, и именно возможность посмотреть на эти группы с разных сторон делает их особенно интересными. Так, *для p-групп Черникова можно принять также любое из следующих двух определений*: *это будут*

4) разрешимые p-группы с условием минимальности для подгрупп;

5) p-группы с условием минимальности для подгрупп, обладающие полным абелевым нормальным делителем конечного индекса.

В самом деле, *из* 1) *следует* 4): как отмечено в начале этого параграфа, всякая ZA-группа является RI-группой, а поэтому при условии минимальности для подгрупп она будет, по теореме Черникова из § 59, разрешимой. С другой стороны, из 4) *следует* 3), так как в § 59 доказана локальная конечность любой периодической разрешимой группы. Наконец, *эквивалентность определений* 4) *и* 5) непосредственно вытекает из указанной теоремы Черникова.

Определение 5) интересно тем, что оно сводит описание всех p-групп Черникова на описание конечных p-групп: это будут ввиду изложенного в § 53 описания абелевых групп с условием минимальности, всевозможные расширения прямого произведения конечного числа групп типа p^∞ при помощи конечной p-группы и только они. Заметим, что полный абелев нормальный делитель конечного индекса определяется в p-группе Черникова однозначно (см. доказательство теоремы Черникова в § 59). Заметим также, что в определении 5) требование полноты абелева нормального делителя конечного индекса можно опустить, так как, по § 53, всякая абелева группа с условием минимальности обладает полной характеристической подгруппой конечного индекса.

Укажем, наконец, не приводя доказательств, четыре теоремы, позволяющие дать иные определения p-групп Черникова.

p-группа, обладающая возрастающим центральным рядом, тогда и только тогда будет p-группой Черникова, если все факторы ее верхнего центрального ряда удовлетворяют условию минимальности (Мухаммеджан [2]).

Локально конечная p-группа тогда и только тогда будет p-группой Черникова, если она удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп (Шмидт [6], Черников [20]).

Локально конечные p-группы конечного специального ранга (см. § 53) *и только они являются p-группами Черникова* (Мягкова [1]).

p-группа тогда и только тогда изоморфна некоторой группе матриц над некоторым полем нулевой характеристики, если она является p-группой Черникова (Мальцев [2]).

Наложение других условий конечности не приводит к столь законченной теории, и мы ограничимся указанием немногих результатов.

При условии максимальности для подгрупп всякая локально нильпотентная группа будет нильпотентной, так как из условия максимальности вытекает конечность числа образующих (см. § 53). В этом результате содержится, ввиду теоремы Плоткина из предшествующего параграфа, доказанная Гиршем [5] теорема о нильпотентности всякой N-группы, удовлетворяющей условию максимальности для подгрупп.

В работах Мягковой [1] и Мальцева [10] указаны некоторые другие условия конечности, при которых локальная нильпотентность группы влечет за собою ее нильпотентность.

Приведем, наконец, следующую теорему (Бэр [32]; доказательство, излагаемое ниже, принадлежит Ю. Г. Федорову). Эта теорема показывает, что в случае нильпотентных групп условие максимальности для подгрупп может быть заменено много более простым предположением.

Если фактор-группа нильпотентной группы G по ее коммутанту имеет конечное число образующих, то конечным числом образующих обладают все факторы нижнего центрального ряда группы G, а сама группа удовлетворяет условию максимальности для подгрупп. Для нильпотентных групп условия максимальности для подгрупп и конечности числа образующих будут, следовательно, равносильными.

Будем вести доказательство индукцией по классу нильпотентной группы G, так как для абелевых групп теорема очевидна. Пусть

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1} \supset G_k \supset G_{k+1} = E \qquad (1)$$

— нижний центральный ряд группы G. Для фактор-группы G/G_k нижним центральным рядом служит ряд

$$G/G_k \supset G_1/G_k \supset \ldots \supset G_{k-1}/G_k \supset G_k/G_k = E,$$

поэтому, по индуктивному предположению, для G/G_k теорема справедлива. Отсюда следует, что группа G/G_k обладает конечной системой образующих

$$x_1G_k,\ x_2G_k,\ \ldots,\ x_sG_k.$$

Отсюда следует также конечность числа образующих во всех факторах ряда (1), кроме последнего; в частности, фактор G_{k-1}/G_k обладает конечной системой образующих

$$y_1G_k,\ y_2G_k,\ \ldots,\ y_iG_k.$$

Мы знаем, далее, что подгруппа G_k лежит в центре группы G и порождается всевозможными коммутаторами вида $[x, y]$, где $x \in G$, $y \in G_{k-1}$. Элемент x можно записать, однако, в виде слова v из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_s$, умноженного на элемент из G_k, т. е. на элемент из центра; аналогично элемент y записывается в виде слова w из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_t$, также умноженного на элемент из центра. Коммутатор $[x, y]$ равен, следовательно, коммутатору слов v и w. Этот последний коммутатор можно записать, однако, в виде произведения степеней коммутаторов $[x_i, y_j]$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, t$ — достаточно воспользоваться свойствами коммутаторов (1)–(4) из § 14 и учесть, что всякий коммутатор элемента из G с элементом из G_{k-1} лежит в центре группы G. Этим доказана конечность числа образующих в подгруппе G_k. Таким образом, все факторы ряда (1) обладают конечным числом образующих, а так как нильпотентная группа G разрешима и (1) — ее разрешимый ряд, то, по теореме Гирша из § 59, в G выполняется условие максимальности для подгрупп.

Работа Бэра [32] содержит также ряд других результатов, близких к только что доказанному или его обобщающих. [См. Д.27.2.]

§ 65. Полные нильпотентные группы

Полные абелевы группы играют в теории абелевых групп, как мы знаем, очень большую роль; их исчерпывающее описание дано в § 23. Определение полной группы без труда переносится и на случай некоммутативных групп, а именно: группа G называется *полной*, если для любого ее элемента a и любого натурального числа n уравнение

$$x^n = a$$

имеет в G хотя бы одно решение, т. е. если из любого элемента извлекается корень любой степени.

Произвольная полная группа может иметь очень сложное строение. Естественно ожидать, однако, что полные нильпотентные группы,

ближайшие к полным абелевым, могут стать предметом достаточно далеко идущей теории. Такая теория была построена Черниковым [10, 13] и ее изложению посвящается настоящий параграф. При этом оказалось целесообразным не ограничиваться полными нильпотентными группами, а изучать сразу любые полные ZA-группы, причем некоторые из полученных здесь результатов на произвольные полные локально нильпотентные группы уже не могут быть распространены.

Будем называть группу G *полной в смысле Черникова*, если при любом натуральном n она порождается n-ми степенями всех своих элементов. *Всякая полная группа будет, конечно, полной в смысле Черникова.* Обратное, очевидное для абелевых групп, в общем случае не имеет места, а для ZA-групп будет доказано после ряда предварительных рассмотрений. До получения этого результата мы будем под полной группой понимать группу, полную в смысле Черникова, нигде не оговаривая этого во избежание загромождения формулировок.

ZA-группа тогда и только тогда полна, если она не содержит истинных подгрупп конечного индекса.

Действительно, если бы полная группа G, даже не обязательно ZA-группа, обладала истинной подгруппой конечного индекса, то в ней нашелся бы и истинный нормальный делитель конечного индекса. Однако полная группа не может иметь нетривиальных конечных фактор-групп, так как гомоморфный образ полной группы сам будет полным, а конечная группа, отличная от E, никогда не полна — достаточно в качестве числа n взять порядок этой группы.

Обратно, пусть ZA-группа G не содержит истинных подгрупп конечного индекса и пусть n — произвольное натуральное число. Обозначим через H подгруппу, порожденную n-ми степенями всех элементов группы G. Нужно доказать, что $G = H$. Если это не так, то, так как H нормально в G, рассмотрим фактор-группу G/H. Она или сама абелева, или же, являясь ZA-группой, обладает ввиду леммы Грюна из § 64 нетривиальной абелевой фактор-группой. В обоих случаях мы находим в группе G нетривиальную абелеву фактор-группу с ограниченными в совокупности порядками элементов. Такая абелева группа, как показывает первая теорема Прюфера (§ 24), разложима в прямое произведение циклических групп и поэтому обладает истинной подгруппой конечного индекса, которой соответствует истинная подгруппа конечного индекса группы G в противоречие с предположением. Теорема доказана.

Периодическая часть полной ZA-группы G содержится в центре этой группы.

В самом деле, пусть

$$E = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_\alpha \subset Z_{\alpha+1} \subset \ldots \subset Z_\gamma = G$$

будет верхний центральный ряд группы G и a — отличный от единицы элемент конечного порядка из этой группы,

$$a^n = 1. \tag{1}$$

Существует такое α, что

$$a \notin Z_\alpha, \quad a \in Z_{\alpha+1}.$$

Нужно доказать, что $\alpha = 0$.

Пусть $\alpha = 1$. Докажем, что для любого элемента x из G элемент x^n перестановочен с a. Действительно, подгруппа $H = \{a, x\}$ будет нильпотентной и, так как $a \in Z_2$, класс ее не выше двух, а поэтому по (3′) и (4′) из § 14

$$[a, x^n] = [a, x]^n = [a^n, x] = [1, x] = 1.$$

Так как ввиду полноты группы G всякий ее элемент записывается в виде произведения n-х степеней некоторых элементов, то a оказывается лежащим в центре группы G в противоречие с предположением $\alpha = 1$.

Пусть β — некоторое порядковое число, большее единицы, и пусть уже доказана невозможность неравенств $1 \leqslant \alpha < \beta$. Положим $\alpha = \beta$. В этом случае $a \in Z_{\beta+1}$, а поэтому при любом x из G коммутатор $[x, a]$ содержится в Z_β. Однако

$$[x, a] = (x^{-1}a^{-1}x)a.$$

Справа стоит произведение двух множителей конечного порядка, поэтому и элемент $[x, a]$ принадлежит к периодической части группы G, т. е. имеет конечный порядок. Отсюда следует, по индуктивному предположению, что этот коммутатор, как содержащийся в Z_β, должен принадлежать даже к центру Z_1 группы G. Так как элемент x был произвольным, то мы получаем, что в действительности $a \in Z_2$ в противоречие с предположением $\beta > 1$.

Теорема доказана. Из нее вытекает, что *всякая периодическая полная ZA-группа будет абелевой*. Некоторые обобщения этого последнего результата можно найти в работе Мухаммеджана [2]. Однако распространить его на любые периодические полные локально нильпотентные группы невозможно, как показывает построенный Черниковым [10] пример некоммутативной полной локально конечной p-группы.

Если периодическая часть F полной ZA-группы G конечна, то $F = E$, т. е. G — группа без кручения. Сверх того, G обладает в этом случае возрастающим центральным рядом, все факторы которого — полные абелевы группы без кручения. Можно считать даже, что все эти факторы имеют ранг 1.

Выше уже доказано, что подгруппа F содержится в центре Z группы G. Если группа G абелева, то все доказано, так как периодическая часть полной абелевой группы или равна E, или бесконечна, а полная абелева группа без кручения разлагается в прямое произведение

групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел (см. § 23). В противном случае в Z существует ввиду леммы Грюна (§ 64) нетривиальная подгруппа, на которую G гомоморфно отображается. Она будет полной группой, как гомоморфный образ полной группы. Обозначим через L_1 любую полную подгруппу группы Z; при этом можно, понятно, считать, что она имеет ранг 1. L_1 будет нормальным делителем группы G, как подгруппа центра. Далее,

$$L_1 \cap F = E,$$

как вытекает из сказанного выше о периодической части полной абелевой группы. Наконец, периодическая часть фактор-группы G/L_1 совпадает с FL_1/L_1 и поэтому конечна. Действительно, если элемент aL_1 имеет в этой фактор-группе конечный порядок n, то $a^n \in L_1$. Так как L_1 — полная абелева группа, то в ней найдется такой элемент b, что $a^n = b^n$, откуда, так как b лежит в центре, $(ab^{-1})^n = 1$, т. е. $ab^{-1} \in F$; поэтому

$$aL_1 = (ab^{-1})L_1 \subset FL_1/L_1.$$

Пусть в G уже построена строго возрастающая цепь нормальных делителей

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_\alpha \subset \ldots, \tag{2}$$

где α меньше порядкового числа β, причем для всех α

$$L_\alpha \cap F = E,$$

периодическая часть фактор-группы G/L_α совпадает с FL_α/L_α, а фактор $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ при $\alpha + 1 < \beta$ лежит в центре группы G/L_α и является полной абелевой группой без кручения. Если число β предельное, то в качестве L_β берем объединение всех L_α, $\alpha < \beta$. Это будет нормальный делитель группы G и его пересечение с F равно E. Найдем периодическую часть фактор-группы G/L_β. Если смежный класс aL_β имеет в G/L_β конечный порядок n, т. е. $a^n \in L_\beta$, то существует такое α, меньшее β, что $a^n \in L_\alpha$. Поэтому, по индуктивному предположению, класс aL_α содержится в фактор-группе FL_α/L_α, т. е.

$$aL_\alpha = cL_\alpha, \quad c \in F,$$

а тогда

$$aL_\beta = cL_\beta,$$

т. е. $aL_\beta \subset FL_\beta/L_\beta$.

Пусть теперь число $\beta - 1$ существует. Фактор-группа $G/L_{\beta-1}$ удовлетворяет всем условиям, которым удовлетворяла исходная группа G. В ее центре найдется поэтому нетривиальный полный нормальный делитель $L_\beta/L_{\beta-1}$, пересечение которого с периодической частью $FL_{\beta-1}/L_{\beta-1}$ группы $G/L_{\beta-1}$ равно единице. Отсюда следует

$$L_\beta \cap FL_{\beta-1} = L_{\beta-1},$$

а так как, по предположению, $L_{\beta-1} \cap F = E$, то и

$$L_\beta \cap F = E.$$

Далее, периодическая часть фактор-группы

$$(G/L_{\beta-1})/(L_\beta/L_{\beta-1})$$

совпадает с

$$(FL_{\beta-1}/L_{\beta-1}) \cdot (L_\beta/L_{\beta-1})/(L_\beta/L_{\beta-1}),$$

откуда следует, что периодическая часть фактор-группы G/L_β совпадает с FL_β/L_β. Отметим, наконец, что группу $L_\beta/L_{\beta-1}$ можно было бы выбрать так, чтобы ее ранг был равен 1.

Таким образом, строго возрастающая цепь (2) может продолжаться до тех пор, пока некоторое L_α не совпадет с G. Это, однако, при $F \neq E$ никогда не может наступить, так как пересечение подгруппы F с любым L_α равно E. Доказано, следовательно, что $F = E$. Возрастающая цепь (2), доведенная до самой группы G, превращается теперь в искомый возрастающий центральный ряд этой группы. Последнее утверждение теоремы вытекает из замечаний, которые делались по ходу доказательства.

Докажем теперь теорему, которая при том определении полноты, с которого мы начали параграф, не нуждалась бы в доказательстве.

Периодическая часть F полной ZA-группы G сама полна.

Если подгруппа F обладает истинной подгруппой конечного индекса F_0, то последняя, как подгруппа центра, будет в G нормальным делителем. Фактор-группа G/F_0 полна и является ZA-группой, но ее периодическая часть F/F_0 конечна и отлична от E в противоречие с доказанным выше. Отсюда следует, что подгруппа F не может иметь истинных подгрупп конечного индекса, а поэтому, будучи абелевой, она должна быть полной, как вытекает хотя бы из первой теоремы этого параграфа. Теорема доказана.

Опираясь на этот и предшествующие результаты, докажем теорему:

Всякая полная ZA-группа G обладает возрастающим центральным рядом

$$E \subseteq L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_\alpha \subset \ldots \subset L_\gamma = G, \tag{3}$$

где L_0 — периодическая полная абелева группа, быть может совпадающая с E, а все следующие факторы являются полными абелевыми группами без кручения. Можно считать даже, что все эти факторы имеют ранг 1.

Действительно, в качестве L_0 следует взять периодическую часть группы G. Она, как доказано, лежит в центре и полна. Фактор-группа по ней будет полной ZA-группой без кручения и поэтому остается применить доказанную выше теорему.

Теперь уже может быть доказана теорема

Если ZA-группа G полна в смысле Черникова, то она будет полной и в смысле исходного определения этого параграфа.

Пусть даны элемент a группы G и натуральное число n. Нужно доказать, что уравнение

$$x^n = a$$

обладает в группе G хотя бы одним решением. Строим в группе G возрастающий центральный ряд (3) в соответствии с предшествующей теоремой. Существует такое α, что

$$a \notin L_\alpha, \quad a \in L_{\alpha+1}.$$

Так как фактор-группа $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ является полной абелевой, то в $L_{\alpha+1}$ существует такой элемент x_1, что

$$aL_\alpha = (x_1 L_\alpha)^n,$$

откуда

$$a = x_1^n a_1, \quad a_1 \in L_\alpha. \tag{4}$$

Существует такой индекс α_1, $\alpha_1 < \alpha$, что

$$a_1 \notin L_{\alpha_1}, \quad a_1 \in L_{\alpha_1+1}.$$

Мы знаем, что фактор-группа $L_{\alpha_1+1}/L_{\alpha_1}$ является полной абелевой и лежит в центре фактор-группы G/L_{α_1}. В L_{α_1+1} существует, следовательно, такой элемент x_2, что

$$a_1 L_{\alpha_1} = (x_2 L_{\alpha_1})^n.$$

Отсюда ввиду (4)

$$aL_{\alpha_1} = (x_1 L_{\alpha_1})^n (x_2 L_{\alpha_1})^n = (x_1 x_2)^n L_{\alpha_1},$$

а поэтому

$$a = (x_1 x_2)^n a_2; \quad a_2 \in L_{\alpha_1}.$$

Пусть уже найдена убывающая конечная система индексов,

$$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_{s-1},$$

причем

$$a = (x_1 x_2 \ldots x_s)^n a_s, \quad a_s \in L_{\alpha_{s-1}}.$$

Тогда есть такой индекс α_s, $\alpha_s < \alpha_{s-1}$, что

$$a_s \notin L_{\alpha_s}, \quad a_s \in L_{\alpha_{s+1}}.$$

Повторяя предшествующие рассмотрения, мы получим, что

$$a = (x_1 x_2 \ldots x_s x_{s+1})^n a_{s+1}, \quad a_{s+1} \in L_{\alpha_s}.$$

После конечного числа шагов мы придем к равенству

$$a = (x_1 x_2 \ldots x_t)^n a_t,$$

где $a_t \in L_0$ или, при $L_0 = E$, $a_t \in L_1$. В полной абелевой группе L_0 (или L_1) существует такой элемент x_{t+1}, что

$$a_t = x_{t+1}^n,$$

а так как x_{t+1} лежит в центре группы G, то

$$a = (x_1 x_2 \dots x_t x_{t+1})^n,$$

что и требовалось доказать.

Начиная с этого момента полноту группы мы будем понимать в смысле возможности неограниченного извлечения корней из всех элементов группы.

Следующая основная теорема достаточно хорошо описывает строение полных ZA-групп; в коммутативном случае она превращается в известное нам описание строения полных абелевых групп.

Во всякой полной ZA-группе G можно найти систему подгрупп

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots, \quad \alpha < \gamma, \tag{5}$$

обладающую следующими свойствами:

1) *Каждая подгруппа A_α, $0 \leqslant \alpha < \gamma$, является или группой типа p^∞ по некоторому простому p, или же группой, изоморфной аддитивной группе всех рациональных чисел.*

2) *Подгруппа B_β, $0 < \beta \leqslant \gamma$, порожденная всеми подгруппами A_α, $0 \leqslant \alpha < \beta$, будет нормальным делителем группы G.*

3) *Для всех β, $0 < \beta < \gamma$,*

$$B_\beta \cap A_\beta = E.$$

4) $B_\gamma = G$.

Обратно, всякая группа G, обладающая системой подгрупп (5) *со свойствами* 1)–4), *будет полной ZA-группой.*

Доказательство. Пусть G — полная ZA-группа. Выше было доказано, что она обладает таким возрастающим центральным рядом

$$E \subseteq L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_\alpha \subset \dots \subset L_\gamma = G,$$

что L_0 — периодическая полная абелева группа, а все факторы $L_{\alpha+1}/L_\alpha$, $\alpha = 0, 1, \dots$, — полные абелевы группы без кручения ранга 1. Если подгруппа L_0 отлична от E, то она разлагается в прямое произведение групп типа p^∞ по некоторым p; пусть это будут группы $A_0, A_1, \dots, A_\alpha, \dots$, где α меньше некоторого порядкового числа δ. Таким образом, требование 3) выполняется при $0 < \beta < \delta$. Кроме того, так как подгруппа L_0 лежит в центре группы G, требование 2) выполняется при $0 < \beta \leqslant \delta$.

Мы знаем, далее, что L_α, $\alpha \geqslant 0$, является нормальным делителем в G и поэтому в $L_{\alpha+1}$. Покажем, что расширение $L_{\alpha+1}$ группы L_α расщепляемо.

Пусть x_1 — любой элемент группы $L_{\alpha+1}$, лежащий вне L_α. Определим индуктивно элементы x_k, $k = 2, 3, \ldots$: элемент x_k есть одно из решений уравнения

$$x^k = x_{k-1};$$

оно существует ввиду полноты группы G. Так как смежный класс $x_1 L_\alpha$ имеет бесконечный порядок в фактор-группе $L_{\alpha+1}/L_\alpha$, то и порядок элемента x_1 бесконечен и, кроме того,

$$\{x_1\} \cap L_\alpha = E.$$

Таким образом, элемент x_1 содержится в некоторой подгруппе, изоморфной аддитивной группе рациональных чисел (см. § 7); обозначим эту подгруппу через A'_α.

Из равенства

$$(x_k L_\alpha)^k = x_{k-1} L_\alpha$$

следует, что элементы $x_k L_\alpha$, $k = 1, 2, \ldots$, порождают в группе $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ подгруппу, изоморфную аддитивной группе рациональных чисел, т. е. изоморфную самой группе $L_{\alpha+1}/L_\alpha$. Однако абелева группа $L_{\alpha+1}/L_\alpha$, являясь неразложимой в прямую сумму, не может содержать истинных полных подгрупп. Этим доказано, что во всяком смежном классе группы $L_{\alpha+1}$ по подгруппе L_α содержится по одному и только одному элементу из подгруппы A'_α, что и требовалось доказать.

Мы знаем, что

$$B_\delta = \{A_\alpha, 0 \leqslant \alpha < \delta\} = L_0.$$

Индукцией по β без труда устанавливается, что

$$\{L_0; A'_\alpha, 0 \leqslant \alpha < \beta\} = L_\beta, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma.$$

Таким образом, все требования первой половины теоремы будут удовлетворены, если в качестве системы (5) взять систему подгрупп

$$A_\alpha, 0 \leqslant \alpha < \delta; A'_{\alpha'}, \quad 0 \leqslant \alpha' < \gamma.$$

Переходим к доказательству второй половины теоремы. Сперва докажем лемму:

Если группа A, изоморфная группе типа p^∞ или аддитивной группе рациональных чисел, является нормальным делителем группы G, не имеющей истинных подгрупп конечного индекса, то A содержится в центре группы G.

Пусть сначала A — группа типа p^∞, a — любой ее элемент. Подгруппа $\{a\}$ будет циклической некоторого порядка p^n. Группа A обладает единственной подгруппой этого порядка, поэтому подгруппа $\{a\}$ характеристична в A и, следовательно, нормальна в G. Таким образом, элемент a обладает в группе G конечным числом сопряженных элементов, а так как, по условию, в G нет истинных подгрупп конечного индекса, то a лежит в центре группы G.

Пусть теперь группа A изоморфна аддитивной группе рациональных чисел. Мы знаем из § 21, что группа автоморфизмов Γ группы A изоморфна мультипликативной группе отличных от нуля рациональных чисел, т. е. разлагается в прямое произведение циклических групп (см. § 17). Всякая подгруппа группы Γ также будет разлагаться в прямое произведение циклических групп (см. § 24) и поэтому не может быть полной.

Трансформирование подгруппы A любым элементом группы G порождает в A автоморфизм. Мы получаем гомоморфное отображение группы G на некоторую подгруппу Γ' группы Γ. Так как G не содержит, по условию, истинных подгрупп конечного индекса, то таких подгрупп нет и в группе Γ'. Абелева группа Γ' будет, следовательно, полной и поэтому ввиду сказанного выше $\Gamma' = E$. Этим доказано, что подгруппа A лежит в центре группы G. Доказательство леммы закончено.

Пусть теперь дана группа G, обладающая системой подгрупп (5) со свойствами 1)–4). Покажем, что группа G не имеет истинных подгрупп конечного индекса. Ясно, что таких подгрупп нет в подгруппе $B_1 = A_0$, являющейся полной абелевой группой. Пусть уже доказано, что подгрупп конечного индекса нет ни в одной из подгрупп B_α, $0 < \alpha < \beta$. Если число β предельное, то таких подгрупп нет и в B_β, так как B_β является объединением всех B_α, $\alpha < \beta$, а пересечение подгруппы конечного индекса из B_β с любой из подгрупп B_α давало бы подгруппу конечного индекса в B_α, т. е. совпадало бы с B_α.

Пусть теперь число $\beta - 1$ существует. Если группа B_β содержит подгруппу конечного индекса H, то, как и выше, $H \supset B_{\beta-1}$, а поэтому $H/B_{\beta-1}$ будет подгруппой конечного индекса в

$$B_\beta/B_{\beta-1} \simeq A_{\beta-1},$$

что невозможно.

Этим доказано, что подгрупп конечного индекса нет ни в одной из подгрупп B_β, в том числе и в группе $B_\gamma = G$. Таких подгрупп не содержит, следовательно, и ни одна из фактор-групп G/B_β, $0 < \beta < \gamma$. Отсюда следует ввиду леммы, что подгруппа $B_1 = A_0$, являющаяся нормальным делителем в G, лежит в центре группы G и что при $0 < \beta < \gamma$ подгруппа $B_{\beta+1}/B_\beta$, изоморфная группе A_β и нормальная в группе G/B_β, лежит в центре этой последней группы. Таким образом,

$$E \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\beta \subset \ldots \subset B_\gamma = G$$

будет возрастающим центральным рядом группы G, т. е. эта группа оказалась ZA-группой. Из отсутствия в G истинных подгрупп конечного индекса следует теперь, ввиду первой теоремы настоящего параграфа, полнота этой группы. Доказательство теоремы закончено.

В работах Черникова [10, 13, 19] можно найти, помимо указанных выше, ряд других свойств полных ZA-групп. См. также Чарин [3].

§ 66. Группы с однозначным извлечением корня

Всякий раз, когда мы занимались локально конечными группами, или p-группами, или группами с условием минимальности для подгрупп, мы оставались в области периодических групп. Противоположный случай, а именно группы без кручения, также весьма интересен.

Конечно, произвольные некоммутативные группы без кручения составляют необозримо широкий класс групп. Более узок класс *групп с однозначным извлечением корня* или, короче, *R-групп*: это группы, в которых для любого элемента a и любого натурального числа n уравнение

$$x^n = a$$

имеет не больше одного решения; иными словами, для любых элементов x и y и любого натурального числа n из $x^n = y^n$ всегда следует $x = y$.

Очевидно, что всякая R-группа является группой без кручения и что все абелевы группы без кручения принадлежат к числу R-групп. Легко проверяется также, что всякая свободная группа является R-группой. С другой стороны, *не всякая группа без кручения будет R-группой*: группа с образующими a, b и определяющим соотношением $a^2 = b^2$, т. е. свободное произведение двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой, является ввиду § 35 группой без кручения, но не R-группой.

Изучению R-групп посвящены работы Конторовича [5, 7]; см. также Плоткин [1, 3]. Мы ограничимся указанием, следуя в основном Конторовичу [5], некоторых основных свойств этих групп.

В теории R-групп большую роль играет понятие сервантной подгруппы, перенесенное из теории абелевых групп (см. §§ 25, 30); оно, однако, чаще носит здесь другое название. Подгруппа A R-группы G называется *изолированной подгруппой* этой группы, если для любого элемента a из A и любого натурального числа n решение уравнения

$$x^n = a,$$

если оно существует в G, принадлежит к A.

Сама группа G и ее единичная подгруппа изолированы в G. Ввиду однозначности извлечения корня *пересечение любого множества изолированных подгрупп R-группы само изолировано*. Отсюда следует существование единственной минимальной изолированной подгруппы R-группы G, содержащей данное множество элементов M; эта подгруппа называется *изолятором* множества M в группе G и обозначается через $I(M)$.

Очевидно, что *нормальный делитель H R-группы G тогда и только тогда изолирован, если фактор-группа G/H является группой без кручения*. Заметим, что эта фактор-группа не обязана быть R-группой.

Если в R-группе G дан изолированный нормальный делитель H, причем фактор-группа G/H является R-группой, то при естественном взаимно однозначном соответствии, существующем между всеми подгруппами группы G/H и всеми теми подгруппами группы G, которые содержат H, изолированные подгруппы соответствуют друг другу.

Действительно, пусть подгруппа A группы G содержит H и изолирована. Если

$$(gH)^n = aH, \quad g \in G, \quad a \in A,$$

то $g^n = ah \in A$, а поэтому ввиду изолированности A будет $g \in A$, т. е. gH входит в подгруппу A/H. Обратно, пусть подгруппа A/H изолирована в группе G/H. Если

$$g^n = a, \quad g \in G, \quad a \in A,$$

то

$$(gH)^n = aH,$$

т. е. ввиду изолированности подгруппы A/H элемент gH входит в эту подгруппу, а поэтому $g \in A$.

Централизатор любого множества элементов R-группы является изолированной подгруппой.

В самом деле, пусть в R-группе G дано множество M. Пусть, далее, элемент x таков, что x^n принадлежит к централизатору множества M, т. е. для любого a из M $\quad a^{-1}x^n a = x^n$. Отсюда

$$(a^{-1}xa)^n = x^n$$

и поэтому, по определению R-группы,

$$a^{-1}xa = x,$$

т. е. сам элемент x принадлежит к централизатору множества M.

Отсюда следует, что *центр R-группы изолирован*. Этим не утверждается, понятно, что центр R-группы отличен от единицы.

Во всякой R-группе G для любых элементов a, b из равенства

$$a^k b^l = b^l a^k$$

вытекает равенство

$$ab = ba.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда один из показателей, например l, равен 1, т. е. $a^k b = ba^k$. Тогда

$$(b^{-1}ab)^k = b^{-1}a^k b = b^{-1}ba^k = a^k.$$

Отсюда, по определению R-группы,

$$b^{-1}ab = a,$$

что и требовалось доказать.

Справедлива следующая теорема.

Группа без кручения тогда и только тогда будет R-группой, если R-группой является ее фактор-группа по центру.

В самом деле, мы уже знаем, что центр Z R-группы G изолирован и поэтому G/Z является группой без кручения. Пусть

$$(xZ)^n = (yZ^n), \quad x, y \in G.$$

Отсюда

$$x^n = y^n z, \quad z \in Z. \tag{1}$$

Это равенство показывает, что элементы x^n и y^n перестановочны между собой, а поэтому, как доказано выше, перестановочны и сами элементы x и y. Из равенства (1) следует теперь равенство

$$(y^{-1}x)^n = z,$$

т. е., ввиду изолированности Z, $y^{-1}x \in Z$, откуда $xZ = yZ$.

Обратно, пусть фактор-группа группы без кручения G по ее центру Z является R-группой. Если

$$x^n = y^n, \tag{2}$$

где x, y — элементы группы G, то $(xZ)^n = (yZ)^n$. Отсюда, так как G/Z есть R-группа,

$$xZ = yZ$$

или $x = yz$, $z \in Z$. Возводя в степень n, мы получим

$$x^n = y^n z^n.$$

Ввиду (2) будет $z^n = 1$, т. е., так как G — группа без кручения, $z = 1$, а поэтому $x = y$.

Опираясь на изложенные результаты, легко доказать теорему:

Все члены верхней центральной цепи

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$$

R-группы G изолированы в G, все факторы $Z_\alpha/Z_{\alpha-1}$ этой цепи (при непредельных α) являются абелевыми группами без кручения, а фактор-группы G/Z_α при всех α — R-группами.

Действительно, так как Z_1 есть центр группы G, то фактор $Z_1/Z_0 = Z_1$ абелев и без кручения, Z_1 изолировано в G и фактор-группа G/Z_1 является R-группой. Пусть все утверждения теоремы доказаны для всех индексов α, меньших β. Если число $\beta - 1$ существует, то группа $G/Z_{\beta-1}$ является R-группой. Поэтому ее центр $Z_\beta/Z_{\beta-1}$ является абелевой группой без кручения, фактор-группа по центру, изоморфная G/Z_β, будет R-группой, а из изолированности центра $Z_\beta/Z_{\beta-1}$ в группе $G/Z_{\beta-1}$ следует на основании доказанной выше теоремы о соответствии между изолированными подгруппами группы и фактор-группы, что Z_β изолировано в G.

Если же число β предельное, то подгруппа Z_β будет объединением возрастающей последовательности изолированных подгрупп и поэтому изолирована. С другой стороны, если

$$(xZ_\beta)^n = (yZ_\beta)^n, \quad x, y \in G,$$

то $x^n = y^n z$, где $z \in Z_\beta$ и поэтому $z \in Z_\alpha$ для некоторого α, меньшего β. Отсюда $(xZ_\alpha)^n = (yZ_\alpha)^n$, а так как группа G/Z_α является, по предположению, R-группой, то $xZ_\alpha = yZ_\alpha$ и тем более $xZ_\beta = yZ_\beta$. Этим доказано, что G/Z_β будет R-группой.

Отметим, что коммутант R-группы может не быть изолированным. Так, рассмотрим группу G с образующими a, b, c и определяющими соотношениями

$$ac = ca, \quad bc = cb, \quad [a, b] = c^2.$$

Центр этой группы совпадает с циклической подгруппой $\{c\}$, поэтому фактор-группа по центру будет абелевой группой без кручения, т. е. R-группой и, следовательно, по доказанной выше теореме, сама группа G является R-группой. Ее фактор-группа по коммутанту содержит, однако, элемент второго порядка и поэтому коммутант не будет изолированным.

Следующее свойство R-групп могло бы быть принято в качестве их определения, если бы понятие изолированной подгруппы было должным образом перенесено на любые группы без кручении.

Изолятор любого отличного от единицы элемента R-группы является абелевой группой без кручения ранга 1 *и служит изолятором для любого своего элемента, отличного от* 1. *Изоляторы двух любых элементов R-группы или совпадают, или же пересекаются по единице.*

Действительно, во всякой группе без кручения G любой элемент x, $x \neq 1$, порождает бесконечную циклическую подгруппу, являющуюся абелевой группой без кручения ранга 1. Так как объединение возрастающей последовательности абелевых групп без кручения ранга 1 является такой же группой, то элемент x содержится хотя бы в одной подгруппе A, являющейся максимальной абелевой подгруппой без кручения ранга 1 группы G. Если G будет теперь R-группой, то A содержится в изоляторе $I(x)$ элемента x: при любом a из A циклические подгруппы $\{x\}$ и $\{a\}$ обладают пересечением, отличным от E, но ясно, что $\{x\} \subset I(x)$.

Пусть, однако, элемент x содержится в двух различных максимальных абелевых подгруппах без кручения ранга 1, A и B; пересечение этих двух подгрупп отлично, следовательно, от E. Пусть a и b будут любые отличные от 1 элементы соответственно из A и B. Так как некоторые степени этих элементов совпадают и поэтому перестановочны, то, по доказанному выше свойству R-групп, и сами элементы a и b будут перестановочными. Таким образом, подгруппа $\{A, B\}$ будет абелевой группой без кручения. В такой группе максимальные

подгруппы ранга 1 не могут, однако, если они различны, обладать отличным от E пересечением (см. § 30). Отсюда без труда получаются все утверждения теоремы. [См. Д. 19.1.]

Значение R-групп для теории нильпотентных групп определяется следующей теоремой (Мальцев [6], Черников [19]; доказательство, приведенное ниже, в работе Сесекина [1]).

Всякая нильпотентная группа без кручения является R-группой.

Для абелевых групп без кручения доказывать нечего, поэтому можно вести доказательство индукцией по классу нильпотентной группы. Пусть дана группа G класса k, $k > 1$, с верхним центральным рядом

$$E = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_{k-1} \subset Z_k = G$$

и пусть в ней найдены такие элементы x и y, что

$$x^n = y^n, \quad n > 0. \tag{3}$$

Подгруппа $H = \{Z_{k-1}, x\}$ будет нормальным делителем в G, так как фактор G/Z_{k-1} абелев; она, далее, нильпотентна и ее класс не больше $k-1$ — еще в § 11 было доказано, что фактор-группа некоммутативной группы по центру не может быть циклической. Таким образом, нормальный делитель H является R-группой. Теперь ввиду (3)

$$x^n = y^{-1}x^n y = (y^{-1}xy)^n,$$

а так как и x и $y^{-1}xy$ принадлежат к R-группе H, то $x = y^{-1}xy$, откуда $xy = yx$. Поэтому (3) можно переписать в виде

$$(xy^{-1})^n = 1,$$

откуда, так как группа G без кручения, следует $x = y$. Теорема доказана.

Так как для свойства группы быть R-группой локальная теорема очевидна, то можно утверждать даже, что *всякая локально нильпотентная группа без кручения является R-группой.*

§ 67. Локально нильпотентные группы без кручения

Из теоремы, доказанной в конце предшествующего параграфа, следует, что все свойства, установленные выше для R-групп, будут справедливыми, в частности, для любых локально нильпотентных групп без кручения. Эти последние группы допускают, однако, много более глубокое изучение. Оно еще далеко не закончено, и мы приведем в этом параграфе лишь некоторые результаты, на которые должны будут опираться дальнейшие исследования.

Мы знаем из § 30, что изолятор подгруппы A абелевой группы без кручения G, т. е. сервантная подгруппа группы G, порожденная подгруппой A, состоит из всех тех элементов группы G, некоторая положительная степень которых входит в A. Покажем, что этим же

свойством обладают любые локально нильпотентные группы без кручения. Справедлива следующая лемма (Мальцев [5]; доказательство принадлежит Ю. Г. Федорову).

Пусть в нильпотентной группе G, обладающей конечной системой образующих

$$x_1, x_2, \ldots, x_s, \tag{1}$$

дана такая подгруппа D, что всякий элемент x_i системы (1), *$i = 1, 2, \ldots, s$, в некоторой положительной степени n_i входит в D. Тогда подгруппа D имеет в группе G конечный индекс и поэтому всякий элемент из G в некоторой положительной степени входит в D.*

Будем доказывать эту лемму индукцией по классу группы G. Пусть

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1} \supset G_k \supset G_{k+1} = E$$

— нижний центральный ряд группы G. Ввиду последней теоремы § 64 подгруппа G_k обладает конечной системой образующих. Будем доказывать лемму вместе со следующим дополнительным утверждением.

Подгруппа G_k обладает такой конечной системой образующих, что каждый элемент этой системы в некоторой положительной степени входит в D.

Для групп класса 1, т. е. для абелевых групп, все утверждения очевидны. Пусть они уже доказаны для групп класса k. Таким образом, в группе G/G_k подгруппа DG_k/G_k имеет конечный индекс, а поэтому конечен индекс подгруппы DG_k в группе G. Кроме того, подгруппа G_{k-1}/G_k обладает такой конечной системой образующих

$$y_1G_k, y_2G_k, \ldots, y_tG_k,$$

что

$$(y_jG_k)^{m_j} \in DG_k/G_k, \quad m_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t. \tag{2}$$

Тогда, как и при доказательстве последней теоремы из § 64, можно доказать, что элементы $[x_i, y_j]$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, t$, составляют систему образующих для подгруппы G_k. Ввиду свойств коммутаторов (1)–(4) из § 14

$$[x_i, y_j]^{n_im_j} = [x_i^{n_i} y_j^{m_j}]. \tag{3}$$

Однако элемент $x_i^{n_i}$ лежит в D, а элемент $y_j^{m_j}$ отличается ввиду (2) от элемента из D на множитель, лежащий в центре группы G. Этим доказано, что правая часть равенства (3) содержится в подгруппе D. В подгруппе G_k найдена, следовательно, конечная система образующих, каждый элемент которой в некоторой положительной степени входит в D.

Отсюда следует, так как подгруппа G_k абелева, что пересечение $D \cap G_k$ имеет в G_k конечный индекс. Ввиду изоморфизма

$$G_k/(D \cap G_k) \simeq DG_k/D$$

подгруппа D будет иметь конечный индекс в DG_k, а так как конечность индекса DG_k в G уже доказана, то мы доказали все утверждения леммы.

В локально нильпотентной группе без кручения G изолятор $I(A)$ произвольной подгруппы A состоит из тех и только тех элементов группы G, некоторая положительная степень которых принадлежит к A.

Ясно, что из $x^n \in A$ следует $x \in I(A)$. Пусть, далее,

$$x^n \in A, \quad y^m \in A.$$

Подгруппа $H = \{x, y\}$ группы G будет нильпотентной группой с двумя образующими и поэтому, по лемме, каждый элемент из H, в том числе и элемент xy, в некоторой положительной степени входит в пересечение $A \cap H$, т. е. в подгруппу A. Отсюда следует, что все элементы группы G, некоторые положительные степени которых лежат в A, составляют подгруппу. Эта подгруппа будет, очевидно, изолированной и поэтому она совпадает с $I(A)$.

Другое доказательство этой теоремы — в работе Плоткина [3].

Докажем, далее, следующую теорему (Глушков [1]; см. также Плоткин [1], Смирнов [1]).

В локально нильпотентной группе без кручения нормализатор изолированной подгруппы изолирован.

Рассмотрим сперва нильпотентную группу без кручения G с центральным рядом

$$E = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k \subset Z_{k+1} \subset \ldots \subset Z_n = G.$$

Пусть A — изолированная подгруппа этой группы, N — ее нормализатор и пусть элемент x таков, что

$$x^m \in N, \tag{4}$$

но $x \notin N$. Подгруппа $x^{-1}Ax$ не лежит внутри A, так как тогда (4) не могло бы иметь места, поэтому в A можно найти такой элемент a, что

$$x^{-1}ax \notin A. \tag{5}$$

Пусть

$$a \in Z_{k+1}, \quad a \notin Z_k. \tag{6}$$

При этом элемент a считаем выбранным так, чтобы индекс k, $1 \leqslant k < n$, был минимальным из возможных, т. е.

$$x^{-1}(A \cap Z_k)x \subseteq A. \tag{7}$$

Можно считать, что и

$$x(A \cap Z_k)x^{-1} \subseteq A, \tag{8}$$

иначе элемент x мы заменили бы элементом x^{-1} — из (4) следует $x^{-m} \in N$.

Положим

$$[a, x] = y_1, \quad [y_i, x] = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Ввиду (6)

$$y_i \in Z_k, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

причем из определения центрального ряда следует, что

$$y_{k+1} = y_{k+2} = \ldots = 1. \tag{10}$$

Так как

$$x^{-1}ax = ay_1, \tag{11}$$

то ввиду (5)

$$y_1 \notin A. \tag{12}$$

Отметим также, что

$$x^{-1}y_i x = y_i y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Буквой z с индексами будем обозначать произведения элементов y_i. Ввиду (9) всякое такое произведение лежит в Z_k; если оно лежит и в A, то, по (7) и (8), его образы при трансформировании элементами x и x^{-1} также принадлежат к A. Через z' мы будем обозначать произведение, получающееся из произведения z путем увеличения на единицу индексов всех входящих в него множителей y_i. Положим, далее, что $z^{(s)} = (z^{(s-1)})'$.

Покажем, что для всех i

$$x^{-i}ax^i = az_i, \tag{14}$$

причем ясно, что $z_1 = y_1$. Покажем также, что для всех i

$$z_i = z_{i-1}y_1 z'_{i-1}. \tag{15}$$

Действительно, ввиду (11) и (13)

$$x^{-2}ax^2 = x^{-1}ay_1x = ay_1y_1y_2,$$

т. е. $z_2 = z_1y_1z'_1$. Пусть (14) и (15) уже доказаны для индексов $i = 2, \ldots, j-1$. При любом i будет

$$x^{-i}ax^i = x^{-1}az_{i-1}x = ay_1 \cdot x^{-1}z_{i-1}x,$$

откуда $z_i = y_1x^{-1}z_{i-1}x$. Поэтому

$$x^{-1}z_{i-1}x = y_1^{-1}z_i. \tag{16}$$

Отсюда ввиду (13) для $s = 1, 2, \ldots$ будет

$$x^{-1}z_{i-1}^{(s)}x = y_{x+1}^{-1}z_i^{(s)}. \tag{17}$$

Поэтому, по (15), (11), (13), (16) и (17),

$$x^{-j}ax^j = x^{-1}az_{j-1}x = x^{-1}ax\cdot x^{-1}z_{j-2}x\cdot x^{-1}y_1x\cdot x^{-1}z'_{j-2}x = \\ = ay_1\cdot y_1^{-1}z_{j-1}\cdot y_1y_2\cdot y_2^{-1}z'_{j-1} = az_{j-1}y_1z'_{j-1}.$$

Отсюда следуют равенства (14) и (15) для индекса j. Из равенства (15) вытекает, понятно, для $s = 1, 2, \ldots$ равенство

$$z_i^{(s)} = z_{i-1}^{(s)}y_{s+1}z_{i-1}^{(s+1)}. \tag{18}$$

Из (4) и (14) следует, что

$$z_m \in A, \tag{19}$$

т. е. ввиду (15)

$$z_{m-1}y_1z'_{m-1} \in A.$$

Поэтому ввиду (7), (16), (13) и (17)

$$x^{-1}(z_{m-1}y_1z'_{m-1})x = x^{-1}z_{m-1}x\cdot x^{-1}y_1x\cdot x^{-1}z'_{m-1}x = y_1^{-1}z_my_1z'_m \in A.$$

Так как $y_1^{-1} = x^{-1}a^{-1}xa$, то, по (7) и (8), $z_my_1z'_my_1^{-1} \in A$ или ввиду (19)

$$y_1z'_my_1^{-1} \in A,$$

откуда, снова опираясь на (7) и (8), имеем

$$z'_m \in A.$$

Повторяя эти же рассуждения и беря лишь вместо элемента y_1 элемент y_2, мы получим, что

$$z''_m \in A.$$

Вообще

$$z_m^{(i)} \in A, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{20}$$

Однако произведение $z_m^{(k-1)}$ является просто некоторой положительной степенью элемента y_k. Отсюда ввиду изолированности подгруппы A следует, что сам элемент y_k содержится в A.

Пусть уже доказано, что элементы $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{i+1}$ лежат в A, а поэтому в A содержится всякое произведение вида $z^{(i)}$. По (20)

$$z_m^{(i-1)} \in A,$$

т. е. по (18)

$$z_{m-1}^{(i-1)}y_iz_{m-1}^{(i)} \in A.$$

Последний множитель левой части лежит в A, поэтому

$$z_{m-1}^{(i-1)}y_i \in A$$

или ввиду (7) и (8)

$$y_iz_{m-t}^{(i-1)} \in A.$$

Пусть уже доказано, что

$$y_i^t z_{m-t}^{(i-1)} \in A. \tag{21}$$

Тогда по (18)

$$y_i^t z_{m-t-1}^{(i-1)} y_i z_{m-t-1}^{(i)} \in A.$$

Последний множитель левой части лежит в A и, снова трансформируя оставшееся произведение элементом y_i^{-1}, мы получим, что

$$y_i^{t+1} z_{m-t-1}^{(i-1)} \in A.$$

Включение (21) справедливо, следовательно, при всех t. При $t = m-1$ будет

$$y_i^{m-1} z_1^{(i-1)} \in A.$$

Однако $z_1^{(i-1)} = y_i$, так как $z_1 = y_1$. Таким образом, $y_i^m \in A$, откуда ввиду изолированности A следует

$$y_i \in A.$$

Этим доказано, что в подгруппе A лежат все элементы y_i, в том числе и элемент y_1; это противоречит, однако, формуле (12).

Перейдем теперь к случаю локально нильпотентной группы без кручения G. Пусть A — изолированная подгруппа группы G, N — ее нормализатор, и пусть $x^m \in N$, $x \notin N$. Как и выше, в A найдется такой элемент a, что

$$x^{-1} a x \notin A. \tag{22}$$

Подгруппа

$$H = \{a, x\}$$

является нильпотентной, а подгруппа

$$A' = A \cap H$$

изолирована в H. Пусть N' — нормализатор подгруппы A' в группе H. Ввиду (22) $x \notin N'$. Ясно, далее, что

$$x^{-m} A' x^m \subseteq A'.$$

Если бы здесь стояло строгое включение, то мы имели бы, что

$$x^m A' x^{-m} \supset A',$$

т. е.

$$x^m A' x^{-m} \not\subseteq A,$$

хотя $x^{-1} m \in H$. Таким образом, $x^m \in N'$, что приводит нас, однако, к противоречию с рассмотренным выше случаем нильпотентной группы.

Теорема доказана. Из этой теоремы следует (Плоткин [1, 3]):

Если в локально нильпотентной группе без кручения G подгруппа A нормальна в подгруппе B, то и изолятор $I(A)$ нормален в изоляторе $I(B)$.

Ясно, в самом деле, что $I(A) \subseteq I(B)$. Далее, так как при внутреннем автоморфизме группы изолятор подгруппы переходит в изолятор образа этой подгруппы, то для любого b из B

$$b^{-1}I(A)b = I(b^{-1}Ab) = I(A),$$

т. е. вся подгруппа B содержится в нормализаторе подгруппы $I(A)$ в группе G. Выше доказано, что этот нормализатор изолирован, поэтому в нем содержится и подгруппа $I(B)$, откуда следует, что $I(A)$ нормально в $I(B)$.

Отметим, что в работе Глушкова [4] изучаются локально нильпотентные группы без кручения с условиями обрыва цепей изолированных подгрупп. [См. Д.25.2.]

Пополнения локально нильпотентных групп без кручения. Значение полных групп в теории абелевых групп определяется многими теоремами из § 23, из которых отметим теоремы о возможности вложения всякой абелевой группы в полную абелеву группу, о существовании минимальной полной абелевой группы, содержащей данную абелеву группу G, и об ее единственности, т. е. о существовании изоморфизма (продолжающего тождественный автоморфизм группы G) между любыми двумя минимальными полными абелевыми группами, содержащими группу G.

Теорема о вложении в полную группу может быть без труда распространена на случай произвольной группы (см. Б. Нейман [7]).

Всякая группа G содержится в некоторой полной группе.

Действительно, пусть a — произвольный элемент группы G, а k — произвольное натуральное число. Пусть, далее, $B = \{b\}$ — циклическая группа, бесконечная, если порядок элемента a бесконечен, или же конечная порядка nk, если элемент a имеет конечный порядок n. Тогда свободное произведение групп G и B с объединенной подгруппой $\{a\} = \{b^k\}$ (см. § 35), причем

$$a = b^k,$$

будет содержать как группу G, так и решение для уравнения $x^k = a$; при этом не исключается возможность того, что это уравнение обладало решениями уже и в самой группе G.

Предполагая множество пар (a, k), где $a \in G$, k — натуральное число, вполне упорядоченным, можно трансфинитным путем построить возрастающую последовательность групп, содержащих группу G, последовательно применяя указанную выше конструкцию для каждой пары (a, k), а на предельных местах беря объединение уже построенных групп. Этим путем мы дойдем до такой группы G_1, содержащей G, в которой из любого элемента группы G извлекается корень любой степени. Применяя эту же конструкцию к группе G_1, мы получим

группу G_2, и т. д. Объединение возрастающей последовательности групп G_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, причем $G_0 = G$, будет, очевидно, полным.

Теорема доказана. Одновременно мы видим, что ни о какой единственности минимальной полной группы, содержащей группу G, в общем случае не может быть речи — указанная в доказательстве конструкция, примененная к абелевой группе G, приводит к вложению этой группы в весьма некоммутативную полную группу. [См. Д.19.4.]

Можно ли сохранить все перечисленные выше свойства полных абелевых групп, если от абелевых групп переходить не сразу к произвольным группам, а лишь к нильпотентным группам? В общем случае это также не имеет места: из доказанной в § 65 теоремы Черникова о том, что периодическая часть полной ZA-группы лежит в центре этой группы, следует, что некоммутативная периодическая нильпотентная группа не может быть вложена в полную нильпотентную группу. В работе Мальцева [6] показано, однако, что положение будет совсем иным, если мы ограничимся случаем нильпотентных или даже любых локально нильпотентных групп б е з к р у ч е н и я.

Если G — полная локально нильпотентная группа без кручения, то, очевидно, *полные подгруппы группы G и только они будут изолированными в G*. Благодаря этому некоторые из результатов, полученных выше, приобретают в случае полных групп иную формулировку. Так, *если G — полная локально нильпотентная группа без кручения, то*

пересечение любого множества полных подгрупп группы G само полно;

нормализатор полной подгруппа группы G сам является полным;

все члены верхней центральной цепи

$$E \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$$

группы G являются полными подгруппами, все факторы этой цепи — полными абелевыми группами без кручения, а все факторгруппы G/Z_α — полными локально нильпотентными группами без кручения.

Некоторые из утверждений последней теоремы не являются непосредственными следствиями соответствующей теоремы предшествующего параграфа. В действительности утверждение о фактор-группах G/Z_α вытекает из того, что они являются гомоморфными образами группы G, и из полноты подгрупп Z_α. После этого утверждение о полноте факторов $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ получается применением уже доказанной полноты центра.

Пусть теперь G — произвольная (т. е. не обязательно полная) локально нильпотентная группа без кручения. Если она содержится в некоторой п о л н о й локально нильпотентной группе без кручения $\overline{G}$, то изолятор группы G в группе $\overline{G}$ будет минимальной полной подгруппой группы $\overline{G}$, содержащей G.

Назовем *пополнением* группы G всякую минимальную полную локально нильпотентную группу без кручения G^*, содержащую G. Ввиду первой теоремы настоящего параграфа *полная локально нильпотентная группа без кручения G^* тогда и только тогда будет пополнением своей подгруппы G, если всякий элемент из G^* в некоторой положительной степени входит в G.*

Следующая теорема Мальцева является основной во всей теории нильпотентных групп без кручения.

Всякая локально нильпотентная группа без кручения G может быть вложена в полную локально нильпотентную группу без кручения и поэтому обладает пополнениями. Если G_1^* и G_2^* — два пополнения группы G, то между ними существует изоморфизм, притом единственный, продолжающий тождественный автоморфизм группы G.

Мальцев [6] доказал эту теорему при помощи аппарата теории групп и алгебр Ли. Прямые доказательства пока не опубликованы и поэтому мы принуждены оставить эту теорему без доказательства. [См. Д.19.4.]

Не опираясь на теорему Мальцева, докажем несколько теорем о пополнениях локально нильпотентных групп без кручения, в основном идущих от Мальцева [6].

Если полная локально нильпотентная группа без кручения G^* служит пополнением для каждой из своих подгрупп G_1 и G_2, то она будет пополнением и для их пересечения $G_1 \cap G_2$.

Действительно, если $x \in G^*$, то существуют такие натуральные числа k_1 и k_2, что $x^{k_1} \in G_1$, $x^{k_2} \in G_2$, а поэтому

$$x^{k_1 k_2} \in (G_1 \cap G_2).$$

Если G^* — пополнение группы G, а H^* — полная подгруппа группы G^*, то H^* служит пополнением для пересечения $H^* \cap G$ и это пересечение изолировано в G. Этим путем устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми изолированными подгруппами группы G и всеми полными подгруппами ее пополнения G^*.

В самом деле, всякий элемент из H^* в некоторой положительной степени входит в G, т. е. в пересечение $H^* \cap G$, а поэтому H^* служит пополнением для этого пересечения. Далее, если некоторая положительная степень элемента g из G входит в $H^* \cap G$, то сам элемент g будет содержаться в полной подгруппе H^*, т. е. в $H^* \cap G$, а поэтому $H^* \cap G$ изолировано в G. Наконец, если H — изолированная подгруппа группы G, H^* — ее пополнение в G^*, то всякий элемент из $H^* \cap G$ в некоторой положительной степени входит в H, а поэтому ввиду изолированности H в G

$$H^* \cap G = H.$$

Этим доказаны все утверждения теоремы.

Докажем, наконец, т е о р е м у, сообщенную автору Ю. Г. Федоровым. *Если G^* — пополнение локально нильпотентной группы без кручения G,*

$$E \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$$

— верхняя центральная цепь группы G и Z_α^* — пополнение подгруппы Z_α в группе G^*, то

$$E \subseteq Z_1^* \subseteq Z_2^* \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha^* \subseteq \ldots$$

будет верхней центральной цепью группы G^*.

Действительно, некоторая степень элемента z_1^* из Z_1^* лежит в Z_1, некоторая степень элемента g^* из G^* лежит в G. Из перестановочности этих степеней вытекает, как показано в предшествующем параграфе, перестановочность самих элементов z_1^* и g^*, а поэтому Z_1^* содержится в центре группы G^*. С другой стороны, если x — любой элемент из центра группы G^*, то некоторая степень его лежит в G и поэтому в Z_1, а тогда x содержится в Z_1^*. Этим доказано, что Z_1^* является центром группы G^*.

Пусть уже доказано для всех α, меньших β, что подгруппа Z_α^* является α-м членом верхней центральной цепи группы G^*. Пусть число $\beta - 1$ существует. Так как подгруппа $Z_{\beta-1}$ изолирована в G, то в силу доказанной выше взаимной однозначности соответствия между изолированными подгруппами группы G и полными подгруппами группы G^* справедливо равенство

$$Z_{\beta-1}^* \cap G = Z_{\beta-1}. \tag{23}$$

Фактор-группа $G^*/Z_{\beta-1}^*$ служит пополнением для своей подгруппы $GZ_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$, а подгруппа $Z_\beta^*/Z_{\beta-1}^*$ — пополнением для подгруппы $Z_\beta Z_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$. Действительно, если

$$(g^* Z_{\beta-1}^*)^k = z_\beta Z_{\beta-1}^*, \quad g^* = G^*, \quad z_\beta \in Z_\beta,$$

то

$$g^{*k} \in z_\beta Z_{\beta-1}^* \subset Z_\beta^*,$$

а так как подгруппа Z_β^* полная, то и g^* содержится в Z_β^*. С другой стороны, подгруппа $Z_\beta Z_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$ является центром группы $GZ_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$: если элемент g_0 группы G таков, что для любого элемента g этой группы

$$[g_0 Z_{\beta-1}^*, g Z_{\beta-1}^*] = Z_{\beta-1}^*,$$

то по (23)

$$[g_0, g] \in (Z_{\beta-1}^* \cap G) = Z_{\beta-1},$$

а поэтому g_0 содержится в Z_β. Мы находимся теперь целиком в тех условиях, в которых проходило начало доказательства теоремы, и поэтому можем считать доказанным, что подгруппа $Z_\beta^* Z_{\beta-1}^*$ служит центром для группы $G^*/Z_{\beta-1}^*$. Отсюда следует, что Z_β^* будет β-м членом верхней центральной цепи группы G^*.

Если же число β предельное, то Z_β будет объединением всех Z_α. Всякий элемент x из Z_β^* в некоторой степени входит в Z_β и поэтому в некоторое Z_α, $\alpha < \beta$, но тогда сам элемент x входит в Z_α^*. Таким образом, Z_β^* будет объединением подгрупп Z_α^*, $\alpha < \beta$, и поэтому является β-м членом верхней центральной цепи группы G^*.

Из доказанной теоремы вытекает, что *пополнение ZA-группы без кручения будет ZA-группой, а пополнение нильпотентной группы без кручения класса k — нильпотентной группой этого же класса.*

В заключение отметим доказанную Глушковым [4] теорему, обобщающую известное свойство полных подгрупп абелевой группы: *в локально нильпотентной группе без кручения подгруппа, порожденная любым множеством полных подгрупп, является полной.*

Заключение к первому изданию [1])

Понятие группы является одним из небольшого числа основных понятий, всестороннее изучение которых составляет цель и содержание современной математики. Сейчас было бы невозможным ограничить теорию групп вопросами, связанными лишь с непосредственными потребностями соседних отделов науки — всякий существенный сдвиг в теории групп, всякий результат, вскрывающий глубокие и новые свойства понятия группы, не останется без влияния на развитие этих соседних отделов и поэтому будет восприниматься как сдвиг во всей математике. Действительно, в самых различных частях математики и даже за ее пределами, например в теоретической физике, группы находят себе разнообразные и иногда очень существенные применения, причем их роль все время возрастает. Правда, во многих случаях речь идет пока лишь о самом понятии группы и ее простейших свойствах, т. е. к теории групп не предъявляется никаких требований. Несомненно, однако, что соответствующие отделы математики получили бы новые возможности для своего развития, если бы они проявили больший интерес к теоретико-групповым свойствам употребляемых ими групп и связям этих свойств со свойствами тех понятий, изучение которых составляет их основную задачу. С другой стороны, случаи, когда используются серьезные теоретико-групповые результаты или же теории групп ставятся большие требования, также весьма многочисленны. Отметим некоторые из них.

Основное содержание теории Галуа заключается в том, что всякому многочлену (точнее, всякому конечному расширению данного коммутативного поля) ставится в соответствие некоторая вполне определенная конечная группа. Изучение этого соответствия приводит к возможности сводить многие проблемы теории коммутативных полей и теории уравнений на проблемы теории конечных групп; этим путем удалось, в частности, исчерпать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах. Далее, в теории колец, особенно некоммутативных, большое применение находят сейчас группы с операторами и основные результаты о них, включая теорему Жордана–Гёльдера. Теория абелевых групп с конечным числом образующих играет существенную роль в линейной алгебре, в теории алгебраических чисел и особенно в топологии

[1]) В тексте этого заключения сохранены ссылки на параграфы и главы первого издания, но в скобках указаны номера соответствующих параграфов и глав настоящего издания.

(группы Бетти). С другой стороны, многие проблемы комбинаторной топологии сводятся на проблемы о группах, заданных определяющими соотношениями.

Конечной целью теории групп — если вообще можно говорить об единой конечной цели для большой и широко разветвленной науки — следует считать *задачу полного описания всех существующих в природе групп или хотя бы достаточно широких классов групп*, описания, достигаемого заданием групп системами инвариантов. Образцом может служить теория абелевых групп с конечным числом образующих. Описание, полученное для этого случая (см. § 22 (20)), оказалось настолько удобным и обозримым, что сейчас трудно указать относящуюся сюда проблему, решение которой могло бы встретиться с затруднениями. Легко понять, однако, что невозможно рассчитывать на получение столь же обозримого описания для других классов групп, более широких. Так, системы инвариантов для счетных примарных абелевых групп (§ 37 (28)) и особенно для абелевых групп конечного ранга без кручения (§§ 40 и 41 (32б и (32в)) оказываются уже весьма сложными, отражая этим богатство указанных классов групп, и не дают возможности полагать, что при решении любой проблемы об этих группах никаких трудностей, кроме чисто технических, уже не будет встречено. Больше того, трудно вообще ожидать, чтобы во всех случаях можно было задавать группы инвариантами, использующими более простые или более привычные понятия, чем сами эти группы, а лишь такая классификация могла бы представлять интерес. Достаточно указать, что до настоящего времени не удалось получить даже полного описания конечных групп, хотя множество конечных групп всего лишь счетное. Не удается сделать этого и при дополнительном предположении, что рассматриваются лишь конечные разрешимые или даже конечные p-группы. Среди различных работ, посвященных поискам путей для каталогизации конечных групп, следует отметить работу Фиттинга [6], в которой делается попытка сведения описания произвольных конечных групп на описание разрешимых и простых групп. С другой стороны, уже давно начались работы по описанию всех групп данного порядка n, начиная с самых малых n. Эти исследования, однако, по мере возрастания n весьма усложняются и дошли пока лишь до значений n, остающихся в пределах второй или третьей сотни, не приводя ни к каким общим закономерностям. Ничего, кроме отдельных новых примеров групп, не дает также и идущее от Гёльдера [1] направление, посвященное описанию групп порядка n в зависимости от вида разложения n в произведение простых множителей, начиная со случаев, когда это разложение наиболее простое.

Теперь в связи с общей проблемой каталогизации групп можно понять, почему в современной теории групп занимают столь большое место *прямые и свободные произведения*. Роль их состоит, очевидно, в том, что они во многих случаях позволяют сводить изучение групп,

устроенных более или менее сложно, на изучение групп сравнительно более простых и поэтому легче поддающихся описанию.

Операции прямого и свободного умножений являются алгебраическими операциями (в смысле § 1), притом коммутативными и ассоциативными, определенными во множестве всех групп (или, во избежание теоретико-множественных антиномий, во множестве всех групп, мощность которых не превосходит некоторого кардинального числа $\mathfrak{m}$). Каждая из этих операций ставит в соответствие паре групп A, B однозначно определенную группу C, причем в C можно найти подгруппы A' и B', порождающие вместе группу C и изоморфные соответственно с группами A и B. Пока остается открытым вопрос, *существуют ли во множестве групп операции со всеми только что перечисленными свойствами, отличные от прямого и свободного умножения*? Если ответ будет положительным, то возникнет задача разыскания всех таких операций, создания их теории по образцу теории прямых и свободных произведений и использования их затем при изучении тех или иных классов групп. [См. §§ 62 и Д.11.] Заметим, что обсуждаемой сейчас проблеме не удовлетворяют появляющиеся время от времени в литературе обобщения прямого произведения, состоящие в том, что один из множителей уже не предполагается нормальным делителем, — произведение не будет в этом случае, вообще говоря, вполне определяться заданием своих множителей.

Развитие *теории прямых произведений* упирается сейчас в некоторые весьма трудные проблемы. Естественным образом основным в этой части теории групп оказался вопрос об изоморфизме двух прямых разложений группы или, точнее, о существовании у этих двух разложений центрально-изоморфных продолжений (см. § 27 (42)). Для групп с произвольной областью операторов в этом направлении стоит задача *распространения теоремы Ремака–Шмидта на более широкие классы групп, чем группы с главным рядом*. Сейчас трудно указать подходящие классы групп. Кажется не очень вероятным, чтобы в качестве такого класса можно было взять группы с обрывом убывающих нормальных цепей — для дедекиндовых структур с обрывом убывающих цепочек теорема, аналогичная теореме Ремака–Шмидта, не имеет места; однако до сих пор всякую теорему, доказанную для групп с произвольной областью операторов, удавалось перенести в теорию структур. [См. §§ 47 и Д.5.]

Для групп *без операторов* стоит такая же задача, причем в качестве исходного пункта можно взять теорему Коржинека (см. § 27 (42)) [1]). Эта теорема, а также теорема о группах с неразложимым центром (конец § 27 (47а)) позволяют поставить следующий общий

[1]) В работе Коржинека [1] рассматриваются в действительности группы с операторами, однако в доказательстве теоремы существенным образом употребляются произвольные подгруппы центра, а не только допустимые, как требуется теорией групп с операторами.

вопрос: *не следует ли справедливость теоремы о центральном изоморфизме прямых разложений данной группы из справедливости аналогичной теоремы для центра этой группы* и не будет ли этим вся проблема сведена на случай абелевых групп? В качестве первого шага в этом направлении следует рассмотреть группы, *центр которых разложим в прямое произведение счетного множества конечных циклических групп и групп типа* p^∞. Действительно, абелевы группы с условием минимальности обладают, согласно § 29 (53), разложениями указанного вида, даже с конечным числом множителей, т. е. этим путем мы на самом деле достигаем расширения класса групп, изучаемого теоремой Коржинека. Вместе с тем мы знаем из § 37 (28), что абелевы группы, разложимые в прямое произведение конечных циклических групп и групп типа p^∞, являются среди счетных периодических абелевых групп единственными, для которых справедлива теорема о существовании изоморфных продолжений для любых прямых разложений. [См. § Д.5.]

Большой интерес представляет также вопрос о подгруппах прямот произведения. В отличие от случая свободных произведений пока не удается *описать строение подгрупп прямого произведения при помощи подгрупп прямых множителей* и тем более найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы некоторая группа была изоморфна подгруппе прямого произведения заданных групп. Даже для конечных групп этот вопрос представляет большие трудности, как показывают относящиеся сюда работы Ремака [3, 4, 5] и Шода [5, 6].

В связи с развитием теории свободных произведений возникло понятие *свободного произведения с объединенной подгруппой*. Пусть рассматривается множество групп A_α, заданных системами образующих $\mathfrak{M}_\alpha$ и системами определяющих соотношений Φ_α (α пробегает некоторое множество индексов). В каждой из групп A_α выбрана подгруппа B_α, причем предполагается, что выбор этих подгрупп может быть осуществлен таким образом, что все они будут изоморфны между собой, т. е. изоморфны некоторой группе B; через f_α обозначается определенный изоморфизм между B_α и B. Свободным произведением групп A_α с объединенной подгруппой B называется группа G, имеющая системой образующих объединение всех множеств $\mathfrak{M}_\alpha$, а системой определяющих соотношений объединение множеств Φ_α с присоединением всех соотношений, получающихся приравниванием друг другу таких элементов из различных подгрупп B_α и B_β, которые соответствуют при изоморфизмах f_α и f_β одному и тому же элементу группы B. При помощи конструкции, обобщающей соответствующую конструкцию из § 43 (33), может быть доказано (см. Шрейер [4]), что группа G не зависит от выбора образующих и соотношений в группах A_α и что она содержит подгруппы, изоморфные этим группам и пересекающиеся лишь по объединяемым подгруппам.

Свободные произведения с объединенной подгруппой дают еще один способ построения новых групп, поэтому, как обычно, необходимо рассмотреть вопрос *об изоморфизме двух разложений группы в свободные произведения с объединенными подгруппами*, предполагая, например, что эти разложения уже не могут быть дальше продолжены. Основное затруднение состоит в том, что объединенные подгруппы этих двух разложений не обязаны, вообще говоря, совпадать, и поэтому в этом вопросе получены до сих пор лишь весьма частные результаты (см., например, Шрейер [1], Курош [2], Калашников и Курош [1]). Наиболее общим будет пока результат, установленный З. М. Кишкиной и состоящий в том, что теорема об изоморфизме имеет место для двух разложений с общей объединенной подгруппой, являющейся, сверх того, нормальным делителем группы. [См. §§ 35 и Д.8.]

Переходим к рассмотрению отдельных классов групп, причем начнем с *теории абелевых групп*. Абелевы группы составляют сравнительно хорошо изученный класс, но и для них можно указать ряд важных и трудных проблем. Теорию счетных примарных абелевых групп следует, в силу теоремы Ульма, считать законченной, и поэтому нужно перейти к *созданию теории примарных групп произвольной мощности*. Здесь сделано пока весьма мало. Начать придется с *установления условий, при которых существует группа с заданными ульмовскими факторами*, обобщая этим теорему существования, доказанную в § 36 (27) для счетного случая. Решение этого вопроса представляет тем больший интерес, что оно позволило бы, быть может, дать положительный ответ на остающийся пока открытым вопрос, *будет ли множество всех неизоморфных абелевых групп данной мощности* $\mathfrak{m}$ *иметь мощность* $2^{\mathfrak{m}}$? Далее, в доказательстве теоремы Ульма (§ 37 (28)) существенным образом используется теорема Прюфера, т. е. это доказательство не может быть распространено за пределы счетных групп, однако сама формулировка теоремы Ульма сохраняет смысл для групп произвольной мощности. *Будет ли теорема Ульма оставаться справедливой для несчетных примарных групп*? Если ответ на этот весьма трудный вопрос будет положительным — следует заметить, что пока не удалось получить ответа даже для того частного случая, когда все ульмовские факторы разложимы в прямую сумму циклических групп, — то вся теория примарных групп будет сведена к *описанию примарных абелевых групп произвольной мощности без элементов бесконечной высоты*. Такое описание представляет интерес и само по себе, однако его получение является не очень простой задачей, так как в § 35 (26) уже было показано существование групп этого типа, неразложимых в прямую сумму циклических групп, а в самое последнее время Куликов [1] доказал, что даже для любой непредельной мощности существуют примарные группы этой мощности,

не содержащие элементов бесконечной высоты и не могущие быть разложенными в прямую сумму групп меньшей мощности [1]. [См. §§ 26 и Д.30.]

В теории *абелевых групп без кручения* следует указать в качестве ближайшей задачи на более глубокое изучение групп конечного ранга, использующее полученное в гл. 9 (8) описание этих групп, в частности на изучение подгрупп этих групп, их прямых разложений, их групп автоморфизмов и т. д. [См. гл. 8 и § Д.31.] Что же касается *смешанных абелевых групп*, то здесь следует, с одной стороны, в вопросе об условиях для разложимости абелевой группы в прямую сумму периодической группы и группы без кручения освободиться от тех ограничений, при которых этот вопрос рассматривался Бэром [13], а с другой стороны, найти хотя бы для счетного случая достаточно обозримое *описание всех абелевых групп с заданной максимальной периодической подгруппой A и заданной фактор-группой по ней B*. Для получения этого описания можно воспользоваться методами теории расширений (§ 28 (гл. 12)), однако окончательный результат должен формулироваться при помощи инвариантов групп A и B. При этом следует стремиться к тому, чтобы условия Бэра для разложимости группы в прямую сумму периодической группы и группы без кручения получались из этого результата в качестве тривиального следствия. [См. §§ 29, Д.32 и Д.33.]

Дальше мы будем рассматривать некоторые классы групп, являющиеся в том или ином смысле ближайшими обобщениями конечных групп. Сперва заметим, что среди вопросов, интересующих теорию конечных групп, можно указать такие, которые следует считать специфичными для этой ветви теории групп и перенесение которых на бесконечные группы, если иногда и возможно, то остается все же в стороне от основных путей развития теории: мы говорим о вопросах, связанных с числом элементов или подгрупп данной группы, обладающих некоторым определенным свойством. В качестве примера результатов такого рода укажем на следующую *теорему Фробениуса*, играющую в теории конечных групп весьма заметную роль.

Если число k есть делитель порядка конечной группы G, то число элементов этой группы, удовлетворяющих уравнению $x^k = 1$ (т. е. элементов, порядки которых являются делителями k), делится на k.

Эта теорема многократно обобщалась, в том числе и для случая бесконечных групп; наиболее сильные из этих обобщений принадлежат Ф. Холлу [3].

[1] Уже после того, как эта книга была сдана в печать, Л. Я. Куликов получил ряд существенных результатов, связанных с проблемами, перечисленными в настоящем абзаце (примечание к корректуре первого издания).

Периодические группы составляют область, на которую естественным образом переносится большинство проблем, изучаемых теорией конечных групп. Теории периодических групп предстоит, несомненно, вырасти в одну из самых богатых и широких частей теории групп; пока здесь сделано, однако, слишком мало для того, чтобы можно было с достаточной уверенностью указывать пути дальнейших исследований. Основное затруднение, с которым встречается теория периодических групп, заключается в неоднократно упоминавшейся уже нами *проблеме Бернсайда*: *будет ли всякая периодическая группа локально конечной* или, иными словами, *будет ли конечной всякая периодическая группа с конечным числом образующих*? Эта проблема не поддается решению даже при условии (если говорить о второй из указанных сейчас формулировок), что порядки элементов группы ограничены в совокупности. [См. § Д.16.] Положительное решение получается, очевидно, в случае, когда порядки всех отличных от 1 элементов группы равны двум, так как такая группа будет непременно абелевой. Бернсайдом [2] было найдено также положительное решение для случая, когда порядки элементов равны трем, и, сверх того, для групп с двумя образующими, порядки всех элементов которых равны четырем или делителю четырех; первый из этих двух случаев рассматривался также в работе Леви и Ван-дер-Вардена [1]. Далее, Б. Нейман [3] нашел решение для групп, порядки элементов которых не выше трех, и наконец, Санов [1] — для групп с любым конечным числом образующих, порядки всех элементов которых не выше четырех. Однако уже для групп с двумя образующими, в которых порядок всех отличных от 1 элементов равен пяти, проблема остается открытой. С другой стороны, нет ответа и на вопрос, *будет ли конечной всякая группа с обрывом убывающих и возрастающих цепочек подгрупп*? Этот вопрос является частным случаем проблемы Бернсайда, так как обрыв убывающих цепочек (условие минимальности) делает группу периодической, а обрыв возрастающих цепочек приводит к существованию конечной системы образующих.

В главе 7 (13) мы имели возможность убедиться, что при изучении периодических или локально конечных групп весьма полезным оказывается иногда условие минимальности. Пока остается открытым вопрос: *не будет ли всякая группа с условием минимальности счетной*? Сюда же относится следующая проблема Шмидта: *существуют ли отличные от групп типа* p^∞ *бесконечные группы, все истинные подгруппы которых конечны*? Если использовать описание абелевых групп с условием минимальности, изложенное в § 29 (53), то легко установить, что решение этих проблем будет вытекать из положительного решения следующей проблемы Черникова: *не будет ли всякая группа с условием минимальности обладать абелевым нормальным делителем конечного индекса*?

Одной из первоочередных задач в теории периодических групп является *детальное изучение бесконечных p-групп*. Укажем хотя бы,

что пока не установлено, *может ли бесконечная* (*локально конечная*) *p-группа быть простой* [1])? Для случая локально конечных групп эта проблема будет, впрочем, частным случаем следующей проблемы, поставленной Черниковым: *может ли локально разрешимая группа совпадать со своим коммутантом*? Локально разрешимые группы также требуют, несомненно, дальнейшего изучения. [См. §§ 58 и Д.23.] Так, *на локально разрешимые группы можно распространить*, *вероятно*, *отмеченные в конце* § 32 (60) *результаты Холла о силовских* П-*подгруппах конечных разрешимых групп*. Из других путей в теории периодических групп следует указать на изучение периодических или локально конечных групп с конечными классами сопряженных элементов, а также групп, обладающих лишь конечным числом таких классов. [См. § Д.17.]

Теория разрешимых групп должна развиваться дальше преимущественно за пределами теории периодических групп. Само определение разрешимой группы нельзя считать для бесконечного случая окончательно установившимся, и ближайшей задачей является здесь *изучение связей между различными возможными вариантами определения разрешимой группы*. Вне теории периодических групп лежат и некоторые из вопросов, относящихся к силовским подгруппам. Таков вопрос об *условиях для сопряженности или изоморфизма силовских p-подгрупп данной группы*, условиях более широких, чем конечность числа этих подгрупп. [См. §§ 54, 55 и Д.18.] С другой стороны, хотя силовские p-подгруппы (счетных) локально конечных групп не обязаны быть изоморфными, однако *все разнообразие силовских p-подгрупп данной группы должно в этом случае подчиняться некоторым достаточно обозримым закономерностям* (см., например, счетную симметрическую группу), установление которых является одной из ближайших задач этой части теории групп. К содержательной теории может привести, наконец, изучение локально конечных групп, на силовские подгруппы которых наложены те или иные ограничения.

Очень большой интерес представляют *группы с конечным числом образующих*. Их изучение не встретило затруднений в случае абелевых групп, однако всякий вопрос о некоммутативных группах с конечным числом образующих, даже самый элементарный по своей формулировке, оказывается обычно весьма трудным. Здесь можно указать, помимо проблемы Бернсайда, хотя бы на известную уже нам *проблему Хопфа о возможности изоморфизма между группой с конечным числом образующих и ее истинной фактор-группой* (см. Магнус [6]) [См. §§ 38 и Д.15.] или *на вопрос о существовании бесконечных простых групп с конечным числом образующих*. Не приводит к созданию

[1]) Уже после того, как эта книга была сдана в печать, С. Н. Черников получил отрицательный ответ на этот вопрос (примечание к корректуре первого издания).

широкой теории и предположение, что рассматриваются лишь группы с конечным числом образующих и конечным числом соотношений, хотя множество таких групп всего лишь счетное, или предположение, что рассматриваются группы с конечным числом образующих, всякая подгруппа которых также обладает конечной системой образующих, т. е., согласно § 29 (53), группы с обрывом возрастающих цепочек подгрупп, причем пока остается открытым даже вопрос *о мощности этого последнего класса групп*.

Мы знаем, что среди подгрупп свободной группы ранга 2 можно найти свободные группы любого конечного и даже счетного ранга (см. § 45 (35)). С другой стороны, всякая конечная группа содержится в некоторой симметрической группе, обладающей по § 12 (6) системой из двух образующих. Возникает вопрос, *нельзя ли вложить всякую счетную группу в некоторую группу с конечным числом образующих*, *быть может*, *даже с двумя образующими*? [См. § 38.] Если это не так, то следует подвергнуть специальному изучению те счетные группы, которые допускают такое вложение. Близкой к этой проблеме будет следующая проблема Мальцева об *универсальной счетной группе*: *существует ли такая счетная группа*, *что всякая счетная группа изоморфна одной из ее подгрупп*. Заметим, что для счетных абелевых групп такой универсальной группой служит группа, разложимая в прямую сумму счетного множества групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, и для каждого простого числа p счетного множества групп типа p^∞. [См. §§ 38 и Д.1.]

Многие из проблем о группах с конечным числом образующих, в том числе и некоторые из указанных выше, могут быть сформулированы как проблемы о нормальных делителях свободных групп конечного ранга. Так, проблема Бернсайда о периодических группах превращается для случая ограниченных в совокупности порядков элементов в проблему о конечности индекса подгруппы, порожденной n-ми степенями всех элементов свободной группы; проблеме о бесконечных простых группах с конечным числом образующих соответствует вопрос о существовании в свободной группе конечного ранга максимального нормального делителя бесконечного индекса; отмечавшаяся в § 8 (61) проблема Бернсайда о простых конечных группах нечетного составного порядка равносильна проблеме о существовании в свободной группе максимального нормального делителя, индекс которого есть нечетное составное число; наконец, близким к проблеме Хопфа (хотя с нею не тождественным) будет вопрос о существовании в свободной группе конечного ранга нормального делителя, который некоторым автоморфизмом группы отображается на свою истинную часть. Этот переход к свободной группе не облегчает, впрочем, решения этих или подобных им проблем. В конечном счете вопрос сводится каждый раз к необходимости узнать, какие элементы составляют нормальный делитель, порожденный некоторыми данными элементами свободной группы,

что представляет собою уже отмечавшуюся в конце § 14 (41) *проблему тождества*. [См. §§ 38 и Д.15.]

В проблеме изоморфизма групп, заданных определяющими соотношениями, можно указать пока лишь разрозненные частные результаты, далекие от того, чтобы составить теорию. Несомненный интерес представляет следующая теорема Магнуса [9], относящаяся к вопросу об изоморфизме некоторой группы со свободной группой.

Если группа G с $n+k$ образующими и k определяющими соотношениями в этих образующих обладает некоторой системой из n образующих, то она будет свободной группой ранга n.

В ряде работ (см., например, Коксетер [2, 3, 5, 6], Синков [2, 3]) изучаются некоторые частные типы определяющих соотношений, причем преимущественно исследуется вопрос о конечности определяемых ими групп. Сравнительно хорошо изучены лишь *группы с одним определяющим соотношением*, хотя пока нет, например, ответа на вопрос, *когда две группы, каждая с одним определяющим соотношением, будут изоморфными*. Не изучен до конца и вопрос о подгруппах этих групп; основным результатом является здесь теорема Дэна–Магнуса (*теорема о свободе*, Магнус [1]):

Если группа G задана образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и одним соотношением $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$, если, далее, элемент a_n содержится в этом соотношении и не может быть удален из него трансформированием, то подгруппа $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ будет свободной, а элементы $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — ее свободными образующими.

Из результатов, относящихся к группам, заданным соотношениями, отметим, наконец, принадлежащий Рейдемейстеру [1] метод установления определяющих соотношений для подгруппы некоторой группы, заданной определяющими соотношениями.

В теории *локально свободных групп* (см. 48 (37а)) остается еще много открытых проблем, без решения которых изучение этого достаточно широкого класса групп нельзя будет считать законченным. Так, уже отмечалась проблема *существования несчетных локально свободных групп, не являющихся объединением возрастающей последовательности свободных групп*, а также близкий к ней вопрос *о существовании несчетных локально свободных групп конечного ранга*. Этот последний вопрос может быть сведен на следующий: можно ли вложить всякую счетную локально свободную группу конечного ранга в бóльшую локально свободную группу этого же ранга? Следует также поставить вопрос и о *полном описании всех счетных локально свободных групп конечного ранга*, использующем, быть может, уже известное нам описание абелевых групп конечного ранга без кручения. С другой стороны, само определение локально свободной группы приводит к вопросу, *будет ли свободной несчетная группа, всякая счетная подгруппа которой свободна*?

Помимо рассмотренных выше классов групп, в теории групп заметное место занимают группы подстановок и группы матриц. Изучение

этих групп, в отличие от всего, что мы делали до сих пор, зависит от природы их элементов и поэтому оно осталось (за исключением элементарных свойств групп подстановок, собранных в § 11 (11а)) вне плана нашей книги. *Теория групп подстановок*, уже давно хорошо разработанная для случая конечных групп, распространялась неоднократно и на бесконечные группы, впрочем, пока без особенно крупных успехов. Изучение *групп матриц*, т. е., точнее говоря, подгрупп полных групп невырожденных матриц конечных порядков над коммутативными полями, является уже очень серьезной задачей. Всякая конечная группа может быть изоморфно отображена в некоторую группу матриц достаточно высокой степени над полем характеристики нуль — для доказательства можно воспользоваться теоремой Кэли (§5 (5)), заменяя подстановки матрицами, в каждой строке и каждом столбце которых содержится лишь один отличный от нуля элемент, притом равный единице. Изучению полных групп матриц и их наиболее важных подгрупп и фактор-групп, т. е. так называемых *линейных групп*, в особенности для случая конечных полей, было посвящено в конце прошлого и в начале нашего столетия большое число исследований (см. Диксон [1], Ван-дер-Варден [1]). Бесконечные группы уже далеко не всегда могут быть изоморфно вложены в группу матриц, или, как обычно говорят, изоморфно представлены матрицами, и основным является поэтому вопрос об условиях, при которых такое представление возможно. Мальцевым [2] найдены эти условия для абелевых и периодических групп; в частности, p-группа тогда и только тогда изоморфно представима матрицами над полем характеристики нуль, если она специальна [1]). Аналогичные условия не установлены пока, однако, уже *для групп с конечным числом образующих*, причем известно, что существуют как группы матриц с конечным числом образующих, которые не могут быть заданы конечной системой определяющих соотношений (Нисневич [1]), так и группы с конечным числом образующих и конечным числом соотношений, которые не могут быть изоморфно представлены матрицами (Фукс-Рабинович [3]). Этот вопрос тем более интересен, что для групп матриц удается решить многие из отмеченных выше проблем о группах с конечным числом образующих, среди них проблему Бернсайда о периодических группах (Бернсайд [3] и Шур [1] для полей характеристики нуль, Мальцев [2] для полей характеристики p), проблему Хопфа и проблему о бесконечных простых группах с конечным числом образующих (обе в работе Мальцева [2]). Отметим, наконец, доказанную Нисневичем [1] теорему: свободное произведение групп, изоморфно представимых матрицами, само обладает таким представлением в соответственно подобранном поле.

[1]) То есть является p-группой Черникова.

В теории конечных групп большую роль играют гомоморфные отображения группы в группу матриц, называемые *представлениями степени n в поле K*, если речь идет о гомоморфных отображениях в полную группу матриц порядка n над коммутативным полем K. По вопросу о свойствах представлений и их роли при изучении конечных групп мы отсылаем читателя к 17-й главе «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена или к руководствам по конечным группам.

Нам остается сделать несколько замечаний о связи групп со структурами. В § 52 (47б) уже ставился вопрос о возможности однозначного определения группы ее структурой подгрупп и было показано, что в общем случае ответ будет отрицательным. Естественно поэтому *привлечь к рассмотрению, помимо структуры подгрупп, и другие структуры, связанные с группой*, например структуру всех смежных классов по всем подгруппам. С другой стороны, необходимо, продолжая исследования Бэра, установить, *не будет ли, подобно абелевым группам, и всякая в некотором смысле достаточно «большая» некоммутативная группа вполне определяться структурой своих подгрупп*? В самое последнее время Л. Е. Садовский показал, что свободные группы действительно обладают этим свойством. [См. § Д.14.]

Дополнение

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ЗА 1952–1965 гг.

Предисловие

Дополнение содержит обзор исследований по теории групп, опубликованных после окончания автором его работы над вторым изданием книги. Рассматриваются также некоторые исследования, опубликованные ранее, если они не получили в книге должного отражения.

В соответствии с характером самой книги в этом обзоре не нашли себе места исследования по теории конечных групп, весьма многочисленные и идущие по многим различным направлениям. Новые импульсы для развития этих исследований дало найденное Фейтом и Томпсоном [1] решение проблемы Бернсайда о конечных группах нечетного порядка (см. §§ 57 и 61): простых конечных групп нечетного составного порядка не существует, а поэтому всякая конечная группа нечетного порядка разрешима. Этот результат повлек за собою решение ряда других проблем; положительно решается, в частности, отмеченный в конце § 60 вопрос о сопряженности дополнительных подгрупп из теоремы Шура.

Обзор развития теории конечных групп за последние годы содержится в статье А. И. Кострикина [6]. См. также книгу С. А. Чунихина [11].

———

Замечание при корректуре (июнь 1967 г.). За последнее время в некоторых из направлений, специально выделенных в Дополнении в качестве заслуживающих дальнейшей разработки, были достигнуты

существенные успехи. По этой причине в конце Дополнения добавлен небольшой раздел, в котором указаны соответствующие исследования. В этот раздел, обозначаемый буквами ДК, включены также упоминания о некоторых (далеко не о всех) новых работах советских теоретико-групповиков. Выполнить аналогичную работу по всей теоретико-групповой литературе последнего времени автор во время чтения корректур, конечно, не имел возможности.

В тексте Дополнения отсылки к разделу ДК делаются так: [См. ДК]. С другой стороны, каждый абзац раздела ДК начинается с номера того пункта «Дополнения», к которому относятся работы, указанные в этом абзаце.

Часть первая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§ Д.1. Группы, подгруппы

Определение группы. Аксиоматическим вопросам, связанным с определением группы, посвящена большая литература. Казалось, что после работы Бэра и Леви, изложенной в § 3а (см. также Лоренцен [1]), эти вопросы можно считать исчерпанными, однако и за последние годы появился ряд новых работ.

Так, Слэтер [1] показал, что для определения группы достаточно подчинить групповое умножение и переход к обратному элементу одному-единственному условию: из

$$(ab)c = (ad)f$$

должно следовать

$$b = d(fc^{-1})$$

для всех a, b, c, d, f. Аналогичное определение для абелевой группы указал Шолендер [1].

В работе Вагнера [1] рассмотрены различные возможности ослабления закона ассоциативности, входящего в определение группы. Так, множество с одной бинарной операцией будет группой, если в нем для любых a и b уравнения $ax = b$ и $ya = b$ имеют, по крайней мере, по одному решению и если закон ассоциативности выполняется для любой тройки различных элементов.

Аналогичный характер имеет ослабление закона коммутативности в определении абелевой группы, указанное Я. Д. Половицким [1]: группа будет абелевой, если в ней перестановочны любые два элемента одного и того же порядка.

Известно, что операции, входящие в определение группы, могут быть выражены через одну бинарную операцию ab^{-1}. Именно, если обозначить эту операцию через ω,

$$ab^{-1} = ab\omega, \tag{1}$$

и если использовать бесскобочную запись (символ ω всегда применяется к двум предшествующим элементам), то

$$1 = aa\omega,$$
$$a^{-1} = aa\omega a\omega,$$
$$ab = abb\omega b\omega\omega.$$

Ферстенберг [1] показал, что группу можно определить как множество с одной операцией ω из (1), подчиненной условиям:

1) $ac\omega bc\omega\omega = ab\omega$,

2) уравнение $ax\omega = b$ разрешимо;

для определения абелевой группы достаточно добавить условие

3) $cb\omega ca\omega\omega = ab\omega$.

С другой стороны, Г. Хигмэн и Б. Нейман [1] установили, что группа может быть определена через операцию ω из (1) при помощи одного-единственного тождества

$$aaa\omega b\omega c\omega aa\omega a\omega c\omega\omega\omega = b;$$

для определения абелевой группы это тождество заменяется более простым тождеством

$$abc\omega ba\omega\omega\omega = c.$$

Соответствующий результат справедлив для любого многообразия групп в смысле § Д.10, если оно определяется конечным числом тождеств. На случай мультиоператорных групп (см. § Д. 4) этот результат перенесен Т. В. Соколовской.

Вместо операции ab^{-1} можно было бы рассматривать, понятно, операцию $b^{-1}a$. Та и другая являются частными случаями *производных операций*, т. е. операций, записывающихся через групповое умножение и переход к обратному элементу в виде слова (см. § 18). Было бы интересно найти все те производные операции (не обязательно бинарные), через каждую из которых выражаются основные групповые операции. Возможно, что некоторые из новых определений группы, которые при этом были бы получены, подсказали бы естественные новые пути для развития теории групп.

Заметим, что можно указать примеры групп, которые оказываются даже группами по отношению к некоторым производным бинарным операциям, отличным от операций ab и ba (Хуляницкий и Сверчковский [1]). С другой стороны, некоторые группы (среди них свободная группа с двумя образующими) не допускают никаких ассоциативных производных операций, кроме ab, ba и вырожденных a, b и 1 (Ивахори и Хаттори [1], Моримото [1]).

Подгруппы. В § 5 отмечалось, что группа может обладать различными изоморфными между собою подгруппами. На самом деле

это имеет место почти всегда, и группы, не содержащие изоморфных подгрупп (или, что то же самое, изоморфных циклических подгрупп), могут быть без труда описаны (Селе [8], [10]): они абелевы, периодические и разложимы в прямое произведение конечных циклических групп порядка p^n или групп типа p^∞, не более чем по одной для каждого простого p.

С другой стороны, группа $S_\mathfrak{m}$ всех *подстановок* множества мощности $\mathfrak{m}$, т. е. всех взаимно однозначных отображений этого множества на себя, содержит весьма много изоморфных между собою подгрупп. Больше того, если мощность $\mathfrak{m}$ бесконечная, то группа $S_\mathfrak{m}$ содержит весьма много истинных подгрупп, изоморфных самой этой группе: в ней содержится подгруппа, изоморфная свободному произведению $2^\mathfrak{m}$ групп, изоморфных с $S_\mathfrak{m}$ (Де Брейн [1]).

В этой же работе показано, что всякая абелева группа мощности $2^\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ бесконечное, может быть изоморфно вложена в группу $S_\mathfrak{m}$. Можно показать также, что всякая абелева группа может быть вложена в группу таких подстановок некоторого множества, каждая из которых перемещает не более счетного множества элементов. Вместе с тем для любой бесконечной мощности $\mathfrak{n}$ можно указать некоммутативную группу (ее мощность больше чем $2^\mathfrak{n}$), которая ни для какой сколь угодно большой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ не может быть вложена в группу $S_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ тех подстановок множества мощности $\mathfrak{m}$, которые фактически перемещают лишь множество элементов, мощность которого не превосходит $\mathfrak{n}$ (Кнезер и Сверчковский [1]).

Эти результаты указывают на целесообразность рассмотрения для всякого интересного класса групп K следующих вопросов. Будет ли каждая группа класса K, мощность которой не превосходит $2^\mathfrak{m}$, вкладываться в группу $S_\mathfrak{m}$? Существует ли такая мощность $\mathfrak{n}$, что всякая группа G класса K вкладывается в группу $S_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ при некотором $\mathfrak{m}$, зависящем от G?

Группа G бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ называется *универсальной* для этой мощности, если всякая группа, мощность которой не больше $\mathfrak{m}$, изоморфно вкладывается в группу G. Отмеченный в заключении к первому изданию этой книги вопрос о существовании счетной универсальной группы решается отрицательно (см. § 38). Однако при условии справедливости обобщенной проблемы континуума для всякой несчетной мощности $\mathfrak{m}$ существует универсальная группа этой мощности (Йонсон [2]).

Системы образующих. Циклические группы. В § 6 введено понятие неприводимой системы образующих и показано существование групп, не имеющих неприводимых систем образующих. Больше того, существуют группы, которые обладают неприводимыми системами образующих, но содержат подгруппу, всякая система образующих которой приводима; некоторые способы построения таких групп указаны в работе Длаба [6].

В работе Крауча [1] рассмотрены неприводимые системы образующих для счетной симметрической группы и для счетной знакопеременной группы (см. § 4, пример 14). Некоторые системы образующих для конечной симметрической группы S_n, отличные от указанной в § 6, пример 2, приведены в работе Вуссинга [1]; так, например, группа S_n при $n \geqslant 3$ может быть порождена тремя элементами второго порядка.

В § 6 доказано, что всякая подгруппа циклической группы сама циклична. Непосредственное обращение этого результата тривиально, а при ограничении на истинные подгруппы — неверно: легко указать нециклические абелевы группы (а также конечные некоммутативные группы), все истинные подгруппы которых цикличны. Некоторые свойства бесконечных некоммутативных групп с этим свойством (если такие группы существуют) установил М. Е. Зельманзон [1].

Обозначим, однако, через G^k подгруппу группы G, порожденную k-ми степенями всех ее элементов. Сас [1] доказал, что группа G тогда и только тогда будет циклической, если цикличны ее подгруппы G^k для всех $k > 1$; обобщение этого результата — в работах Длаба [8, 11] и Саса [4]. С другой стороны, группа G тогда и только тогда циклическая, если всякая ее циклическая подгруппа является подгруппой вида G^k для некоторого натурального k (Сас [2]).

Можно указать еще одну совсем простую характеризацию циклических групп: группа G тогда и только тогда циклическая, если она не совпадает с теоретико-множественным объединением своих истинных подгрупп.

§ Д.2. Гомоморфизмы. Нормальные делители

Гомоморфизмы. Определение гомоморфизма из § 2 говорит, в применении к группам, о гомоморфном отображении одной группы на другую. Часто приходится рассматривать, однако, гомоморфные отображения группы G в группу G', т. е. на часть последней; это будет тогда непременно отображение группы G на подгруппу группы G'.

Для записи гомоморфизма φ группы G в (в частности, на) группу G' сейчас используется символ $\varphi\colon G \to G'$. Гомоморфизм φ называется *эпиморфизмом*, если он отображает G на G', и *мономорфизмом*, если он изоморфно отображает G в G' (т. е. на подгруппу последней).

Теорема о гомоморфизмах дает, как известно, некоторое обозрение всех эпиморфных образов данной группы G. В работах Лонстра [5–7] рассматриваются всевозможные группы, для которых группа G служит эпиморфным образом. Если даны эпиморфизмы $\varphi'\colon G' \to G$, $\varphi''\colon G'' \to G$, то полагаем $\varphi' \leqslant \varphi''$, если существует такой гомоморфизм $\chi\colon G' \to G''$, что

$$\varphi' = \chi\varphi'',$$

где произведение гомоморфизмов означает их последовательное выполнение. Если эпиморфизмы φ' и φ'', для которых одновременно $\varphi' \leqslant \varphi''$

и $\varphi'' \leqslant \varphi'$, отнести в один класс, то все эпиморфизмы на группу G распределяются по непересекающимся классам. На эти классы переносится введенное выше отношение порядка, причем полученная частичная упорядоченность обладает свойствами полной структуры: для любого множества классов существует и пересечение и объединение. Было бы полезно рассмотреть для этого случая те вопросы, которыми занимается теория структурных изоморфизмов групп (см. §§ 47б и Д.14).

Помимо гомоморфизмов, иногда рассматриваются другие отображения группы в группу, некоторым образом связанные с групповой операцией. Таковы, например, *антигомоморфизмы*, т. е. такие отображения φ группы G в группу G', что для любых $a, b \in G$

$$(ab)\varphi = b\varphi \cdot a\varphi, \tag{1}$$

а не

$$(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi, \tag{2}$$

как при гомоморфизме. Скотт [6] доказал, что если отображение φ таково, что для некоторых пар элементов выполняется (1), а для остальных имеет место (2), то на самом деле это будет или гомоморфизм, или антигомоморфизм, т. е. или всегда выполняется (2), или (1).

Заметим, что иногда под названием *полугомоморфизм* рассматриваются отображения со свойством

$$(aba)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\varphi$$

для всех $a, b \in G$. Взаимно однозначный полугомоморфизм естественно назвать *полуизоморфизмом*. В работах С. В. Ларина и Н. В. Лойко [1] и С. В. Ларина [1] показано, что абелевы группы, как без кручения, так и периодические, могут быть полуизоморфными с некоммутативными группами.

Прямые и обратные спектры. Понятие возрастающей последовательности групп допускает обобщение, идущее дальше того, что указано в § 7. Частично упорядоченное множество I называется *направленным*, если для любых $\alpha, \beta \in I$ существует такое $\gamma \in I$, что $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$. Множество групп G_α, индексированных элементами направленного множества I, называется *прямым спектром*, если для любых $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ задан мономорфизм $\varphi_{\alpha\beta}$: $G_\alpha \to G_\beta$, причем из $\alpha < \beta < \gamma$ следует

$$\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \cdot \varphi_{\beta\gamma}.$$

Нитью называется множество $\mathfrak{a}$ элементов a_α, взятых по одному в некоторых из G_α, причем если нить $\mathfrak{a}$ содержит элемент $a_\alpha \in G_\alpha$, то содержит и его образы $a_\alpha\varphi_{\alpha\beta}$ для всех $\beta > \alpha$, а также прообразы $a_\alpha\varphi_{\delta\alpha}^{-1}$ для всех тех $\delta < \alpha$, для которых эти прообразы существуют. *Произведением* нитей $\mathfrak{a} = (a_\alpha)$ и $\mathfrak{b} = (b_\beta)$ называется нить, порождаемая произведением $a_\gamma b_\gamma \in G_\gamma$ для любого γ, для которого существуют и a_γ и b_γ; от выбора γ произведение не зависит, а существование такого γ вытекает из направленности множества I.

В результате множество всех нитей оказывается, как легко проверить, группой; это *предельная группа* (или *предел*) рассматриваемого прямого спектра. Нити, определяемые всеми элементами группы G_α, составляют в предельной группе подгруппу $\overline{G}_\alpha$, изоморфную группе G_α. Эти подгруппы $\overline{G}_\alpha$, взятые для всех $\alpha \in I$, образуют в предельной группе локальную систему в смысле § 55.

Иногда используется конструкция, в некотором смысле двойственная рассмотренной. Множество групп G_α, где α пробегает направленное множество индексов I, называется *обратным спектром*, если для любых β, $\alpha \in I$, $\beta > \alpha$, задан гомоморфизм $\pi_{\beta\alpha}\colon G_\beta \to G_\alpha$, называемый проекцией G_β в G_α, причем из $\gamma > \beta > \alpha$ следует

$$\pi_{\gamma\alpha} = \pi_{\gamma\beta} \cdot \pi_{\beta\alpha}.$$

Нитью называется теперь множество $\mathfrak{a}$ элементов a_α, взятых по одному в каждой из G_α, причем если нить $\mathfrak{a}$ содержит элементы $a_\alpha \in G_\alpha$, $a_\beta \in G_\beta$ и $\alpha < \beta$, то $a_\alpha = a_\beta \pi_{\beta\alpha}$. *Произведением* нитей $\mathfrak{a} = (a_\alpha)$ и $\mathfrak{b} = (b_\alpha)$ называется множество произведений $a_\alpha b_\alpha \in G_\alpha$, являющееся, очевидно, нитью.

Легко проверяется, что снова получается группа — *предельная группа* рассматриваемого обратного спектра. Следует учесть, однако, что теперь не всякий элемент любой из групп G_α определяет некоторую нить. Больше того, предельная группа может оказаться состоящей лишь из одного единичного элемента (т. е. существует лишь одна нить — из единиц групп G_α, $\alpha \in I$). Такое полное вырождение может произойти даже в том случае, если все проекции $\pi_{\beta\alpha}$ будут эпиморфизмами (см., например, Г. Хигмэн и Стоун [1]).

Пусть, однако, через каждый элемент любой из групп G_α проходит хотя бы одна нить. Это будет иметь место, в частности, если к требованию, что все $\pi_{\beta\alpha}$ являются эпиморфизмами, добавить или что все группы G_α, $\alpha \in I$, конечны, или же что множество I линейно упорядочено; в первом случае нужно использовать метод из § 55, идущий от топологической работы А. Г. Куроша 1935 г., второй же случай почти очевиден. Если спектр обладает указанным свойством, то существует эпиморфизм предельной группы на каждую из групп G_α, $\alpha \in I$, а пересечение ядер всех этих эпиморфизмов равно E. Заметим, что если в некоторой группе G задана система нормальных делителей, пересечение которой равно E, то говорят, что группа G *аппроксимируется* фактор-группами по этим нормальным делителям.

Конечно, и в определении прямого спектра отображения $\varphi_{\alpha\beta}$ можно было бы считать любыми гомоморфизмами, а не только мономорфизмами (см., например, Хилл [1]).

Разложения группы по подгруппе. В ряде работ рассматривается такой вопрос: при каких условиях можно так выбрать по одному представителю во всех левых смежных классах группы G по подгруппе A, чтобы они составляли полную систему представителей и для всех правых смежных классов G по A? Орэ [13] занимался более общим

вопросом о существовании общей системы представителей для левого разложения группы G по подгруппе A и правого разложения G по подгруппе B, быть может, отличной от A. Оказалось, в частности, что если обе подгруппы A и B имеют в G конечные индексы, то равенство этих индексов не только необходимо, что очевидно, но и достаточно для существования такой общей системы представителей.

Некоторые результаты, относящиеся к общему вопросу об обозрении всех разложений группы по двойным модулям в связи с естественной частичной упорядоченностью этих разложений, можно найти в работе Фукса [4].

Простые группы. Бесконечная простая группа не может содержать, понятно, истинных подгрупп конечного индекса. Больше того, Г. Хигмэн [6] показал, что (бесконечный) индекс j любой подгруппы простой группы бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ непременно удовлетворяет неравенствам

$$j \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^j.$$

Существуют вместе с тем простые группы любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$, все истинные подгруппы которых имеют индекс $\mathfrak{m}$.

Неизоморфных простых групп бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ очень много — их множество имеет мощность $2^{\mathfrak{m}}$ (для счетного случая Камм [1], в общем случае М. С. Цаленко [1]). При этом всякую группу мощности $\mathfrak{m}$ можно вложить в простую группу этой же мощности, даже такую, что в ней сопряжены между собой все элементы одного и того же порядка. Из этой теоремы Камма–Цаленко можно вывести результат Карраса и Солитэра [1] о том, что для всякой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ существует такая простая группа мощности $2^{\mathfrak{m}}$, в которую изоморфно вкладывается любая группа мощности $\mathfrak{m}$. (См. в этой связи работу Ф. Холла [17].)

Нормальные ряды. С. Д. Берман и В. В. Любимов [1] доказали, что в группе G, обладающей композиционными рядами, тогда и только тогда можно найти композиционный ряд с любым наперед заданным расположением композиционных факторов, когда G является прямым произведением групп с изоморфными между собою композиционными факторами.

В работе Б. И. Плоткина [10] доказано, что если группа обладает возрастающими нормальными рядами с простыми факторами, то все такие ряды изоморфны между собой. Эта теорема не может быть выведена из результатов, приведенных в § 56, так как возрастающий нормальный ряд с простыми факторами не обязан быть возрастающим композиционным рядом. Именно, отвечая на вопрос, поставленный Б. И. Плоткиным, Ф. Холл [21] показал, что существуют простые группы, обладающие возрастающим нормальным рядом любого

предельного порядкового типа. Таким образом, вопрос об обобщениях теорем Шрейера и Жордана–Гёльдера не следует считать исчерпанным.

Достижимые подгруппы. В § 16 было дано определение достижимых подгрупп; иногда их называют также *субнормальными* подгруппами. Аналогично подгруппа A группы G называется *субинвариантной* в G, если она является членом некоторого возрастающего нормального ряда группы G. Могут представлять интерес, понятно, и подгруппы, входящие в некоторую нормальную систему группы.

Пересечение двух достижимых подгрупп группы всегда достижимо. Виланд [1] изучал достижимые подгруппы групп, обладающих конечным композиционным рядом. Они составляют в этом случае подструктуру структуры всех подгрупп. Доказано, что всякая достижимая подгруппа, совпадающая со своим коммутантом, перестановочна с любой достижимой подгруппой рассматриваемой группы (обобщение — в работе Хейнекена [1]). В работе Виланда [5] при тех же предположениях установлены некоторые другие признаки перестановочности достижимых подгрупп — напомним, что нормальные делители группы всегда перестановочны. Следует учесть, что в любой группе подгруппа, порожденная двумя перестановочными достижимыми подгруппами, сама достижима.

Д. С. Робинсон [2] в общем случае изучает группы, в которых любая пара достижимых подгрупп порождает достижимую подгруппу, иными словами, в которых достижимые подгруппы составляют подструктуру структуры всех подгрупп. Заметим, что не все группы обладают этим свойством. Доказано, в частности, что указанным свойством обладает любое расширение всякой группы с этим свойством при помощи группы, удовлетворяющей условию максимальности для достижимых подгрупп. Аналогичная теорема справедлива и для (более узкого) класса групп, в которых подгруппа, порожденная любым множеством достижимых подгрупп, сама достижима.

В работе Роузбледа [3] изучаются классы групп K, *коалиционные* по инвариантным (или по достижимым) подгруппам, т. е. такие, что в любой группе G для любых инвариантных (достижимых) подгрупп A и B, являющихся K-группами, подгруппа $\{A, B\}$ также будет инвариантной (достижимой) K-подгруппой. Классы, коалиционные по субинвариантным подгруппам, рассматривает Д. С. Робинсон [3].

Виланд [6] изучает пересечение нормализаторов всех достижимых подгрупп произвольной группы G. Оно совпадает с G тогда и только тогда, понятно, когда всякая достижимая подгруппа группы G инвариантна в G. Показано, что это пересечение содержит все простые неабелевы достижимые подгруппы группы G, а также все ее минимальные нормальные делители, удовлетворяющие условию минимальности для достижимых подгрупп.

Достижимая подгруппа A группы G называется *доступной*, если она соединяется с G таким конечным нормальным рядом [1])

$$A = A_0 \lhd A_1 \lhd \ldots \lhd A_{n-1} \lhd A_n = G,$$

что всякое A_i является максимальным нормальным делителем в A_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. В группах, обладающих конечным композиционным рядом, и только в них все достижимые подгруппы доступны. Доступные подгруппы произвольной группы G составляют подструктуру структуры всех подгрупп этой группы. Эта структура доступных подгрупп изучается в работах Тамашке [1, 2].

§ Д.3. Автоморфизмы. Характеристические подгруппы

Эндоморфизмы и автоморфизмы. Бэр [55] доказал, что всякая группа с конечным числом эндоморфизмов сама конечна и что конечна всякая периодическая группа с конечным числом автоморфизмов. Элперин [1] предложил простое доказательство первого из этих утверждений, а также доказал, что группа с конечным числом образующих тогда и только тогда имеет конечное число автоморфизмов, когда она обладает циклической подгруппой конечного индекса, лежащей в центре.

Де Врис и Де Миранда [1] показали, что всякая некоммутативная группа, отличная от симметрической группы 3-й степени, имеет не менее восьми автоморфизмов; существуют, однако, весьма сложно устроенные абелевы группы с двумя, четырьмя и шестью автоморфизмами.

Продолжалось изучение порядка группы автоморфизмов конечной группы. Так, Ледерман и Б. Нейман [1] доказали, что для всякого простого числа p существует такая целочисленная функция $g_p^{(h)}$ натурального аргумента h, что порядок группы автоморфизмов конечной группы G делится на p^h, если порядок самой группы G делится на $p^{g_p(h)}$. Грин [2] показал, что

$$g_p(h) \leqslant \frac{1}{2}\, h(h+3) + 1.$$

Ряд работ посвящен изучению групп, обладающих автоморфизмом конечного порядка p, оставляющим на месте лишь единицу. Случай $p = 2$ рассматривался в работах Б. Неймана [11] и Нагата [1], случай $p = 3$ — в работе Б. Неймана [19]. Г. Хигмэн [9] рассматривает случай любого простого p. Так, из этой работы и из некоторых результатов, относящихся к конечным группам, следует, что если группа G локально нильпотентна или локально конечна и если она обладает

[1]) Напомним, что символ $A \lhd G$ используется теперь для записи того, что A есть нормальный делитель в G.

автоморфизмом простого порядка p, оставляющим на месте лишь 1, то она нильпотентна, причем ее класс нильпотентности ограничивается числом, зависящим лишь от p. Ковач [2] рассматривает случай $p = 4$ и при тех же, что и выше, общих предположениях о G доказывает, что второй коммутант группы G содержится в ее центре. (См. также Курцио [3].)

В работе Ри [1] устанавливаются некоторые условия, при которых (некоммутативная) группа заведомо обладает внешним автоморфизмом. Так, внешние автоморфизмы существуют у всякой нильпотентной группы без кручения с конечным числом образующих.

О группах автоморфизмов см. § Д.22.

В связи с понятием локально внутреннего автоморфизма (см. § 55) отметим введенное Либеком [3] понятие *почти внутреннего автоморфизма*: это такой автоморфизм φ группы G, что во всякой локальной системе L группы G, состоящей из конечнопорожденных подгрупп, найдется подгруппа T со следующим свойством: во всякой подгруппе из L, содержащей T, автоморфизм φ индуцирует внутренний автоморфизм. Существуют группы, даже локально конечные, обладающие почти внутренним автоморфизмом, не являющимся внутренним.

Голоморф. Совершенные группы. Изучение свойств голоморфа (см. § 13) продолжалось в работах Редеи [3] и Милса [2]. В последней показано, что существуют неизоморфные некоммутативные конечные группы, голоморфы которых изоморфны; этого не будет, однако, если хотя бы одна из групп абелева.

Шпехт [2] и Харви [1] показали, что если в абелевой группе G отображение $x \to 2x$, $x \in G$, является автоморфизмом, то голоморф группы G тогда и только тогда совершенен, когда образ группы G характеристичен в голоморфе (см. также Переманс [1] и И. Х. Беккер [2]). Милс [3] доказал, что голоморф группы G тогда и только тогда разлагается в прямое произведение, когда G или совершенна, или же разлагается в прямое произведение характеристических подгрупп. Сю [1, 2] и И. Х. Беккер [2] продолжают изучение групп автоморфизмов голоморфов.

Теорема Гёльдера о совершенности симметрических групп (см. § 13) подсказывает рассмотрение вопроса о совершенности групп автоморфизмов. Так (см. Шпехт [2]), если группа G без центра и ее группа внутренних автоморфизмов характеристична в группе всех автоморфизмов, то последняя будет совершенной группой. Отсюда следует, что группа автоморфизмов любой некоммутативной элементарной (или, как теперь говорят, *характеристически простой*) группы совершенна. Заметим, что группа G тогда и только тогда характеристически проста, когда ее группа автоморфизмов является максимальной подгруппой голоморфа группы G.

Если характеристически простая группа G обладает отличным от E минимальным нормальным делителем A, то группа A неразложима в прямое произведение, а группа G является прямым произведением

групп, изоморфных A. В общем случае, однако, характеристически простая группа может иметь весьма сложное строение — см. И. Д. Адо [1], Д. Маклейн [1] и Ф. Холл [20]; см. также Роузблед [2]. С другой стороны, группа, все циклические подгруппы которой характеристичны, всегда абелева (Розати [1]).

В работе Эрдеи [1] показано, что группа G тогда и только тогда совершенна, когда всякая система уравнений над G (левые части этих уравнений будут словами относительно некоторой системы неизвестных X и элементов из G), разрешимая в некоторой надгруппе группы G, будет разрешимой в самой G. Отметим здесь же, что, как показано в этой же работе, подгруппа B группы G тогда и только тогда будет полупрямым множителем для G (т. е. G является полупрямым произведением подгруппы B и некоторого нормального делителя, см. § 52), когда всякая система уравнений над B, разрешимая в G, разрешима в B. О решении уравнений и систем уравнений в группах см. Д.19.5 и Д.9.5.

Некоторые характеристические подгруппы. В § 14 было введено понятие взаимного коммутанта двух подмножеств. Отметим, что взаимный коммутант $[A, B]$ двух подгрупп является нормальным делителем в $\{A, B\}$, а поэтому взаимный коммутант $[A, G]$ подгруппы A с группой G нормален в G.

Это понятие использовалось в § 14 при построении двух семейств вполне характеристических подгрупп произвольной группы G — цепи коммутантов $(G^{(\alpha)})$ и нижней центральной цепи (G_α) (α — порядковое число). С другой стороны, в § 62 построена верхняя центральная цепь (Z_α) группы G, состоящая из характеристических подгрупп. Изучение свойств этих цепей, а также тех подгрупп, на которых они стабилизируются, идет в разных направлениях. Отметим некоторые из полученных результатов.

Если центр группы G является группой без кручения, то и все подгруппы Z_α (эти члены верхней центральной цепи называются *гиперцентрами* группы G, а их объединение — *верхним гиперцентром*) будут группами без кручения (Д. Маклейн [3], П. Г. Конторович [9]).

Тогда и только тогда в группе G некоторый гиперцентр Z_k с конечным номером k имеет конечный индекс, если некоторый член нижней центральной цепи этой группы, имеющий конечный номер, конечен (Ф. Холл [14]).

Если группа G такова, что для некоторого целого k фактор-группа G_k/G_{k+1} (фактор-группа Z_k/Z_{k-1}) периодична и порядки ее элементов в совокупности ограничены, то это же верно для фактор-групп G_i/G_{i+1} (для фактор-групп Z_i/Z_{i-1}) при всех целых $i \geqslant k$ (Диксмье [1]).

Если фактор-группа группы G по коммутанту G' является циклической p-группой, то G' не содержит нормальных делителей, индекс которых есть степень числа p, а G''/G''' не может быть отличной от E циклической p-группой (Баумслаг [1]). Группы с циклическими

факторами верхней центральной цепи изучаются в работе Баумслага и Блекберна [2]. См. также Петреску [1], Макдональд [4].

Рассмотрим некоторые другие примеры характеристических подгрупп. Бэр [3, 8, 9, 12, 23] изучал *норму* группы; это совокупность элементов, перестановочных со всеми подгруппами, т. е. пересечение нормализаторов всех подгрупп. Норма содержит центр группы, но может быть гамильтоновой группой, впрочем, лишь для периодических групп. Норма группы содержится во втором гиперцентре Z_2 (Уос [1], Шенкман 17]), а поэтому для группы без центра и норма равна E (Бэр [59]). Эти результаты обобщает Каппе [1] на случай *A-нормы* группы G, т. е. пересечения нормализаторов всех максимальных абелевых подгрупп этой группы.

Введенное Орэ [4] понятие *квазицентра* группы, т. е. подгруппы группы G, порожденной всеми такими циклическими подгруппами из G, каждая из которых перестановочна с любой подгруппой группы G, изучали Пик [1, 2] и Маурер [1]. Так, квазицентр всегда нильпотентен, причем может быть некоммутативным лишь у периодической группы.

Наконец, Н. Левин [1] ввел понятие *антицентра* группы — это подгруппа, порожденная всеми такими элементами a группы G, что равенство $ax = xa$ возможно лишь тогда, когда подгруппа $\{a, x\}$ циклическая. Антицентр любой группы совпадает со своим антицентром (Джонсон [1]). Полное описание антицентров абелевых групп дал Хилл [3]. Симметрические и знакопеременные группы любой конечной степени совпадают со своими антицентрами (Домбек [1]). Группа всех взаимно однозначных отображений множества M на себя совпадает со своим антицентром, если M счетно, и имеет антицентр, равный E, если M несчетно (К. Сексенбаев [1]).

Вербальные и маргинальные подгруппы; гиперхарактеристические и ультрахарактеристические подгруппы. Пусть дана некоторая система W слов от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (т. е. система элементов свободной группы, см. § 18). Подгруппа произвольной группы G, порожденная всевозможными значениями слов из W, получающимися при подстановке вместо неизвестных произвольных элементов из G, будет вполне характеристической в G; она называется *вербальной W-подгруппой* и будет обозначаться через $W(G)$. К числу вербальных подгрупп принадлежат коммутант и, вообще, члены нижней центральной цепи и цепи коммутантов с натуральными номерами, а также степени группы. Отметим, что в свободной группе всякая вполне характеристическая подгруппа вербальна, тогда как в общем случае это уже неверно.

Это понятие, идущее от Ф. Холла [8] и Б. Неймана [4], в последнее время широко используется. Изучение вербальных подгрупп продолжал Грюн [7]. Он рассмотрел вербальную подгруппу $w(G)$, порожденную одним словом $w(x_1, \ldots, x_n)$, и установил условия, при которых $w(G)$ совпадает с G. Если m_i — сумма показателей, с которыми x_i

входит в w, $i = 1, \ldots, n$, то при $(m_1, \ldots, m_n) = 1$ будет $w(G) = G$; если $(m_1, \ldots, m_n) = k > 1$, то

$$G^k \subseteq w(G) \subseteq G^k[G, G];$$

если же $m_1 = \ldots = m_n = 0$, то $w(G) \subseteq [G, G]$. Этим вопрос в значительной степени сводится на случай, когда G совпадает со своим коммутантом $[G, G]$; этот случай подвергнут специальному изучению.

Ф. Холл [8] ввел также понятие, двойственное понятию вербальной подгруппы. Если дана система слов W, то рассмотрим совокупность таких элементов a группы G, что для любого слова $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \in W$ имеют место равенства

$$w(x_1a, x_2, \ldots, x_n) = w(x_1, x_2a, \ldots, x_n) = \ldots$$
$$\ldots = w(x_1, x_2, \ldots, x_na) = w(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

каковы бы ни были значения для $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из G. Эта совокупность будет характеристической подгруппой в G; она называется *маргинальной W-подгруппой*. К числу маргинальных подгрупп принадлежат центр и вообще члены верхней центральной цепи с натуральными номерами.

В работах Морана [3, 4] приведены многочисленные свойства вербальных и маргинальных подгрупп, равно как и централизаторов вербальных подгрупп, которые также в некотором смысле двойственны к вербальным подгруппам. Так, объединение любого множества вербальных подгрупп и пересечение любого множества маргинальных подгрупп (соответственно централизаторов вербальных подгрупп) сами обладают соответствующим свойством; для пересечения вербальных подгрупп и объединения маргинальных подгрупп (или централизаторов вербальных подгрупп) это уже не имеет места. Моран [3, 5] ввел также некоторые обобщения маргинальных подгрупп и некоторые другие подгруппы, которые также могут рассматриваться как дуализация понятия вербальной подгруппы. См. также Тернер-Смит [1].

Б. Нейман и Х. Нейман [2] назвали нормальный делитель A группы G *гипер-(ультра-)характеристической подгруппой*, если из $G/H \simeq G/A$ всегда следует $H \supseteq A$ (соответственно $H \subseteq A$). Если подгруппа A ультрахарактеристична, то будет выполняться даже $H = A$, т. е. A будет гиперхарактеристической. Обратное справедливо тогда и только тогда, когда группа G/A *хопфова* (т. е. не изоморфна ни с какой своей истинной фактор-группой). Всякая вполне характеристическая подгруппа свободной группы гиперхарактеристична.

Пересечение любого множества гипер-(ультра-)характеристических подгрупп само обладает соответствующим свойством. Однако, как показал Данвуди [1], для объединений, даже в случае двух подгрупп, это уже может не иметь места. См. также работы Б. Неймана [20] и Данвуди [2], примыкающие к указанной выше работе Б. и Х. Нейманов.

Обобщенные эндоморфизмы и автоморфизмы. Эти обобщения могут идти по разным направлениям. Так, Б. Нейман и Х. Нейман [3, 6] рассматривают *частичные эндоморфизмы* группы G, т. е. гомоморфизмы подгруппы A группы G на некоторую подгруппу B этой группы. Если φ: $A \to B$ — частичный эндоморфизм группы G, то группа $\overline{G} \supseteq G$, обладающая эндоморфизмом $\overline{\varphi}$, индуцирующим φ, существует тогда и только тогда, когда в G можно найти возрастающую последовательность нормальных делителей $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_n \subseteq \ldots$ со следующим свойством: если $K_n = L_n \cap A$, $n = 1, 2, \ldots$, то K_1 есть ядро гомоморфизма φ, а $K_{n+1}\varphi = L_n \cap B$, $n = 1, 2, \ldots$. Если при этом группа G конечная, то и группу $\overline{G}$ можно выбрать конечной.

Эти исследования продолжаются в серии работ Чехата (см., например, [1, 2, 3, 4]): устанавливаются условия для возможности продолжения некоторого семейства частичных эндоморфизмов группы G до семейства эндоморфизмов группы $\overline{G} \supseteq F$; рассматриваются *частичные автоморфизмы* группы G (т. е. изоморфные отображения одной ее подгруппы на некоторую другую) и исследуются возможности для продолжения их до автоморфизмов некоторой группы $\overline{G} \supseteq G$; при этом для абелевой группы G исследуется возможность выбрать группу $\overline{G}$ также абелевой и т. д.

Интересное обобщение групп автоморфизмов предложил Конрад [1]. Если $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — любое непустое слово и G — данная группа, то обозначим через $[w]$ совокупность подстановок φ множества G, удовлетворяющих условию

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varphi = w(x_1\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_n\varphi). \qquad (1)$$

Это будет группа, а именно группа w-автоморфизмов группы G (относительно производной операции w). Она всегда содержит в себе группу автоморфизмов группы G, которая совпадает с группой $[x_1x_2]$. Далее, группа $[x]$ есть группа всех подстановок множества G, а группа $[x_1x_2^{-1}x_3]$ совпадает с голоморфом группы G.

Многие свойства группы G могут быть выражены как связи между различными группами $[w]$. Так, если принять, что для пустого слова x^0 группа $[x^0]$ есть совокупность подстановок, оставляющих на месте единицу, то группа G тогда и только тогда абелева, если $[x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2] = [x^0]$; группа G тогда и только тогда без кручения, если для всех простых p $[x^{1-p}] \subseteq [x^0]$ и т. д.

Если множество групп $[w]$ пополнить пересечениями (т. е. группами автоморфизмов группы G по любым системам производных операций), то будет получена полная структура, изучение которой может оказаться полезным при изучении самой группы G. Можно было бы, конечно, рассматривать и полугруппы преобразований со свойством (1), обобщая полугруппу эндоморфизмов.

Херстейн и Рухте [1] доказали, что в простой группе, обладающей элементами 4-го порядка (таковы, в частности, знакопеременные

группы, конечные (при $n \geqslant 4$) и бесконечные), всякий полуавтоморфизм (ср. Д.2.1) является или автоморфизмом, или же антиавтоморфизмом (ср. тот же пункт). Заметим, что автоморфизмы и антиавтоморфизмы любой группы составляют вместе группу относительно естественного умножения; одна характеризация этой группы указана в работе Бючи и Райта [1].

В работе Шенкмана и Уэйда [1] изучается преобразование группы, переводящее всякий ее элемент в его n-ю степень (n фиксировано), и устанавливаются свойства групп, для которых это отображение будет эндоморфизмом или автоморфизмом.

Связка соответствий, почти-кольцо преобразований. Рассмотрения предшествующего пункта можно вложить в некоторую общую схему. Назовем *бинарным отношением* в группе G любое подмножество π прямого произведения $G \times G$; если элемент $(a, b) \in G \times G$ принадлежит к π, то пишем $a\pi b$. *Произведение* бинарных отношений π и σ определяется следующим образом: $a(\pi\sigma)b$ тогда и только тогда, когда существует такое $c \in G$, что $a\pi c$ и $c\sigma b$; это умножение ассоциативно, а тождественное отображение G на себя (т. е. множество пар (a, a)) служит для него единицей. С другой стороны, для бинарных отношений существует естественная теоретико-множественная частичная упорядоченность. Наконец, для всякого бинарного отношения π существует *инверсное* бинарное отношение π^*, а именно $a\pi^* b$ тогда и только тогда, когда $b\pi a$.

Легко написать простейшие связи между умножением, частичной упорядоченностью и инверсией бинарных отношений, после чего можно говорить о *связке бинарных отношений* группы G. Впрочем, групповые свойства множества G здесь пока роли не играли. Назовем, однако, *соответствием* в группе G такое бинарное отношение π, что из $a\pi b$, $a'\pi b'$ следует

$$(a^{-1}a')\pi(b^{-1}b'),$$

откуда $1\pi 1$ и $a^{-1}\pi b^{-1}$. Произведение соответствий будет соответствием, и это же верно для инверсии.

Мы приходим к *связке соответствий* группы G. К числу соответствий принадлежат эндоморфизмы и, в частности, автоморфизмы (эндоморфизму φ соответствует подмножество в $G \times G$, состоящее из пар $(a, a\varphi)$, $a \in G$), причем умножение эндоморфизмов как соответствий совпадает с их обычным умножением. Соответствиями являются вообще все частичные эндоморфизмы; в частности, тождественные автоморфизмы подгрупп с их частичной упорядоченностью в связке соответствий составляют по существу структуру подгрупп группы G. К числу соответствий группы принадлежат и ее конгруэнции, т. е. разложения в смежные классы по нормальным делителям. Понятно, что изучение связок соответствий групп во многих случаях должно будет стать существенной составной частью исследований.

Возможен и совсем другой путь — вместо любых бинарных отношений можно ограничиться рассмотрением лишь преобразований группы G в себя. Умножение превратится при этом в обычное умножение преобразований (т. е. их последовательное выполнение), частичная упорядоченность станет тривиальной, а инверсия будет выделять среди всех преобразований взаимно однозначные отображения G на себя.

Связь с групповой операцией в G устанавливается введением сложения преобразований, подсказанного сложением эндоморфизмов абелевой группы: *сумма* преобразований φ и ψ группы G определяется равенством

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi \cdot a\psi, \quad a \in G.$$

Множество всех преобразований группы G оказывается по операциям сложения и умножения *почти-кольцом*; определение этого понятия отличается от определения ассоциативного кольца с единицей тем, что по сложению это будет хотя и группа, но в общем случае некоммутативная, а умножение связано со сложением лишь левым законом дистрибутивности

$$\chi(\varphi + \psi) = \chi\varphi + \chi\psi.$$

Сумма эндоморфизмов φ и ψ группы G в общем случае не будет эндоморфизмом; без труда можно указать условия для того, чтобы $\varphi + \psi$ само было эндоморфизмом, т. е. чтобы эндоморфизмы φ и ψ были *суммируемыми*. Вместо почти-кольца всех преобразований можно было бы рассматривать лишь почти-кольцо, порожденное всеми эндоморфизмами.

С другой стороны, если ограничиться нормальными эндоморфизмами, то и их произведение, и их сумма, если они суммируемы, сами нормальны, причем справедливы оба закона дистрибутивности (см. § 47а). Больше того, сложение нормальных эндоморфизмов коммутативно и, следовательно, они порождают кольцо в почти-кольце всех преобразований (Херема [1]; аналогичные рассмотрения для нормальных полуэндоморфизмов — у Д. А. Робинсона [1]).

§ Д.4. Группы с мультиоператорами

Группы с полугруппой и с группой операторов. При изучении операторных абелевых групп естественно ограничиться рассмотрением абелевых групп с ассоциативным кольцом операторов или м о д у л е й (см. § 22). Это понятие, обобщающее понятие векторного пространства над полем, принадлежит сейчас к числу важнейших объектов изучения в общей алгебре. Нечто аналогичное может быть сделано и для некоммутативных операторных групп.

Напомним, что *полугруппой* называется множество с одной ассоциативной бинарной операцией. Пусть дана полугруппа Σ. Группа G

называется *группой с полугруппой операторов* Σ, если Σ служит для G областью операторов в смысле § 15, т. е.

$$(ab)\sigma = a\sigma \cdot b\sigma \quad \text{для всех} \quad a, b \in G, \quad \sigma \in \Sigma,$$

и если, кроме того,

$$a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau \quad \text{для всех} \quad a \in G, \quad \tau \in \Sigma.$$

Если полугруппа Σ обладает единицей ε, т. е. $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma$, то естественно положить, что

$$a\varepsilon = a \quad \text{для всех} \quad a \in G.$$

Всякая группа с произвольной областью операторов Σ_0 будет группой с полугруппой операторов Σ, где Σ есть *свободная полугруппа*, порожденная множеством Σ_0; ее элементами служат всевозможные конечные слова вида $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$, где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma_0$, $n \geqslant 1$, а умножение состоит в приписывании одного слова за другим,

$$(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n)(\sigma'_1\sigma'_2 \dots \sigma'_s) = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n\sigma'_1\sigma'_2 \dots \sigma'_s.$$

К Σ можно присоединить символ ε в качестве единицы.

Особенно интересен случай, когда полугруппа операторов сама является группой. Ясно, что если G — *группа с группой операторов* Σ, то эндоморфизмы группы G, соответствующие всем операторам из Σ, на самом деле будут автоморфизмами. С результатами, относящимися к группам с группами операторов, читатель встретится в Д.7.5 и Д.22.1. Что же касается произвольных операторных групп, то, видимо, их роль полностью перейдет к введенным Хиггинсом [1] мультиоператорным группам.

Мультиоператорные группы. Говорят, что в множестве G задана *n-арная операция* ω, если любой упорядоченной системе из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ сопоставлен однозначно определенный элемент множества G, который мы будем записывать через $a_1a_2 \dots a_n\omega$.

Пусть дана группа G, не обязательно коммутативная, но записываемая аддитивно; ее нулевой элемент есть 0. Пусть, с другой стороны, в множестве G задана система операций Ω, причем всякая операция $\omega \in \Omega$ n-арна, где $n \geqslant 1$ и зависит от ω. Группа G называется *группой с системой мультиоператоров* Ω или, короче, *Ω-группой*, если операции из Ω и групповая операция связаны следующим очень простым тождеством: для всех $\omega \in \Omega$

$$00 \dots 0\omega = 0, \tag{1}$$

где слева элемент 0 стоит n раз, если операция ω n-арна, т. е., как мы будем писать, $n(\omega) = n$. Сама исходная группа G называется *аддитивной группой* полученной Ω-группы.

Условие (1) можно было бы (хотя в этом нет необходимости) заменить следующим много более сильным условием дистрибутивности: для любого $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = n$, любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b, c \in G$

$$a_1 \ldots a_{i-1}(b+c)a_{i+1} \ldots a_n\omega = \\ = a_1 \ldots a_{i-1}ba_{i+1} \ldots a_n\omega + a_1 \ldots a_{i-1}ca_{i+1} \ldots a_n\omega.$$

Эти *дистрибутивные* Ω*-группы* превращаются в обычные группы с операторами, если $n(\omega) = 1$ для всех $\omega \in Q$; если же Ω состоит из одной бинарной операции, то мы приходим к понятию кольца, не обязательно ассоциативного.

Простейшие свойства мультиоператорных групп. Ω-группы принадлежат к числу универсальных алгебр (т. е. множеств с произвольной системой операций). Все, что справедливо для любых универсальных алгебр, справедливо, в частности, и для Ω-групп. Мы ограничимся весьма кратким перечнем основных определений и простейших свойств (см. также А. Г. Курош [21]).

Ω-*подгруппой* Ω-группы G называется подгруппа ее аддитивной группы, замкнутая относительно всех операций из Ω. Пересечение любой системы Ω-подгрупп само будет Ω-подгруппой, а поэтому можно говорить, как обычно, об Ω-подгруппе, порожденной данным множеством элементов, и о системе Ω-образующих Ω-группы. Объединение возрастающей последовательности Ω-подгрупп само является Ω-подгруппой.

Ω-группы G и G' (с одной и той же системой мультиоператоров) *изоморфны*, если существует такой изоморфизм φ их аддитивных групп, что для любой операции $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = n$, и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$

$$(a_1a_2 \ldots a_n\omega)\varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi) \ldots (a_n\varphi)\omega. \qquad (2)$$

Аналогично *гомоморфизмом* Ω-группы G в Ω-группу G' называется гомоморфизм φ аддитивных групп этих Ω-групп, удовлетворяющий условию (2). Образ G при гомоморфизме φ будет Ω-подгруппой в G'. На Ω-группы переносятся, в частности, понятия эндоморфизма и автоморфизма, а также рассмотренные в Д.2.2 конструкции прямого и обратного спектров.

Произведение гомоморфизмов Ω-групп (т. е. результат их последовательного выполнения) само будет гомоморфизмом. В частности, для любой Ω-группы можно говорить о полугруппе ее эндоморфизмов и о группе ее автоморфизмов.

Идеалы. Теория мультиоператорных групп оказалась той областью, в которой наиболее естественным образом объединяются многие параллельные разделы теории групп и теории колец, основанные на понятии

ядра гомоморфизма — на произвольные универсальные алгебры это понятие не переносится.

Идеалом Ω-группы G называется нормальный делитель A ее аддитивной группы, обладающий следующим свойством: для любой операции $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = n$, и любых систем элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ имеет место включение

$$(x_1 + a_1)(x_2 + a_2) \ldots (x_n + a_n)\omega \in x_1 x_2 \ldots x_n \omega + A.$$

Для операторных групп идеалы совпадают с допустимыми нормальными делителями, а для колец — с двусторонними идеалами.

Всякий идеал Ω-группы является Ω-подгруппой. Пересечение любого множества идеалов само будет идеалом. Идеал, порожденный данным множеством идеалов Ω-группы, совпадает с порожденной этими идеалами подгруппой аддитивной группы. Ω-группа называется *простой*, если она не содержит нетривиальных идеалов, и *сильно простой*, если не содержит нетривиальных Ω-подгрупп.

На фактор-группу аддитивной группы Ω-группы G по ее идеалу A переносятся операции из Ω. Полученная Ω-группа называется *Ω-фактор-группой* G по A, причем естественный гомоморфизм G на G/A будет гомоморфизмом и в смысле Ω-групп.

Идеалы Ω-группы служат ядрами ее гомоморфизмов (т. е. полными прообразами нуля), причем остается справедливой теорема о гомоморфизмах (или, точнее, об эпиморфизмах); сохраняется и теорема о соответствии между подгруппами группы и ее эпиморфного образа.

На Ω-группы переносятся также теорема об изоморфизме и *лемма Цасенхауза*, а поэтому сохраняются (с их доказательствами) теоремы Шрейера и Жордана–Гёльдера о нормальных рядах; в их формулировках следует говорить, конечно, об идеалах вместо нормальных делителей, а изоморфизм понимать в смысле Ω-групп.

Взаимный коммутант. Для Ω-подгрупп A и B Ω-группы G их *взаимный коммутант* $[A, B]$ определяется как идеал, порожденный в Ω-подгруппе $\{A, B\}$ множеством, состоящим из всех коммутаторов $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$, и всех элементов вида

$$-a_1 a_2 \ldots a_n \omega - b_1 b_2 \ldots b_n \omega + (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)\omega,$$

где $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$.

В частности, взаимный коммутант $[A, G]$ Ω-подгруппы A с самой Ω-группой G всегда будет идеалом в G. Таков, например, *коммутант* $G' = [G, G]$ Ω-группы G. Ω-подгруппа A тогда и только тогда будет идеалом в G, когда $[A, G] \subseteq A$. Таков, например, *центр* Z Ω-группы G, т. е. максимальная Ω-подгруппа, для которой $[Z, G] = O$. Эти понятия

позволяют построить в любой Ω-группе цепь коммутантов и верхнюю и нижнюю центральные цепи.

Ω-группа G называется *абелевой*, если $[G, G] = O$, т. е. ее коммутант равен нулю, а центр совпадает с ней самой. Аддитивная группа абелевой Ω-группы сама абелева. Всякая подгруппа абелевой Ω-группы является ее идеалом. Ω-фактор-группа G/A произвольной Ω-группы G тогда и только тогда абелева, когда идеал A содержит коммутант G' Ω-группы G.

Пересмотр содержания теории групп с целью перенесения тех или иных результатов на случай мультиоператорных групп лишь начинается. То немногое, что здесь уже получено, будет в соответствующих местах отмечено.

Часть вторая

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

§ Д.5. Прямые произведения

Простейшие свойства. В § 42 отмечено, что если группа выделяется прямым множителем из всякой группы, в которой она содержится в качестве подгруппы, то она единичная. На самом деле можно утверждать больше. Назовем подгруппу A *дополняемой* в группе G, если существует такая подгруппа $B \subset G$, что всякий элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = ab$, $a \in A$, $b \in B$ (т. е. $G = AB$ и $A \cap B = E$). Всякий прямой множитель дополняем, конечно, но не обратно. Оказывается, что если группа дополняема во всякой группе, в которой она содержится в качестве подгруппы, то она единичная (Уайголд [4]).

В том же § 42 совершенные группы охарактеризованы как группы, выделяющиеся прямым множителем во всякой группе, в которой они содержатся в качестве нормального делителя. В связи с этим Переманс [1] доказал, что группа тогда и только тогда выделяется прямым множителем в своем голоморфе, когда она или совершенна, или же является прямым произведением совершенной группы без подгрупп индекса 2 и циклической группы 2-го порядка.

В § 61 отмечены некоторые свойства вполне приводимых групп. Уайголд [4] и Хэд [3] показали, что прямые произведения любого множества простых групп можно охарактеризовать как группы, в которых всякий нормальный делитель выделяется прямым множителем, а также как группы, в которых всякий истинный нормальный делитель содержится в истинном прямом множителе.

В работе Лю Шао-сюэ [1] изучаются мультиоператорные группы, в которых всякий идеал выделяется прямым слагаемым. Это будут прямые суммы простых Ω-групп и только они. Аналогично в Ω-группе G будут выделяться прямыми слагаемыми все ее Ω-подгруппы тогда и только тогда, когда G является прямой суммой сильно простых Ω-групп G_i, $i \in I$ (см. Д.4.4), причем среди неабелевых Ω-групп G_i нет изоморфных.

Если даны два прямых разложения группы G,

$$G = A \times B = A' \times C,$$

и если $A \simeq A'$, то вовсе не обязательно $B \simeq C$, как показывают простые примеры. Е. Уокер [1] указал некоторые достаточные условия для того,

чтобы изоморфизм $B \simeq C$ имел место. Так, это будет, если группа A конечная или же если она неразложимая и совпадает со своим коммутантом. Это будет также, если группа G абелева и A с конечным числом образующих, причем отказаться от абелевости G нельзя. См. также Кон [3], Хонда [2].

Если группа G операторная и A — ее допустимая подгруппа, служащая прямым множителем для G как группы без операторов, то лишь при некоторых дополнительных условиях A будет прямым множителем для G как операторной группы. Такие условия указаны в работе Ковача и Ньюмэна [1].

Существование общего продолжения. В § 45 указано одно необходимое и достаточное условие, сформулированное на теоретико-структурном языке, для существования общего продолжения у двух данных прямых разложений. Этому условию можно придать несколько иную форму, причем мы будем пользоваться теоретико-групповым языком.

Пусть даны два прямых разложения группы G с произвольной системой операторов,

$$G = \prod_{\alpha} A_\alpha = \prod_{\beta} B_\beta; \tag{1}$$

через φ_α и соответственно θ_β обозначим эндоморфизмы этих разложений. Пусть, далее, символы $\overline{A}_\alpha$, $\overline{B}_\beta$, $\overline{\varphi}_\alpha$, $\overline{\theta}_\beta$ сохраняют тот же смысл, что и в § 45. А. Г. Курош [13, 16] ввел понятие *центра пары прямых разложений* (1). Его можно определить как пересечение произведений $\overline{A}_\alpha \overline{B}_\beta$, взятых для всех α и β, или как подгруппу, порожденную пересечениями $A_\alpha \theta_\beta \cap \overline{A}_\alpha \theta_\beta$, взятыми для всех α и β, или же как подгруппу, порожденную подгруппами $\overline{A}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha = G\overline{\varphi}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha$, взятыми для всех α и β; меняя роли первого и второго из разложений (1), можно получить другие формы этого определения. Центр пары прямых разложений всегда содержится в допустимом центре группы.

Прямые разложения (1) группы G тогда и только тогда обладают общим продолжением, когда центр этой пары разложений равен E (Курош [13]).

Отсюда следует, что равенство E центров всех пар прямых разложений группы G равносильно тому, что всякая пара прямых разложений этой группы обладает общим продолжением. При этом на самом деле достаточно того, чтобы существовали общие продолжения для всякой пары прямых разложений с д в у м я прямыми сомножителями каждое, т. е. чтобы равнялись E центры лишь таких пар.

Полученному критерию можно придать несколько иную форму (см. Шпехт [2]). Именно, так как умножение эндоморфизмов любой группы G ассоциативно, то все эндоморфизмы группы G составляют п о л у г р у п п у. Множество эндоморфизмов всех прямых разложений группы G порождает в этой полугруппе подполугруппу. Ее коммутативность равносильна тому, что всякая пара прямых разложений группы G обладает общим продолжением. Этому же равносильно совпадение

указанной подполугруппы с самим множеством всех эндоморфизмов прямых разложений группы G.

Наконец, в § 47а доказана теорема (Фиттинг [3], Курош [5]): прямое разложение группы G,

$$G = \prod_{\alpha} A_\alpha,$$

тогда и только тогда обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением этой группы, когда все множители A_α характеристичны (допустимы) относительно всех нормальных автоморфизмов группы G, т. е. (что для прямых множителей равносильно предыдущему) относительно всех нормальных эндоморфизмов этой группы. Как показал Л. Я. Куликов [3], для прямых множителей этому равносильна также характеристичность относительно всех идемпотентных нормальных эндоморфизмов; напомним, что эндоморфизм φ называется *идемпотентным*, если $\varphi^2 = \varphi$.

Изоморфизмы прямых разложений. Основной в теории прямых разложений вопрос о существовании центрально изоморфных продолжений разрабатывается сейчас за пределами теории групп. Некоторые из относящихся сюда работ, принадлежащих к теории дедекиндовых структур, указаны в § 42; дополнительно отметим работы Хостинского [1], Е. Н. Мочульского [1, 2], Дуингера [1] и Дуингера и Де Грота [1]. Изучение изоморфизмов прямых разложений можно вести и в рамках теории категорий — см. Атия [1], А. Г. Курош [19] и А. Х. Лившиц [4, 5]. Объединение этих двух направлений в единую теорию, посвященную изучению ортогональных систем идемпотентов в полугруппах, получено в работе А. Х. Лившица [6]. Наконец, теория изоморфизмов прямых разложений может разрабатываться и как часть теории универсальных алгебр — см. Голди [1], Кроули и Йонсон [1].

В § 47 доказана одна теорема из работы А. Г. Куроша [16], дающая для операторной группы некоторое условие существования центрально изоморфных продолжений для любой пары прямых разложений; эта теорема содержит в себе классическую теорему Шмидта (называемую также теоремой Ремака–Шмидта и теоремой Крулля–Шмидта). Для групп без операторов теорему Шмидта обобщали А. Г. Курош [1] (случай групп с обрывом убывающих нормальных цепей — см. § 16), а затем Коржинек [1], доказавший теорему: если в центре группы G обрываются убывающие цепи подгрупп, то два любых прямых разложения группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. При этом в работе Коржинека рассматривались разложения с конечным числом прямых множителей; случай бесконечного числа прямых множителей — в работе О. Н. Головина [1].

Эта теорема обобщается (ввиду леммы 19 из § 47) каждой из двух частей следующей теоремы (А. Г. Курош [16]). Пусть группа G обладает тем свойством, что всякая подгруппа центра, на которую

гомоморфно отображается сама группа G или, что то же самое, ее фактор-группа по коммутанту, удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей подгрупп (соответственно периодична и ее примарные компоненты, т. е. примарные прямые слагаемые — см. § 19 — удовлетворяют этому условию обрыва). Тогда для любых двух прямых разложений группы G (соответственно для любых двух прямых разложений с конечным числом множителей) существуют центрально изоморфные продолжения.

Теорема Коржинека обобщается также (ввиду приведенного в § 53 описания абелевых групп с условием минимальности) следующей теоремой (Кроули и Йонсон [1]): если группа G обладает таким прямым разложением, что центр каждого прямого множителя счетен и редуцированная часть этого центра (см. § 23) периодична и имеет примарные компоненты с ограниченными порядками элементов, то для любых двух прямых разложений группы G существуют центрально изоморфные продолжения.

Было бы интересно объединить указанные обобщения теоремы Коржинека.

Теория Бэра. Та часть теории изоморфизмов прямых разложений, которая относится к группам с произвольной системой операторов, получила далеко идущее развитие в работах Бэра [37–39] (см. изложение этой теории в книге Шпехта [2]).

В группе G выполняется *гипотеза расщепления*, если для любого прямого множителя H этой группы и любой пары его прямых разложений с двумя сомножителями каждое,

$$H = A \times A' = B \times B',$$

существуют такие прямые разложения

$$A = A_1 \times A_2, \quad A' = A'_1 \times A'_2, \quad B = B_1 \times B_2, \quad B' = B'_1 \times B'_2,$$

что

$$A_1 \times A'_1 = A'_1 \times B_1 = B_1 \times B'_1 = B'_1 \times A_1,$$
$$A_2 \times A'_2 = A'_2 \times B'_2 = B'_2 \times B_2 = B_2 \times A_2.$$

В группе G выполняется гипотеза расщепления, если она выполняется в допустимом центре этой группы. Для этого достаточно, чтобы в допустимом центре выполнялось условие минимальности для подгрупп, а в то же время в его подгруппах с конечным числом образующих (т. е. локально) — условие максимальности. Можно было бы указать и другие достаточные условия, более общие. Значение гипотезы расщепления состоит в том, что именно она может использоваться в качестве основного предположения при установлении существования центрально изоморфных продолжений. Приведем некоторые из результатов.

Если в группе G выполняется гипотеза расщепления, то любые два ее прямых разложения с конечным числом множителей каждое обладают центрально изоморфными продолжениями. Больше того, для прямых разложений

$$G = \prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{j=1}^{s} B_j$$

существуют такие продолжения, определяемые равенствами

$$A_i = \prod_{j=1}^{s} A_{ij}, \quad B_j = \prod_{i=1}^{n} B_{ji}; \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, s,$$

что имеет место следующее свойство замещения: для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и любого подмножества M множества первых s натуральных чисел $1, 2, \ldots, s$ группа G обладает прямым разложением

$$G = \prod_{k \neq i} A_k \times \prod_{j \notin M} A_{ij} \times \prod_{j \notin M} B_{ji}.$$

Если в группе G выполняется гипотеза расщепления, а в ее допустимом центре справедливо условие минимальности или условие максимальности (или же если допустимый центр сам удовлетворяет гипотезе расщепления и в то же время допускает лишь прямые разложения с конечным числом сомножителей), то для любых двух прямых разложений группы G существуют центрально изоморфные продолжения.

Если группа G удовлетворяет гипотезе расщепления и обладает прямыми разложениями с неразложимыми множителями, то любые два таких прямых разложения центрально изоморфны.

Если группа G удовлетворяет гипотезе расщепления и обладает прямыми разложениями с конечным числом неразложимых множителей, то любое прямое разложение группы G состоит из конечного числа множителей и обладает продолжением с неразложимыми множителями, а для любых двух разложений с неразложимыми множителями выполняется обычное свойство замещения.

В этой последней теореме содержится теорема Шмидта, так как для того, чтобы группа G удовлетворяла гипотезе расщепления и обладала прямым разложением с конечным числом неразложимых множителей, достаточно выполнения любого из следующих трех условий:

1) в группе G выполняется условие максимальности для нормальных делителей, а в ее допустимом центре — условие минимальности для подгрупп;

2) в группе G выполняется условие минимальности для нормальных делителей, а в ее допустимом центре локально выполняется условие максимальности для подгрупп;

3) группа G обладает главным рядом.

Заметим, что Хиггинсом [1] теория Бэра перенесена на случай мультиоператорных групп.

Другие теоремы об изоморфизмах прямых разложений. К результатам предшествующего пункта непосредственно примыкает следующая теорема из работы Кроули и Йонсона [1]: если группа G с произвольной системой операторов обладает таким прямым разложением, что допустимый центр каждого его множителя удовлетворяет условию минимальности и локально удовлетворяет условию максимальности, то для любых двух прямых разложений группы G существуют центрально изоморфные продолжения.

В п. 2. введено понятие центра пары прямых разложений (1) операторной группы G; обозначим его через Z_1. Эти разложения индуцируют два прямых разложения для Z_1. Именно, Z_1 будет прямым произведением по α подгрупп, порожденных подгруппами $\overline{A}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$, взятыми для всех β при фиксированном α; второе прямое разложение мы получим, меняя роли первого и второго из разложений (1). Эта пара прямых разложений группы Z_1 сама обладает центром, который мы обозначим через Z_2 и назовем *вторым центром* пары прямых разложений (1).

Продолжая так далее, мы получим убывающую *последовательность центров* $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq \ldots$ пары прямых разложений (1). Если для некоторого натурального n $Z_n = E$, то для пары прямых разложений (1) существуют центрально изоморфные продолжения (А. Г. Курош [16], М. И. Граев [3]). Здесь содержится, в частности, теорема (О. Н. Головин [1] — см. § 47а — и А. Г. Курош [13]) о том, что пара прямых разложений (1) обладает центрально изоморфными продолжениями, если ее центр содержится в одном из прямых множителей одного из этих разложений.

С другой стороны, М. И. Граев [3] построил для пары прямых разложений (1) возрастающую *последовательность коммутантов* $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots$. Именно, $K_0 = E$, а K_n, $n = 1, 2, \ldots$, является подгруппой, порожденной пересечениями

$$\{A_\alpha, K_{n-1}\} \cap \{B_\beta, K_{n-1}\},$$

взятыми для всех α и β. Оказывается, что $Z_n = E$ тогда и только тогда, когда $K_n = G$. Однако, для того, чтобы прямые разложения (1) обладали центрально изоморфными продолжениями, достаточно совпадения с G объединения возрастающей последовательности коммутантов этой пары разложений.

Совсем иными путями идет теория, построенная Л. Я. Куликовым [3]. В ее основе лежат следующие понятия. Если даны прямое разложение

$$G = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha \tag{A}$$

операторной группы G и некоторое множество Φ ее эндоморфизмов, то обозначим через $\Lambda(A, \Phi)$ множество всех тех подгрупп вида $\prod\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$, $J \subseteq I$, группы G, которые характеристичны относительно Φ. Прямое разложение (А) *частично упорядочено* относительно Φ,

если для любой пары различных индексов $\alpha, \beta \in I$ в множестве $\Lambda(A, \Phi)$ найдется подгруппа, содержащая один из прямых множителей A_α, A_β, но не содержащая другой. Если разложение (A) частично упорядочено относительно Φ, то, положив $\beta \leqslant \alpha$, если A_β содержится во всякой подгруппе из $\Lambda(A, \Phi)$, в которой содержится A_α, мы введем в множество индексов I частичную упорядоченность; множество I с этой частичной упорядоченностью будет обозначаться через $I(A, \Phi)$.

Приведем один из основных результатов Л. Я. Куликова. Пусть группа G обладает прямым разложением (A), частично упорядоченным относительно множества Φ_0 всех идемпотентных нормальных эндоморфизмов этой группы, причем или группа G счетна, или же множество $I(A, \Phi_0)$ удовлетворяет условию минимальности. Тогда разложение (A) и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями, а свойством, чтобы любые два прямых разложения обладали центрально изоморфными продолжениями, группа G будет обладать тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждый из прямых множителей A_α, $\alpha \in I$, разложения (A).

В частности, если $G = A \times B$, где группа A периодическая, а B — группа без кручения, то группа G обладает указанным свойством тогда и только тогда, когда им обладает каждая из групп A и B.

Теория Л. Я. Куликова может быть перенесена на случай мультиоператорных групп (О. А. Иванова).

§ Д.6. Полные прямые и подпрямые произведения

Полные прямые произведения. Эта конструкция (определение см. в § 17), используемая сейчас весьма широко, допускает следующее теоретико-категорное истолкование. Группа G тогда и только тогда изоморфна полному прямому произведению групп A_α, $\alpha \in I$, когда можно так задать гомоморфизмы π_α: $G \to A_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, что для любой группы H и любого набора гомоморфизмов φ_α: $H \to A_\alpha$, $\alpha \in I$, существует такой гомоморфизм φ: $H \to G$, притом однозначно определенный, что

$$\varphi_\alpha = \varphi\pi_\alpha, \quad \alpha \in I.$$

Гомоморфизмы π_α будут на самом деле эпиморфизмами, называемыми *проекциями* G на A_α; для полного прямого произведения это отображения всех элементов в их α-е компоненты.

Можно указать другую характеризацию полных прямых произведений, не требующую апелляции к произвольной группе H (см. Хасимото [1]). Группа G тогда и только тогда изоморфна полному прямому произведению групп A_α, $\alpha \in I$, если можно задать эпиморфизмы π_α: $G \to A_\alpha$ для всех $\alpha \in I$ со следующими свойствами: если N_α — ядро

эпиморфизма π_α, т. е. $A_\alpha \simeq G/N_\alpha$, и для любого подмножества $J \subseteq I$

$$D_J = \bigcap_{\alpha \in J} N_\alpha$$

(в частности, $D_I = \bigcap\limits_{\alpha \in I} N_\alpha$), то

1) $D_I = E$;

2) $N_\alpha D_{I \setminus \alpha} = G$, $\alpha \in I$;

3) для любой системы подмножеств J_s, $s \in S$, множества I и любого такого набора элементов $x_s \in G$, $s \in S$, что для любых $s_1, s_2 \in S$ элементы x_{s_1} и x_{s_2} лежат в одном смежном классе по произведению

$$\Big(\bigcap_{s \in S,\, s \neq s_1} D_{J_s}\Big)\Big(\bigcap_{s \in S,\, s \neq s_2} D_{J_s}\Big),$$

существует такой элемент $x \in G$, что

$$x \in x_s D_{J_s}, \quad s \in S.$$

В работе Л. Н. Каролинской [1] этот результат перенесен на прямые произведения с отмеченными подгруппами; впрочем, как и у Хасимото, здесь рассматриваются произвольные универсальные алгебры, а не только группы.

Существует интересная связь прямых и полных прямых произведений с прямыми и обратными спектрами (см. Д.2.2). Пусть дано семейство групп A_α, $\alpha \in I$. Множество L всех конечных подмножеств множества I, частично упорядоченное по теоретико-множественному включению, будет, очевидно, направленным. Для всякого $\beta \in L$, $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, положим

$$B_\beta = A_{\alpha_1} \times A_{\alpha_2} \times \ldots \times A_{\alpha_n}.$$

Если $\beta \leqslant \gamma$, т. е. $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_k)$, $k \geqslant 0$, то, отображая каждое A_{α_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, на себя тождественно, мы получаем мономорфное вложение группы B_β в группу B_γ. В результате группы B_β, $\beta \in L$, составят прямой спектр; предельная группа этого спектра изоморфна прямому произведению групп A_α, $\alpha \in I$. С другой стороны, мы получим эпиморфное отображение группы B_γ на группу B_β, если отобразим каждое $A_{\alpha'_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, в единицу, а остальные множители на себя тождественно. Это дает нам обратный спектр групп B_β, $\beta \in L$; его предельная группа изоморфна полному прямому произведению групп A_α, $\alpha \in I$.

Если множество I бесконечно, то полное прямое произведение $\prod\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ групп A_α, $\alpha \in I$, содержит в качестве истинной подгруппы прямое произведение $\prod\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ этих групп. М. И. Граев [1] показал, что группа $\widetilde{\prod\limits_{\alpha \in I}} A_\alpha$ может обладать нетождественным автоморфизмом,

индуцирующим тождественный автоморфизм на группе $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$. В этой же работе начато изучение изоморфизмов разложений группы в полное прямое произведение и вообще в прямое произведение с отмеченными подгруппами. Было бы полезно продолжить это изучение, доведя его до того состояния, в котором находится теория изоморфизмов прямых разложений. [См. ДК.]

В работе М. И. Граева [1] доказано также, что подгруппа $G = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ тогда и только тогда служит прямым множителем для $\widetilde{G} = \widetilde{\prod_{\alpha\in I}} A_\alpha$, когда все группы A_α, кроме, возможно, конечного числа, являются абелевыми и разлагаются в прямое произведение полной группы и периодической группы с ограниченными (по всей совокупности этих групп) порядками элементов. Этот результат для случая абелевых групп повторен в работе Баумслага и Блекберна [1]. В работе Б. Неймана [29] доказано, что если среди групп A_α, $\alpha \in I$, бесконечно много неабелевых, то прямое произведение G этих групп не будет *дополняемым* в их полном прямом произведении $\widetilde{G}$, т. е. не существует такой подгруппы H, что $GH = \widetilde{G}$ и $G \cap H = E$ (см. Д.5.1).

Кун [1] рассматривал *прямые произведения с объединенной подгруппой* (ср. свободные произведения с объединенной подгруппой из § 35) и показал, что такое произведение существует тогда и только тогда, когда объединяемая подгруппа лежит в центре каждой из заданных групп. Полные прямые произведения с объединенной подгруппой рассматривались в работе Хуляницкого и Ньюмэна [1].

Подпрямые произведения. Пусть дано полное прямое произведение $\overline{G}$ групп A_α, $\alpha \in I$, с проекциями $\pi_\alpha\colon \overline{G} \to A_\alpha$. Подгруппа $G \subseteq \overline{G}$ называется *подпрямым произведением* групп A_α, $\alpha \in I$, если для всякого $\alpha \in I$ проекция π_α индуцирует эпиморфизм σ_α G на A_α, т. е. всякий элемент из A_α служит α-й компонентой хотя бы для одного элемента из G. Ядра всех этих эпиморфизмов σ_α составляют в G систему нормальных делителей, пересечение которой равно E. Обратно, если в группе G задана система нормальных делителей N_α, $\alpha \in I$, с равным E пересечением, то группа G изоморфна подпрямому произведению фактор-групп G/N_α, $\alpha \in I$.

Группа G называется *подпрямо неразложимой*, если пересечение всех ее отличных от E нормальных делителей само отлично от E; оно называется *сердцевиной* группы G. Группа G тогда и только тогда подпрямо неразложима, если при любом ее представлении в виде подпрямого произведения некоторых групп A_α, $\alpha \in I$, хотя бы для одного $\alpha \in I$ эпиморфизм $\sigma_\alpha\colon G \to A_\alpha$ будет изоморфизмом.

Ввиду одной теоремы Биркгофа, относящейся к теории универсальных алгебр, всякая группа G изоморфна подпрямому произведению подпрямо неразложимых групп, изоморфных некоторым фактор-группам группы G.

Фукс [1] указал некоторое обозрение подпрямых произведений двух групп A и B. Именно, подгруппа G группы $A \times B$ тогда и только тогда будет подпрямым произведением групп A и B, когда существует такая группа F и такие эпиморфизмы $\varphi\colon A \to F$ и $\psi\colon B \to F$, что G состоит из тех и только тех элементов $ab \in A \times B$, для которых $a\varphi = b\psi$. Для случая бесконечного числа прямых множителей этим путем выделяется некоторый специальный тип подпрямых произведений, рассмотренный в работе Лонстра [10]. См. также Гилберт [1], где показано, в частности, что подпрямое произведение G групп A и B тогда и только тогда будет нормальным делителем группы $\overline{G} = A \times B$, когда коммутант группы $\overline{G}$ содержится в G.

Хэд [3] доказал, что группа G тогда и только тогда будет подпрямым произведением простых групп, когда для всякого неединичного нормального делителя N группы G существует в G такой истинный нормальный делитель N', что $NN' = G$. Всякая группа может быть вложена в некоторое подпрямое произведение простых групп в качестве полупрямого множителя (см. § 52).

Наконец, в работах К. К. Щукина [1, 2, 5] рассматривается одно обобщение подпрямо неразложимых групп с некоммутативной (совпадающей, следовательно, со своим коммутантом) сердцевиной. Группа G называется *первичной*, если для ее нормальных делителей A, B из $A \neq E$, $B \neq E$ всегда следует, что взаимный коммутант $[A, B] \neq E$, иными словами, если централизатор всякого ее нормального делителя $A \neq E$ равен E. Группа всех автоморфизмов первичной группы сама первична; если же первичная группа подпрямо неразложима, то такова же и ее группа автоморфизмов, причем сердцевины этих двух групп изоморфны.

§ Д.7. Свободные произведения

Теорема о подгруппах. В § 34 было отмечено, что теорема о подгруппах свободного произведения из работы А. Г. Куроша [3] была передоказана в работах Бэра и Леви [2] (заметим, что топологическими методами) и Такахаси [1]. Позже появились и другие доказательства — Кун [1] (воспроизведено в книге Шпехта [2]), М. Холл [5] (воспроизведено в его книге [7]), Уэйр [1], Уагнер [1], Каррас и Солитэр [4] (воспроизведено в книге Магнуса, Карраса и Солитэра [1]), Петреску [3], С. Маклейн [3] (воспроизведено в книге А. Г. Куроша [21]), Линдон [10], Хиггинс [2].

Некоторые из этих доказательств позволяют придать теореме о подгруппах более развернутую формулировку. Так, сохраняя обозначения формулировки этой теоремы из § 34, можно считать (см. С. Маклейн [3]), что

$$B_\beta = H \cap s^{-1} A_\alpha s,$$

причем индекс β пробегает множество пар (α, D); D пробегает все классы разложения группы G по двойному модулю (A_α, H), а s — некоторую специально подобранную систему представителей этих классов. Выбор этих представителей возможен такой, что все пересечения $H \cap A_\alpha$, отличные от E, войдут свободными множителями в искомое свободное разложение подгруппы H.

С другой стороны, Кун [1] показал, что (при тех же обозначениях) свободный множитель F из разложения, полученного для подгруппы H, будет свободной группой ранга

$$1 + j(n-1) - \sum_\alpha c_\alpha,$$

где n — число свободных множителей A_α, j — индекс H в G, c_α — индекс $\{H, A_\alpha\}$ в G; все эти числа считаются при этом конечными.

Отметим, что некоторые из перечисленных выше доказательств (Уэйр, Каррас и Солитэр) одновременно обобщают метод Рейдемейстера–Шрейера (см. Рейдемейстер [3]) для разыскания определяющих соотношений подгруппы в группе, заданной определяющими соотношениями.

Линдон [10] выводит теорему о подгруппах из теоремы о свободных разложениях групп, на которых задана *функция длины*, т. е. неотрицательная целочисленная функция, обладающая свойствами длины элемента в свободной группе или свободном произведении. Доказательство Хиггинса [2] опирается на результаты, относящиеся к теории частичных универсальных алгебр.

Такахаси [4] применяет теорему о подгруппах к описанию строения вербальных подгрупп свободного произведения и, в частности, его коммутанта. В работе Куна [1] показано, что строение коммутанта свободного произведения, т. е. вид его свободного разложения, полностью определяется коммутантами свободных множителей и индексами этих коммутантов.

Другие свойства свободных произведений. Новое доказательство теоремы Грушко (см. § 39) предложил Линдон [11]. Уагнер [1] обобщил теорему Грушко, освободив ее от предположения о конечности числа образующих. Именно, если задан гомоморфизм φ любой свободной группы F на свободное произведение $\prod_\alpha^* A_\alpha$, то существует такое свободное разложение

$$F = \prod_\alpha^* F_\alpha,$$

что $F_\alpha \varphi = A_\alpha$ для всех α. Заметим, что в этой теореме нельзя отказаться от предположения, что группа F свободна, — существуют неразложимые в свободное произведение группы с разложимыми фактор-группами.

Из этой теоремы выводится теорема Федерера и Йонсона [1]: если G и H — свободные группы и φ — эпиморфизм G на H, то существует такое свободное разложение $G = A * B$, что φ отображает A на H изоморфно, а B переводит в единицу.

В связи с теоремой Грушко отметим следующую теорему (Дэй [2]): если

$$G = A_1 * \ldots * A_m * B_1 * \ldots * B_n,$$

где число множителей конечно и все A_i, $i = 1, \ldots, m$, являются бесконечными циклическими группами, и если группа G порождается элементами c_i бесконечного порядка, $i = 1, \ldots, m$, и подгруппами $d_j^{-1} B_j d_j$, $j = 1, \ldots, n$, то

$$G = \{c_1\} * \ldots * \{c_m\} * d_1^{-1} B_1 d_1 * \ldots * d_n^{-1} B_n d_n.$$

Не существует групп (кроме тривиальных случаев единичной группы и циклических групп простых порядков), в которых всякая подгруппа выделялась бы свободным множителем (Уайголд [4]).

Если группа G разложима в свободное произведение, а H — ее отличная от E подгруппа с конечным числом сопряженных, то пересечение всех этих сопряженных с H подгрупп отлично от E (Каррас и Солитэр [3]).

Эта последняя работа в основном посвящена изучению свободных произведений конечного типа, т. е. свободных произведений конечного числа групп, являющихся конечными расширениями свободных групп конечных рангов, бóльших или равных 0. Если G — такое свободное произведение, а H — ее подгруппа с конечным числом образующих, то следующие свойства H эквивалентны: a) H конечного индекса; b) H имеет конечное число сопряженных; c) $H \supseteq G^n$ для некоторого $n > 0$. Доказано также, что свободные произведения конечного типа являются хопфовыми группами, т. е. для них проблема Хопфа (см. § 38) имеет положительное решение.

В связи с теоремами Магнуса и Витта, приведенными в § 36, представляет интерес работа Ри [2] о свободных произведениях абелевых групп без кручения. Если G — такое свободное произведение и G'' — ее второй коммутант, то ω-й член нижней центральной цепи фактор-группы G/G'' равен E, а факторы этой цепи — группы без кручения (см. Д.24.5).

Связь прямых и свободных произведений. Свободные произведения в теоретико-категорном смысле двойственны полным прямым произведениям (ср. Д.6.1). Именно, группа G тогда и только тогда изоморфна свободному произведению групп A_α, $\alpha \in I$, когда можно так задать гомоморфизмы σ_α: $A_\alpha \to G$ для всех $\alpha \in I$, что для любой группы H и любого набора гомоморфизмов φ_α: $A_\alpha \to H$, $\alpha \in I$, существует такой гомоморфизм φ: $G \to H$, притом однозначно определенный, что

$$\varphi_\alpha = \sigma_\alpha \varphi, \quad \alpha \in I.$$

Гомоморфизмы σ_α будут на самом деле мономорфизмами, а именно естественными *вложениями* групп A_α в свободное произведение $\prod^*_{\alpha\in I} A_\alpha$.

Существует, в частности, канонический эпиморфизм свободного произведения $\prod^*_{\alpha\in I} A_\alpha$ на прямое произведение $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ тех же групп, определяемый тождественными отображениями групп A_α, $\alpha\in I$, на себя. Ядро этого эпиморфизма D, называемое *декартовой подгруппой* рассматриваемого свободного произведения, состоит из тех и только тех слов, у которых произведение (в порядке, определяемом данным словом) всех сомножителей, принадлежащих к группе A_α, равно 1 для всех $\alpha\in I$. Декартова подгруппа всегда является свободной группой; в работе Грюнберга [2] указан способ построения системы свободных образующих декартовой подгруппы свободного произведения конечного числа групп.

С другой стороны, декартова подгруппа D есть нормальный делитель, порожденный всеми коммутаторами вида $[a_\alpha, a_\beta]$, где $\alpha\neq\beta$ и a_α, a_β принадлежат к заданным системам образующих групп A_α и соответственно A_β. Дэй [1] изучал минимальное число таких коммутаторов, порождающих D как нормальный делитель, если число свободных множителей A_α конечно и все A_α — группы с конечным числом образующих.

Подгруппы, связанные с каноническим эпиморфизмом свободного произведения на прямое, рассматриваются также в работе Хилтона [1], результаты которой обобщает Коэн [1].

Отметим здесь же следующую теоретико-категорную характеризацию свободных групп, указанную Экманом и Хилтоном [1]: группа G, отличная от E, тогда и только тогда будет свободной, если она обладает таким мономорфизмом в группу $G*G$, произведение которого на канонический эпиморфизм $G*G\to G\times G$ совпадает с диагональным вложением G в $G\times G$.

Полные свободные произведения. В Д.6.1. прямые и полные прямые произведения охарактеризованы как предельные группы прямых и соответственно обратных спектров. Аналогично свободное произведение групп A_α, $\alpha\in I$, будет предельной группой прямого спектра всевозможных свободных произведений вида $A_{\alpha_1}*A_{\alpha_2}*\ldots*A_{\alpha_n}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in I$, относительно их естественных вложений друг в друга.

С другой стороны, существует естественный эпиморфизм группы $A_{\alpha_1}*\ldots*A_{\alpha_n}*A_{\alpha'_1}*\ldots*A_{\alpha'_s}$ на группу $A_{\alpha_1}*\ldots*A_{\alpha_n}$, при котором группы $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}$ отображаются на себя тождественно, а $A_{\alpha'_1}, \ldots, A_{\alpha'_s}$ переходят в единицу. Этим определяется обратный спектр свободных произведений всевозможных конечных подмножеств заданного множества групп A_α, $\alpha\in I$. Предельная группа этого

спектра, которую мы назовем *полным свободным произведением* заданных групп, рассматривалась Г. Хигмэном [4].

В этой работе изучалось, в частности, полное свободное произведение счетного множества бесконечных циклических групп. Показано, что эта группа не будет свободной; больше того, она не может эпиморфно отображаться на свободную группу бесконечного ранга. Гриффитс [1] рассмотрел полное свободное произведение счетного множества любых отличных от E счетных групп и доказал, что и мощность коммутанта такой группы, и его индекс континуальны. См. также Гриффитс [2] и Моран [8].

Полные свободные произведения несомненно заслуживают дальнейшего детального изучения.

Случай операторных и мультиоператорных групп. Теоретико-категорное истолкование понятия свободного произведения, указанное в п. 3, позволяет перенести это понятие в теорию операторных и мультиоператорных групп. Это же относится и к понятию свободной группы.

Именно, пусть группа F операторная с полугруппой операторов Σ, обладающей единицей (см. Д.4.1). Группа F будет Σ-*свободной*, если она обладает такой системой образующих X, что элементы $x\alpha$, $x \in X$, $\alpha \in \Sigma$, составляют для F как группы без операторов систему свободных образующих (см. С. Т. Завало [1]). Ранг Σ-свободной группы является ее инвариантом. Если полугруппа Σ состоит не только из единицы, то Σ-свободная группа ранга 1 содержит допустимую Σ-свободную подгруппу бесконечного ранга.

Не все допустимые подгруппы Σ-свободной группы будут, однако, сами Σ-свободными. Это же относится и к частному случаю групп с группой операторов Γ (см. Д.4.1). В этом случае, однако, строение допустимых подгрупп может быть полностью описано (С. Т. Завало [1]). Если F — Γ-свободная группа, $f \in F$ и Δ — подгруппа группы Γ, то обозначим через $A_{f,\Delta}$ допустимую подгруппу группы F, порожденную всеми элементами вида $f^{-1}(f\alpha)$, $\alpha \in \Delta$; ее строение полностью определяется подгруппой Δ. Справедлива теорема:

Всякая допустимая подгруппа Γ-свободной группы является операторным свободным произведением групп типа $A_{f,\Delta}$ и некоторой Γ-свободной группы.

Допустимые подгруппы Σ-свободной группы F для случая свободной полугруппы операторов Σ изучаются в работе С. Т. Завало [2]. Допустимая циклическая подгруппа $\{a\}$ такой группы, $a \neq 1$, сама будет Σ-свободной со свободным образующим a. Если *вполне допустимой* назвать такую допустимую подгруппу, которая со всяким элементом $a\alpha$, $a \in F$, $\alpha \in \Sigma$, содержит и сам элемент a, то доказано, что вполне допустимая подгруппа с конечным числом образующих Σ-свободной группы сама Σ-свободна.

Теория операторных свободных разложений произвольных операторных групп по существу еще не начата. Еще большие трудности,

понятно, — в более общем случае дистрибутивных мультиоператорных групп. Однако на случай произвольных мультиоператорных групп (когда мультиоператоры связаны с групповой операцией лишь тождествами (1) из Д.4.2) переносятся (А. Г. Курош [20]) и теорема о подгруппах свободного произведения (в частности, теорема о подгруппах свободной группы), и теорема об изоморфизмах свободных разложений. [См. ДК.]

§ Д.8. Амальгамы групп

Свободные произведения с объединенной подгруппой. В § 35 приведено принадлежащее Шрейеру [4] доказательство их существования. Строение подгрупп этих групп может быть описано лишь в частных случаях. Так, Кун [1] доказал следующую теорему: если G есть свободное произведение групп A_α, $\alpha \in I$, с объединенным нормальным делителем N, то подгруппа $U \subseteq G$ будет свободным произведением (с объединенным нормальным делителем $U \cap N$) свободной группы и подгрупп B_β, определяемых так же, как в Д.7.1. Эта теорема обобщает теорему о подгруппах свободного произведения (случай $N = E$), но на нее опирается.

Для случая произвольной объединенной подгруппы отметим следующие результаты.

Если G есть свободное произведение групп A_α, $\alpha \in I$, с объединенной подгруппой B и если в группах A_α выбраны подгруппы A'_α, пересечения которых с B совпадают между собой,

$$A'_\alpha \cap B = B', \quad \alpha \in I,$$

то подгруппа, порожденная в G всеми A'_α, $\alpha \in I$, будет их свободным произведением с объединенной подгруппой B' (Х. Нейман [1]).

Пусть группа G является свободным произведением двух групп A и B с объединенной подгруппой C; запишем это символом $G = A *^C B$. Если элементы $b_\alpha \in B$, $\alpha \in I$, принадлежат к нормализатору C в B и порождают различные смежные классы по C и если

$$A_\alpha = b_\alpha^{-1} A b_\alpha, \quad \alpha \in I,$$

то подгруппа группы G, порожденная всеми A_α, $\alpha \in I$, будет их свободным произведением с объединенной подгруппой C (Б. Нейман [15]).

Свободное произведение конечного числа конечных групп с объединенной подгруппой не может быть простой группой и даже обладает всегда нормальным делителем конечного индекса. Существуют, однако (Камм [1]), простые группы с двумя образующими, разложимые в свободное произведение двух бесконечных групп с объединенной подгруппой.

Эпстейн [1] указывает условия, при которых свободное произведение двух групп с объединенной подгруппой C может обладать

абелевым нормальным делителем, не лежащим в C. Он доказывает также следующее обобщение теоремы Бэра и Леви из § 35: если группа G разложима как в прямое произведение, $G = U \times V$, так и в свободное произведение с объединенной подгруппой C, то или $U \subseteq C$, или $V \subseteq C$.

Коэн [2] доказал, что если $G = A *^{C} B$ и A_0, B_0, C_0 — соответственно нормальные делители в A, B и C, причем

$$A_0 \cap C = B_0 \cap C = C_0,$$

и если объединение $A_0 \cup B_0$ порождает в G нормальный делитель N, то

$$N \cap A = A_0, \quad N \cap B = B_0,$$

а G/N изоморфно свободному произведению групп A/A_0 и B/B_0 с объединенной подгруппой C/C_0.

В работе Баумслага [11] изучается свободное произведение $G = F *^{C} A$, где F — свободная группа, A — свободная абелева группа счетного ранга, $C = \{c\}$ — циклическая подгруппа. При некоторых ограничениях, наложенных на выбор элемента c в F и в A, группа G вкладывается в полное прямое произведение некоторого множества групп, изоморфных F.

Вложения амальгам в группы. Если в группе G выделено некоторое семейство подгрупп A_α, $\alpha \in I$, то теоретико-множественное объединение этих подгрупп, рассматриваемое отдельно («вырезанное» из группы), будет примером амальгамы групп. Именно, *амальгамой* групп A_α с пересечениями $A_{\alpha\beta}$ называется множество A, представленное как теоретико-множественное объединение групп A_α, $\alpha \in I$, причем для всех $\alpha, \beta \in I$ пересечение

$$A_\alpha \cap A_\beta = A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$$

непусто и является подгруппой в каждой из групп A_α, A_β. Отсюда следует, в частности, что все группы A_α, $\alpha \in I$, имеют общую единицу.

Амальгама двух групп и вообще любая амальгама, у которой все пересечения $A_{\alpha\beta}$ совпадают между собой, всегда вкладываются в группу; в § 35 доказано существование свободных произведений с объединенной подгруппой. Существуют, однако, амальгамы, которые не могут быть вложены в группу. Такова, например, амальгама четырех свободных абелевых групп ранга 3:

$$A_1 = \{a, b, c\}, \quad A_2 = \{a, c, d\}, \quad A_3 = \{a, d, b\}, \quad A_4 = \{a, u, v\}$$

с пересечениями

$$A_{12} = \{a, c\}, \quad A_{13} = \{a, b\}, \quad A_{14} = \{a, b - c = a + u\},$$
$$A_{23} = \{a, d\}, \quad A_{24} = \{a, c - d = v - u\}, \quad A_{34} = \{a, v = b - d\}.$$

Вопрос об условиях для вложимости амальгамы в группу рассматривался в работах Х. Нейман [1, 2, 3], Бэра [44], Б. Неймана и Х. Нейман [1, 4]. Результаты этих работ систематизированы в обзоре Б. Неймана [15]; приведем некоторые из них.

Гомоморфизмом амальгамы $A = [A_\alpha, \alpha \in I; A_{\alpha\beta}]$ в группу H называется отображение φ множества A в группу H, гомоморфное на каждой группе A_α, $\alpha \in I$. Взаимно однозначный гомоморфизм A в H будет *мономорфизмом* или *вложением*.

Группа A^*, имеющая множество всех элементов амальгамы A системой образующих, а множество всевозможных равенств вида $ab = c$, выполняющихся в амальгаме A — системой определяющих соотношений, называется *свободным замыканием* амальгамы A. Естественный гомоморфизм φ^* амальгамы A в группу A^* назовем *каноническим*. Для всякого гомоморфизма φ амальгамы A в некоторую группу H существует такой гомоморфизм ψ: $A^* \to H$, что $\varphi = \varphi^*\psi$. Амальгама A тогда и только тогда вкладывается в какую-либо группу, если канонический гомоморфизм φ^* является мономорфизмом, т. е. если A вкладывается в свое свободное замыкание A^*.

Амальгама A обладает с в о й с т в о м (i), если канонический гомоморфизм φ^* является изоморфизмом на каждой группе A_α, $\alpha \in I$, и с в о й с т в о м (s), если для всех $\alpha, \beta \in I$ подгруппа $A_{\alpha\beta}$ служит полным прообразом относительно φ^* для пересечения $A_\alpha\varphi^* \cap A_\beta\varphi^*$. Амальгама A тогда и только тогда вкладывается в группу, если она обладает свойствами (i) и (s). На примерах амальгам трех групп (и амальгам четырех абелевых групп) можно показать, что только одного из этих двух свойств недостаточно для вложимости амальгамы в группу.

Для амальгам а б е л е в ы х групп можно искать условия для вложимости в абелеву группу. Для этого определяется свободное абелево замыкание амальгамы A — фактор-группа свободного замыкания по коммутанту; его свойства аналогичны свойствам группы A^*.

Всякая амальгама трех абелевых групп вкладывается в абелеву группу. Всякая амальгама четырех абелевых групп, вложимая в группу, вкладывается в абелеву группу. Существует амальгама пяти абелевых групп, вложимая в группу, но не вложимая в абелеву группу.

В работе Б. Неймана [25] рассматривается вопрос о вложимости амальгамы двух периодических групп в периодическую группу. Показано, что существует не вкладываемая в периодическую группу амальгама двух локально конечных групп, даже с ограниченными в совокупности порядками элементов. Если, однако, пересечение заданных групп конечно (или является центральной подгруппой счетного индекса в одной из них), а сами эти группы локально конечны, то амальгама вкладывается в локально конечную группу.

Было бы полезно провести аналогичные рассмотрения и для других важных классов групп. Отметим в этой связи работу Б. Неймана [26], в которой показано, в частности, что амальгама двух конечных

нильпотентных групп может не вкладываться в разрешимую группу. Г. Хигмэн [13] рассматривает условия для вложимости амальгамы двух конечных p-групп в конечную p-группу, а Уайголд [8] — для вложимости амальгамы двух разрешимых групп в разрешимую группу. Укажем также работы Уайголда [2, 5, 6] и Б. Неймана и Уайголда [1], связанные с рассматриваемыми в § Д.11 нильпотентными, разрешимыми и вообще вербальными произведениями групп, а также с вводимыми в § Д.12 сплетениями групп. [См. ДК.]

§ Д.9. Свободные группы

Подгруппы свободных групп. Понятно, что все результаты, полученные для свободных произведений, можно применить, в частности, к свободным группам. Так, например, развернутая формулировка теоремы о подгруппах из Д.7.1 позволяет утверждать, что если в свободной группе F с системой свободных образующих X взята подгруппа H и пересечение $H \cap X = X'$ непусто, то X' можно включить в систему свободных образующих для H.

Результаты из Д.7.2 относительно свободных произведений конечного типа приводят к некоторой характеризации подгрупп конечного индекса в свободных группах конечного ранга. Отметим также следующий результат (Каррас и Солитэр [2]): подгруппа с конечным числом образующих свободной группы F конечного ранга, содержащая отличный от E нормальный делитель группы F, имеет в F конечный индекс.

Для теоремы Нильсена–Шрейера о подгруппах свободной группы продолжают появляться новые доказательства и обобщения — см. Федерер и Йонсон [1] (передоказательство в работе Кубота [1]), а также Фокс [1], Нильсен [5], Петреску [2], Хиггинс [2], Шютценбергер [1]. Доказательство, приведенное в последней из этих работ, основано на теореме: подполугруппа H свободной группы F, содержащая единицу этой группы, тогда и только тогда будет свободной группой, если для $a \in F$ из непустоты пересечения $aH \cap Ha \cap H$ всегда следует $a \in H$.

Отметим, что из доказательства теоремы Нильсена–Шрейера, содержащегося в работе Леви [2], вытекает существование для подгруппы H свободной группы F с системой свободных образующих X такой системы свободных образующих Y, что в несократимой записи любого элемента $a \in H$ через Y участвуют лишь такие элементы из Y, длины которых относительно системы образующих X не превосходят длины самого элемента a.

Пересечение любых двух подгрупп свободной группы F, обладающих конечным числом образующих, само имеет конечное число образующих; предположение, что группа F свободная, существенно. Больше того, если подгруппы A и B свободной группы F и их пересечение

$A \cap B$ имеют соответственно (как свободные группы) ранги r, s и t, то имеет место неравенство

$$t \leqslant 2rs - 2r - 2s + 3$$

(Хаусон [1], Х. Нейман [5]).

В работе Леви [3] доказано, что если в свободной группе F дана убывающая цепочка подгрупп

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots, \tag{1}$$

каждая из которых характеристична в предыдущей, то пересечение этой цепочки равно E. Такахаси [1] показал, что если цепочка подгрупп вида (1) такова, что F_{n+1}, $n = 1, 2, \ldots$, не содержит ни одного *примитивного элемента* группы F_n, т. е. элемента, входящего в какую-либо систему свободных образующих этой группы, то длина любого элемента из F_n, отличного от единицы, относительно любой системы свободных образующих группы F не меньше n. См. в этой связи работу Карраса и Солитэра [4], в которой показано также, что если свободная группа F счетная, то для любой цепочки (1) всякий конечнопорожденный свободный множитель ее пересечения будет служить свободным множителем почти для всех F_n. Впрочем, еще в работе Такахаси [5] было доказано, что в свободной группе F пересечение цепочки подгрупп вида (1) тогда и только тогда отлично от E, когда существует подгруппа, являющаяся общим свободным множителем почти для всех F_n.

В цикле работ Линдона [7], Шенкмана [6], Шютценбергера [2], Баумслага [4], Линдона и Шютценбергера [1] показано, что если элементы a, b, c свободной группы связаны равенством

$$a^m b^n = c^s, \quad m, n, s \geqslant 2,$$

то подгруппа $\{a, b, c\}$ будет циклической. Это же можно утверждать и в том случае, когда элементы a, b, c связаны равенством

$$[a, b] = c^s, \quad s \geqslant 2.$$

Эти результаты объединяются следующей теоремой Баумслага и Стейнберга [1].

Пусть слово $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не является ни примитивным элементом (см. выше) свободной группы со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ни степенью другого элемента этой группы. Если элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ некоторой свободной группы связаны равенством

$$w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c^s, \quad s \geqslant 2,$$

то ранг подгруппы $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, c\}$ не превышает $n - 1$.

Нормальные делители свободных групп. В формулировке теоремы Мальцева–Ивасавы, доказанной в § 36, можно говорить не просто о нормальных делителях конечного индекса, а о нормальных

делителях, индексы которых являются степенями фиксированного простого числа p. Иными словами (см. Д.2.2), всякая свободная группа аппроксимируется конечными группами (т. е. *финитно-аппроксимируема*) и даже конечными p-группами для любого простого p. Новое доказательство этой теоремы дал Ньюуайрт [1]; см. также Ф. Холл [22].

Коэн и Линдон [1] рассматривали системы свободных образующих для нормальных делителей свободных групп. Пусть нормальный делитель A свободной группы F порождается (как нормальный делитель) таким множеством элементов M, что относительно некоторой фиксированной системы свободных образующих группы F несократимая запись всякого элемента $a \in A$, отличного от 1, содержит больше половины хотя бы одного слова из M; тогда для A можно найти систему свободных образующих, сопряженных с элементами из M.

Если нормальный делитель A свободной группы F порождается о д н и м элементом $a_0 \neq 1$ и N — нормализатор элемента a_0 в F, то для A существует система свободных образующих, состоящая из элементов $u^{-1}a_0u$, где u пробегает систему представителей правых смежных классов группы F по подгруппе NA; любая система свободных образующих для A, состоящая из элементов, сопряженных с a_0, может быть так получена при некотором выборе указанной системы представителей.

Один новый способ построения системы свободных образующих для коммутанта свободной группы указала М. Круль [1]; см. также Грюнберг [2].

Если в некоммутативной свободной группе F взяты нормальные делители A и B и если $A_n \subseteq B'$, где A_n — n-й член нижней центральной цепи группы A (n — некоторое натуральное число), а B' — коммутант группы B, то $A \subseteq B$ (Ауслендер и Линдон [1], Б. Нейман [27]). В первой из этих работ показано также (сохраняем предшествующие обозначения), что при $B \neq F$, $B \neq E$ центр фактор-группы F/B' будет истинной подгруппой в B/B'; он совпадает с E тогда и только тогда, когда индекс B в F бесконечен. Обобщая этот последний результат, А. Л. Шмелькин [8] показал, что если индекс нормального делителя B некоммутативной свободной группы F бесконечен и $V(B)$ — произвольная вербальная подгруппа группы B (см. Д.3.4), отличная от B, то $F/V(B)$ будет группой без центра. (См. также Д.10.6.)

Если в свободной группе F конечного ранга n нормальный делитель A имеет конечный индекс j, то фактор-группа $(A \cap F')/A'$ будет свободной абелевой группой ранга $(j-1)(n-1)$ (Макгенри [2]).

К этому пункту относится, понятно, и изучение характеристических и вполне характеристических (вербальных) подгрупп свободных групп, ведущееся, в частности, в связи с изучением многообразий групп (см. § Д.10).

Результаты, перечисленные в этом и предшествующем пунктах, неизбежно представляются весьма разрозненными. Задача обозрения структуры подгрупп свободной группы, особенно если стремиться

включить в это обозрение и отношение нормальности между подгруппами, а также операцию взаимного коммутирования подгрупп, все еще остается весьма далекой от исчерпания.

Примитивные элементы. Ряд результатов относительно примитивных элементов свободных групп можно найти в работах Пикар [1, 2]. Так, на основании теоремы Грушко можно доказать, что если в несократимую запись элемента a свободной группы F входят элементы

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{2}$$

заданной системы свободных образующих, то элемент a тогда и только тогда будет примитивным для F, когда он входит в систему свободных образующих подгруппы $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, допущенную относительно системы (2) (см. § 39). Это же для свободной группы ранга 2, но в более алгоритмической форме — у П. В. Стендера [2].

Элементы a, b свободной группы F с системой свободных образующих x, y тогда и только тогда составляют для F систему свободных образующих, когда в F существует такой элемент c, что

$$c^{-1}[a, b]c = [x, y] \quad \text{или} \quad c^{-1}[b, a]c = [x, y]$$

(А. И. Мальцев [14]).

Автоморфизмы и эндоморфизмы свободных групп. Чанг [1] показал, что автоморфизм φ свободной группы F с двумя свободными образующими a, b тогда и только тогда будет внутренним, когда

$$a\varphi \in aF', \quad b\varphi \in bF',$$

где F' — коммутант группы F. Отсюда следует, что фактор-группа группы всех автоморфизмов группы F по подгруппе внутренних автоморфизмов изоморфна группе целочисленных матриц 2-го порядка с определителем ± 1.

Цишанг [1] изучал группу тех автоморфизмов свободной группы F с системой свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые оставляют на месте элемент этой группы, имеющий вид $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_s^{k_s}$, $s \leqslant n$, $k_i \geqslant 2$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Найдено также необходимое и достаточное условие для того, чтобы один из двух заданных элементов такого вида можно было перевести в другой автоморфизмом группы F.

Алгебраическое доказательство упомянутых в § 35 результатов Уайтхеда [2], полученных первоначально топологическими методами, дано в работе Рапапорт [1].

Всякое отображение системы свободных образующих X свободной группы F в группу F можно однозначно продолжить до эндоморфизма этой группы. Это позволило Х. Нейман [4] превратить полугруппу эндоморфизмов группы F в почти-кольцо (см. Д.3.6), определив сумму эндоморфизмов φ и ψ как эндоморфизм, продолжающий следующее отображение $\varphi + \psi$ множества X в F:

$$x(\varphi + \psi) = x\varphi \cdot x\psi, \quad x \in X;$$

при этом выполняется, впрочем, правый закон дистрибутивности, а не левый. Если называть *идеалом* почти-кольца нормальный делитель аддитивной группы, выдерживающий умножение на любой элемент почти-кольца как слева, так и справа, то оказалось, что идеалы почти-кольца эндоморфизмов свободной группы F взаимно однозначно соответствуют вполне характеристическим подгруппам самой группы F.

Некоторое обозрение идеалов полугруппы эндоморфизмов и полугруппы частичных эндоморфизмов свободной группы можно найти в работе И. И. Валуцэ [1], относящейся к свободным универсальным алгебрам. Так, например, в полугруппе частичных эндоморфизмов $P(F)$ нециклической свободной группы F все двусторонние идеалы составляют цепь по теоретико-множественному включению; если при этом группа F счетная, то $P(F)$ обладает единственным нетривиальным двусторонним идеалом — это будет множество всех частичных эндоморфизмов на циклические подгруппы.

Уравнения в свободных группах. Ясно, что все решения уравнения $x^{-1}a^{-1}xa = 1$, лежащие в свободной группе $\{a\}$, можно записать в виде a^k, где k — любое целое число. Линдон [8] показал, что для любого непустого слова $w(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = w(x)$ можно указать такую конечную систему слов от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, зависящих от некоторых целочисленных параметров, что при подстановке в эти слова всевозможных целых значений для параметров будут получаться все решения уравнения $w(x) = 1$, лежащие в свободной группе с системой свободных образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Аналогичный результат получил А. А. Лоренц [1] для такой системы уравнений от нескольких неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что левая часть каждого из уравнений системы является словом лишь от двух из этих неизвестных и не содержит «коэффициентов», т. е. фиксированных элементов вида a_i; решения разыскиваются в некоторой свободной группе конечного ранга.

См. также п. 1 и обзор Линдона [12]. Следует ожидать, что теория систем уравнений в свободных группах будет развиваться и в дальнейшем.

Обобщения свободных групп. В цикле работ Пикар (см., например, [3, 4]) рассматриваются некоторые классы групп, более широкие, чем класс свободных групп. Так, группа G называется *фундаментальной*, если она обладает *базой*, т. е. такой системой образующих, в которой никакую конечную подсистему нельзя заменить меньшим числом элементов группы так, чтобы полученная система элементов оставалась системой образующих для G. К числу фундаментальных групп принадлежат как свободные группы, так и, например, группы с конечным числом образующих.

Фундаментальная группа G называется *квазисвободной*, если в некоторой базе, называемой квазисвободной, она задается определяющими соотношениями, имеющими степень нуль по каждому

образующему; такова, например, группа с образующими a, b и соотношением $a^{-1}b^{-2}ab^2 = 1$. Коммутант квазисвободной группы состоит из элементов, записываемых в квазисвободной базе словами, имеющими степень нуль по каждому образующему. Абелевы квазисвободные группы исчерпываются свободными абелевыми группами.

Наконец, группа называется *псевдосвободной*, если в некоторой системе образующих, называемой псевдосвободной, она задается определяющими соотношениями степени нуль по совокупности образующих. Существуют как фундаментальные, так и не фундаментальные псевдосвободные группы.

Псевдосвободная система образующих M псевдосвободной группы G порождает в G, очевидно, свободную подполугруппу и служит для последней системой свободных образующих (т. е. всякий элемент из G, записываемый через положительные степени элементов из M, обладает единственной такой записью). Вопросу о существовании групп с этим свойством, отличных от свободных, посвящена также работа Эппла и Джорупа [1]; такова, например, группа с образующими a, b и соотношением $ab^{-1}ab^{-1} = 1$.

Среди обобщений свободных групп должны быть названы, конечно, и *локально свободные* группы (см. § 37а). Их изучение продолжается в работе Такахаси [3]. В ней доказано, в частности, что в свободной группе ни для какого натурального числа n не существует бесконечной возрастающей последовательности подгрупп с n образующими, и поставлен вопрос, не будет ли свободной любая счетная локально свободная группа, обладающая этим свойством. Отрицательное решение этого вопроса дал Г. Хигмэн [5].

§ Д.10. Многообразия и их свободные группы

Многообразия групп. В § 37 уже были указаны некоторые связи между тождественными соотношениями, или, короче, *тождествами*, в группах, с одной стороны, и вполне характеристическими подгруппами свободных групп и фактор-группами по ним — с другой. Развитие результатов, сюда относящихся, привело к созданию содержательной теории, частично принадлежащей к общей теории универсальных алгебр.

Если дана некоторая система тождеств W, то класс $\mathfrak{M}(W)$ всех групп, в которых выполняются все тождества из W, называется *многообразием* (или *примитивным классом*) групп. Ввиду известной теоремы Биркгофа из теории универсальных алгебр класс групп $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда будет многообразием, если он:

(a) вместе со всякой своей группой содержит все ее эпиморфные образы,

(b) вместе со всякой своей группой содержит все ее подгруппы,

(c) вместе со всяким семейством своих групп содержит их полное прямое произведение.

В работах С. Р. Когаловского [1, 2], относящихся к теории моделей (см. также Б. М. Шайн [1]), показано, что в этой теореме условия (b) и (c) можно заменить одним условием: класс $\mathfrak{M}$

(d) вместе со всяким семейством своих групп содержит все их подпрямые произведения.

Ввиду свойства (a) всякое многообразие является абстрактным классом групп, т. е. вместе со всякой своей группой содержит и все группы, с нею изоморфные.

Всякая система тождеств W может рассматриваться, согласно § 37, как подмножество свободной группы со счетным множеством свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; эту свободную группу будем обозначать здесь через X. Таким образом, всякому подмножеству W из X соответствует многообразие $\mathfrak{M}(W)$. С другой стороны, в § 37 показано, что всякому классу групп $\mathfrak{K}$ соответствует вполне характеристическая (т. е. вербальная, что для свободных групп ввиду Д.3.4 — равносильные понятия) подгруппа $V_{\mathfrak{K}}$ группы X, состоящая из левых частей всех тождеств, выполняющихся во всех группах класса $\mathfrak{K}$.

Эти соответствия между классами групп и подмножествами группы X имеют характер соответствий Галуа (см., например, А. Г. Курош [21]). Отсюда следует уже установленное на самом деле в § 37 существование взаимно однозначного соответствия (инверсного по отношению к включению) между всеми многообразиями групп и всеми вербальными подгруппами группы X.

Из рассмотренных соответствий следует также, что для всякого класса групп $\mathfrak{K}$ существует однозначно определенное минимальное многообразие, его содержащее, т. е. им порождаемое, — это будет многообразие $\mathfrak{M}(V_{\mathfrak{K}})$. Как ниже будет отмечено, всякое многообразие может быть порождено даже одной группой.

Приведенные выше теоремы Биркгофа и Когаловского показывают, каким путем могут быть получены все группы многообразия $\mathfrak{M}(V_{\mathfrak{K}})$ порождаемого классом групп $\mathfrak{K}$. Легко доказать, что на самом деле многообразие $\mathfrak{M}(V_{\mathfrak{K}})$ состоит из всевозможных эпиморфных образов подпрямых произведений семейств групп класса $\mathfrak{K}$.

Свободные группы многообразий. Пусть дан класс групп $\mathfrak{K}$. Обобщая одну известную характеризацию свободных групп, скажем, что группа F класса $\mathfrak{K}$ с системой образующих M является *свободной группой* класса $\mathfrak{K}$ над множеством M, а M — ее *системой свободных образующих* в классе $\mathfrak{K}$, если любое отображение множества M в любую группу G класса $\mathfrak{K}$ может быть продолжено до гомоморфизма F в G; это продолжение будет, очевидно, единственным. Если класс $\mathfrak{K}$ состоит из одной группы F, т. е. речь идет о возможности продолжить всякое отображение множества M в F до эндоморфизма группы F, то F будет группой, *свободной в себе* над множеством M.

Если класс группы $\mathfrak{K}$ абстрактный и если F и F' — его свободные группы с системами свободных образующих M и M' соответственно, то из равномощности множеств M и M' следует изоморфизм

групп F и F'. Мощность системы M назовем *рангом* группы F, свободной над M.

В общем случае класс $\mathfrak{K}$ может совсем не иметь свободных групп или же они будут существовать лишь для некоторых рангов. Однако, если абстрактный класс $\mathfrak{K}$ обладает свойствами (b) и (c) из п. 1, то в нем существуют свободные группы всех рангов, конечных и бесконечных.

Это справедливо, в частности, для всякого многообразия. Любая группа многообразия $\mathfrak{M}$ является эпиморфным образом некоторой свободной группы этого многообразия.

Свободные группы всевозможных многообразий — это в точности приведенные свободные группы из § 37. Поэтому во всяком многообразии свободные группы различных рангов не могут быть изоморфными; иными словами, во всякой свободной группе данного многообразия все системы свободных образующих имеют одну и ту же мощность. Если $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие, а $V_{\mathfrak{M}}$ — соответствующая ему вербальная подгруппа абсолютно свободной группы X счетного ранга, то всякая свободная группа многообразия $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-группе абсолютно свободной группы F того же ранга по ее вербальной подгруппе $V_{\mathfrak{M}}(F)$.

С другой стороны, свободные группы всевозможных многообразий — это в точности группы, свободные в себе над некоторым множеством. Действительно, если F — группа, свободная в себе над множеством M, то всякое соотношение (см. § 18), связывающее в F элементы из M, будет тождеством в F. Если множество M бесконечное, то этим исчерпываются все тождества группы F; для конечного M это не так, как показывает пример бесконечной циклической группы.

Из этого следует, что класс всех таких групп G, что всякое отображение множества M в G продолжается до гомоморфизма F в G, будет многообразием; это будет максимальное многообразие, в котором группа F свободна над M. Если множество M бесконечное, то указанное многообразие совпадает с многообразием, порождаемым группой F; иными словами, всякое многообразие порождается любой своей свободной группой бесконечного ранга. Для свободных групп конечного ранга это не всегда так — бесконечная циклическая группа является свободной как в многообразии абелевых групп, так и в многообразии всех групп.

Структура многообразий. Множество многообразий групп — заметим, что мощность этого множества не выше континуума, но пока точно неизвестна — будет по отношению к их включению полной структурой, инверсно изоморфной структуре всех вербальных подгрупп абсолютно свободной группы X счетного ранга. Нулем структуры многообразий Σ служит класс единичных групп $\mathfrak{E}$, единицей — класс всех групп, который обозначим здесь через $\mathfrak{U}$.

Атомами структуры Σ, т. е. минимальными многообразиями, отличными от $\mathfrak{E}$, служат многообразия элементарных абелевых групп,

т. е. многообразия, каждое из которых порождается циклической группой некоторого простого порядка p. Всякое ненулевое многообразие содержит хотя бы одно из этих минимальных многообразий.

Вообще все многообразия, содержащиеся в данном многообразии $\mathfrak{M}$, составляют полную подструктуру структуры Σ, инверсно изоморфную структуре вполне характеристических подгрупп свободной группы счетного ранга многообразия $\mathfrak{M}$. Заметим, что всякая вполне характеристическая подгруппа любой приведенной свободной группы будет в ней вербальной подгруппой (Б. Нейман [4]).

Полное описание структуры Σ на теоретико-структурном языке представляется очень трудной задачей. Впрочем, эту структуру следовало бы, возможно, описывать как частично упорядоченную алгебру относительно некоторых естественно определяемых операций над многообразиями. Одной из таких операций является *коммутирование многообразий*: если многообразиям $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответствуют вербальные подгруппы $V_{\mathfrak{A}}$ и $V_{\mathfrak{B}}$ группы X, то их взаимный коммутант $[V_{\mathfrak{A}}, V_{\mathfrak{B}}]$, также являющийся вербальной подгруппой в X, определяет многообразие $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. Ясно, из $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ следует

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \subseteq [\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'].$$

Полугруппа многообразий. Еще интереснее операция *умножения многообразий*, введенная, как и предыдущая, в работе Х. Нейман [4]. *Произведением* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ многообразия $\mathfrak{A}$ на многообразие $\mathfrak{B}$ называется многообразие, состоящее из всевозможных расширений любых групп из $\mathfrak{A}$ при помощи любых групп из $\mathfrak{B}$. Вербальная подгруппа $V_{\mathfrak{B}}$ группы X, соответствующая многообразию $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, определяется равенством

$$V_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = V_{\mathfrak{A}}(V_{\mathfrak{B}});$$

эта подгруппа действительно будет вербальной в X.

Ясно, что умножение многообразий удовлетворяет условию монотонности: если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$, то

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'.$$

Умножение связано со структурными операциями и с коммутированием правыми законами дистрибутивности:

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \quad (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} \cup \mathfrak{B}\mathfrak{C},$$
$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

(Х. Нейман [4]). Соответствующие левые законы дистрибутивности не имеют места (Б., Х. и П. Нейманы [1]).

Х. Нейман [4] показала, что умножение многообразий ассоциативно; можно говорить, следовательно, о *полугруппе многообразий*. Единицей этой полугруппы служит многообразие $\mathfrak{E}$, а нулем — класс всех групп $\mathfrak{U}$.

Многообразие $\mathfrak{P}$, отличное от $\mathfrak{E}$ и от $\mathfrak{U}$, называется *неразложимым*, если оно не может быть представлено в виде произведения двух многообразий, отличных от $\mathfrak{E}$. Х. Нейман доказала, что всякое многообразие, отличное от $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{U}$, разлагается в произведение конечного числа неразложимых многообразий. Больше того, это разложение на неразложимые сомножители оказывается однозначным, как независимо доказали Б., Х. и П. Нейманы [1] и А. Л. Шмелькин [5].

Таким образом, полугруппа всех многообразий оказывается свободной полугруппой с единицей и нулем, а множество неразложимых многообразий — ее системой свободных образующих.

Ясно, что описание неразложимых многообразий представляет очень большой интерес; оно, однако, пока весьма далеко от завершения. В работе П. Неймана [1] доказана неразложимость некоторых многообразий, в том числе: 1) всякого многообразия, порождаемого группой без нетривиальных вполне характеристических подгрупп (в частности, простой группой); 2) всякого многообразия, среди тождеств которого содержится тождество $x^p = 1$, p — простое число; 3) всякого нильпотентного многообразия, т. е. многообразия, все группы которого нильпотентны; 4) всякого многообразия вида $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{E}$.

Многообразия, порождаемые конечной группой. Всякое многообразие порождается множеством своих групп с конечным числом образующих. Если дано многообразие $\mathfrak{M}$, то через $\mathfrak{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, обозначим многообразие, порожденное теми группами из $\mathfrak{M}$, которые обладают системой из n образующих. Равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n$ для некоторого n равносильно тому, что многообразие $\mathfrak{M}$ порождается своей свободной группой ранга n. Таковы, в частности, нильпотентные многообразия; другие типы многообразий с этим свойством указаны в работе Баумслага, Б., Х. и П. Нейманов [1] (см. также Баумслаг [18]).

Существуют, однако, как показал Г. Хигмэн [10], такие многообразия $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_n$ для всех n; в этом случае мы получаем строго возрастающую последовательность многообразий

$$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_n \subset \ldots,$$

объединение которой совпадает, очевидно, с $\mathfrak{M}$. Такое многообразие $\mathfrak{M}$ не будет, в частности, порождаться одной конечной группой.

Так как пример Хигмэна построен как произведение двух многообразий, то возникает вопрос об условиях, при которых произведение многообразий может быть порождено конечной группой. Этим вопросом занимался П. Нейман [1], а окончательный ответ дал А. Л. Шмелькин [8]. Именно, назовем *экспонентой* многообразия $\mathfrak{M}$ наименьшее общее кратное порядков элементов всех групп из $\mathfrak{M}$, если оно существует, и нуль в противоположном случае (ср. § 37). Тогда произведение $\mathfrak{AB}$ многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, отличных от $\mathfrak{E}$, тогда и только тогда порождается конечной группой, если многообразие $\mathfrak{A}$ нильпотентное,

$\mathfrak{B}$ — абелево и эти многообразия имеют ненулевые взаимно простые экспоненты.

Отсюда следует, в частности, что никакое многообразие, порождаемое конечной группой, не может разлагаться в произведение трех многообразий, отличных от $\mathfrak{E}$.

Пока открыт поставленный Б. Нейманом [4] вопрос, не будет ли всякая вербальная подгруппа свободной группы X счетного ранга порождаться (как вербальная, т. е. вполне характеристическая, подгруппа в X) конечным числом элементов; иными словами, не будут ли все тождества, определяющие любое данное многообразие (т. е. все тождества, выполняющиеся в любой группе, порождающей это многообразие), следствиями конечного числа из них. Положительный ответ на этот вопрос для нильпотентных многообразий дал Линдон [4]. Обобщая этот результат, Г. Хигмэн [10] показал, что если многообразие $\mathfrak{A}$ нильпотентно, а многообразие $\mathfrak{B}$ определяется конечным числом тождеств, то и для многообразия $\mathfrak{AB}$ все тождества будут следствиями конечного числа из них.

С другой стороны, Оутс и Пауэлл [1] показали, завершая цикл исследований своих собственных и Кросса (см. Г. Хигмэн [11]), что для любой конечной группы все тождества, в ней выполняющиеся, являются следствиями конечного числа из них. См. также Вейхзель [1].

Дальнейшее изучение свободных групп многообразий. Заметим, что если многообразие $\mathfrak{M}$ порождается классом групп $\mathfrak{K}$ (в частности, одной группой G), то группа F будет свободной группой этого многообразия над множеством свободных образующих M, если всякое отображение множества M в любую группу из $\mathfrak{K}$ (соответственно в группу G) можно продолжить до гомоморфизма F в эту группу.

Для свободных групп произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ не имеет места, вообще говоря, теорема о подгруппах, аналогичная теореме Нильсена–Шрейера и теореме из § 19 о подгруппах свободных абелевых групп, т. е. многообразие $\mathfrak{M}$ не обязано быть *шрейеровым*. П. Нейман и Уайголд [1] показали, что шрейеровы многообразия групп исчерпываются многообразием всех групп, многообразием всех абелевых групп и многообразиями абелевых групп всевозможных простых экспонент.

Некоторые общие результаты о подгруппах свободных групп многообразий можно найти в работе Баумслага [16]. Напомним (см. Д.9.2), что всякая (абсолютно) свободная группа аппроксимируется конечными p-группами для всех простых p. Баумслаг показал, что если F — свободная группа многообразия $\mathfrak{M}$ над множеством M и если она аппроксимируется конечными p-группами для каждого p из бесконечного набора простых чисел, то фактор-группа $\overline{F} = F/[F, F]$ будет свободной абелевой группой, а множество классов по $[F, F]$, определяемых элементами из M, — ее системой свободных образующих. С этим связана следующая теорема о подгруппах: если при тех же предположениях об F подмножество N из F линейно независимо по модулю $[F, F]$ (т. е. его образы в $\overline{F}$ служат системой свободных образующих

для порождаемой ими подгруппы), то подгруппа $\{N\} \subseteq F$ будет свободной группой многообразия $\mathfrak{M}$ над множеством N.

Несомненно, что вопрос о строении подгрупп свободных групп произвольного многообразия заслуживает дальнейших исследований.

Назовем группу G многообразия $\mathfrak{M}$ *отщепляемой* в этом многообразии, если всякая группа H из $\mathfrak{M}$, являющаяся расширением некоторой группы A из $\mathfrak{M}$ при помощи G, расщепляется в полупрямое произведение нормального делителя A и группы, изоморфной G. В §§ 52 и 19 показано, что свободные группы отщепляемы в классе всех групп, свободные абелевы группы — в классе всех абелевых групп. Этим же методом может быть показано, что свободные группы любого многообразия отщепляемы в этом многообразии.

Свойство отщепляемости является характерным для свободных групп в классе всех групп, в классе всех абелевых групп и вообще во всяком шрейеровом многообразии. В общем случае это не так. В работе Ф. Холла [11] показано, что если нильпотентное многообразие $\mathfrak{M}$ имеет экспоненту нуль или степень простого числа, то отщепляемыми в $\mathfrak{M}$ будут лишь свободные группы; если же экспонента не удовлетворяет указанному условию, то отщепляемая группа нильпотентного многообразия может не быть свободной.

Наконец, естественно изучать свободные группы произведения многообразий, считая известными свойства свободных групп сомножителей. Некоторые результаты, сюда относящиеся, можно найти в работе Б., Х. и П. Нейманов [1]. Так, свободная группа счетного ранга многообразия $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{U}$, представима как расширение свободной группы счетного ранга многообразия $\mathfrak{A}$ при помощи такой же группы многообразия $\mathfrak{B}$.

Баумслаг [16] доказал теорему: пусть $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{E}$ и свободные группы многообразия $\mathfrak{B}$ аппроксимируются конечными p-группами для каждого p из бесконечного набора простых чисел; пусть, далее, F — свободная группа произведения $\mathfrak{AB}$ над множеством M. Если n_a, $a \in M$, — ненулевые целые числа, то система элементов a^{n_a}, $a \in M$, порождает в F подгруппу, свободную в многообразии $\mathfrak{AB}$, и служит для нее системой свободных образующих.

Если учесть описание вербальной подгруппы группы X, соответствующей произведению многообразий (см. п. 4), то можно утверждать, что свободные группы произведения многообразий принадлежат к числу групп вида $F/W(N)$, где F — (абсолютно) свободная группа, N — ее нормальный делитель, $W(N)$ — вербальная подгруппа последнего. Ряд свойств таких групп указал А. Л. Шмелькин [8].

Так, если группы F/N и $N/W(N)$ аппроксимируются конечными группами (или конечными p-группами, или разрешимыми группами), то это же имеет место и для группы $F/W(N)$. Если $W(N) = N_k$ (член нижней центральной цепи), то любая нециклическая нильпотентная подгруппа группы F/N_k будет конечным расширением своего пересечения с N/N_k; она даже содержится в N/N_k, если F/N

без кручения. Если F — некоммутативная свободная группа конечного ранга и $W(N) \neq E$, $W(N) \neq N$, то группа $F/W(N)$ задается конечным числом определяющих соотношений тогда и только тогда, когда это выполняется для $N/W(N)$, а N имеет в F конечный индекс. Отсюда следует, что свободные группы конечных рангов произведения многообразий $\mathfrak{AB}$ задаются конечным числом соотношений тогда и только тогда, когда это имеет место для свободных групп конечных рангов многообразия $\mathfrak{A}$, а свободные группы конечных рангов многообразия $\mathfrak{B}$ сами конечны. [См. ДК.]

В работе П. Неймана [3] изучаются многообразия со следующим свойством: если многообразие определяется системой тождеств W и, как обычно, $W(G)$ есть вербальная W-подгруппа группы G, то для любой некоммутативной свободной группы F и любых ее нормальных делителей A и B из $W(A) \subseteq W(B)$ должно следовать $A \subseteq B$. В этой же работе доказано (F и A определяются так же, как выше), что для л ю б о г о многообразия, отличного от многообразия всех групп (т. е. при непустой системе W), из $W(A) = W(F)$ следует $A = F$; см. также Д. М. Смирнов [9]. [См. ДК.]

Заметим, что в теории универсальных алгебр помимо многообразий изучаются и *квазимногообразия*, т. е. классы алгебр, в которых выполняются некоторые наборы условных тождеств. В случае групп *условное тождество* имеет следующий вид: если $w_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, $i == 1, 2, \ldots, s$, то $\overline{w}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, где w_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, и $\overline{w}$ — заданные слова в неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозрение квазимногообразий абелевых групп можно найти в работе А. А. Виноградова [1]. [См. ДК.]

§ Д.11. Точные операции в классе групп

Точные операции. Конструкции прямого произведения и свободного произведения можно рассматривать как операции, определенные в классе всех групп. В обзоре А. Г. Куроша [7] и в «Заключении» к первому изданию настоящей книги был поставлен вопрос об изучении других операций в классе групп, аналогичных прямому и свободному умножениям. Это изучение было начато работами О. Н. Головина [2–5] и привело к созданию весьма содержательной теории. Обзору первых этапов развития этой теории посвящена работа Гирша [9]; подробный обзор, доведенный до работ последних лет, можно найти во введении к докторской диссертации О. Н. Головина (Московский университет, 1964).

Уточним постановку задачи. Рассматривается класс а б с т р а к т н ы х групп, т. е. изоморфные группы отождествлены. Операция $\circ$ сопоставляет всякому (не обязательно конечному) семейству групп G_α

(не обязательно различных), $\alpha \in I$, вполне определенную группу

$$G = \prod_{\alpha \in I}^{\circ} G_\alpha.$$

Операция $\circ$ называется *точной*, если для всех $\alpha \in I$ заданы мономорфизмы φ_α: $G_\alpha \to G$, причем группа G порождается своими подгруппами $G_\alpha\varphi_\alpha$, $\alpha \in I$. Иногда рассматриваются, впрочем, *полуточные* операции — отображения φ_α могут быть любыми гомоморфизмами, и поэтому подгруппы $G_\alpha\varphi_\alpha$ будут лишь эпиморфными, но не обязательно изоморфными образами групп G_α.

Основные постулаты. Работа О. Н. Головина [8] содержит детальный анализ свойств, общих для прямого и свободного умножений. Эти свойства могут при изучении операций накладываться в качестве постулатов или же проверяться. Отметим некоторые из этих постулатов, упоминаемые в дальнейшем.

Ясно, что рассматриваемые нами операции по самому их определению коммутативны — множество индексов I не предполагалось упорядоченным. Ассоциативность точной операции $\circ$ О. Н. Головин расчленяет на следующие постулаты. Пусть $G = \prod_{\alpha \in I}^{\circ} G_\alpha$ и φ_α: $G_\alpha \to G$ — соответствующие мономорфизмы.

Постулат транзитивности: если $G_\alpha = \prod_{\beta \in J_\alpha}^{\circ} G_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in I$, то $G = \prod_{\beta \in J_\alpha,\, \alpha \in I}^{\circ} G_{\alpha,\beta}$.

Постулат блокируемости: если множество I разложено на непересекающиеся подмножества I_β, $\beta \in J$, и $H_\beta = \{G_\alpha\varphi_\alpha, \alpha \in I_\beta\}$, то $G = \prod_{\beta \in J}^{\circ} H_\beta$.

Постулат локализуемости: если $J \subset I$, то $\{G_\alpha\varphi_\alpha, \alpha \in J\} = \prod_{\alpha \in J}^{\circ} G_\alpha$.

Отметим здесь же постулат об единичных сомножителях: если $J \subset I$ и $G_\alpha = E$ для $\alpha \notin J$, то $G = \prod_{\alpha \in J}^{\circ} G_\alpha$.

Другая серия постулатов для точных операций связана со следующим постулатом функторности: если $G = \prod_{\alpha \in I}^{\circ} G_\alpha$, $H = \prod_{\alpha \in I}^{\circ} H_\alpha$, то любая система гомоморфизмов ψ_α: $G_\alpha \to H_\alpha$, $\alpha \in I$, индуцирует гомоморфизм ψ: $G \to H$. Так, если требовать, чтобы все ψ_α и ψ были эпиморфизмами или соответственно мономорфизмами, или же положить $G_\alpha = H_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, откуда $G = H$, а все ψ_α и ψ будут эндоморфизмами, то мы приходим к постулатам

склеиваемости эпиморфизмов (соответственно мономорфизмов, эндоморфизмов).

Эти постулаты дополняются иногда ядерным условием: ядро гомоморфизма ψ порождается ядрами гомоморфизмов $\varphi_\alpha^{-1}\psi_\alpha$, $\alpha \in I$. Постулат склеиваемости эпиморфизмов (мономорфизмов) с ядерным условием называется постулатом Маклейна (соответственно постулатом Мальцева). Заметим, что постулат Мальцева равносилен следующему утверждению: если $G = \prod\limits_{\alpha\in I}^{\circ} G_\alpha$, φ_α: $G_\alpha \to G$ — соответствующие мономорфизмы и $H_\alpha \subseteq G_\alpha$, $\alpha \in I$, то

$$\{H_\alpha\varphi_\alpha,\ \alpha \in I\} = \prod_{\alpha\ni I}^{\circ} H_\alpha.$$

Пока открыт вопрос, существуют ли отличные от прямого и свободного умножений точные операции, ассоциативные и удовлетворяющие постулату Мальцева. О. Н. Головин [8] поставил такой же вопрос для операций, удовлетворяющих постулату функторности с ядерным условием (что совпадает с объединением постулатов Маклейна и Мальцева) и постулату об единичных сомножителях; впрочем, операция, удовлетворяющая этим требованиям, совпадает с прямым умножением, если она хотя бы для одной пары неединичных групп дает их прямое произведение. Положительный ответ на этот вопрос дал А. Л. Шмелькин [7]. [См. ДК.]

Правильные операции. Следующие понятия введены О. Н. Головиным [2, 3]. Группа G *правильно порождается* своими подгруппами A_α, $\alpha \in I$, если $G = \{A_\alpha, \alpha \in I\}$ и если для всех $\alpha \in I$ пересечение подгруппы A_α с нормальным делителем, порожденным в G всеми A_β, $\beta \in I \setminus \alpha$, равно E. Доказано, что это будет тогда и только тогда, когда группа G изоморфна фактор-группе свободного произведения $F = \prod\limits_{\alpha\in I}^{*} A_\alpha$ по нормальному делителю, лежащему в декартовой подгруппе D этого свободного произведения (см. Д.7.3).

Точная операция $\circ$ в классе групп называется *правильной*, если для любого семейства групп G_α, $\alpha \in I$, группа $G = \prod\limits_{\alpha\in I}^{\circ} G_\alpha$ правильно порождается подгруппами $G_\alpha\varphi_\alpha$, $\alpha \in I$.

Изучению правильных операций и правильной порождаемости посвящена серия работ Бенадо [1, 3–8]; эти работы относятся в основном к теории структур, но их результаты применяются к группам с произвольной системой операторов. Так, доказана (Бенадо [1]) транзитивность правильной порождаемости: если группа G правильно порождается подгруппами A_α, $\alpha \in I$, а всякое A_α правильно порождается своими подгруппами $A_{\alpha,\beta}$, $\beta \in J_\alpha$, то G правильно порождается всеми подгруппами $A_{\alpha,\beta}$, $\beta \in J_\alpha$, $\alpha \in I$. Этот результат не означает, конечно, справедливости постулата транзитивности для некоторой данной

правильной операции. В работе Бенадо [5] на правильные порождения переносится понятие центра пары прямых разложений (см. Д.5.2) и связанные с ним критерии существования общего продолжения.

Вопрос о существовании ассоциативных операций, удовлетворяющих постулату Мальцева и отличных от прямого и свободного произведений, пока открыт даже для случая правильных операций. Моран [10] построил, однако, новую ассоциативную правильную операцию, для которой утверждение постулата Мальцева выполняется для любого набора субинвариантных подгрупп H_α заданных групп G_α, $\alpha \in I$.

С другой стороны, неассоциативные правильные операции, удовлетворяющие постулату Мальцева, существуют. А. Л. Шмелькин [7], отвечая на отмеченный в конце п. 2 вопрос О. Н. Головина, показал, что такими будут следующие введенные независимо Грюнбергом [2] и А. Л. Шмелькиным [1] операции: фиксируем систему слов V и для любого семейства групп G_α, $\alpha \in I$, полагаем

$$\prod_{\alpha\in I}^{\circ} G_\alpha = F/V(D),$$

где $F = \prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$, D — декартова подгруппа свободного произведения F.

Вербальные произведения. Примерами ассоциативных правильных операций, отличных от прямого и свободного умножений, служат отмеченные в § 62 нильпотентные произведения, введенные О. Н. Головиным. Именно k-е *нильпотентное произведение* групп G_α, $\alpha \in I$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определяется как фактор-группа свободного произведения F этих групп по нормальному делителю N_k, где N_0 есть декартова подгруппа свободного произведения F, а $N_k = [F, N_{k-1}]$, $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 0$ это будет, понятно, прямое произведение. Случай $k = 1$ (*метабелево произведение*) рассматривал Леви [7] для двух сомножителей.

Обобщая эту конструкцию, Моран [1] определил следующее весьма широкое множество правильных операций. Если V — любое множество слов (т. е. элементов свободной группы X счетного ранга) и если дано семейство групп G_α, $\alpha \in I$, то их *вербальным V-произведением* называется фактор-группа

$$F/(V(F) \cap D),$$

где $F = \prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$, $V(F)$ — вербальная V-подгруппа группы F, D — декартова подгруппа свободного произведения F.

Если множество V состоит из одного слова $[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_{k+2}]$, то мы получаем k-е нильпотентное произведение. Аналогично можно получить k-е *разрешимое произведение*, $k = 1, 2, \ldots$, определяемое как фактор-группа свободного произведения F заданного

семейства групп G_α, $\alpha \in I$, по пересечению k-го коммутанта $F^{(k)}$ группы F с декартовой подгруппой D свободного произведения F.

Теоретико-категорное определение свободного произведения, приведенное в Д.7.3, может быть перенесено на любой (абстрактный) класс групп, в частности на любое многообразие. Оказывается, что если рассматривать слова системы V как тождества (приравняв их единице) и если $\mathfrak{M}(V)$ есть многообразие, определяемое этой системой тождеств, то вербальное V-произведение будет свободным умножением в этом многообразии. Так, прямое произведение свободно в многообразии абелевых групп, k-е нильпотентное произведение свободно в многообразии нильпотентных групп класса k и т. д. Отметим также, что всякая свободная группа многообразия $\mathfrak{M}(V)$ будет вербальным V-произведением циклических групп одного и того же порядка.

Всякое вербальное произведение ассоциативно (Моран [1]), удовлетворяет постулату Маклейна (Стрёйк [1], Моран [2]) и постулату склеиваемости мономорфизмов (Моран [1]). Вербальное произведение, отличное от прямого и свободного произведения, не удовлетворяет постулату Мальцева (А. Л. Шмелькин [1]).

Справедливо также такое обобщение теоремы Бэра и Леви из § 35: никакая группа, отличная от свободного произведения двух циклических групп второго порядка, не может одновременно разлагаться в свободное и в какое-либо другое вербальное произведение (Моран [2], А. Л. Шмелькин [1]).

Критерий существования общего продолжения для двух разложений группы в вербальное произведение указал М. С. Цаленко [2]. Некоторые свойства вербальных произведений рассматривают также Стрёйк [3], Баумслаг [17].

Некоторые свойства нильпотентных и разрешимых произведений. А. Л. Шмелькин [2, 7] для любых разрешимых и нильпотентных произведений, отличных от прямого, нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы в соответствующем произведении данных групп G_α, $\alpha \in I$, выполнялся постулат Мальцева при любом выборе подгрупп $H_\alpha \subseteq G_\alpha$, $\alpha \in I$. Именно, для разрешимых произведений это будет тогда и только тогда, когда все группы G_α абелевы, а для нильпотентных — тогда и только тогда, когда или все G_α абелевы без кручения, или же все они периодичны, причем если $\Pi(A)$ означает совокупность простых чисел, входящих в порядки элементов группы A, а A' — коммутант группы A, то для всех $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$,

1) $\Pi(G'_\alpha) \cap \Pi(G_\beta)$ пусто;

2) если $\Pi(G_\alpha) \cap \Pi(G_\beta) \ni p$, то ни одна из групп G_α, G_β не содержит элемента порядка p^2.

О. Н. Головин [5] показал, что для любого $k \geqslant 1$ можно указать группы, k-е нильпотентное произведение которых вырождается в их прямое произведение. В. Н. Ляховицкий [1] показал, что существуют группы, разлагающиеся как в прямое произведение,

так и в невырождающееся 1-е нильпотентное (т. е. метабелево) произведение.

Естественно ожидать, что будет построена теория изоморфизмов нильпотентных разложений, аналогичная теории изоморфизмов прямых разложений. Пока здесь получены лишь первые результаты, причем только для нильпотентных групп. Именно, А. Л. Шмелькин [4] доказал, что нильпотентная группа без кручения не может разлагаться в разноименные нильпотентные произведения; доказаны также некоторые теоремы об изоморфизме k-х нильпотентных разложений нильпотентной группы без кручения, всякий эпиморфизм которой на себя является автоморфизмом. Аналогичные теоремы для нильпотентных p-групп — в работе М. С. Цаленко [2]. В работе А. Л. Шмелькина [4] показано также, что, подобно примеру Йонсона для прямых разложений абелевых групп (см. § 32), существует метабелева группа, для которой не имеет места теорема об изоморфизме метабелевых разложений. [См. ДК.]

Изучение нильпотентных (в частности, метабелева) произведений циклических групп, начатое О. Н. Головиным [4], продолжали Н. П. Гольдина [1] и Стрёйк [4, 6].

Макгенри [1, 2] распространил понятие тензорного произведения на некоммутативные группы и показал, что для двух групп их тензорное произведение совпадает с взаимным коммутантом этих групп в их метабелевом произведении.

Наконец, Бенадо [2] называет подгруппу A группы G *нормальным делителем степени* k, $k \geqslant 1$, если

$$\underbrace{[G, [G, \ldots, [G, A]\ldots]]}_{k \text{ раз}} \subseteq A.$$

Правильное произведение G групп G_α, $\alpha \in I$, он называет их *прямым произведением степени* k, если все $G_\alpha\varphi_\alpha$, $\alpha \in I$, будут нормальными делителями степени k в G. Таково, в частности, $(k-1)$-е нильпотентное произведение. Показано, что все прямые произведения степени k данных групп могут быть получены как точно описываемые фактор-группы $(k-1)$-го нильпотентного произведения этих же групп.

Поливербальные операции. О. Н. Головин [6, 7] рассмотрел широкий класс операций, к которому принадлежат все вербальные операции, а также указанные в п. 3 неассоциативные правильные операции Грюнберга–Шмелькина. Начнем с некоторых определений.

Пусть счетная система S свободных образующих свободной группы X разбита на счетное число счетных подсистем

$$S_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Всякое слово в образующих S, т. е. элемент группы X, будет называться *полисловом* относительно этого разбиения. Полислово $w(x_{ij})$ называется *нейтральным*, если для $k = 1, 2, \ldots$ оно обращается

в единицу после замены единицами всех входящих в его запись букв x_{ij}, кроме принадлежащих к подсистеме S_k.

Пусть, далее, в некоторой группе G задана система подгрупп G_α, $\alpha \in I$, ее порождающая,

$$G = \{G_\alpha, \alpha \in I\}; \tag{1}$$

эту систему подгрупп будем считать бесконечной, пополняя ее, если нужно, счетным множеством экземпляров единичной группы. *Значением* полислова $w(x_{ij})$ в группе G относительно представления (1) назовем всякий элемент группы G, получающийся после следующей замены в w букв x_{ij} элементами из подгрупп G_α: буквы, лежащие в одной и той же подсистеме S_i, заменяются элементами из одной подгруппы G_α; буквы из разных подсистем S_i заменяются элементами из подгрупп G_α с разными индексами α.

Если VV — произвольная система полислов, то нормальный делитель, порожденный в G значениями всех полислов из VV, взятых относительно представления (1), называется *поливербальной VV-подгруппой* и кратко обозначается через $VV(G)$.

Пусть дано семейство групп G_α, $\alpha \in I$. *Поливербальным VV-произведением* этих групп называется группа

$$\prod_{\alpha\in I}^{VV} G_\alpha = F/VV(F),$$

где $F = \prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$, $VV(F)$ — поливербальная VV-подгруппа группы F, взятая относительно представления

$$F = \{G_\alpha, \alpha \in I\}.$$

Поливербальная VV-операция *нейтральна*, если нейтральны все полислова системы VV.

В общем случае поливербальная операция является лишь полуточной. Она точна тогда и только тогда, когда она нейтральна, причем в этом случае она правильна. Больше того, нейтральные VV-операции и только они являются точными операциями, удовлетворяющими постулату Маклейна, постулату склеиваемости эндоморфизмов и постулату об единичных сомножителях. Перенесение этой теоремы в теорию универсальных алгебр — в работе Т. М. Баранович [1].

В работе О. Н. Головина [7] указаны некоторые условия для ассоциативности поливербальной операции и показано, что нильпотентные произведения принадлежат к числу поливербальных VV-операций с конечной системой полислов VV. С другой стороны, А. Л. Шмелькин [7] доказал, что разрешимые произведения номера $k \geqslant 3$ могут быть заданы как поливербальные произведения лишь с бесконечной системой полислов. В работе О. Н. Головина [9] рассматриваются ненейтральные

поливербальные операции и указывается некоторое их сведение на нейтральные. См. также О. Н. Мацедонская [1]. [См. ДК.]

Некоторые другие операции. Обобщая идею примера ассоциативной операции, построенного Е. С. Ляпиным [7], М. А. Фридман [1–8] ввел обширный класс правильных операций, не принадлежащих к числу поливербальных. Именно, пусть задан закон T, выделяющий в каждой абстрактной группе G две подгруппы, $T_1(G)$ и $T_2(G)$. *Полукоммутативным T-произведением* заданного семейства групп G_α, $\alpha \in I$, называется группа, получающаяся из свободного произведения этих групп наложением всех соотношений вида $[x, y] = 1$, где $x \in T_1(G_\alpha)$, $y \in T_2(G_\beta)$, $\alpha \neq \beta$.

К числу T-умножений принадлежат свободное умножение ($T_1(G) = T_2(G) = E$) и прямое умножение ($T_1(G) = T_2(G) = G$). И. А. Чабан [1] показала, что это будут единственные вербальные полукоммутативные операции.

В работах М. А. Фридмана найдены условия для ассоциативности полукоммутативной операции, описаны центр и коммутант T-произведения. Получено обобщение теоремы Бэра и Леви: полукоммутативное произведение двух групп, не являющееся свободным, не может разлагаться в свободное произведение. Однако существуют группы, разложимые в прямое и в некоторое другое ассоциативное полукоммутативное произведение. Ассоциативные T-умножения, отличные от прямого и свободного, не удовлетворяют постулату Мальцева.

В работе Г. Г. Щепина [1] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы несвободное T-умножение удовлетворяло постулату Маклейна, постулату Мальцева или постулату склеиваемости мономорфизмов.

Отметим, что в работе О. Н. Головина [6] указано на возможность такого обобщения полукоммутативных произведений: вместо тождества $[x, y] = 1$ берется любой набор политождеств.

Моран [6, 7, 9] изучает некоторый класс операций, на самом деле принадлежащих к числу полукоммутативных. В этих же работах вводится и изучается следующее обобщение вербальных операций. Пусть задан закон N, выделяющий в каждой группе G нормальный делитель $N(G)$. *N-произведением* семейства групп G_α, $\alpha \in I$, называется фактор-группа свободного произведения F этих групп по пересечению $N(F)$ с декартовой подгруппой D свободного произведения F. Можно рассматривать, в частности, нильпотентные и разрешимые произведения с трансфинитными номерами.

Обобщения. В работах Уайголда [2, 5] и Б. Неймана и Уайголда [1] рассматриваются нильпотентные, разрешимые и вообще вербальные произведения групп с объединенными подгруппами.

Моран [8, 11] по образцу полных свободных произведений (см. Д.7.4) определяет *полные ассоциативные правильные произведения* и переносит на этот случай некоторые результаты о правильных и, в частности, вербальных произведениях. Так, группа не может

разлагаться в свободное или полное свободное произведение, с одной стороны, и в вербальное или полное вербальное произведение, с другой, за исключением случая, когда вербальное произведение двух циклических групп 2-го порядка является их свободным произведением. Специально изучаются счетные подгруппы полного нильпотентного и полного разрешимого произведений счетного числа бесконечных циклических групп.

§ Д.12. Расширения. Сплетения

Расширения. Обозрение расширений группы A при помощи группы B, достигаемое гомологическими методами, было изложено в §§ 49–51. Дальнейшее развитие гомологической алгебры обогатило теорию гомологии в группах, а поэтому и теорию расширений групп — см. обзор З. И. Боревича и Д. К. Фаддеева [1] и книги по гомологической алгебре, в частности Картана и Эйленберга [1] и С. Маклейна [5]. Здесь отметим только, что некоторое обобщение результатов Эйленберга и Маклейна, изложенных в § 51, можно найти у Тэйлора [1, 2]. [См. ДК.]

Продолжалось также изучение расширений, основанное на изложенной в § 48 теории Шрейера. Новый вариант этой теории предложил Шода [8]; см. также Нагао [1]. Сюда примыкают работы Асано [1] и Такахаси [6]. Во второй из них для данных групп A и B строится группа, в которую изоморфно вкладывается любое расширение A при помощи B. Эта конструкция (в отличие, например, от обладающих таким же свойством прямого или свободного произведений рассматриваемых расширений) позволяет доказать, что любое расширение A при помощи B можно вложить в расщепляемое расширение некоторой группы $\overline{A}$, содержащей A, при помощи B. Другие доказательства этого утверждения — еще раньше у Секи [1] и Бэра [47]; см. также Л. А. Калужнин и Краснер [3].

В работе Редеи и Штейнфельда [1] для данных групп A и B описываются все группы, изоморфные как некоторому расширению A при помощи B, так и некоторому расширению B при помощи A; примером служит прямое произведение $A \times B$.

Лонстра [1] изучает расширения бесконечной циклической группы при помощи такой же группы. В работе Г. Н. Нефедьева [1] рассматриваются расширения группы типа p^∞ при помощи периодической абелевой группы.

В работе Лонстра [2] (см. также Вольф [1]) решается следующая задача: даны группы A, A', B, B' и гомоморфизмы $\varphi\colon A \to A'$, $\psi\colon B \to B'$. Нужно построить всевозможные такие расширения G группы A при помощи группы B и расширения G' группы A' при помощи группы B', что существует гомоморфизм $\chi\colon G \to G'$, индуцирующий заданные гомоморфизмы φ и ψ. Более общей задаче посвящены работы Лонстра [4, 9]; см. также Лонстра [3].

На мультиоператорные группы шрейерову теорию расширений перенес Гечег [1].

Подобие расширений. Фиксируем группу A. Всякую группу G, содержащую A в качестве подгруппы,

$$G \supseteq A,$$

будем для краткости называть *надгруппой*. Бэр [46] называет надгруппы G и H группы A *подобными*, если существуют гомоморфизмы φ: $G \to H$, ψ: $H \to G$, тождественные на A,

$$a\varphi = a\psi = a \quad \text{для всех} \quad a \in A.$$

Весь класс надгрупп группы A разбивается этим на непересекающиеся классы подобных надгрупп; класс, определяемый надгруппой G, обозначим через $[G]$.

Для этих классов определяется отношение частичного порядка. Именно,

$$[G] \leqslant [H],$$

если существует гомоморфизм φ: $G \to H$, тождественный на A. При этом для любого множества классов подобных надгрупп существуют объединение и пересечение.

Можно рассматривать, в частности, *подобные расширения* группы A и классы подобных расширений. Объединением классов, порождаемых множеством расширений G_i, $i \in I$, в смысле указанной выше частичной упорядоченности служит класс, порождаемый свободным произведением заданных расширений с объединенным нормальным делителем A; пересечением будет класс, порождаемый нормализатором группы A, диагонально вложенной в полное прямое произведение групп G_i, $i \in I$.

Продолжая эти исследования, Лонстра [8] показал, что класс $[A]$, минимальный среди классов подобных расширений группы A, состоит из групп, содержащих A прямым множителем. Максимальный среди этих классов существует тогда и только тогда, когда группа A без центра. Расширение G группы A тогда и только тогда расщепляемо, когда класс подобных расширений $[G]$ удовлетворяет условию

$$[G] \leqslant [\Gamma(A)],$$

где $\Gamma(A)$ — голоморф группы A.

В работе Лонстра [5] аналогичная теория строится для представлений данной группы B в виде эпиморфного образа некоторых групп. Понятие подобия определяется при этом следующим образом: если заданы эпиморфизмы α: $G \to B$, β: $H \to B$, то должны существовать такие гомоморфизмы φ: $G \to H$, ψ: $H \to G$, что $\varphi\beta = \alpha$, $\psi\alpha = \beta$. См. также Д.2.1.

Сплетения. В последнее время во многих вопросах теории групп — в теории многообразий (см., например, Б., Х. и П. Нейманы [1],

А. Л. Шмелькин [8]), при построении различных примеров — используется следующая конструкция, введенная Л. А. Калужниным [3].

Пусть даны группы A и B. Обозначим через A^B полное прямое произведение семейства групп A_b, $b \in B$, изоморфных группе A,

$$A^B = \widetilde{\prod_{b \in B}} A_b.$$

Изоморфизмы между A и A_b, $b \in B$, считаем фиксированными, причем элемент из A_b, соответствующий элементу $a \in A$, будем обозначать через a_b. Всякий элемент $b_0 \in B$ определяет автоморфизм φ_{b_0} группы A^B: для всех $a \in A$, $b \in B$

$$a_b \varphi_{b_0} = a_{bb_0}.$$

Определяемое этими автоморфизмами расщепляемое расширение группы A^B при помощи группы B, т. е. их полупрямое произведение (см. § 52), называется (*полным*) *сплетением* группы A с группой B и обозначается через $A \operatorname{Wr} B$.

В основу нашей конструкции вместо полного прямого произведения групп A_b, $b \in B$, можно было бы взять, конечно, (дискретное) прямое произведение этих групп. Полученная таким путем группа называется (*дискретным*) *сплетением* группы A с группой B и обозначается через $A \operatorname{wr} B$.

Эта конструкция допускает различные обобщения. Так, группу B можно рассматривать как группу подстановок на некотором множестве I и в основу конструкции вместо группы A^B взять группу A^I — прямое произведение, полное или дискретное, семейства групп A_i, $i \in I$. Сплетения, построенные выше — они называются *стандартными*, — получаются в том случае, когда I совпадает с B, а подстановка, соответствующая элементу $b_0 \in B$, состоит в умножении всех элементов из B справа на b_0.

С другой стороны (см. А. Л. Шмелькин [6]), вместо группы A^B можно взять любую такую группу K, которая порождается подгруппами A_i, $i \in I$, изоморфными группе A, а всякой подстановке τ множества I соответствует автоморфизм φ_τ группы K, определяемый равенством (для всех $a \in A$, $i \in I$)

$$a_i \varphi_\tau = a_{i\tau},$$

где $i\tau$ — образ элемента i при подстановке τ. В работе А. Л. Шмелькина [8] в определении дискретного сплетения прямое произведение заменяется произвольным вербальным произведением (см. Д.11.4) и этим вводится соответствующее *вербальное сплетение*.

Некоторые обобщения конструкции сплетения указаны также в работах Б. Неймана [22, 28].

В работе Калужнина и Краснера [3] показано, что любое расширение группы A при помощи группы B изоморфно вкладывается в полное сплетение $A \operatorname{Wr} B$, причем это вложение однозначно с точностью

до внутренних автоморфизмов группы $A \operatorname{Wr} B$. Получающийся на этом пути новый способ обозрения всех расширений группы A при помощи группы B допускает обобщение на так называемые Γ-расширения (см. указанную выше работу, а также Л. А. Калужнин [14]).

Именно, пусть Γ есть конечная упорядоченная система групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, $s \geqslant 2$. Группа G называется Γ-*расширением*, если в G задан неполный нормальный ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{s-1} \supset G_s, \tag{1}$$

причем пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с G_s, равно E, а также заданы эпиморфизмы $\varphi_i\colon G_{i-1} \to \Gamma_i$ с ядрами G_i, $i = 1, 2, \ldots, s$. Для данного Γ получено обозрение всех Γ-расширений как подрасширений некоторого универсального Γ-расширения U, причем это представление Γ-расширений однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов группы U. Дальнейшему изучению *центральных* Γ-расширений — все группы системы Γ абелевы, а ряд (1) центральный — посвящена работа Л. А. Калужнина [15].

Некоторые свойства стандартных сплетений. Дискретное сплетение $A \operatorname{wr} B$, $A \neq E$, $B \neq E$, не разложимо в свободное произведение (Н. Р. Брумберг [1]). В прямое произведение оно разложимо тогда и только тогда, когда группа B конечная, а группа A обладает абелевым прямым множителем C, отличным от E, причем в C из каждого элемента однозначно извлекается корень n-й степени, где n — порядок группы B (Н. Р. Брумберг [1], П. Нейман [2]). Во второй из этих работ указаны также условия для разложимости в прямое произведение полного сплетения $A \operatorname{Wr} B$. В этих двух работах, а также в работе Хактона [1] можно найти некоторые результаты об автоморфизмах сплетений.

В указанной работе Н. Р. Брумберг установлены также некоторые свойства операции дискретного сплетения, рассматриваемой как операция (с двумя множителями) в классе всех групп в смысле § Д.11. Именно, эта операция удовлетворяет постулату Мальцева. С другой стороны, для группы $A \operatorname{wr} B$ тогда и только тогда выполняется постулат Маклейна (а также эта группа тогда и только тогда правильно порождается своими подгруппами A_1 и B), когда группа A абелева. Из результатов, содержащихся в указанной выше работе П. Неймана, отметим еще следующий: если группы $A \operatorname{wr} B$ и $A' \operatorname{wr} B'$ (или группы $A \operatorname{Wr} B$ и $A' \operatorname{Wr} B'$) изоморфны между собой, то $A \simeq A'$, $B \simeq B'$. В этой же работе найдены центр и коммутант сплетения.

Изучению вопроса о том, какие свойства групп A и B переносятся на их сплетения, посвящен ряд работ Баумслага. Ясно, что дискретное сплетение разрешимых групп само разрешимо. В работе Баумслага [3] показано, что при $A \neq E$, $B \neq E$ группа $A \operatorname{wr} B$ нильпотентна тогда и только тогда, когда A и B обе нильпотентные p-группы по одному и тому же простому p, причем в A порядки элементов ограничены в совокупности, а B конечна. Сюда примыкает работа Либека [1],

в которой для случая абелевых групп A и B найден класс нильпотентности группы $A \operatorname{wr} B$, если эта группа нильпотентна.

Ясно, что дискретное сплетение групп с конечным числом образующих само обладает этим свойством. С другой стороны, группа $A \operatorname{wr} B$ тогда и только тогда задается конечной системой образующих и конечным числом определяющих соотношений, когда или $A = E$, или B конечно (Баумслаг [7]).

Наконец, в работе Баумслага [5] рассматривается вопрос об извлечении из элементов сплетения корней фиксированной простой степени p. Обозначим через $\mathfrak{E}$ класс групп, в которых каждое уравнение вида $x^p = a$ разрешимо, а через $\mathfrak{U}$ — класс групп, в которых каждое такое уравнение имеет не больше одного решения. Тогда из $A \in \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{U}$ следует $A \operatorname{wr} B \in \mathfrak{U}$; из $A \in \mathfrak{E}$, $B \in \mathfrak{U}$ и B периодично следует $A \operatorname{wr} B \in \mathfrak{E}$; если $A \neq E$, то $A \operatorname{wr} B \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда A, $B \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}$ и B периодично, и т. д.

§ Д.13. Некоторые другие конструкции

Полупрямые произведения. Группы, обладающие дополняемым нормальным делителем, т. е. разложимые в полупрямое произведение этого нормального делителя и некоторой подгруппы (ср. § 52), встречаются весьма часто. Естественно возникает следующее обобщение этой конструкции, подсказываемое теоремой С. Н. Черникова из § 65:

Группа G называется *полупрямым произведением* своих подгрупп A_i, где i пробегает вполне упорядоченное по возрастанию множество индексов I, если:

1) $G = \{A_i, i \in I\}$;

2) для всех $j \in I$ подгруппа $G_j = \{A_i, i < j\}$ инвариантна в G;

3) для всех $j \in I$ пересечение подгруппы G_j с подгруппой $G^{(j)} = \{A_i, i \geqslant j\}$ равно E.

Этому определению равносильно утверждение, что группа G обладает возрастающим инвариантным рядом, все члены которого дополняемы в G; факторы этого ряда будут изоморфны группам A_i, $i \in I$.

Полупрямые произведения *рациональных групп*, т. е. подгрупп аддитивной группы рациональных чисел, изучаются в работе Г. С. Шевцова [1]. Любые два таких разложения данной группы изоморфны между собой. Всякая группа, допускающая такое разложение, является расширением прямого произведения рациональных групп при помощи абелевой группы, разложимой в прямое произведение циклических групп, бесконечных или порядка 2.

В работах Г. А. Маланьиной [1, 2, 4] изучаются p-группы, разложимые в полупрямое произведение циклических групп. Доказано, что при $p \neq 2$ любые два таких разложения данной группы изоморфны между собой. Не каждая подгруппа рассматриваемой p-группы сама допускает такое разложение, но для абелевых подгрупп при $p \neq 2$ это будет иметь

место. Группы, разложимые в полупрямое произведение циклических групп простых порядков, рассматриваются в работе В. И. Сюзевой [1], а полупрямые произведения рациональных групп и конечных циклических групп — в работе Г. С. Шевцова и В. И. Хлебутиной [1].

Определение полупрямого произведения допускает обобщение: множество индексов I можно считать лишь упорядоченным, а не вполне упорядоченным. См. относящиеся сюда работы Г. С. Шевцова [3, 4] и Г. А. Маланьиной [3].

Продолжается более глубокое изучение и полупрямых произведений в смысле § 52, т. е. полупрямых произведений нормального делителя и подгруппы, или, что то же самое, расщепляемых расширений (см. § Д.22). Существует также ряд критериев расщепляемости расширения — см., например, Шенкман [4].

Общие произведения. Если подгруппа A дополняема в группе G, т. е. существует такая подгруппа $X \subset G$, что

$$G = AX, \quad A \cap X = E$$

(см. Д.5.1), то будем говорить, следуя Б. Нейману [3], что G есть *общее произведение* подгрупп A и X. В этом случае будет также $G = XA$ и, следовательно, для любого $g \in G$ существуют однозначные записи

$$g = ax = yb, \quad a, b \in A, \quad x, y \in X.$$

Этим при фиксированном $b \in A$ определяется преобразование $y \to x = y^b$ множества X, а при фиксированном $y \in X$ — преобразование $b \to a = b^y$ множества A, а поэтому

$$yb = b^y y^b, \quad y \in X, \quad b \in A.$$

Цаппа [6] и Сеп [1] показали, что эти преобразования будут подстановками. Цаппа нашел также условия, которым должны удовлетворять полученные отображения каждой из групп A, X в группу подстановок на другой из этих двух групп для того, чтобы равенство

$$(ax)(by) = (ab^x)(x^b y) \tag{1}$$

определяло общее произведение групп A и X.

Фактическое обозрение всех общих произведений данных групп A и X возможно лишь при очень сильных ограничениях. Так, Редеи [1] дал такое обозрение для двух циклических групп, хотя бы одна из которых бесконечна (см. также Кон [2]). В работе Петерсена [1] описываются все такие общие произведения группы A с некоторой группой, что A не содержит нетривиального нормального делителя рассматриваемого произведения.

Ито [2] показал, что коммутант общего произведения G двух абелевых групп всегда абелев, т. е. группа G двуступенно разрешима. Скотт [7] доказал, что если дано общее произведение $G = AX$, причем группа A нильпотентна, а группа X абелева или гамильтонова, и если

хотя бы одна из групп A, X конечна, то группа G разрешима. Охара [1] изучает коммутант общего произведения абелевой группы и произвольной группы. Некоторые условия, при которых общее произведение двух полных абелевых групп само будет абелевым, указаны Н. Ф. Сесекиным [4]. Если Z — центр общего произведения $G = AX$ и для $z \in Z$

$$z = a_z x_z, \quad a_z \in A, \quad x_z \in X,$$

то множества $A' = (a_z, z \in Z)$, $X' = (x_z, z \in Z)$ будут подгруппами соответственно в A и в X, а подгруппа $A'X'$ абелева (Сеп [2]).

Подгруппу $G' = A'X'$ общего произведения $G = AX$, где $A' = G' \cap A$, $X' = G' \cap X$, естественно назвать его *подпроизведением*. С другой стороны, если $G = AX$, $H = BY$ — общие произведения, то можно ограничиться рассмотрением таких эпиморфизмов φ: $G \to H$, при которых $A\varphi = B$, $X\varphi = Y$. Эти понятия являются исходными в построенной Поппом [1] теории, развивающейся параллельно ряду вводных разделов общей теории групп и доходящей, например, до аналогов теорем Шрейера и Жордана–Гёльдера.

Некоторые свойства общих произведений могут быть перенесены на случай таких групп $G = AX$, что пересечение $A \cap X$ отлично от E; см. Редеи и Сеп [1]. Для этого случая Ш. С. Кемхадзе [12] показал, что если обе подгруппы A и X разрешимы и одна из них достижима в G, то группа G будет разрешимой. См. также Ш. С. Кемхадзе [6].

Маркьонна-Тибилетти [1, 4] ввела под названием *упорядоченного произведения* следующее обобщение понятия общего произведения:

$$G = A_1 A_2 \dots A_s,$$

причем, если

$$G_j = A_{j+1} \dots A_s, \quad j = 0, 1, \dots, s-1,$$

то подгруппы A_j и G_j перестановочны и их пересечение равно E. Показано, что эти произведения, а поэтому и любые общие произведения двух групп, вкладываются в некоторые сплетения. Это использовано для изучения автоморфизмов общих произведений. Эта же конструкция, притом без требования, наложенного выше на пересечения, рассматривается в работе Ш. С. Кемхадзе [7]; показано, что если все подгруппы A_i, $i = 1, 2, \dots, s$, нильпотентны и все они достижимы в G, то сама группа G нильпотентна.

Отметим здесь также работу В. П. Шункова [1], в которой рассматриваются разложения групп в *равномерное произведение*, т. е. в такое произведение, что любые две циклические подгруппы, взятые в различных множителях данного разложения, между собою перестановочны. Описано, в частности, строение периодических групп, разложимых в равномерное произведение своих силовских подгрупп.

Косые произведения. Пусть заданы множества A и X и в множестве пар AX определено бинарное умножение

$$ax \cdot by = cz, \tag{2}$$

где $a, b, c \in A$, $x, y, z \in X$. Тогда можно найти условия на c и z как функции от четырех аргументов a, x, b, y для того, чтобы операция (2) была групповой операцией на множестве пар AX.

Частным случаем этой конструкции будут введенные Редеи [2] *косые произведения*. Здесь A и X считаются группами, для $a, b \in A$ и $x, y \in X$ задаются четыре функции от двух аргументов каждая — b^x и y^x со значениями в A, a^b и x^b со значениями в X — и в равенстве (2) принимается

$$c = ab^x y^x, \quad z = a^b x^b y.$$

Если положить $b^x = b$, $y^x = 1$, то получим всевозможные расширения группы X при помощи группы A (см. (3) из § 48). Если же положить $y^x = 1$, $a^b = 1$, то мы получаем всевозможные общие произведения групп A и X (см. (1) из п. 2). В обоих случаях считается, конечно, что условия для того, чтобы рассматриваемое косое произведение было группой, выполняются.

Другие частные типы косых произведений изучались в большом цикле работ: Кохендёрфер [1], Редеи и Штёр [1], Рюкс [1, 2, 3], Янко [1, 2], Нишигори [2]. Эти исследования завершены работами Маркьонна-Тибилетти [2, 3], в которых показано, что всякая группа, являющаяся косым произведением, может быть построена из известных групп при помощи расширений (одного или двух) и произведения двух перестановочных групп, пересечение которых, впрочем, в общем случае отлично от E.

Косые произведения трех групп изучал Шаар [1], косые произведения групп с операторами — Фукс [3].

Сеп [3] описывает способы введения групповой операции в множество пар AX в том случае, когда A является группой, множества A и X имеют общий элемент e и Ae должно быть изоморфной A подгруппой строящейся группы, а eX — системой представителей правых смежных классов по этой подгруппе. Обобщение на случай групп с операторами — у Янко [3].

Факторизации. Наряду с вопросом об обозрении всех общих произведений двух данных групп естественно возникает вопрос об обозрении всех общих разложений данной группы, т. е. об отыскании всех ее дополняемых подгрупп. Можно также, заранее предполагая дополняемость всех подгрупп того или иного типа, выводить отсюда некоторые свойства самой группы. Так, дополняемость всех силовских подгрупп конечной группы равносильна ее разрешимости (Ф. Холл [4]; см. также § 60). Более узкий класс групп составляют конечные группы, у которых дополняемы все подгруппы (Ф. Холл [5]).

Бесконечные группы, все подгруппы которых дополняемы, изучала Н. В. Черникова [1]; такие группы называются *вполне факторизуемыми*. Группа G тогда и только тогда вполне факторизуема, если она так разлагается в полупрямое произведение нормального делителя A и подгруппы B, что и A, и B сами разлагаются в прямое произведение циклических групп простых порядков, причем для A существует такое разложение, все множители которого инвариантны в G. Всякая вполне факторизуемая группа вкладывается в полное прямое произведение конечных групп, порядки которых не делятся на квадрат простого числа. Всякая группа, обладающая возрастающим нормальным рядом с циклическими факторами неповторяющихся простых порядков, вполне факторизуема. См. также В. В. Рогов [1].

В работе С. Н. Черникова [23] описаны те абелевы группы, в которых дополняемы все сервантные подгруппы. Показано также, что некоторая группа тогда и только тогда вполне факторизуема, когда в ней дополняемы все нормальные делители, а сама группа обладает возрастающим главным рядом с циклическими факторами простых порядков. В этой же работе рассматриваются группы, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Доказана периодичность этих групп, а в локально конечном случае установлена их полная факторизуемость. Так как, однако, локальная конечность групп с дополняемыми абелевыми подгруппами может быть доказана (см. Ю. М. Горчаков [2]), то всякая группа с дополняемыми абелевыми подгруппами вполне факторизуема; см. также М. И. Каргаполов [5].

С. Н. Черников [30] нашел условия, при которых из дополняемости всех бесконечных подгрупп бесконечной группы следует ее полная факторизуемость. В его же работе [24] доказано, что локально нормальная группа тогда и только тогда локально разрешима, когда в ней дополняемы все ее силовские подгруппы. Б. В. Казачков [3, 5] изучает периодические группы со следующим свойством: если множество простых делителей порядков всех элементов группы G разбито на непересекающиеся подмножества Π и Π', то G разлагается в общее произведение любой своей силовской Π-подгруппы с любой силовской Π'-подгруппой. См. также Д.18.2.

В работе Ю. М. Горчакова [3] рассматриваются *примарно факторизуемые* группы, т. е. группы, в которых дополняемы все их p-подгруппы по любому простому p; этот класс групп шире класса вполне факторизуемых групп. Еще более широк класс *примитивно факторизуемых групп*, изучаемый в работах Ю. М. Горчакова [1, 2, 4]; это группы, в которых дополняемы все циклические подгруппы простых порядков. Доказано, например, что периодические примитивно факторизуемые группы могут быть описаны как периодические подгруппы полных прямых произведений групп, изоморфных вполне факторизуемой подгруппе голоморфа циклической группы P простого порядка, содержащей само P. [См. ДК.]

Наконец, М. И. Сергеев [1] изучает обобщения вполне факторизуемых групп, заменяя в определении дополняемой подгруппы требование $A \cap X = E$ более слабыми предположениями, что пересечение $A \cap X$ конечно или что оно содержится в конечном нормальном делителе группы.

Факторизации в смысле Хайоша. От понятия общего произведения естественен переход к следующей конструкции: в группе G рассматриваются такие подмножества A и B, что всякий элемент $x \in G$ однозначно представим в виде $x = ab$, $a \in A$, $b \in B$. Начиная с работы Хайоша [1], эта конструкция и ее обобщения изучаются преимущественно в случае абелевых групп; обзор этих исследований дан в книге Фукса [14]. Иногда рассматриваются, впрочем, и некоммутативные группы — см., например, Секанина [1].

Цепные произведения. Понятием правильного произведения групп (см. Д.11.3) подсказана следующая конструкция, изучаемая в работах Х. Нейман и Уайголда [1] и Б. и Х. Нейманов [8]. Группа G называется *цепным произведением* своих подгрупп A и B с *ядрами* X и Y (где $X \lhd A$, $Y \lhd B$), если $G = \{A, B\}$, $A \cap B = E$ и пересечение A с нормальным делителем, порожденным в G подгруппой B, равно X, а пересечение B с нормальным делителем, порожденным A, равно Y. Основной вопрос, здесь возникающий, — при каком выборе ядер в данных группах A и B существует цепное произведение этих групп с этими ядрами? Это не всегда так, как показывает пример двух циклических групп 2-го порядка, в одной из которых ядро равно E, а в другой совпадает со всей группой. Пока открыт вопрос, не будет ли этот пример единственным исключением.

§ Д.14. Структуры подгрупп, структурные изоморфизмы

Постановка задач. Совокупность подгрупп группы G составляет, как мы знаем из § 43, структуру $S(G)$. Понятно, что теоретико-групповые свойства группы G должны быть в той или иной мере связаны с теоретико-структурными свойствами ее структуры подгрупп $S(G)$, а также со свойствами дедекиндовой (т. е., как часто говорят, *модулярной*) структуры ее нормальных делителей (см. § 44). Со всякой группой связываются и другие структуры — см., например, структуру доступных подгрупп в Д.2.6.

В п. 2 будут указаны некоторые результаты, относящиеся к такой задаче: охарактеризовать на теоретико-групповом языке те группы, структуры подгрупп которых обладают некоторым данным хорошим теоретико-структурным свойством. Противоположная задача — характеризация структур, изоморфных структуре всех подгрупп какой-либо группы, принадлежащей к заданному классу групп, — оказывается

обычно очень трудной. Поэтому, как правило, занимаются несколько иным вопросом, связанным со следующим понятием.

Пусть даны абстрактные классы групп K и L, $K \subset L$, абстрактные в том смысле, что вместе со всякой своей группой они содержат и все группы, с нею изоморфные. Класс K *определяется структурами подгрупп в классе* L, если всякая L-группа, структура подгрупп которой изоморфна структуре подгрупп некоторой K-группы, сама принадлежит к классу K.

Вопрос, будет ли класс K определяться структурами подгрупп в классе L, часто решается в предположении, что L есть класс всех групп; в этом случае говорят об (абсолютной) определяемости класса K структурами подгрупп. С другой стороны, часто класс K сводится к классу групп, изоморфных данной группе G; в этом случае говорят об определяемости группы G структурой ее подгрупп (абсолютной или в классе L, $G \in L$).

Все эти вопросы можно рассматривать, понятно, не только для структуры подгрупп, но и для любой другой структуры, инвариантно связываемой с группой.

Перечисленные вопросы рассматриваются в § 47б. Позже появилась содержательная монография Судзуки [3], в значительной мере посвященная, впрочем, конечным группам; см. также обзоры Б. И. Плоткина [12] и П. Г. Конторовича, А. С. Пекелис и А. И. Старостина [1].

Группы, структуры подгрупп которых обладают некоторыми заданными свойствами. В § 44 доказана теорема Орэ, по которой дистрибутивной структурой подгрупп обладают локально циклические группы и только они. Отсюда следует, что циклические группы и только они обладают дистрибутивной структурой подгрупп, удовлетворяющей условию максимальности. Нужно учесть, с другой стороны, что структура $S(G)$ конечна тогда и только тогда, когда конечна сама группа G, т. е. класс конечных групп определяется структурами подгрупп.

Класс групп, обладающих дедекиндовой структурой подгрупп, весьма широк — к нему принадлежат, в частности, все абелевы группы. В работе Ивасавы [3] установлены следующие свойства группы G с дедекиндовой структурой подгрупп: совокупность элементов конечного порядка будет в ней (характеристической) подгруппой, фактор-группа по которой абелева; сама эта подгруппа также абелева, если G содержит элементы бесконечного порядка; если же в G можно найти два независимых элемента a и b бесконечного порядка (т. е. $\{a\} \cap \{b\} = E$), то абелевой будет сама группа G. Описаны также локально конечные группы с дедекиндовой структурой подгрупп.

В работе Сато [1] описаны локально конечные группы, структуры подгрупп которых *полумодулярны сверху*, т. е. таковы, что если a, b — элементы структуры и между элементами ab и a нет промежуточных элементов, то нет промежуточных элементов и между элементами b и $a + b$.

Изучаются также группы G, подгруппы которых составляют *структуру с дополнениями*, т. е. (говоря на теоретико-групповом языке) для любой подгруппы A существует такая подгруппа A', что $\{A, A'\} = G$, $A \cap A' = E$; вполне факторизуемые группы из Д.13.4 будут частным случаем таких групп. Конечные группы с этим свойством изучал Цакер [1]. На бесконечный случай его результаты перенес Эне [1], отметивший также конечность абелевой группы с конечным числом образующих, обладающей структурой подгрупп с дополнениями. См. также Курцио [2].

М. Л. Берлинков [2] изучает группы, структуры подгрупп которых, рассматриваемые как полные структуры, *компактны* в следующем смысле: из всякой последовательности подгрупп можно выделить такую подпоследовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, что, полагая

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad S_n = \{A_n, A_{n+1}, \ldots\},$$

будем иметь

$$\{D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Всякая группа с компактной структурой подгрупп периодична. Если локально конечная группа имеет компактную структуру подгрупп, то все ее p-подгруппы конечны или имеют тип p^∞. Локально нормальная группа тогда и только тогда обладает компактной структурой подгрупп, когда все ее бесконечные силовские p-подгруппы имеют тип p^∞. Группа G с компактной структурой подгрупп, обладающая разрешимым нормальным делителем A с локально нормальной фактор-группой G/A, сама локально нормальна.

Некоторые обобщения приведенного выше определения компактности структур указаны в работе М. Л. Берлинкова [4], а в его работах [3, 5] эти обобщения используются для характеризации структур подгрупп слойно конечных групп, а также применяются к структурам подгрупп примарных абелевых групп.

Структурные изоморфизмы. Группы G и H с изоморфными структурами подгрупп $S(G)$ и $S(H)$ называются (см. § 47б) *структурно изоморфными*, а всякий изоморфизм этих структур — *структурным изоморфизмом* групп G и H или *проектированием* одной из этих групп на другую. Всякий изоморфизм групп G и H индуцирует, понятно, их структурный изоморфизм; существуют, однако, структурные изоморфизмы между изоморфными группами, не индуцируемые изоморфизмами.

Л. Е. Садовский [1] доказал, что всякая свободная и вообще локально свободная группа определяется структурой подгрупп, а если она не является локально циклической, то всякое ее проектирование индуцируется ровно одним изоморфизмом. В § 47б отмечена, далее, теорема Л. Е. Садовского [3] о том, что всякая группа, разложимая

в свободное произведение, определяется структурой подгрупп; вопрос о том, будет ли в этом случае всякое проектирование индуцироваться изоморфизмом, пока открыт.

Значение этой теоремы в следующем. Пусть D — фиксированная группа, неразложимая в свободное произведение и отличная от E и от бесконечной циклической группы. Тогда, ввиду указанной теоремы Л. Е. Садовского и теоремы о существовании изоморфных продолжений для всякой пары свободных разложений произвольной группы (§ 35), для любых групп G и H из изоморфизма структур $S(G * D)$ и $S(H * D)$ будет следовать изоморфизм самих групп G и H; иными словами, всякая группа G однозначно определяется структурой подгрупп группы $G * D$.

В § 47б доказана теорема: если группа G обладает локальной системой подгрупп G_α, $\alpha \in I$, с конечным числом образующих и если проектирование φ группы G порождает на каждой подгруппе G_α, $\alpha \in I$, проектирование, индуцируемое изоморфизмом, то и само φ индуцируется изоморфизмом (для счетных групп — Бэр [2], в общем случае — Л. Е. Садовский [1]). Ей двойственна следующая теорема: пусть группа G обладает такой системой нормальных делителей H_α, $\alpha \in I$, что а) для любых $\alpha, \beta \in I$ существует $\gamma \in I$, для которого $H_\gamma \subseteq H_\alpha \cap H_\beta$, б) для всякого $a \in G$, $a \neq 1$, существует такое $\alpha \in I$, что H_α не содержит ненулевых степеней элемента a; если всякое проектирование любой фактор-группы G/H_α, $\alpha \in I$, индуцируется ровно одним изоморфизмом (конечным числом их), то всякое проектирование группы G, сохраняющее нормальность всех H_α, $\alpha \in I$, индуцируется ровно одним (соответственно хотя бы одним) изоморфизмом (Л. Е. Садовский [6]).

Структурные изоморфизмы абелевых и нильпотентных групп. Основные результаты, относящиеся к абелевым группам, — в работе Бэра [20]. Изучение проектирований периодических абелевых групп сводится к случаю примарных групп. Примарная по p абелева группа, как правило, структурно изоморфна лишь p-группе, хотя не обязательно абелевой (см. Ротлендер [1]); исключения из этого правила полностью описаны. Абелева группа, ранг которой не меньше двух, определяется структурой подгрупп, причем всякое проектирование этой группы индуцируется ровно двумя изоморфизмами; частный случай этой теоремы — в § 47б. Смешанная абелева группа ранга 1 может проектироваться на некоммутативную группу, а также может определяться структурой подгрупп, но обладать проектированиями, не индуцируемыми изоморфизмами. См. также Бьюмонт [1].

Структурные изоморфизмы локально нильпотентных групп без кручения рассматривались во многих работах: П. Г. Конторович и Б. И. Плоткин [1], Б. И. Плоткин [9], Л. Е. Садовский [4], А. С. Пекелис [7], А. С. Пекелис и Л. Е. Садовский [1]. Эти исследования завершены следующей теоремой (Л. Е. Садовский [5, 7]): всякая неабелева локально нильпотентная группа без кручения определяется

структурой подгрупп, причем всякое проектирование такой группы индуцируется точно одним изоморфизмом и одним антиизоморфизмом. Позже эта теорема независимо доказана Уоллом.

Б. И. Плоткин [10] доказал, что класс смешанных локально нильпотентных групп, содержащих по меньшей мере два независимых элемента бесконечного порядка, определяется структурами подгрупп; этот результат обобщен на любые непериодические локально нильпотентные группы в работе А. С. Пекелис [6]. В работе А. С. Пекелис [4] описаны структуры подгрупп локально нильпотентных групп, содержащих не менее двух независимых элементов бесконечного порядка, а в ее работе [8] доказано, что всякое проектирование такой группы переводит нормальные делители в нормальные делители, хотя может не индуцироваться ни изоморфизмом, ни антиизоморфизмом. Барнес и Уолл [1] изучают проектирования нильпотентных групп, переводящие нормализатор любой подгруппы в нормализатор ее образа. В работе Б. В. Яковлева [1] доказано, что всякая нильпотентная (но не абелева) группа класса 2, в которой выполняется тождество $x^p = 1$ (p — простое число), определяется структурой подгрупп.

О структурах подгрупп и структурных изоморфизмах некоторых классов разрешимых и обобщенных разрешимых групп см. в работах Б. И. Плоткина [10] и А. С. Пекелис [1, 2, 4, 5].

Наряду со структурными изоморфизмами изучаются и структурные гомоморфизмы групп — см. Уитмэн [1], Судзуки [2], Цаппа [5], Д. Хигмэн [1], Сато [2]; см. также книгу Судзуки [3].

Группы с дуальными структурами подгрупп. Структуры S и T называются *дуальными*, если между ними существует такое взаимно однозначное соответствие φ, что для $a, b \in S$ из $a < b$ следует $a\varphi > b\varphi$ и обратно. Группы G и H *дуальны*, если дуальны их структуры подгрупп.

Не всякая группа обладает дуальной группой — Бэр [21] доказал, что для этого необходима периодичность группы и что абелева группа тогда и только тогда обладает дуальной группой, когда она периодична и все ее примарные компоненты конечны. Судзуки [1] показал, что нильпотентная группа тогда и только тогда обладает дуальной группой, когда она периодична и все ее силовские p-подгруппы конечны и обладают дедекиндовыми структурами подгрупп, а силовская 2-подгруппа не является гамильтоновой. Разрешимые группы, обладающие дуальной группой, описаны в работе Цакера [2].

Некоторые другие структуры, связанные с группой. Для данной группы G можно рассматривать, например, *структуру всех ее подполугрупп*, т. е. подмножеств, замкнутых относительно групповой операции (включая пустое множество). Ясно, что для периодической группы эта структура совпадает со структурой подгрупп. С другой стороны, изоморфизм структур подполугрупп двух данных групп влечет за собою изоморфизм их структур подгрупп.

Р. В. Петропавловская [1] доказала, что всякая непериодическая абелева группа G определяется структурой подполугрупп, причем всякий изоморфизм этой структуры со структурой подполугрупп некоторой группы H индуцируется изоморфизмом групп G и H. В работе А. С. Пекелис [3] это же доказано для случая, когда группа G локально нильпотентна и без кручения, а в работе К. М. Кутыева [1] — для более общего случая, когда G является R-группой и обладает собственным нормальным делителем, фактор-группа по которому локально нильпотентна и без кручения; изоморфизм структур подполугрупп индуцируется в этих случаях изоморфизмом или антиизоморфизмом групп. См. также К. М. Кутыев [2].

В работе В. И. Ушакова [1] показано, что класс непериодических локально нильпотентных групп определяется структурами подполугрупп, даже в классе всех полугрупп. Заметим, что изоморфизмы структуры подполугрупп группы со структурой подполугрупп произвольной полугруппы изучаются в работах Р. В. Петропавловской [2] и Л. Н. Шеврина [1, 2]. Р. В. Петропавловская [3] доказала, что структурой подполугрупп определяется (в классе групп) всякая группа, являющаяся прямым произведением трех непериодических групп, по крайней мере две из которых неабелевы.

Рассматривается также *структура* $\widehat{S}(G)$ *всех смежных классов* группы G по всем ее подгруппам (включая пустое множество). Изоморфизм структур $\widehat{S}(G)$ и $\widehat{S}(H)$ может рассматриваться как взаимно однозначное соответствие между самими группами G и H. Если указанные структуры изоморфны, то существует между ними и естественный изоморфизм, переводящий единицу группы G в единицу группы H и поэтому индуцирующий изоморфизм структур подгрупп $S(G)$ и $S(H)$.

Существуют неизоморфные группы, структуры смежных классов которых изоморфны (Курцио [1]). Если G — абелева группа без кручения или смешанная абелева группа, ранг которой не меньше двух, то всякий естественный изоморфизм структуры $\widehat{S}(G)$ на структуру $\widehat{S}(H)$ для некоторой группы H будет изоморфизмом группы G на группу H (Н. В. Лойко [1, 2]). Случай смешанной абелевой группы ранга 1 рассматривается в работе Н. В. Лойко [3]. В работе Н. В. Лойко [4] доказано, что всякий естественный изоморфизм локально нильпотентной группы без кручения будет групповым изоморфизмом или антиизоморфизмом.

Часть третья

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ГРУПП

§ Д.15. Конечнопорожденные и конечноопределенные группы

Конечнопорожденные группы. Приведем некоторые результаты о группах с конечным числом образующих, т. е. о *конечнопорожденных группах*, частично примыкающие к содержанию § 38. Теорема Г. Хигмэна и Б. и Х. Нейманов [1] о вложимости всякой счетной группы G в группу с двумя образующими R (новое доказательство — в работе Ф. Левина [3]) получила развитие в работе Б. и Х. Нейманов [7]. Показано, что это вложение может быть осуществлено (при помощи сплетений) так, что всякий нормальный делитель группы G будет пересечением с G некоторого нормального делителя группы R. Указаны также некоторые свойства группы G, которые сохраняются и для группы R.

Таким свойством является, в частности, разрешимость: всякая счетная группа G с разрешимым рядом длины k вкладывается в группу с двумя образующими R, обладающую разрешимым рядом длины $k+2$. Это утверждение является следствием такой общей теоремы: всякая счетная группа, принадлежащая к многообразию $\mathfrak{M}$, может быть вложена в группу с двумя образующими, содержащуюся в многообразии $\mathfrak{M}\mathfrak{A}^2$ (см. Д.10.4), где $\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп. Для свойства нильпотентности соответствующее утверждение не имеет места — аддитивная группа рациональных чисел не может быть вложена в конечнопорожденную нильпотентную группу, так как последняя непременно удовлетворяет условию максимальности для подгрупп (см. § 64).

В § 38 отмечено существование конечнопорожденных групп, изоморфных со своей истинной фактор-группой; такие группы называются сейчас *нехопфовыми*. В указанной выше работе Б. и Х. Нейманов [7] построен пример конечнопорожденной разрешимой нехопфовой группы, впрочем, с бесконечным множеством определяющих соотношений. Еще один пример нехопфовой группы — в работе Баумслага [12], а в работе Баумслага и Солитэра [1] сообщается пример нехопфовой группы с двумя образующими и одним определяющим соотношением: это группа с образующими a, b и определяющим соотношением

$$a^{-1}b^2a = b^3.$$

В этой связи отметим полученное Б. Нейманом [14] отрицательное решение еще одной проблемы Хопфа, близкой к рассматривавшейся выше. Именно, построены две неизоморфные группы с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений, каждая из которых является эпиморфным образом другой. См. также Баумслаг и Солитэр [1].

Приведем некоторые другие результаты о конечнопорожденных группах. В работе Гашюца [1] показано, что если A — конечный нормальный делитель группы G с n образующими, то для всякой системы n образующих $e_1'A$, $e_2'A$, ..., $e_n'A$ фактор-группы G/A можно указать такую систему n образующих $e_1, e_2, \ldots, e_n$ группы G, что $e_i \in e_i'A$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отказаться в этой теореме от предположения о конечности A нельзя.

Если хопфова конечнопорожденная группа G представлена как фактор-группа свободной группы F конечного ранга по нормальному делителю N, то всякое такое изоморфное отображение φ группы F в себя, что $N\varphi \subseteq N$ и $F\varphi \cdot N = F$, индуцирует автоморфизм группы G и всякий автоморфизм группы G может быть так получен (Грюн [8]). Конечнопорожденная группа тогда и только тогда имеет конечное число автоморфизмов, когда она или конечна, или же является центральным расширением бесконечной циклической группы при помощи конечной группы (Элперин [1]).

Пока открыт вопрос, будет ли хопфовой группой свободное произведение конечного числа неразложимых конечнопорожденных хопфовых групп A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ответ положительный, если все группы A_i финитно аппроксимируемы. Дэй [2] доказал это же в случае, когда группы A_i *вполне неразложимы*, т. е. неразложимы в свободное произведение все их фактор-группы. Показано, что группа тогда и только тогда вполне неразложима, когда она не может быть нетривиально представлена в виде свободного произведения с объединенным нормальным делителем.

Конечноопределенные группы. Так называются группы с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений в этих образующих, т. е. фактор-группы свободных групп конечного ранга по нормальным делителям, порожденным конечным числом элементов [1]). Простейшие свойства конечноопределенных групп указаны в § 41. Приведем некоторые другие свойства этих групп, помимо уже отмечавшихся выше. Заметим, что многочисленные примеры таких групп рассмотрены в книге Кокстера и Мозера [1].

[1]) Иногда эти группы называют также *конечнопредставимыми*, что менее удачно, так как при таком варианте названия правильнее было бы говорить о конечнопредставленных группах.

Если конечноопределенная группа G представлена как факторгруппа конечнопорожденной группы H,

$$G \simeq H/N,$$

то N порождается конечным числом классов сопряженных в H элементов (Бэр [58]). В этой же работе доказано (см. также Ф. Холл [12]), что расширение конечноопределенной группы при помощи конечноопределенной группы само будет конечноопределенным. Ясно, что свободное произведение конечного числа конечноопределенных групп само конечноопределенное. Баумслаг [13] показал, что свободное произведение двух конечноопределенных групп с объединенной подгруппой тогда и только тогда будет конечноопределенным, когда объединенная подгруппа конечнопорожденная. В работе Рапапорт [2] устанавливаются некоторые свойства задания единичной группы как конечноопределенной группы с равным числом образующих и определяющих соотношений.

Особый интерес вызывают группы с одним определяющим соотношением. В работе Карраса, Магнуса и Солитэра [1] рассмотрен вопрос о существовании в таких группах элементов конечного порядка. Показано, что если группа G, заданная одним соотношением $w = 1$ (где w, как и v, u, используемые ниже, — слова в заданных образующих), обладает отличными от 1 элементами конечного порядка, то $w = v^k$, $k > 1$, $v \neq 1$. Если группа G задана соотношением $v^k = 1$, $k > 1$ и v не является истинной степенью некоторого слова, то элемент v имеет в G порядок k и элементы конечного порядка группы G исчерпываются степенями v и их сопряженными. Группа, заданная соотношением $uv = vu$, не содержит отличных от 1 элементов конечного порядка.

Вопросу о центре группы с одним соотношением посвящена работа Мурасуги [1]. Если число образующих такой группы не меньше трех, то ее центр тривиален. Если же она задана двумя образующими и некоммутативна и если ее центр нетривиален, то он будет бесконечной циклической группой.

Фредерик [1] показал, что если группа G задана одним *циклически несократимым* соотношением $w = 1$ (т. е. первый и последний множители слова w не являются обратными друг другу — это предположение не является, понятно, каким-либо ограничением) и если каждый образующий и обратный к нему встречаются в слове w ровно по одному разу, то группа G будет хопфовой. Шеницер [1] рассматривает условия для разложимости группы, заданной одним определяющим соотношением, в свободное произведение. В работе Стейнберга [1] установлены условия, при которых группа с одним определяющим соотношением обладает свободной нильпотентной фактор-группой данного класса (см. Д.27.3). Некоторые обобщения теоремы Магнуса о свободе — ее формулировка приведена в § 41 — можно найти в работе Линдона [9].

Обзор работ о группах с одним определяющим соотношением — в статье Баумслага [19].

Серия работ Фокса [1] посвящена разработке и применениям аппарата дифференцирования в групповом кольце свободной группы. В частности, рассматриваются следующие *представления пары групп* G, H, где H — подгруппа в G:

$$G = F/N, \quad H = AN/N,$$

где F — свободная группа, а A — ее свободный множитель; на эти представления обобщается теорема Тице из § 41. В продолжающей указанную серию работе Чена, Фокса и Линдона [1] передоказана, в частности, приведенная в § 36 теорема Витта о факторах нижней центральной цепи свободной группы. Аппарат свободного дифференцирования используется в работе Чена [2] (примыкающей к работе Бэра [32]) для получения некоторых инвариантов представлений групп с конечным числом образующих как фактор-групп свободных групп.

Подгруппы конечноопределенных групп. Так как всякая счетная группа вкладывается в конечнопорожденную группу, то возникает естественный вопрос об описании тех счетных групп, которые могут быть вложены в конечноопределенную группу. Полного ответа этот вопрос еще не получил. Интересные частные результаты, к нему относящиеся, можно найти в работе Г. Хигмэна [12].

Именно, конечнопорожденная группа тогда и только тогда вкладывается в конечноопределенную группу, если она рекурсивно определима. При этом группа называется *рекурсивно определимой*, если она относительно образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть задана такой системой определяющих соотношений

$$w_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что существует эффективная нумерация элементов свободной группы F с образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которой функция $f(k)$, дающая номер элемента $w_k = w_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в этой нумерации, будет рекурсивной, т. е. существует алгоритм для вычисления ее значений. Показано также, что всякая счетная абелева группа и всякая счетная локально конечная группа вкладываются в конечноопределенную группу. См. также примыкающую сюда работу Клэпхема [1].

Алгоритмические исследования. В § 41 указаны основные проблемы алгоритмического характера, возникающие для конечноопределенных групп, и отмечено, что П. С. Новиков получил отрицательное решение проблемы тождества. Именно, можно указать конкретную конечноопределенную группу, для которой не существует алгоритма, решающего проблему тождества. Полное доказательство дано в работе П. С. Новикова [3]. Позже этот результат передоказывался в работах Буна [1], Бриттона [2], Г. Хигмэна [12] и Бриттона [3]. [См. ДК.]

Этим отрицательно решена и проблема сопряженности; см. также П. С. Новиков [2]. Заметим, что существуют конечноопределенные

группы, в которых проблема сопряженности решается отрицательно, а проблема тождества — положительно (А. А. Фридман [1]). [См. ДК.]

Результат П. С. Новикова позволил получить отрицательное решение и для ряда других алгоритмических проблем. Так, С. И. Адян [1] дал отрицательное решение проблемы изоморфизма, даже проблемы изоморфизма с заданной конечноопределенной группой, например с единичной. В этой работе отрицательно решены также некоторые другие алгоритмические проблемы и среди них проблема распознавания простоты конечноопределенной группы. Показано также, что не существует алгоритма, решающего метапроблему тождества, т. е. для всякой конечноопределенной группы устанавливающего, разрешима ли в ней проблема тождества или нет. Некоторые из этих результатов, а также ряд других позже получил Рабин [1].

Работы К. А. Михайловой [1, 2] посвящены проблеме вхождения, т. е. проблеме существования алгоритма, позволяющего для данной конечноопределенной группы G и данной в ней конечной системы элементов M решить, принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G к подгруппе $\{M\}$. Показана неразрешимость этой проблемы уже для прямого произведения двух свободных групп ранга 2. [См. ДК.]

Неразрешимость проблемы тождества в общем виде делает особо интересными те случаи, когда она допускает положительное решение. В § 41 уже отмечено, что Магнус решил эту проблему для групп с одним определяющим соотношением, и указаны работы В. А. Тартаковского, в которых проблема тождества решается для некоторых достаточно широких классов конечноопределенных групп. Исследования В. А. Тартаковского продолжались П. В. Стендером [1] и А. В. Гладким [1, 2]. Проблема тождества положительно решена также для некоторых классов групп в работах И. А. Грушко [1], Хакена [1], Шика [1], Бриттона [1].

В работе М. Д. Гриндлингера [1] рассматриваются группы, заданные в некоторой системе образующих такой системой определяющих соотношений

$$r_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

что 1) все r_i несократимы и циклически несократимы; 2) система левых частей соотношений (1) вместе со всяким словом r_i содержит и слово r_i^{-1}, а также все слова, получающиеся из r_i циклической перестановкой образующих; 3) если слова r_i и r_j не являются обратными друг другу, то в произведении $r_i r_j$ сокращается меньше одной шестой длины слова r_i, где $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Для этих групп, которые можно назвать $^1/_6$-*группами*, положительно решается проблема тождества.

В дальнейших работах М. Д. Гриндлингера [2–8] и Липшуца [1–4] изучаются как эти группы, так и аналогично определяемые $^1/_8$-*группы* и $^1/_4$-*группы*, решаются различные алгоритмические вопросы, а также устанавливается, что в некоторых отношениях эти группы аналогичны

свободным группам. Так, в $^1/_8$-группе всякий элемент имеет тривиальный централизатор, а если среди определяющих соотношений такой группы нет соотношения вида $a^n = 1$, где a — образующий элемент, то из элемента a^k квадратный корень не извлекается при нечетном k и однозначно извлекается при четном k. [См. ДК.]

Наконец, Д. С. Фаермарк [1] доказал, что если для групп G_1 и G_2 положительно решается проблема тождества, то она положительно решается и для нильпотентных произведений этих групп (см. Д.11.4). См. также Д.27.2.

§ Д.16. Периодические группы

Проблема Бернсайда о периодических группах. Эта проблема — о ней шла речь в §§ 38 и 53 — уже получила решение, притом отрицательное: Е. С. Голод [1] построил пример бесконечной p-группы с конечным числом k образующих; здесь p — любое простое число, k — любое натуральное число, большее или равное двум. Построенная группа оказалась даже финитно аппроксимируемой (см. Д.9.2.).

Полученное Е. С. Голодом отрицательное решение проблемы Бернсайда основано на полученном им же отрицательном решении проблемы о локальной конечномерности алгебраической ассоциативной алгебры над полем (и, в частности, нильалгебры), поставленной в работе А. Г. Куроша [17]. Как показал Джекобсон [1], из отрицательного решения этой последней проблемы для нильалгебр над полями характеристики p вытекает отрицательное решение проблемы Бернсайда для p-групп.

Построение Е. С. Голода существенно опирается на одну теоретико-кольцевую лемму из работы Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича [1]. Простое доказательство и некоторое обобщение этой леммы — в работе Э. Б. Винберга [1].

Ограниченная проблема Бернсайда. Порядки элементов группы из примера Е. С. Голода не являются ограниченными в совокупности. Понятно, что отрицательное решение общей проблемы повышает интерес к ограниченной проблеме — именно в этом виде проблему формулировал сам Бернсайд [2]. При этом можно ставить вопрос о конечности группы с k образующими, если порядки всех элементов группы ограничены сверху данным числом n. Как отмечено в § 38, вопрос в такой форме положительно решен Б. Нейманом [3] для $n = 3$ и И. Н. Сановым [1] для $n = 4$.

Можно, однако, полагать, что порядки всех элементов группы делят число n, т. е. что в группе выполняется тождество

$$x^n = 1. \tag{1}$$

Все такие группы с k образующими будут фактор-группами свободной группы с k свободными образующими в многообразии, определяемом

тождеством (1); обозначим эту группу через $B(n, k)$. Ограниченная проблема Бернсайда в этом случае сводится, следовательно, к вопросу о конечности «бернсайдовых» групп $B(n, k)$, $k \geqslant 2$.

Конечность групп $B(3, k)$, доказанная Бернсайдом [2], установлена другим методом Шенкманом [2]; конечность групп $B(4, k)$ вытекает из результата И. Н. Санова [1]. Вопрос о конечности групп $B(5, k)$ пока остается открытым, в то время как конечность групп $B(6, k)$ доказана М. Холлом [6] (см. также М. Холл [7]).

Очень большое значение имеет заметка П. С. Новикова [4], в которой сообщается, что все группы $B(n, k)$ при $n \geqslant 72$ бесконечны. Этим, в частности, дается отрицательное решение общей проблемы Бернсайда. К сожалению, полное доказательство пока не опубликовано.

Изучение бернсайдовых групп. В работах различных авторов указываются порядки групп $B(n, k)$ (или границы для этих порядков), если указанные группы будут конечными; изучаются факторы нижних центральных цепей этих групп; наконец, если n — степень простого числа p и поэтому группа $B(n, k)$, если она конечна, будет p-группой и, следовательно, нильпотентной, то оценивается ее класс нильпотентности.

Порядок группы $B(3, k)$ точно вычислен в работе Леви и Ван-дер-Вардена [1]. Нижняя граница для порядка группы $B(4, k)$ указана И. Н. Сановым [3], для порядка группы $B(5, 2)$ — Магнусом [13], для порядка группы $B(p^2, k)$, p простое, — Тобиным [1]. Порядок группы $B(6, k)$ вычислен М. Холлом [6].

Грин [1] показал, что если p — нечетное простое число и $p^s \geqslant 5$, то класс нильпотентности группы $B(p^s, 2)$, если она конечна, не меньше $2p^s - 2$. Для случая $s = 1$ этот результат усилил Мейер-Вундерли [2]: если $p \geqslant 5$, то класс нильпотентности группы $B(p, 2)$ не меньше $2p - 1$. Класс нильпотентности группы $B(4, k)$ (эта группа, как мы знаем, конечна) не больше $3k$ (он равен $3k$ при $k = 2$), но всегда больше k (см. Райт [1]).

В работах Линдона [5, 6] изучаются факторы $Q_n = B_n/B_{n+1}$ нижнего центрального ряда бернсайдовой группы $B = B(p, k)$, p — простое число. Группа Q_n будет прямым произведением циклических групп порядка p. Устанавливается число этих прямых множителей для всех n, удовлетворяющих неравенству $n \leqslant p + 2$, а при $k = 2$, $p \geqslant 5$, — также для $n = p + 3$. Развитие этих результатов — в работах Холенвега [1, 2].

Ослабленная проблема Бернсайда. Если группа $B(n, k)$ конечна, то существует лишь конечное число неизоморфных конечных групп экспоненты n (т. е. удовлетворяющих тождеству (1)) с k образующими. Обратное, однако, не обязано иметь место. Возникает следующая ослабленная проблема:

(R_n) Дано натуральное число n. Существует ли для всякого натурального числа k такое число $r(n, k)$, что порядок любой конечной группы экспоненты n с k образующими не превосходит $r(n, k)$?

В работе Ф. Холла и Г. Хигмэна [1] положительно решены проблемы (R_6) (что покрывается отмеченным выше более поздним результатом М. Холла) и (R_{12}). Проблема (R_5) положительно решена А. И. Кострикиным [1] и Г. Хигмэном [8], а позже А. И. Кострикин [4] получил положительное решение проблемы (R_p) для любого простого p. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для экспонент, являющихся степенями простого числа, пока не получено; некоторые подходы — в работах А. И. Кострикина [5], Лози [1] и Краузе [1].

Результат, доказанный А. И. Кострикиным, вытекает из найденного им решения некоторых проблем о кольцах Ли (см. также А. И. Кострикин [2, 3]). Вообще, связи между проблемой Бернсайда для групп и теорией колец Ли, равно как и примыкающие сюда вопросы о высших коммутаторах свободных групп, неоднократно подвергались рассмотрению (см. Магнус [12], Бэр [29], И. Н. Санов [4, 5]). Упрощение некоторых доказательств из этих работ И. Н. Санова — в работах Стрёйк [2, 5]. См. также Брак [1] и Краузе [2].

В работе Ф. Холла и Г. Хигмэна [1] наряду с проблемой (R_n) рассматривается следующая проблема:

(S_n) Дано натуральное число n. Существует ли для всякого натурального числа k такое число $s(n, k)$, что порядок любой разрешимой группы экспоненты n с k образующими не превосходит $s(n, k)$?

Показано, что проблема (S_n) решается положительно, если положительно решены проблемы (S_q) для всех делителей q числа n, являющихся степенями простых чисел; для проблемы (R_n) такое сведéние пока не установлено. Изучены также некоторые связи между проблемами (R_n) и (S_n).

Локально конечные группы. Отрицательное решение проблемы Бернсайда (см. п. 1) показывает, что локально конечные группы составляют истинный подкласс класса периодических групп. Таким образом, всевозможные теоремы, утверждающие локальную конечность периодических групп, подчиненных тем или иным дополнительным условиям, перестают носить условный характер и приобретают несомненный интерес. Что же касается самих локально конечных групп, то по разным поводам они встречаются у нас во многих параграфах; сейчас мы ограничимся указанием лишь немногих результатов, к ним относящихся.

С. Н. Черников [29] изучает локально конечные группы, обладающие нормальной системой с конечными факторами. Показано, что если такая группа обладает конечной силовской p-подгруппой по некоторому простому числу p, то обладает и нормальным делителем конечного индекса, не содержащим отличных от 1 элементов, порядок которых есть степень p. С другой стороны, если локально конечная группа, обладающая нормальной системой с конечными факторами, бесконечна, то она обладает бесконечной абелевой подгруппой.

Последний результат усилили М. И. Каргаполов [10] и Ф. Холл и Кулатилака [1]: всякая бесконечная локально конечная группа

обладает бесконечной абелевой подгруппой. Этим для локально конечных групп решается проблема О. Ю. Шмидта, указанная в § 7: бесконечная локально конечная группа, все истинные подгруппы которой конечны, является группой типа p^∞. Частные случаи этого результата можно найти в работе Саса [3], а его обобщение — в работе В. П. Шункова [2]. См. также С. П. Струнков [1]. [См. ДК.]

Дальнейшее изучение локально конечных групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами, — в работе М. И. Каргаполова [6]. С другой стороны, Шпехт [3] рассматривает следующие классы групп, расположенные между классом всех локально конечных групп и классом локально нормальных групп: а) группы G, обладающие таким возрастающим рядом подгрупп A_α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma$ (α — порядковые числа), что $A_0 = E$, $A_\gamma = G$, для предельных α

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$$

и, наконец, для всех $\alpha < \gamma$ подгруппа A_α имеет конечный индекс в $A_{\alpha+1}$; б) группы, обладающие возрастающим нормальным рядом с конечными факторами; в) группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами. Показано, что класс а) строго шире класса б), этот строго шире класса в), а последний — строго шире класса локально нормальных групп. Вопрос о совпадении класса а) с классом всех локально конечных групп отрицательно решен М. И. Каргаполовым [11]. [См. ДК.]

Универсальная счетная локально конечная группа. Ф. Холл [17] построил счетную локально конечную группу C, в которую изоморфно вкладывается всякая счетная локально конечная группа. Любые две изоморфные конечные подгруппы группы C сопряжены; это свойство и свойство содержать изоморфный образ всякой конечной группы вместе определяют группу C однозначно с точностью до изоморфизма.

Укажем некоторые другие свойства этой *универсальной группы Холла*. Она содержит континуум различных подгрупп, изоморфных любой заданной счетной локально конечной группе, и счетное множество подгрупп, изоморфных любой заданной конечной группе. Все элементы любого данного порядка m составляют в C один класс сопряженных элементов S_m, причем $S_m S_m = C$ при $m > 1$, откуда вытекает простота группы C. Наконец, группа C *вербально полная*, т. е. для всякого нетривиального слова $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и любого $a \in C$ уравнение

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$$

разрешимо в C.

В этой же работе Ф. Холла показано, что для любой счетной абелевой p-группы A существует счетная локально конечная вербально полная p-группа, центр которой изоморфен A.

Локально нормальные группы. Подгруппы прямых произведений конечных групп локально нормальны. Обратное не всегда имеет место,

как показывает пример группы типа p^∞. Ф. Холл [16] доказал, что счетная группа тогда и только тогда вкладывается в прямое произведение конечных групп, если она локально нормальна и финитно аппроксимируема; эпиморфными образами этих групп исчерпываются все счетные локально нормальные группы. Первый из этих результатов обобщает Ю. М. Горчаков [5, 8]: финитно аппроксимируемая локально нормальная группа, обладающая счетным центром или же совпадающая со своим коммутантом, изоморфно вкладывается в прямое произведение конечных групп.

Из результатов работы Б. И. Плоткина [8] можно вывести, что всякая локально нормальная группа является расширением локально разрешимой группы при помощи группы, полупростой в смысле § 61 (конечность последней при этом не предполагается, понятно). М. И. Каргаполов [3] доказал, что всякая полупростая локально нормальная группа изоморфно вкладывается в прямое произведение конечных групп, хотя может и не разлагаться в такое произведение.

Х. М. Розенфельд [1, 2] изучает такие локально нормальные и периодические локально нильпотентные группы, что любое число k, являющееся порядком некоторого конечного нормального делителя данной группы, служит и индексом для некоторого ее нормального делителя. [См. ДК.]

Дисперсивные группы. Развивая идеи Бэра, относящиеся к конечным группам, Хельд [1, 2] называет периодическую группу G *σ-дисперсивной*, где σ — некоторая частичная упорядоченность множества Π простых чисел, если выполняется следующее условие: для любого подмножества Π' множества Π, содержащего вместе со всяким своим элементом все элементы, предшествующие ему в смысле упорядоченности σ, все Π'-элементы группы G составляют подгруппу. Дисперсивные группы изучаются при условии минимальности для подгрупп или условиях, к нему близких.

§ Д.17. Группы с другими условиями конечности

Вступление. Некоторые типы групп, удовлетворяющих тем или иным условиям конечности, указаны в § 53. Конечнопорожденные и периодические группы, рассмотренные в предшествующих §§ Д.15 и Д.16, принадлежат, понятно, к их числу. Мы хотим рассмотреть теперь некоторые другие типы групп с условиями конечности, причем будем в меньшей степени касаться тех условий конечности, которые подробно рассмотрены в обзоре С. Н. Черникова [28].

Отметим, что часто рассматриваются классы групп, обладающие такой нормальной (или инвариантной) системой или же возрастающим нормальным (или инвариантным) рядом, что все факторы этой системы (или ряда) удовлетворяют некоторому заданному условию конечности. Такие классы групп укладываются в одну общую схему, которая будет изложена в § Д.20.

Заметим также, что существует большое число критериев конечности, т. е. результатов, утверждающих конечность группы, удовлетворяющей некоторым условиям, формально более слабым. Такой критерий конечности можно вывести, например, из леммы Дицмана. Разнообразные критерии конечности указаны в работе Бэра [66]; см. также Курцио [4].

Группы с условием минимальности для подгрупп. Пока открыт вопрос, не будет ли всякая группа с условием минимальности для подгрупп обладать абелевой подгруппой конечного индекса; нет ответа даже в том случае, если группа локально конечна. Группа с условием минимальности для подгрупп, обладающая абелевой подгруппой конечного индекса, называется *экстремальной*. Иными словами, это будет конечное расширение абелевой группы с условием минимальности. Интерес к экстремальным группам вызван результатами С. Н. Черникова, изложенными в §§ 59 и 64.

В работе Бэра [69] для группы с условием минимальности для подгрупп указаны различные условия, равносильные существованию в этой группе абелевой подгруппы конечного индекса. Таково, например, условие об абелевости пересечения всех подгрупп конечного индекса, а также условие, что всякий простой эпиморфный образ любой подгруппы данной группы конечен.

Бэр [55] рассматривает более узкий класс групп, чем экстремальные группы, а именно конечные центральные расширения абелевых групп с условием минимальности: центр группы удовлетворяет условию минимальности, а фактор-группа по центру конечна. Этому равносильны многие другие условия, например: 1) коммутант группы конечен, а фактор-группа по коммутанту удовлетворяет условию минимальности для подгрупп; 2) все классы сопряженных элементов конечны и группа удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп; 3) группа периодична и всякая ее периодическая группа автоморфизмов конечна. [См. ДК.]

Группы с условием минимальности для нормальных делителей. Как отмечено в § 59, это условие более слабое, чем условие минимальности для всех подгрупп. Однако группа с условием минимальности для нормальных делителей, обладающая абелевой подгруппой конечного индекса, является экстремальной (Бэр [70]). Различные характеризации этих групп, приведенные в работе Бэра [55], можно рассматривать, следовательно, как характеризации экстремальных групп.

Отметим одну из них: условие минимальности для абелевых подгрупп и существование максимальной абелевой подгруппы, обладающей лишь конечным числом сопряженных подгрупп. С другой стороны, экстремальные группы могут быть охарактеризованы как такие периодические группы конечного специального ранга, что число различных простых чисел, входящих в порядки элементов группы, конечно (Бэр [70]).

Произвольные группы с условием минимальности для нормальных делителей рассматриваются в работе Бэра [41]. В такой группе G строится возрастающая инвариантная цепь

$$E = S_0(G) \subseteq S_1(G) \subseteq \ldots \subseteq S_\nu(G) \subseteq \ldots, \tag{1}$$

где $S_{\nu+1}(G)/S_\nu(G)$ есть подгруппа, порожденная всеми конечными минимальными нормальными делителями из $G/S_\nu(G)$, а на предельных местах ν берутся объединения. Длина цепи (1) не превосходит $\omega_0 2$. Показано, что нормальные делители N группы G, содержащиеся в $S_{\omega_0}(G)$, могут быть охарактеризованы многими другими способами, например: 1) N содержится в множестве всех элементов из G с конечным числом сопряженных; 2) централизатор N в G имеет конечный индекс; 3) центр $Z(N)$ группы N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и $N/Z(N)$ конечно; 4) N слойно конечно. См. также С. Н. Черников [28].

Если группа удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей, то ее верхний гиперцентр (см. Д.3.3) удовлетворяет условию минимальности для подгрупп (Д. Маклейн [3]).

Другие условия минимальности. Наряду с условиями минимальности для нормальных делителей или для абелевых подгрупп рассматриваются многие другие ослабленные формы условия минимальности — для подгрупп конечного индекса, для бесконечных подгрупп, для p-подгрупп (см. С. Н. Черников [28]). Отметим также следующую теорему (С. Н. Черников [30]): если неабелева группа, обладающая нормальной системой с конечными факторами, удовлетворяет условию минимальности для неабелевых подгрупп, то она экстремальна.

Д. С. Робинсон [3] изучает группы, удовлетворяющие условию минимальности для достижимых подгрупп, и доказывает, что это условие равносильно тому, что для всякой истинной достижимой подгруппы A данной группы G в этой группе существуют, притом лишь в конечном числе, такие достижимые подгруппы, которые минимальны относительно свойства содержать A в качестве истинной подгруппы.

В работах Я. Д. Половицкого [2, 3, 4] изучаются группы, удовлетворяющие следующему условию Π-минимальности, где Π — данное множество простых чисел: в группе G обрывается на конечном месте всякая такая убывающая цепочка подгрупп

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots, \tag{2}$$

что для всех $n = 1, 2, \ldots$ существуют элементы $x_n \in A_n \setminus A_{n+1}$, для которых $x_n^{p_n} \in A_{n+1}$ при некотором $p_n \in \Pi$; если Π состоит из одного простого числа p, то можно говорить о p-минимальности. Группы с условием Π-минимальности будут, очевидно, периодическими. Изучение этих групп оказалось тесно связанным с изучением *слойно экстремальных* групп, т. е. групп, в которых множество всех элементов любого данного порядка порождает экстремальную подгруппу.

Отметим следующие результаты. Всякая локально конечная группа с условием П-минимальности является расширением группы с условием П-минимальности, не имеющей подгрупп конечного индекса, при помощи группы, все П-*элементы* которой (т. е. элементы, порядки которых делятся лишь на простые числа из П) порождают в ней конечный нормальный делитель. Локально конечная группа тогда и только тогда слойно экстремальна, если каждая ее счетная подгруппа обладает нормальной системой с конечными факторами и удовлетворяет условию p-минимальности для всех простых p. Локально конечная группа, всякая счетная подгруппа которой, не имеющая истинных подгрупп конечного индекса, разрешима или локально нильпотентна, тогда и только тогда удовлетворяет условию П-минимальности, когда множество ее П-элементов порождает экстремальную подгруппу.

В работе Д. И. Зайцева [1] аналогичная теория строится для групп, в которых обрывается всякая такая убывающая цепочка подгрупп вида (2), что во всяком скачке $A_n \setminus A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, можно найти элемент, являющийся в самой группе коммутатором.

Нётеровы группы. Так называются группы, удовлетворяющие условию максимальности для подгрупп, т. е. группы, все подгруппы которых конечнопорожденные (см. § 53). Некоторые характеризации этих групп можно найти в работе Бэра [58]. Симон [1, 2] изучает нётеровы группы, обладающие нильпотентным нормальным делителем конечного индекса, и близкие к ним классы групп.

Ряд свойств *локально нётеровых групп*, т. е. групп, обладающих локальной системой из нётеровых групп, установлен в работах Бэра [58, 60]. Расширение локально нётеровой группы при помощи такой же группы может не обладать этим свойством, однако конечное расширение локально нётеровой группы само локально нётерово. Если всякий отличный от E эпиморфный образ группы содержит отличный от E конечноопределенный нётеров нормальный делитель, то группа локально нётерова. Группа G локально нётерова, если она содержит такие нормальные делители N и D и подгруппу U, что N, U и G/D локально нётеровы, $G = NU$, $D \subseteq N \cap U$. Отсюда следует, что в любой группе произведение локально нётеровых нормальных делителей само локально нётерово.

Шенкман [5] строит для нормальных делителей нётеровой группы G теорию, аналогичную теории идеалов в нётеровых кольцах. *Радикалом* нормального делителя A группы G называется подгруппа, порожденная всеми такими нормальными делителями B из G, что некоторый n-й коммутант группы B (n — натуральное число) содержится в A. Нормальный делитель A называется *радикальным*, если он совпадает со своим радикалом. Нормальный делитель P группы G называется *первичным*, если для любых подгрупп A, $B \subseteq G$ из $[A, B] \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ (ср. Д.6.2). При некоторых условиях радикальный нормальный делитель A группы G обладает однозначным минимальным разложением в пересечение первичных нормальных

делителей. Далеко идущее развитие этой теории, подсказанное новейшими исследованиями в теории ассоциативных колец, содержится в работе Курата [1].

Наконец, Цзе Бан-чжен [1] переносит на случай операторных групп теоремы о том, что расширение группы с условием минимальности (или максимальности) для подгрупп при помощи такой же группы само обладает этим свойством.

Группы с конечными классами сопряженных элементов. Эти группы, которые, следуя Бэру [40], называют теперь FC-группами, составляют класс групп, включающий в себя все конечные и все абелевы группы. В § 53 на основе леммы А. П. Дицмана показано, что периодические FC-группы — это локально нормальные группы и только они.

В работе Б. Неймана [12] установлены многие свойства FC-групп, в том числе следующие. *Периодическая часть* $P(G)$ FC-группы G (т. е. совокупность ее элементов конечного порядка) является (характеристической) подгруппой; эта подгруппа конечна, если группа G конечнопорожденная. Фактор-группа $G/P(G)$ абелева; поэтому FC-группа без кручения всегда абелева. Коммутант FC-группы G содержится в $P(G)$ и поэтому периодичен; периодична также фактор-группа FC-группы G по ее центру $Z(G)$. Новые доказательства этих результатов — в работе Эрдёша [1].

С. Н. Черников [26] показал, что непериодическая группа тогда и только тогда будет FC-группой, когда она является центральным расширением абелевой группы без кручения при помощи локально нормальной группы. Следующая теорема из указанной работы С. Н. Черникова обобщает поэтому основные свойства FC-групп: если непериодическая группа является центральным расширением абелевой группы при помощи любой локально конечной группы, то ее периодическая часть будет (характеристической) подгруппой, а фактор-группа по ней — абелева. Отметим, впрочем, что для свойства быть группой, периодическая часть которой является подгруппой, справедлива локальная теорема и что для того, чтобы $P(G)$ было подгруппой, достаточно периодичности коммутанта группы G (Б. Нейман [12]).

Отметим некоторые другие характеризации FC-групп. Нишигори [1] показал, что группа G тогда и только тогда является FC-группой, когда выполняется любое из следующих двух условий: 1) группа G содержит такую конечнопорожденную инвариантную FC-подгруппу N, что $G/P(N)$ есть FC-группа; 2) $P(G)$ содержит коммутант группы G и G обладает такой конечнопорожденной инвариантной FC-подгруппой N, что G/N есть FC-группа. В работе Я. Д. Половицкого [5] доказано, что группа тогда и только тогда будет FC-группой, если всякий ее элемент порождает нормальный делитель, являющийся или конечной группой, или расширением конечной группы при помощи бесконечной циклической группы.

Нишигори [1] доказал также, что для любой подгруппы H FC-группы G совокупность элементов, некоторая степень которых принадлежит к H, будет подгруппой в G. В работе Макдональда [1] показано, что FC-группа, порядки всех классов сопряженных элементов которой являются степенями данного простого числа p, локально нильпотентна и что всякая локально нильпотентная FC-группа обладает возрастающим центральным рядом, тип которого не превосходит первого бесконечного порядкового числа ω_0.

Вопрос о вложимости периодической FC-группы в прямое произведение конечных групп рассмотрен в Д.16.7.

Бэр [40] показал, что во всякой группе G совокупность ее *FC-элементов*, т. е. элементов, обладающих в G конечным числом сопряженных, является (характеристической) подгруппой. Это позволяет определить в G *верхний FC-ряд* — аналог верхнего центрального ряда — и, следовательно, ввести аналоги нильпотентных и обобщенных нильпотентных групп. С другой стороны, можно рассматривать нормальные ряды, факторы которых являются FC-группами, что приводит к аналогам разрешимых и обобщенных разрешимых групп. На эти *FC-нильпотентные* и *FC-разрешимые группы* в работах Хаймо [1], Дьюгида и Д. Маклейна [1], Д. Маклейна [3], Дьюгида [1], Нишигори [3], Пика [3, 4] обобщаются многие свойства нильпотентных и разрешимых групп.

Частные типы *FC*-групп. Б. Нейман [16, 18] рассмотрел те FC-группы, у которых порядки всех классов сопряженных элементов ограничены в совокупности, и показал, что класс этих групп, более узкий, чем класс всех FC-групп, совпадает с классом групп, коммутант которых конечен, а также с классом тех групп, всякая подгруппа которых имеет конечный индекс в некотором нормальном делителе группы. Связи порядка коммутанта с максимальным порядком k класса сопряженных элементов рассмотрел Уайголд [1]. Макдональд [1] показал, что если это число k имеет вид p^n, где p — простое число, то рассматриваемая группа нильпотентна тогда и только тогда, когда порядки всех классов сопряженных элементов являются делителями k.

Еще в работах Шура [2] и Бэра [32] было показано, что более узким, чем класс групп с конечным коммутантом, является класс групп, фактор-группа которых по центру конечна. Развитие этого результата — в работе Бэра [45]; см. также работу Строуда [1], в которой вместо коммутанта и центра группы рассматриваются ее вербальная и маргинальная подгруппы, порожденные некоторым словом, а вместо свойства быть конечной группой берутся некоторые другие свойства. Б. Нейман [18] доказал, что класс групп, фактор-группы которых по центру конечны, совпадает с классом групп, в которых конечны все классы сопряженных подгрупп, причем предположение, что порядки всех классов сопряженных подгрупп ограничены в совокупности, не приводит к дальнейшему сужению рассматриваемого класса групп; упрощение некоторых доказательств — в работе

Скотта [5]. Этот же класс групп мы получим, если предположим конечность лишь всех классов сопряженных абелевых подгрупп (И. И. Еремин [1]). См. также И. И. Еремин [3].

Более узким является класс групп, в которых конечны все классы изоморфных подгрупп. В работе Фукса [8] показано, что это будут те и только те группы, которые представимы как конечные центральные расширения подгрупп мультипликативной группы комплексных корней из единицы.

К числу периодических FC-групп принадлежат слойно конечные группы, как уже отмечалось в § 53. В работе С. Н. Черникова [25] они охарактеризованы как такие локально нормальные группы, все силовские подгруппы которых экстремальны. Дальнейшее развитие теории слойно конечных групп — в работах С. Н. Черникова [27] и И. И. Еремина [2].

Группа, в которой всякая подгруппа, отличная от E, имеет конечный индекс, будет, понятно, FC-группой. Ю. Г. Федоров [1] показал, однако, что существует единственная бесконечная группа с этим свойством, а именно бесконечная циклическая группа. Новое доказательство — в работе Эрдёша [1].

Группы с конечным числом классов сопряженных элементов. Группы с этим свойством изучаются в работах Ю. Н. Горчинского [1, 2]. В них получено одно обобщение доказанной в § 53 теоремы Хигмэна и Нейманов о вложимости всякой группы без кручения в группу с двумя классами сопряженных элементов. В качестве следствия выведено, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ существует группа мощности $\mathfrak{m}$, состоящая ровно из n классов сопряженных элементов. Множество всех неизоморфных счетных групп, состоящих ровно из n классов сопряженных элементов, $n \geqslant 3$, имеет мощность континуума. Порядки элементов любой периодической группы, состоящей из n классов сопряженных элементов, ограничены некоторым числом, зависящим только от n.

Финитно аппроксимируемые группы. Мы уже неоднократно встречались с такими группами (см. например, Д.9.2); иногда их называют также *резидуально* (или *остаточно*) *конечными*. Как вытекает из сказанного в Д.6.2, это будут подпрямые произведения конечных групп и только они.

В работе Грюнберга [2] установлен ряд свойств финитно аппроксимируемых групп, а также групп, аппроксимируемых конечными p-группами, где p — фиксированное простое число. Так, свободное произведение групп, обладающих первым (или вторым) из этих двух свойств, само обладает этим свойством. Первый из этих результатов можно вывести, впрочем, из работы А. И. Мальцева [2]; новое доказательство — в работе Макбета [1]. Стандартное дискретное сплетение $A \operatorname{wr} B$ тогда и только тогда финитно аппроксимируемо, если обе группы A, B обладают этим свойством и если, сверх того, или группа A абелева, или же группа B конечна. Для копечнопорожденных групп

аппроксимируемость нильпотентными группами (она изучалась в работе А. И. Мальцева [7]) равносильна аппроксимируемости конечными p-группами.

А. И. Мальцев [12] показал, что хотя класс финитно аппроксимируемых групп не замкнут относительно расширений, однако полупрямое произведение конечнопорожденного финитно аппроксимируемого нормального делителя на финитно аппроксимируемую подгруппу само финитно аппроксимируемо. В основном в этой работе финитная аппроксимируемость изучается в связи со следующим более сильным свойством: G есть *группа с финитно отделимыми подгруппами*, если для любой подгруппы $A \subset G$ и любого элемента $b \notin A$ существует такой гомоморфизм φ группы G на конечную группу, что $b\varphi \notin A\varphi$. Описаны абелевы и вообще разрешимые группы с финитно отделимыми подгруппами. В частности, таковы нётеровы разрешимые группы; финитную аппроксимируемость этих групп доказал Гирш [4, 6]. Наконец, для конечноопределенных групп с финитно отделимыми подгруппами положительно решается алгоритмическая проблема вхождения (см. Д.15.4).

Д. М. Смирнов [8] доказал, что нильпотентная группа тогда и только тогда будет группой с финитно отделимыми подгруппами, когда все ее фактор-группы финитно аппроксимируемы. Доказано также, что финитно аппроксимируемы голоморф конечнопорожденной финитно аппроксимируемой группы и группа всех автоморфизмов такой группы; последний из этих результатов получил и Баумслаг [14].

В работе Баумслага [15] рассматривается вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения $G = A *_C B$ групп A и B с объединенной подгруппой C. Так, если группы A и B нильпотентные, конечнопорожденные и без кручения, то при неабелевых A и B группа G может не быть финитно аппроксимируемой, но непременно будет расширением свободной группы при помощи финитно аппроксимируемой. Если группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппа C конечна, то и G будет финитно аппроксимируемой.

В работе Д. М. Смирнова и М. А. Тайцлина [1] изучаются связи финитной аппроксимируемости абелевых мультиоператорных групп со свойствами быть группой с финитно отделимыми Ω-подгруппами, удовлетворять условию максимальности для Ω-подгрупп или быть конечнопорожденной, а также с аналогичными свойствами для аддитивных групп этих Ω-групп.

§ Д.18. Силовские подгруппы; p-группы

Силовские p-подгруппы. Так как в общем случае силовские p-подгруппы не обязаны быть ни сопряженными, ни даже изоморфными (см. § 54), то представляют интерес те случаи, когда эта сопряженность или изоморфность могут быть доказаны. Так, Бэр [69] доказал, что в локально конечной группе с условием минимальности

для подгрупп все силовские p-подгруппы сопряжены между собой; частный случай этого результата — для экстремальных групп — в работе Бэра [55]. Число силовских p-подгрупп может при этом быть и бесконечным, т. е. этот результат нельзя вывести из общих теорем § 54.

В работе Р. И. Тышкевич [1] доказано, что если периодическая группа G является конечным расширением локально нильпотентной группы, то для любого p силовские p-подгруппы этой группы сопряжены между собой. См. также А. Е. Залесский [1].

В § 55 доказана теорема Бэра об изоморфизме силовских p-подгрупп локально нормальной группы, усиленная П. А. Гольбергом в том смысле, что этот изоморфизм будет даже локальной сопряженностью. Сопряженными силовские p-подгруппы локально нормальной группы будут только тогда, когда их число конечно (М. И. Каргаполов [2]; для счетных локально нормальных групп — Бэр [25]).

Б. Нейман [24] показал, что теорема об изоморфизме силовских p-подгрупп легко обобщается со случая локально нормальных групп на любые FC-группы и даже на любые группы, у которых всякий элемент конечного порядка обладает конечным числом сопряженных. На первый из этих двух случаев обобщается и утверждение о локальной сопряженности силовских p-подгрупп, но на второй случай оно не может быть перенесено.

В работе Ковача, Б. Неймана и Де Вриса [1] строятся следующие примеры периодических разрешимых групп: группа, обладающая для данного p как счетными, так и континуальными силовскими p-подгруппами; группа мощности континуум, все силовские подгруппы которой счетны; счетная группа, обладающая континуальным множеством неизоморфных силовских p-подгрупп (см. также И. Д. Иванюта [1], где дано полное обозрение силовских p-подгрупп счетной симметрической группы — существование в этой группе неизоморфных силовских p-подгрупп отмечено уже в § 54); группа, обладающая недополняемой (см. Д.13.2) силовской p-подгруппой (см. также М. И. Каргаполов [5]; напомним (см. Д.13.4), что в конечной разрешимой группе все силовские p-подгруппы дополняемы).

А. П. Дицман [9] продолжает начатое в его работах [6, 7] построение теории, обобщающей (на теоретико-групповом языке) теорему о силовских подгруппах нульмерных топологических групп из работы А. Г. Куроша [15].

Может оказаться интересным изучение групп, силовские подгруппы которых обладают некоторыми заданными свойствами. О группах с конечными силовскими p-подгруппами см. в обзоре С. Н. Черникова [28]. Н. Ф. Сесекин и А. И. Старостин [1] изучают локально конечные группы, силовские p-подгруппы которых по всем p локально циклични (т. е. или конечные циклические или группы типа p^∞). Группа тогда и только тогда обладает этим свойством, если она разлагается в полупрямое произведение двух периодических локально циклических

групп, порядки элементов которых взаимно просты, причем один из множителей является коммутантом группы.

В работе Шенкмана [3] вводится следующее обобщение понятия p-группы и связанное с ним обобщение понятия силовской p-подгруппы: группа G называется (p, ∞)-*группой*, если все ее элементы конечного порядка имеют своими порядками степени числа p и если G порождается этими элементами.

Было бы интересно рассмотреть возможности перенесения понятия силовской p-подгруппы и теорем Силова в теорию операторных и мультиоператорных групп. В этом направлении идет работа Эйюб [3], примыкающая к работам этого же автора [1, 2]. Объектом изучения являются группы с фиксированной системой операторов, причем во всякой группе фиксирована некоторая полная структура допустимых подгрупп; лишь эти подгруппы могут рассматриваться. Строится теория нормальных и композиционных рядов. В качестве аналога (конечной) p-группы рассматриваются группы, обладающие композиционным рядом, все факторы которого изоморфны (в смысле операторов и фиксированной структуры подгрупп) одной и той же группе F. Это позволяет определить понятие силовской F-подгруппы; при некоторых условиях доказывается теорема о сопряженности этих подгрупп.

Силовские Π-подгруппы. С. Н. Черников [24] показал, что теорема Шура из § 60 может быть обобщена на локально нормальные группы. Этому результату можно придать, понятно, следующую формулировку: инвариантная силовская Π-подгруппа локально нормальной группы дополняема. На случай любых локально конечных групп эта теорема не может быть перенесена (М. И. Каргаполов [5]). В работах Б. В. Казачкова [4, 5] теорема Шура следующим образом переносится на счетные локально конечные группы: если счетная локально конечная группа G обладает инвариантной силовской Π-подгруппой N, причем или N, или G/N локально нормально и локально разрешимо, то N дополняемо в G и все дополнения локально сопряжены.

Относительно сопряженности силовских Π-подгрупп справедлива следующая теорема (Б. И. Плоткин [14], Б. В. Казачков [6]), обобщающая теорему из работы А. П. Дицмана, А. Г. Куроша и А. И. Узкова [1] (см. § 54): если во всех конечных подгруппах всех фактор-групп группы G силовские Π-подгруппы (для данного Π) сопряжены и если G обладает конечным классом сопряженных силовских Π-подгрупп, то все силовские Π-подгруппы группы G сопряжены между собой.

В теории конечных групп Π-подгруппа H группы G называется *холловской* Π-*подгруппой* (ввиду основополагающих работ Ф. Холла [1, 4, 13]), если индекс H в G не делится ни на одно $p \in \Pi$; это равносильно утверждению, что для всех $p \in \Pi$ всякая силовская p-подгруппа группы H будет силовской p-подгруппой и в G. В этой последней форме определение холловской Π-подгруппы переносится и на бесконечные группы. Всякая холловская Π-подгруппа конечной группы будет,

понятно, силовской П-подгруппой, но не обратно. Для бесконечных групп вопрос открыт; впрочем, инвариантная силовская П-подгруппа всегда является холловской.

Виланд [4] доказал, что если конечная группа G обладает нильпотентной холловской П-подгруппой H, то всякая П-подгруппа группы G содержится в подгруппе, сопряженной с H, а поэтому все холловские П-подгруппы группы G сопряжены между собой; обобщения этой теоремы, также для конечных групп, — в работах Цаппа [7] и Виланда [7]. П. А. Гольберг [6] следующим образом перенес эту теорему на произвольные группы: если группа G обладает холловской П-подгруппой H, являющейся S-группой (см. § 64) и имеющей конечное число сопряженных подгрупп, то всякая П-подгруппа группы G содержится в подгруппе, сопряженной с H, а поэтому все холловские П-подгруппы группы G сопряжены между собой. Одно обобщение теоремы Виланда на периодические группы, являющиеся конечными расширениями локально нильпотентных групп, — в работе Р. И. Тышкевич [1].

Бэр [48] назвал элементы a и b группы G *n-перестановочными* (n — фиксированное целое число), если

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad (ba)^n = b^n a^n;$$

случаи $n = -1$ и $n = 2$ соответствуют обычной перестановочности элементов a и b. Элементы группы G, n-перестановочные со всеми элементами группы, составляют характеристическую подгруппу — *n-центр* группы G. Это позволяет определить понятия *n-абелевой*, *n-нильпотентной* и *n-разрешимой* группы. Результаты Бэра об этих группах, относящиеся к конечному случаю, обобщаются в работе Г. А. Карасева [1]. Изучаются, в частности, холловские подгруппы локально нормальных n-разрешимых групп. Упомянем в этой связи работы Грюна [6, 9], в которых для элементов a и b группы G их *n-коммутатором* называется элемент $(ab)^{-n}a^n b^n$ и на основе этого обобщается понятие нижнего центрального ряда группы. [См. ДК.]

Силовские и холловские базы. Определение силовской базы, данное в § 60 для конечных групп, переносится на случай произвольных групп. Бэр [25] доказал, что если группа G содержит полную силовскую базу, обладающую конечным числом сопряженных, то все полные силовские базы группы G сопряжены между собой. В работах П. А. Гольберга [4, 5] дано несколько обобщений этой теоремы, в том числе относящихся к силовским П-базам; при этом указанная теорема Бэра объединяется с теоремой о силовских p-подгруппах из работы А. П. Дицмана, А. Г. Куроша и А. И. Узкова [1].

Вопросу существования силовских баз посвящена работа П. А. Гольберга [8]. Группа называется П-*отделимой* (ср. § 60), если обладает таким возрастающим нормальным рядом, что в порядки всех элементов конечного порядка любого фактора этого ряда входит не больше одного простого числа из П. Если группа G

Π-отделима и является ΠFS-*группой*, т. е. для всякого $p \in \Pi$ содержит лишь конечное число силовских p-подгрупп, то она обладает силовскими Π-базами; эти базы могут, впрочем, не быть сопряженными. А. И. Старостин и М. И. Эйдинов [1] перенесли эту теорему на Π-отделимые группы, обладающие локальной системой из инвариантных ΠFS-подгрупп. Одновременно показано, что при этом подгруппы, входящие в одну и ту же силовскую Π-базу, перестановочны. См. также М. И. Каргаполов [1, 11].

В работах П. А. Гольберга [9, 10] понятие силовской Π-базы обобщается следующим образом. Пусть Θ есть система попарно непересекающихся множеств простых чисел,

$$\Theta = (\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \ldots).$$

Система подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$ группы G называется *холловской* Θ-*базой* этой группы, если H_k есть холловская Π_k-подгруппа группы G, $k = 1, 2, \ldots$, и если для любого конечного набора индексов $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ подгруппа $\{H_{k_1}, H_{k_2}, \ldots, H_{k_s}\}$ периодична, причем порядки ее элементов делятся лишь на простые числа из объединения $\Pi_{k_1} \cup \Pi_{k_2} \cup \ldots \cup \Pi_{k_s}$. Холловская Θ-база называется *полной*, если составляющие ее подгруппы вместе порождают всю группу G.

В указанных работах П. А. Гольберга изучаются холловские базы конечных групп. Показано также, что для локально нормальной группы G вопросы существования холловских Θ-баз, их локальной сопряженности и обозрения холловских Θ-баз подгрупп сводятся на соответствующие вопросы для конечных нормальных делителей группы G. Наконец, если произвольная группа G обладает полной холловской Θ-базой, состоящей из периодических S-групп (см. § 64) и имеющей конечное число сопряженных, то любые две холловские Θ-базы этой группы сопряжены, а для любой подгруппы $A \subseteq G$ ее холловские Θ-базы исчерпываются пересечениями A с некоторыми холловскими Θ-базами группы G. Перенесение этих результатов на периодические группы, обладающие локальной системой из инвариантных ΠFS-подгрупп, — в работе А. И. Старостина и М. И. Эйдинова [2].

Регулярные p-группы. Изучение p-групп идет обычно в рамках теории нильпотентных или обобщенных нильпотентных групп. Сейчас мы ограничимся рассмотрением одного класса p-групп, близкого к примарным по p абелевым группам. Это регулярные p-группы, введенные (в теории конечных групп) Ф. Холлом [2]. В рамках общей теории их изучал Ш. С. Кемхадзе [1, 2, 3, 4] при условии, что в рассматриваемых группах всякая подгруппа с двумя образующими конечна; ввиду результата Е. С. Голода [1] это шире, чем предположение о локальной конечности группы.

При указанном условии *регулярная p-группа* может быть определена как p-группа G, для любых элементов a, b которой в коммутанте

подгруппы $\{a, b\}$ может быть найден такой элемент s, что

$$(ab)^p = a^p b^p s^p.$$

При том же условии доказано, что регулярная p-группа коммутативна. При некоторых дополнительных условиях на регулярные p-группы обобщаются обе теоремы Прюфера из § 24; роль разложения в прямую сумму циклических групп играет здесь *база единственности*, т. е. такая упорядоченная система элементов B, что всякий элемент группы обладает однозначно определенной записью в виде произведения степеней элементов из B, расположенных в порядке возрастания. См. также работу Ш. С. Кемхадзе [5].

§ Д.19. Группы без кручения. Полные группы. Покрытия

П-полные группы, ПR- и ПD-группы. Изучение групп без кручения и, в частности, введенных П. Г. Конторовичем [5] R-групп, т. е. групп с однозначным извлечением корня (см. § 66), а также изучение полных групп (см. § 65) и пополнений групп (см. § 67) — это различные стороны единой теории. Целесообразно при этом следующее обобщение (см. Черников [13], Лазар [1]): фиксируется множество простых чисел П; группа G называется *группой без* П-*кручения*, если для всякого $a \in G$ и всякого натурального n, все простые делители которого входят в П, из $a^n = 1$ следует $a = 1$; группа G называется П-*полной*, если при тех же условиях на n для всякого $a \in G$ уравнение $x^n = a$ обладает в G решением. М. И. Эйдинов [1, 3] изучает группы без П-кручения и, в частности, переносит некоторые свойства R-групп на ПR-*группы*, т. е. группы, в которых (при тех же условиях на n) из $a^n = b^n$ следует $a = b$.

Развернутую теорию П-полных групп и ПR-групп строит Баумслаг [6]. Особое внимание обращается при этом на группы, принадлежащие к пересечению этих двух классов; назовем их ПD-*группами*. Периодическая группа тогда и только тогда будет ПD-группой, когда она без П-кручения, т. е. когда в порядки ее элементов не входят простые числа из П.

Свободное произведение ПR-групп является ПR-группой. 2-е разрешимое произведение (см. Д.11.4) П-полных групп является П-полной группой; такое же произведение ПR-групп A_α, $\alpha \in I$, тогда и только тогда будет ПR-группой, когда взаимный коммутант подгрупп A_α есть группа без П-кручения. Дискретное сплетение (см. Д.12.3) ПR-группы при помощи ПR-группы будет ПR-группой. Расширение П-полной группы (или ПR-группы, или ПD-группы) при помощи группы с таким же свойством может этим свойством уже не обладать, однако при центральных расширениях каждое из этих трех свойств сохраняется.

Свободные ΠD-группы. В ΠD-группе G для всякого элемента a и всякого $p \in \Pi$ существует однозначно определенный корень степени p, т. е. решение уравнения $x^p = a$; обозначим его через $a\omega_p$. Отображения ω_p, $p \in \Pi$, будут в группе G унарными мультиоператорами (см. § Д.4), но не обязательно операторами в обычном смысле, так как закон дистрибутивности $(ab)\omega_p = a\omega_p \cdot b\omega_p$ в общем случае не выполняется. Обозначим эту систему унарных мультиоператоров через Ω_Π.

Для ΠD-группы, рассматриваемой как мультиоператорная Ω_Π-группа, сохраним мультипликативную запись групповой операции; о понятиях Ω_Π-подгруппы, идеала, системы Ω_Π-образующих см. § Д.4. Заметим, что если Π состоит из всех простых чисел, то Ω_Π-подгруппы совпадают с изолированными подгруппами.

Баумслаг [6] заметил, что класс всех ΠD-групп, рассматриваемых с указанной системой мультиоператоров, будет многообразием Ω_Π-групп, определяемым тождествами

$$(x\omega_p)^p = x, \quad x^p\omega_p = x, \quad p \in \Pi.$$

Можно говорить, следовательно, о *свободных* ΠD*-группах* с системой X свободных Ω_Π-образующих. Укажем некоторые свойства этих групп; через Γ_Π будем при этом обозначать аддитивную группу тех рациональных чисел, знаменатели несократимых записей которых могут делиться лишь на простые числа из Π.

Ω_Π*-ранг* свободной ΠD-группы F, т. е. мощность системы свободных Ω_Π-образующих, является инвариантом этой группы. Фактор-группа F по идеалу, порожденному коммутантом, изоморфна прямому произведению групп, изоморфных Γ_Π, причем число сомножителей равно Ω_Π-рангу группы F. Свободная ΠD-группа конечного Ω_Π-ранга счетна: мощность свободной ΠD-группы бесконечного Ω_Π-ранга $\mathfrak{m}$ равна $\mathfrak{m}$.

При непустом множестве Π всякая свободная ΠD-группая является R-группой. Центр неабелевой свободной ΠD-группы тривиален.

Эпиморфный образ ΠD-группы (как группы, а не как Ω_Π-группы) будет, понятно, Π-полной группой, хотя однозначность извлечения корня может утеряться. Всякая Π-полная группа является эпиморфным образом некоторой свободной ΠD-группы. Описываются, в частности, фактор-группы свободных ΠD-групп по их коммутантам; заметим, что коммутант неабелевой свободной ΠD-группы не является Ω_Π-подгруппой. В работе Баумслага [10] показано, что всякая нильпотентная Π-полная группа будет эпиморфным образом некоторой нильпотентной ΠD-группы. Для локально нильпотентных групп аналогичная теорема не может быть доказана.

Баумслаг [6] вводит также группы, которые мы назовем, унифицируя обозначения, ΠP-группами: ΠR-группа G называется ΠP*-группой*, если для всякого элемента $a \in G$, не имеющего в G корня p-й степени, степени этого элемента не сопряжены друг с другом, а централизатор

a в G совпадает с централизаторами всех его степеней a^n, $n \neq 0$, и изоморфен подгруппе группы Γ_Π. Все ΠD-группы принадлежат к числу ΠP-групп, причем всякая ΠP-группа может быть вложена в некоторую ΠD-группу; заметим, что не всякая ΠR-группа может быть вложена в ΠD-группу (Баумслаг [3]). Свободное произведение ΠP-групп является ΠP-группой; в частности, все обычные свободные группы будут ΠP-группами.

ΠP-группы можно рассматривать как группы с частичными мультиоператорами из Ω_Π. Это позволяет обычным для теории универсальных алгебр способом определить понятие *свободного* Ω_Π-*замыкания* G^* данной ΠP-группы G: всякий гомоморфизм группы G в любую ΠD-группу H однозначно продолжается до гомоморфизма G^* в H. В частности, свободная ΠD-группа Ω_Π-ранга $\mathfrak{m}$ будет свободным Ω_Π-замыканием свободной группы ранга $\mathfrak{m}$. Можно определить и *свободное* ΠD-*произведение* данных ΠD-групп как свободное Ω_Π-замыкание свободного произведения этих групп. Всякая свободная ΠD-группа является свободным ΠD-произведением групп, изоморфных группе Γ_Π. Справедлив аналог теоремы Бэра–Леви: ΠD-группа не может одновременно разлагаться в свободное ΠD-произведение и в прямое произведение ΠD-групп.

Другие результаты о полных группах. Баумслаг [21] рассматривает *свободные D-группы*, т. е. свободные полные группы с однозначным извлечением корня любой степени (множество Π состоит из всех простых чисел). Эти группы аппроксимируются периодическими разрешимыми группами, а их конечнопорожденные подгруппы — конечными разрешимыми группами. В этих группах разрешима проблема тождества.

Уайголд [3] доказал, что полные R-группы (т. е. *D-группы*), в которых всякий элемент перестановочен со всеми своими сопряженными, совпадают с центральными расширениями полных абелевых групп без кручения при помощи таких же групп.

Солиан [1] изучает Π-полные группы с конечным множеством простых чисел Π. Некоторые результаты о полных группах — в работах Гика [1] и Хаймо [2]. Абелевы Π-полные группы и ΠD-группы изучаются в работе Хилтона и Яхья [1]. См. также Д.25.2.

Пополнения. В § 67 доказана теорема Б. Неймана о том, что всякую группу можно вложить в полную группу. Больше того, всякая группа вкладывается в простую полную группу, даже такую, в которой все элементы одного и того же порядка сопряжены (М. С. Цаленко [1]; см. также М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков и В. Н. Ремесленников [2]).

Ряд работ посвящен вопросу о существовании пополнений внутри некоторого данного класса групп. Новые доказательства теоремы А. И. Мальцева из § 67 о локально нильпотентных пополнениях локально нильпотентных групп без кручения — в работах Лазара [2] и А. Л. Шмелькина [2]. Во второй из этих работ доказано также,

что нильпотентные произведения полных групп полны и что пополнение n-го нильпотентного произведения локально нильпотентных групп без кручения является n-м нильпотентным произведением пополнений сомножителей. В работе Баумслага [17] показано, что в пополнении нильпотентной группы без кручения G выполняются все тождества, справедливые в самой группе G.

Укажем некоторые обобщения теоремы А. И. Мальцева. Объединяя эту теорему и результаты работы Конрада [2], относящейся к пополнениям метабелевых групп, М. И. Каргаполов [7] доказал, что если коммутант локально нильпотентной группы G есть группа без кручения, то G обладает таким локально нильпотентным пополнением G^*, что коммутант группы G^* также без кручения, а периодическая часть группы G^* служит пополнением для периодической части группы G; группа G^* определяется этими условиями однозначно с точностью до изоморфизма.

Другое обобщение — в работе М. И. Каргаполова [8]. Пусть Π — некоторое множество простых чисел, Π'— его дополнение в множестве всех простых чисел. Назовем группу G $\widetilde{\Pi}'$-*группой*, если все ее периодические подгруппы являются Π'-группами. Всякая локально нильпотентная $\widetilde{\Pi}'$-группа G содержится в локально нильпотентной Π-полной (см. п. 1) $\widetilde{\Pi}'$-группе G^*, причем минимальная группа G^* с этими свойствами определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Если Π' пусто, а Π содержит все простые числа, то эта теорема превращается в теорему А. И. Мальцева.

Наконец, Баумслаг [9] доказал, что любую локально нильпотентную группу G можно вложить в полную локально нильпотентную группу с тем же множеством простых делителей порядков элементов, что и у G. Теорему единственности в этом случае доказать уже нельзя. См. также Уайголд [7].

Теоремы о существовании пополнения справедливы и для некоторых других классов групп. Так, группы каждого из следующих классов обладают пополнениями, принадлежащими к этому же классу: разрешимые группы с данной длиной ряда коммутантов, RN-группы, RI-группы, локально разрешимые группы, локально конечные p-группы (М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков и В. Н. Ремесленников [1]). См. также Д.24.6.

Уравнения в группах. Понятия полноты и пополнения связаны с вопросом о разрешимости уравнений вида $x^k = a$. Можно ставить и более общий вопрос — о разрешимости в данной группе G или в некоторой ее надгруппе уравнений вида

$$a_1 x^{k_1} a_2 x^{k_2} \dots a_n x^{k_n} = 1, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ — целые числа. Легко указать, впрочем, уравнения, которые заведомо не могут иметь решений. Так, если в группе G взяты элементы a и b разных порядков,

то уравнение $ax^{-1}bx = 1$ не может быть решено ни в самой группе G, ни в какой-либо ее надгруппе.

Вопросом об условиях для разрешимости уравнения вида (1) начал заниматься Б. Нейман [7]. Некоторые достаточные условия указали Баумслаг [3] и Шик [2, 3]. Ф. Левин [1] доказал, что уравнение (1) при $k_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обладает решением в сплетении $G \operatorname{Wr}\{c\}$, где $c^k = 1$, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Всякая группа G может быть поэтому вложена в группу $\overline{G}$, в которой разрешимы все уравнения вида (1) с неотрицательными показателями k_i, причем для периодической группы G и группа $\overline{G}$ будет периодической.

Следует ожидать, что в этом случае (а также и для других типов уравнений, для которых всегда существуют решения) может быть построена теория по образцу той, которая изложена в п. 2 — нужно ограничиться при этом группами, в которых рассматриваемые уравнения однозначно разрешимы. При этом появятся n-арные мультиоператоры, а при некоторых дополнительных условиях на типы рассматриваемых уравнений изучаемые группы составят, возможно, многообразие мультиоператорных групп. [См. ДК.]

Изучаются в группах и системы уравнений от нескольких неизвестных. Ф. Левин [3] доказал следующую теорему о примитивном элементе: если в группе G задана система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и если она *совместна*, т. е. существует такая надгруппа $\overline{G} = \{G, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, что $x_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — решение нашей системы, то существует такая группа $\overline{\overline{G}} \supseteq \overline{G}$ и в ней такой элемент c, что $\overline{\overline{G}} = \{G, c\}$. Отсюда следует, что если все имеющиеся в группе G совместные системы m уравнений с одним неизвестным разрешимы в самой G, то в самой G будут разрешимы и все совместные системы m уравнений с любым числом неизвестных. См. также Скотт [1], Б. Нейман [13], Эрдеи [1]. [См. ДК.]

Покрытия. Назовем *покрытием* группы G всякую такую систему ее подгрупп, что теоретико-множественное объединение этих подгрупп совпадает с G. Покрытие *неприводимо*, если ни одна из подгрупп, его составляющих, не содержится в объединении остальных. Покрытие называется *расщеплением*, если любые две подгруппы из этого покрытия пересекаются по единице. Группа называется *вполне расщепляемой*, если она обладает расщеплением, состоящим из циклических или локально циклических подгрупп; среди групп без кручения — это R-группы и только они.

Изучение покрытий и расщеплений групп начато в работах П. Г. Конторовича [2–5, 7, 8]. Подробный обзор результатов, сюда примыкающих, в том числе и относящихся к конечным группам, можно найти в статье П. Г. Конторовича, А. С. Пекелис и А. И. Старостина [1]. Поэтому то, что будет сказано ниже, не претендует на полноту.

Не существует, очевидно, групп, обладающих неприводимым покрытием из двух подгрупп. Нециклическая абелева группа четвертого

порядка является единственной группой, обладающей неприводимым покрытием из трех подгрупп (Скорца [1]). Если из всякого элемента группы G извлекается корень k-й степени при $k < n$, то G не может иметь неприводимого покрытия из m подгрупп, $2 \leqslant m \leqslant n$ (Хейбер и Розенфилд [1]). Покрытия конечнопорожденных абелевых групп — в работе Розенфилда [1].

Ю. Ш. Гуревич [1] указывает некоторые условия для того, чтобы группа обладала покрытием из истинных характеристических подгрупп. Так, для периодических абелевых групп необходимым и достаточным условием служит неограниченность порядков элементов.

Наряду с покрытиями подгруппами можно рассматривать покрытия группы подмножествами с теми или иными дополнительными свойствами. Так, Б. Нейман [16] и Кон [1] рассматривают покрытия групп попарно перестановочными конечными подмножествами. В работе Б. Неймана [17] изучаются покрытия групп конечным числом смежных классов. Здесь же доказано, что коммутант группы G конечен, если G обладает конечным покрытием подгруппами с конечными коммутантами.

Расщепления. В работах А. И. Старостина [2], Кегеля [1] и В. М. Бусаркина и А. И. Старостина [1] изучаются локально конечные группы, обладающие нетривиальным расщеплением, причем те их этих групп, которые содержат отличный от E локально разрешимый нормальный делитель, по существу полностью описываются. Любые две силовские p-подгруппы локально конечной группы с нетривиальным расщеплением сопряжены (Кегель [1]).

Известна *теорема Фробениуса* о том, что если в *конечной* группе G имеется подгруппа A, совпадающая со своим нормализатором и пересекающаяся по единице со своими сопряженными подгруппами, отличными от нее самой, то дополнение в G к объединению всех подгрупп, сопряженных с A, составляет вместе с единицей нормальный делитель группы G. Эта теорема, являющаяся некоторым критерием непростоты конечной группы и в то же время утверждающая расщепляемость группы G, перенесена на локально конечные группы в работах Кегеля [1] и В. М. Бусаркина и А. И. Старостина [1], а Ю. М. Горчаков [7] обобщил ее на расширения локально нильпотентных групп при помощи локально конечных; при этом расширяемая локально нильпотентная группа должна быть Π-полной относительно множества Π всех простых делителей порядков элементов подгруппы A.

Отметим в этой связи работу О. Ю. Шмидта [9], в которой показано, что из справедливости теоремы Фробениуса для групп с условием минимальности можно было бы вывести локальную конечность p-групп с условием минимальности; для случая $p = 2$ это утверждение доказывается в работе непосредственно.

А. И. Старостин [1, 3] берет в локально конечной группе пересечение всех подгрупп, максимальных относительно свойства быть вполне расщепляемой (или свойства обладать расщеплением, составленным

из абелевых подгрупп, или же составленным из локально нильпотентных подгрупп), и показывает, что почти всегда это пересечение само будет локально циклическим (соответственно абелевым или локально нильпотентным). В работе А. И. Старостина [4] показано, что в локально конечной группе G централизаторы всех неединичных элементов тогда и только тогда обладают расщеплениями, составленными из локально нильпотентных подгрупп, когда или сама группа обладает таким расщеплением, или же все указанные централизаторы локально нильпотентны; группы с последним свойством полностью описываются.

Вполне расщепляемая группа тогда и только тогда обладает расщеплением, состоящим из перестановочных между собою локально циклических подгрупп, когда она абелева, причем или примарная с элементами порядка p, или же без кручения (В. М. Бусаркин [1]).

Пусть Π — некоторое множество простых чисел, Π' — его дополнение в множестве всех простых чисел. М. И. Эйдинов [3] называет группу *вполне* Π-*расщепляемой*, если она обладает покрытием, состоящим из локально циклических подгрупп, причем пересечение любых двух этих подгрупп является Π'-группой. Вполне Π-расщепляемые группы без Π-кручения являются ΠR-группами (см. п. 1), но не обратно (при непустом Π'). Указываются связанные с этим понятием характеризации ΠR-групп среди групп без Π-кручения и ΠD-групп среди ΠR-групп.

§ Д.20. Радикалы

Радикалы в классе всех групп. Пусть в классе всех (абстрактных) групп выделены такие два подкласса, R и S, что всякая группа G содержит однозначно определенную инвариантную подгруппу $\mathfrak{R}(G)$ (она будет даже характеристической), которая является R-группой, а фактор-группа по ней — S-группой. Ясно, что тогда изучение всех групп сводится в некотором смысле на изучение R- и S-групп и на теорию расширений.

В теории колец и алгебр аналогичные объекты называются радикалами. Аксиоматическое определение радикалов для этого случая дано в работе А. Г. Куроша [18] (см. также Амицур [1]), причем было отмечено, что построенная теория переносится на случай групп и вообще любых алгебраических систем, для которых имеет смысл понятие ядра гомоморфизма; она переносится, следовательно, и на случай мультиоператорных групп.

В цикле работ А. Г. Куроша [22], К. К. Щукина [6], Чан Ван Хао [1] и А. Л. Шмелькина [3] теория развивается в рамках теории групп, причем при исходном предположении, что класс R замкнут относительно эпиморфных образов. При этом пара классов $\mathfrak{R} = (R, S)$ с указанными выше свойствами называется *радикалом* в классе групп; класс R назван *радикальным классом* радикала $\mathfrak{R}$, класс S — *полупростым классом*; подгруппа $\mathfrak{R}(G)$ есть $\mathfrak{R}$-*радикал* группы G. Заметим, что $\mathfrak{R}(G)$ характеризуется как такая инвариантная

R-подгруппа группы G, которая содержит всякую другую инвариантную R-подгруппу этой группы.

Классы R и S однозначно определяют друг друга: группа G тогда и только тогда $\mathfrak{R}$-полупроста, если она не содержит неединичных инвариантных R-подгрупп (т. е. $\mathfrak{R}(G) = E$); группа G тогда и только тогда $\mathfrak{R}$-радикальна, если она не отображается гомоморфно на неединичную S-группу.

В работах А. Г. Куроша [22] и К. К. Щукина [6] указан ряд характеризаций класса R как радикального класса некоторого радикала $\mathfrak{R}$. Так, класс групп R тогда и только тогда радикален, если он замкнут относительно эпиморфных образов и, сверх того, обладает хотя бы одним из следующих свойств: (1) всякая группа, любой неединичный эпиморфный образ которой обладает неединичной инвариантной R-подгруппой, есть R-группа; (2) всякая группа, обладающая возрастающим инвариантным рядом с R-факторами, есть R-группа.

С другой стороны, класс R тогда и только тогда радикален, когда: а) он замкнут относительно эпиморфных образов, в) во всякой группе произведение инвариантных R-подгрупп является R-группой и с) расширение R-группы при помощи R-группы является R-группой. Заметим также, что всякий радикальный класс замкнут относительно прямых произведений.

Ряд характеризаций класса S как полупростого класса некоторого радикала $\mathfrak{R}$ указан в работах А. Г. Куроша [22] и Чан Ван Хао [1]. Так, класс групп S тогда и только тогда полупрост, когда он замкнут относительно нормальных делителей и, сверх того, обладает хотя бы одним из следующих свойств: (1′) всякая группа, любой неединичный нормальный делитель которой гомоморфно отображается на неединичную S-группу, сама является S-группой; (2′) всякая группа, обладающая убывающим нормальным (или инвариантным) рядом с S-факторами, сама будет S-группой.

С другой стороны, класс S тогда и только тогда полупрост, когда: а′) он замкнут относительно нормальных делителей, в′) замкнут относительно подпрямых произведений (т. е. группа, аппроксимируемая S-группами, есть S-группа) и с′) замкнут относительно расширений. Заметим также, что всякий полупростой класс замкнут относительно свободных произведений (А. Л. Шмелькин [3]).

Доказано, что $\mathfrak{R}$-радикал $\mathfrak{R}(G)$ произвольной группы G совпадает с пересечением всех тех нормальных делителей этой группы, фактор-группы по которым $\mathfrak{R}$-полупросты (А. Г. Курош [22]), а также совпадает с подгруппой, порожденной в G всеми достижимыми R-подгруппами (К. К. Щукин [6]).

В работе А. Г. Куроша [22] радикал $\mathfrak{R}$ назван *строгим*, если $\mathfrak{R}$-радикал всякой группы G содержит все ее $\mathfrak{R}$-радикальные подгруппы. Класс различных строгих радикалов в классе групп не является множеством (М. С. Цаленко [3]). Отметим в этой связи следующий результат Бэра [72]. Если дан класс групп K, то для любой группы

G обозначим через $K(G)$ подгруппу группы G, порожденную всеми ее K-подгруппами. Класс K будет или состоять только из одной группы E, или же совпадать с классом всех групп, если он обладает следующими тремя свойствами: а) он замкнут относительно эпиморфных образов; б) $K(G)$ является K-подгруппой для любой группы G; в) при всяком эпиморфизме $\sigma\colon G \to G'$ подгруппа $K(G)$ отображается на $K(G')$.

Следующие пункты покажут, что между свойствами радикальных и полупростых классов групп существует довольно далеко идущая двойственность. Теоретико-категорные основы этой двойственности исследовал А. Х. Лившиц [7].

Минимальный радикальный класс над данным классом групп. Пусть дан класс групп M, замкнутый относительно эпиморфных образов. Минимальный радикальный класс $R_0(M)$ над классом M состоит из тех и только тех групп G, которые обладают таким возрастающим нормальным рядом

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots \subset A_\mu = G$$

с M-факторами, что все его члены достижимы по этому ряду, т. е. для всякого α, $0 \leqslant \alpha < \mu$, можно указать такое целое $n \geqslant 0$ и такие $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что $\alpha < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \mu$ и ряд

$$A_\alpha \subset A_{\beta_1} \subset A_{\beta_2} \subset \ldots \subset A_{\beta_n} \subset A_\mu = G$$

нормален (А. Г. Курош [22]).

Радикальный класс $R_0(M)$ допускает и другие характеризации. Так, группа G тогда и только тогда является $R_0(M)$-группой, когда во всяком ее неединичном эпиморфном образе содержится неединичная достижимая M-подгруппа (К. К. Щукин [6]). С другой стороны (см. А. Г. Курош [22]), группа G тогда и только тогда будет $R_0(M)$-группой, когда она обладает некоторой *ступенью* над M, причем группы из M считаются группами 1-й ступени над M, а группа G имеет ступень β над M, где β — порядковое число, если всякий ее неединичный эпиморфный образ содержит неединичный нормальный делитель, являющийся группой некоторой α-й ступени, $\alpha < \beta$ (иными словами, если G обладает возрастающим инвариантным рядом, все факторы которого являются группами некоторых α-х ступеней, $\alpha < \beta$). Как показал К. К. Щукин [6], всякая группа, обладающая ступенью над M, имеет уже ω_0-ю ступень, где ω_0 — первое бесконечное порядковое число. Отметим, что группы 2-й ступени над M — это в точности группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с M-факторами.

Радикальным будет и класс $R(M)$ всех групп, обладающих возрастающим нормальным рядом с M-факторами. К. К. Щукин [6] показал, что группа G тогда и только тогда будет $R(M)$-группой, когда во всяком ее неединичном эпиморфном образе содержится неединичная субинвариантная M-подгруппа.

Минимальный полупростой класс над данным классом групп. Пусть дан класс групп N, замкнутый относительно нормальных делителей и, следовательно, относительно достижимых подгрупп. Минимальный полупростой класс $S_0(N)$ над классом N состоит из тех и только тех групп, которые обладают убывающим нормальным рядом с N-факторами. С другой стороны, группа G тогда и только тогда будет $S_0(N)$-группой, когда всякий ее неединичный нормальный делитель гомоморфно отображается на неединичную N-группу (А. Г. Курош [22]).

Чан Ван Хао [1] охарактеризовал $S_0(N)$-группы как группы, обладающие некоторой ступенью над N. При этом группы из N считаются группами 1-й ступени над N, а группа G будет группой β-й ступени, если она обладает убывающим инвариантным рядом, все факторы которого являются группами некоторых α-х ступеней, $\alpha < \beta$. Оказалось, что ступень всякой $S_0(N)$-группы не больше трех.

Полупростым будет и класс $S(N)$ групп, обладающих нормальной системой с N-факторами. Чан Ван Хао [1] ввел следующие промежуточные полупростые классы. Класс $S'(N)$ состоит из групп, принадлежащих к некоторому *слою* над N, причем первый слой составляет сам класс N, а группа G принадлежит к β-му слою, если она обладает инвариантной системой, все факторы которой являются группами некоторых α-х слоев, $\alpha < \beta$. Класс $S_d(N)$ состоит из групп, обладающих такой нормальной системой с N-факторами, что все ее члены достижимы по этой системе из самой группы (ср. п. 2). Имеют место включения

$$S_0(N) \subseteq S'(N) \subseteq S_d(N) \subseteq S(N),$$

причем для некоторых N крайние включения могут быть строгими; вопрос о среднем включении пока открыт.

Некоторые примеры. Многие классы групп, встречающиеся в литературе, оказываются радикальными или полупростыми классами, связанными со специально подобранным классом M или N. Так, беря в качестве M или N класс $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп, мы получим некоторые классы обобщенных разрешимых групп, уже рассматривавшиеся в § 57. Именно, радикальный класс $R(\mathfrak{A})$ — это класс RN^*-групп. В работе А. Г. Куроша [22] показано, что этот класс строго шире минимального радикального класса $R_0(\mathfrak{A})$ над классом абелевых групп. В свою очередь, последний, как показал Чан Ван Хао [2], строго шире класса RI^*-групп, т. е. класса групп 2-й ступени над $\mathfrak{A}$. Заметим, что сам класс $R_0(\mathfrak{A})$ в литературе также уже рассматривался (см. Бэр [56]).

С другой стороны, минимальным полупростым классом $S_0(\mathfrak{A})$ над классом абелевых групп служит класс RK-групп, а полупростым классом $S(\mathfrak{A})$ будет класс RN-групп. Класс RN-групп строго шире полупростого класса $S_d(\mathfrak{A})$, а полупростой класс $S'(\mathfrak{A})$ строго шире класса RK-групп. Наконец, класс RI-групп, совпадающий с классом групп

2-го слоя над классом абелевых групп, является истинным подклассом класса $S'(\mathfrak{A})$.

Беря в качестве M или N класс всех конечных групп, мы получим некоторые радикальные и полупростые классы, также уже встречавшиеся в литературе (см., например, Шпехт [3] или Д.16.5). Отметим, что финитно аппроксимируемые группы составляют истинный подкласс минимального полупростого класса над классом конечных групп, так как этот подкласс не замкнут относительно расширений (см. Д.17.9).

Класс периодических групп с ограниченными в совокупности порядками элементов, взятый в качестве N, определяет минимальный полупростой класс, соответствующий которому радикальный класс есть класс групп, полных в смысле С. Н. Черникова (см. § 65).

Возьмем теперь в качестве M класс всех локально нильпотентных групп. В этом случае радикальные классы $R(M)$ и $R_0(M)$ и класс групп 2-й ступени над M совпадают между собой. Группы этого класса введены и изучаются в работах Б. И. Плоткина [8, 10] (см. также обзор Б. И. Плоткина [12] и Д.23.3). Назовем их *радикальными в смысле Плоткина*; соответственно будем говорить о *радикале Плоткина*. Этот класс групп может рассматриваться как еще один класс обобщенных разрешимых групп. Он содержит в себе класс RN^*-групп, но шире последнего: М. И. Каргаполов [11] показал, что существует локально конечная p-группа (она будет, понятно, локально нильпотентной, а поэтому и радикальной в смысле Плоткина), не являющаяся RN^*-группой. Впрочем, счетные группы рассматриваемых двух классов будут совпадать.

Пусть, наконец, M будет класс всех p-групп, взятых для всех простых p. Работа М. И. Эйдинова [2] содержит результаты, относящиеся к вопросу, будет ли совпадать радикальный класс $R(M)$, построенный для этого M, с пересечением радикальных классов $R(M_p)$, взятых для всех p, где класс M_p (для данного p) состоит из всех p-групп и всех Π_p-групп, а Π_p есть множество всех простых чисел, отличных от p. [См ДК.]

Радикалы в данном классе групп. Теорию, изложенную в пп. 1–3, можно строить не в классе всех групп, а в любом классе групп, замкнутом относительно эпиморфных образов и нормальных делителей. Таковы, например, классы всех абелевых групп и всех конечных групп; полное обозрение радикалов в этих классах пока не получено.

В классе всех периодических абелевых групп радикалы задаются всевозможными разбиениями (Π_1, Π_2, Π_3) множества всех простых чисел на три попарно непересекающихся подмножества (некоторые из которых могут быть и пустыми) с заданной нумерацией этих классов (А. Г. Курош [22]). В частности, в классе абелевых p-примарных групп существует единственный нетривиальный радикал: радикальны все полные группы, полупросты все редуцированные группы.

Отметим работу С. Диксона [1], повторяющую эти результаты и несколько дальше продвигающую изучение радикальных классов в классе всех абелевых групп. [См. ДК.]

В классе всех конечных групп существуют подклассы, являющиеся в этом классе одновременно радикальными и полупростыми классами. Таковы, например, класс конечных разрешимых групп и классы Π-отделимых групп (см. § 60). Обозрение всех таких подклассов — в указанной выше работе А. Г. Куроша.

В. И. Ушаков [2] по образцу радикала Плоткина (см. п. 4) строит радикал в классе R^*-групп, беря в качестве M класс полных локально нильпотентных групп без кручения. При этом, следуя П. Г. Конторовичу, группу без кручения называют *R^*-группой*, если все ее фактор-группы без кручения являются R-группами (см. § 66).

К. К. Щукин [3] строит локально разрешимый радикал в классе тех групп, коммутант всякой конечнопорожденной подгруппы которых сам конечнопорожден.

Другие подходы к понятию радикала. Вернемся к рассмотрению радикала Плоткина. Б. И. Плоткин [5] и позже независимо Гирш [8] доказали, что в любой группе G произведение двух локально нильпотентных нормальных делителей будет локально нильпотентным нормальным делителем, а поэтому в G существует однозначно определенный максимальный локально нильпотентный нормальный делитель; обозначим его через $PH(G)$. Одно обобщение этой теоремы — в работе Ф. Холла [15]. Радикал Плоткина группы G совпадает с объединением следующей возрастающей цепи характеристических подгрупп:

$$A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots,$$

где $A_1 = PH(G)$ и для всех α

$$A_{\alpha+1}/A_\alpha = PH(G/A_\alpha),$$

а на предельных местах, как всегда, стоят объединения предшествующих подгрупп.

Иногда сама подгруппа $PH(G)$ называется *локально нильпотентным радикалом* группы G. Аналогично П. А. Гольберг [8] доказывает, что во всякой группе G существует однозначно определенная максимальная инвариантная периодическая S-подгруппа (см. § 64) и называет ее (*периодическим*) *S-радикалом* группы G. Общая схема этих построений — в обзоре Б. И. Плоткина [12]; см. также Б. И. Плоткин [17], Б. И. Плоткин и Ш. С. Кемхадзе [1].

С другой стороны, К. К. Щукин [4] называет нормальный делитель A группы G *первичным*, если фактор-группа G/A первична (см. Д.6.2), и определяет *RI^*-радикал* группы G как пересечение всех первичных нормальных делителей этой группы. При этом совпадают со своим RI^*-радикалом RI^*-группы и только они; RI^*-радикал, равный E, имеют подпрямые произведения первичных групп и только они (см. также Мурата [1]). Так как, как отмечено в п. 4, класс RI^*-групп не является

радикальным в смысле п. 1, то RI^*-радикал не вкладывается в схему, изложенную в п. 1.

§ Д.21. Свойства классов групп

Общие замечания. Если для групп данного класса K доказана некоторая теорема и если анализ доказательства показывает, что в нем использованы лишь некоторые определенные свойства этого класса, то наша теорема автоматически будет справедливой для всех классов групп, обладающих этими же свойствами. Это соображение подсказывает целесообразность общего рассмотрения свойств, которыми могут обладать (или не обладать) те или иные классы групп.

Говоря о классах групп, мы будем предполагать их непустыми и абстрактными; при этом класс K называется *абстрактным*, если всякая группа, изоморфная K-группе, сама является K-группой. Ясно, что это понятие слишком общее — всякая теоретико-групповая теорема по существу утверждает, что один класс групп содержится в другом классе. Однако всегда представляют интерес случаи, когда некоторые классы групп, определяемые «конструктивно», могут быть охарактеризованы «аксиоматически», т. е. указанием некоторых их свойств. Напомним описание многообразий групп, даваемое теоремой Биркгофа (Д.10.1), а также характеризации радикальных и полупростых классов групп из Д.20.1.

Было бы невозможно перечислить все случаи такого подхода к изучению групп. Особенно часто встречается он в работах Бэра (его работа [62], относящаяся к конечным группам, в некотором смысле является программной) и Ф. Холла (см., например, [19]); см. также книгу Шпехта [2] и обзор Б. И. Плоткина [12].

Простейшие свойства. Укажем некоторые из наиболее употребительных свойств абстрактного класса групп K:

(1) Замкнутость относительно эпиморфных образов.

(2) Замкнутость относительно подгрупп.

(3) Замкнутость относительно нормальных делителей, а поэтому и относительно достижимых подгрупп.

(4) Замкнутость относительно расширений.

(5) Замкнутость относительно групп, обладающих возрастающим нормальным рядом, факторы которого являются K-группами.

(6) Справедливость локальной теоремы, т. е. замкнутость относительно групп, обладающих локальной системой из K-подгрупп.

(7) Замкнутость относительно подпрямых произведений.

Этот список можно было бы продолжать неограниченно. Так, мы уже встречались со свойствами, получающимися из (5) заменой возрастающих нормальных рядов другими нормальными рядами или системами. В связи с (7) естественно вспомнить о свойстве замкнутости класса относительно прямых произведений (или относительно любого

другого умножения групп). С объединением свойств (1) и (3) можно сопоставить употреблявшиеся в Д.20.1 при характеризации радикальных и полупростых классов свойства (1) и (1′).

Некоторые комбинации перечисленных свойств заслуживают специального изучения. Таков, в частности, набор свойств (1, 2, 4, 6), определяющий *силовские классы* групп; к их числу принадлежат классы всех p-групп, класс периодических групп и вообще классы всех Π-групп для данного Π, класс локально конечных групп. Если K — произвольный силовский класс, то максимальные K-подгруппы любой группы G называются ее *силовскими K-подгруппами*. Многие свойства силовских p-подгрупп могут быть сюда перенесены — см. Шпехт [2], Б. И. Плоткин [12, 14]; отметим также работу П. А. Гольберга [7].

В работах Бальцержика [4, 6] подвергнуты детальному изучению классы абелевых групп, замкнутые относительно эпиморфных образов, подгрупп и абелевых расширений. Всякий такой класс полностью определяется содержащимся в нем классом (с этими же свойствами) периодических групп и классом (указанными свойствами уже не обладающим) содержащихся в нем групп без кручения. Эти подклассы и связи между ними полностью описываются. Особо выделяются те из рассматриваемых классов, которые замкнуты относительно операций тензорного умножения и Tor (см. § Д.33).

Исследования Бэра. В ряде работ Бэра изучаются различные свойства классов групп, иногда в связи с некоторыми условиями конечности, а также некоторые способы конструирования новых классов групп, связанных с данным классом. Так, в работе Бэра [67] изучаются *счетно распознаваемые* классы групп: группа принадлежит к классу K, если все ее счетные подгруппы являются K-группами; таковы классы абелевых групп, групп с конечной фактор-группой по центру, групп с конечным коммутантом, групп с условием максимальности, групп с условием минимальности, групп с нормализаторным условием. Показано, что если классы K и L счетно распознаваемы и замкнуты относительно подгрупп и эпиморфных образов, то всеми этими свойствами обладает и следующий класс (K, L) групп G: всякий неединичный эпиморфный образ H группы G обладает неединичной инвариантной K-подгруппой, в которой H индуцирует L-группу автоморфизмов.

Если U — класс всех групп, то положим $K^2 = (U, K)$ и вообще $K^n = (U, K^{n-1})$ для любого натурального $n \geqslant 2$, а через K^ω обозначим объединение этих классов. Бэр [70] рассматривает некоторый класс K групп с условием минимальности для подгрупп, замкнутый относительно подгрупп, эпиморфных образов, прямых произведений двух групп, а также расширений K-группы при помощи конечной группы и расширений конечной группы (или абелевой группы с условием минимальности) при помощи K-группы. Обозначим через G^K пересечение всех нормальных делителей группы G, фактор-группы по которым принадлежат к классу K. Группа G тогда и только тогда будет

K-группой, если она является K^2-группой и если группы G^K и G/G^K удовлетворяют условию минимальности для нормальных делителей.

Работа Бэра [64] посвящена характеризации групп класса K^ω, если класс K замкнут относительно эпиморфных образов и подпрямых произведений двух групп, а все K-группы удовлетворяют условию максимальности (или минимальности) для нормальных делителей. В обоих случаях это будут расширения разрешимых групп при помощи K-групп и только они.

В работе Бэра [68] при различных предположениях о классе K сопоставляются классы K^2 (т. е. (U, K)) и (K, U); заметим, что случай совпадения последнего класса с K есть как раз свойство (1) радикальных классов из Д.20.1. Доказано, в частности, что если класс K замкнут относительно подгрупп и содержит все абелевы группы, то $K^2 \subseteq (K, U)$.

Класс групп K, замкнутый относительно эпиморфных образов, Бэр [57] называет *бернсайдовым*, если всякая конечнопорожденная периодическая K-группа конечна. Доказано, что класс K тогда и только тогда бернсайдов, если конечнопорожденная периодическая K-группа обладает лишь конечным числом неизоморфных эпиморфных образов, а если, сверх того, она обладает конечным композиционным рядом, то сама конечна. Показано также, что если класс K бернсайдов, то и класс (K, U) будет бернсайдовым.

Мы видим, что во всех этих работах в той или иной форме используется класс (K, L), определяемый данными классами K и L. Было бы полезно рассмотреть класс групп, конструируемый некоторым двойственным образом, по образцу свойства (1′) полупростых классов из Д.20.1; при этом классом, двойственным классу (K, U), будет класс групп, каждый неединичный нормальный делитель которых гомоморфно отображается на неединичную K-группу. Заметим в этой связи, что Бэр [71] всякому классу K сопоставляет класс K_0 таких групп G, которые порождаются, как нормальный делитель, некоторой своей K-подгруппой; сама эта работа посвящена изучению класса групп, порождаемых таким множеством своих классов сопряженных элементов, что мощность этого множества меньше заданного $\mathfrak{m}$.

Переход от классов K и L к классу (K, L) есть некоторая о п е р а ц и я над (абстрактными) классами групп. Мы неоднократно встречались с другой операцией, а именно с *умножением* классов (см. умножение многообразий в Д.10.4): класс KL состоит из групп, являющихся расширением K-группы при помощи L-группы. Несомненно, что теория операций над классами групп, аналогичная теории операций над группами (см. § Д.11) или даже обобщающая последнюю, заслуживает детальной разработки.

Функционалы, теоретико-групповые функции. В классе всех групп задан *функционал* $\mathfrak{F}$, если во всякой группе G выделено некоторое непустое множество нормальных делителей $\mathfrak{F}(G)$, причем

при всяком изоморфизме группы G с некоторой группой H множество $\mathfrak{F}(G)$ отображается на множество $\mathfrak{F}(H)$ (см. Б. И. Плоткин [12], где говорится об «относительных свойствах нормальных делителей», и Бэр [75]). Всякий абстрактный класс групп K, содержащий единичную группу, позволяет определить многочисленные функционалы в классе всех групп: для любой группы G в качестве $\mathfrak{F}(G)$ можно взять совокупность всех инвариантных K-подгрупп, или совокупность всех инвариантных подгрупп, фактор-группы по которым являются K-группами, и т. д. С другой стороны, со всяким функционалом $\mathfrak{F}$ можно связать многочисленные абстрактные классы групп: отметим хотя бы класс групп G, для которых пересечение всех нормальных делителей из $\mathfrak{F}(G)$ равно E.

В обзоре Б. И. Плоткина [12] отмечено, что для всякого функционала $\mathfrak{F}$ можно определить $\mathfrak{F}$-*центральные ряды* и *системы*: для любого скачка $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$ данной инвариантной системы (ряда) группы G нужно требовать, чтобы имело место включение

$$A_{\alpha+1}/A_\alpha \in \mathfrak{F}(G/A_\alpha).$$

Это позволяет строить аналоги некоторых классов обобщенных нильпотентных групп; обычные центральные ряды и системы соответствуют случаю, когда $\mathfrak{F}(G)$ состоит из всех центральных нормальных делителей группы G.

Можно рассматривать, в частности, такие функционалы $\mathfrak{F}$, что для любой группы G множество $\mathfrak{F}(G)$ состоит из одной (характеристической) подгруппы. Примером служит вербальная подгруппа $W(G)$ для фиксированной системы слов W. Такие *теоретико-групповые функции* (их не обязательно определять, понятно, в классе всех групп) изучаются в работах Бэра [73, 75, 76].

Еще одна схема нильпотентности и разрешимости. В связи с понятием функционала в классе всех групп можно указать еще одну общую схему. Пусть во всякой группе G выделено непустое множество элементов $\mathfrak{M}(G)$, причем при всяком изоморфизме группы G с некоторой группой H множество $\mathfrak{M}(G)$ отображается на множество $\mathfrak{M}(H)$; подгруппа $\{\mathfrak{M}(G)\}$ группы G будет, следовательно, характеристической. Инвариантная (или даже нормальная) система (или ряд) группы G будет называться $\mathfrak{M}$-*центральной*, если для всякого ее скачка $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$

$$A_{\alpha+1}/A_\alpha \subseteq \{\mathfrak{M}(G/A_\alpha)\};$$

нормальная система (или ряд) группы G будет называться $\mathfrak{M}$-*разрешимой*, если для всякого ее скачка $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$

$$A_{\alpha+1}/A_\alpha = \{\mathfrak{M}(A_{\alpha+1}/A_\alpha)\}.$$

При различных дополнительных предположениях об $\mathfrak{M}$ оказывается возможным перенести на этот случай различные свойства (обобщенных) нильпотентных и разрешимых групп. Примерами, помимо

множества центральных элементов группы, служат множества FC-элементов (см. Д.17.6) и n-центральных элементов (см. Д.18.2).

§ Д.22. Группы автоморфизмов, групповые пары

Групповые пары. Если дана группа G с группой операторов Γ (см. Д.4.1), то всякий элемент из Γ действует как автоморфизм группы G, причем группа Γ гомоморфно отображается в группу автоморфизмов $A(G)$ группы G; будем называть это гомоморфное отображение φ *представлением* группы Γ автоморфизмами группы G. В этой ситуации можно преимущественно интересоваться или свойствами группы G, в которой «действует» группа Γ, или же свойствами группы Γ, «действующей» (или «представленной») в группе G. Для достижения разумной симметрии говорят просто о *паре групп* (G, Γ). Следует помнить, однако, что эта пара задается не только самими группами G и Γ, но и некоторым вполне определенным гомоморфизмом φ: $\Gamma \to A(G)$; будем писать поэтому $(G, \Gamma; \varphi)$.

Пара $(G, \Gamma; \varphi)$ называется *точной*, если φ является изоморфизмом Γ в $A(G)$. Группа Γ может в этом случае рассматриваться как подгруппа группы $A(G)$, т. е. как некоторая группа автоморфизмов группы G; говорят также, что представление φ точное. С другой стороны, пара $(G, \Gamma; \varphi)$ называется *внутренней*, если гомоморфизм φ отображает группу Γ в группу $I(G)$ внутренних автоморфизмов группы G, т. е. если всякий элемент из Γ действует в G как некоторый внутренний автоморфизм этой группы. Наконец, пара $(G, \Gamma; \varphi)$ *тривиальна*, если φ отображает Γ в единицу группы $A(G)$, т. е. если всякий элемент из Γ действует в G как тождественный автоморфизм.

Примерами внутренних пар являются пары вида (G, G), где G — произвольная группа, а элементы из G действуют как определяемые ими внутренние автоморфизмы. Эти пары и вообще пары (G, Γ), где G является нормальным делителем в Γ, а элементы из Γ действуют на G при помощи трансформирования, позволяют многие теоретико-групповые понятия и результаты, связанные с трансформированиями и внутренними автоморфизмами, рассматривать как частные случаи понятий и результатов, относящихся к произвольным групповым парам.

Заметим, что изучение групповых пар равносильно изучению расщепляемых расширений, т. е. полупрямых произведений (см. § 52). Именно, если дано полупрямое произведение нормального делителя A и подгруппы B, то трансформирования элементами из B индуцируют в A автоморфизмы и мы приходим к групповой паре (A, B). Обратно, если дана пара $(G, \Gamma; \varphi)$, то требуемое полупрямое произведение будет состоять из всевозможных элементов αa, $\alpha \in \Gamma$, $a \in G$, а операция над этими элементами определяется в соответствии с § 48 по правилу:

$$\alpha a \cdot \beta b = (\alpha\beta)(a^{\beta} b),$$

где $a^\beta = a(\beta\varphi)$. Тривиальной паре (G, Γ) соответствует при этом прямое произведение $\Gamma \times G$.

Отметим в этой связи работу Хаймо [6], в которой изучаются (на языке полупрямых произведений) такие пары $(G, \Gamma; \varphi)$, что образ группы Γ в группе $A(G)$ при гомоморфизме φ содержит всю группу $I(G)$ внутренних автоморфизмов группы G; см. также Бэр [52].

Категория групповых пар. Мы не будем давать исчерпывающего обзора исследований, относящихся к групповым парам и, в частности, к точным парам (т. е. к группам автоморфизмов), отсылая читателя к монографии Б. И. Плоткина «Группы автоморфизмов алгебраических систем», которая в то время, когда пишутся эти строки, уже находится в печати. [См. ДК.] Подчеркнем, однако, что можно рассматривать представления групп не только автоморфизмами групп, но и автоморфизмами любых алгебраических или вообще математических систем. В эту схему укладывается и обычная теория представлений групп линейными преобразованиями векторных пространств; к этой же общей схеме относятся и работы Б. И. Плоткина [21, 26]. Мы останемся, впрочем, на том уровне общности, на каком находились в п. 1.

В работах Б. И. Плоткина [24, 25] введены следующие понятия. Пусть дана пара $(G, \Gamma; \varphi)$ и подгруппы $H \subseteq G$, $\Delta \subseteq \Gamma$. Если подгруппа H допустима относительно Δ (в смысле теории операторных групп), то гомоморфизм $\varphi : \Gamma \to A(G)$ индуцирует гомоморфизм $\psi : \Delta \to A(H)$. Тогда пара $(H, \Delta; \psi)$ называется *подпарой* пары $(G, \Gamma; \varphi)$. Это позволяет ввести такие понятия, как система образующих групповой пары, локальная система подпар и т. д.

С другой стороны, *гомоморфизм* пары $(G, \Gamma; \varphi)$ в пару $(G', \Gamma'; \varphi')$ можно определить как такой гомоморфизм соответствующих этим парам полупрямых произведений, при котором G отображается в G', а Γ в Γ'. Частным случаем будет понятие *изоморфизма* пар. Можно показать, используя голоморфы, что всякая пара изоморфна подпаре некоторой внутренней пары.

Мы видим, что класс всех групповых пар превращается в категорию. Было бы интересно построить в этой категории теорию свободных разложений, а также теорию свободных групповых пар. Можно ожидать, что теория пойдет здесь дальше, чем в том рассмотренном С. Т. Завало частном случае (см. Д.7.5), когда берется категория пар с фиксированной группой операторов Γ и при гомоморфизмах этих пар группа Γ отображается на себя тождественно. Двойственным был бы случай фиксированной группы G.

Отметим, что теория групповых пар в той ее части, которая основана на понятиях подпары и гомоморфизма пар, естественным образом вкладывается в начатое Поппом (см. Д. 13.2) направление теории общих произведений групп.

Стабильные группы автоморфизмов. Важное направление в теории точных групповых пар, т. е. в теории групп автоморфизмов, идет от работ Л. А. Калужнина [11, 12, 13]. Пусть в группе G дана конечная, упорядоченная по включению цепочка подгрупп

$$G = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{m-1} \supset A_m = E. \tag{1}$$

Автоморфизмы α группы G, отображающие на себя каждый правый смежный класс группы A_i по подгруппе A_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, т. е. для каждого $x \in A_i$

$$(A_{i+1}x)\alpha = A_{i+1}x,$$

составляют подгруппу группы всех автоморфизмов группы G; это *группа устойчивости* ряда (1). Для любой группы G и любого ряда (1) группа устойчивости нильпотентна (Л. А. Калужнин [13] для инвариантного ряда (1), Ф. Холл [15] в общем случае; см. также Хаймо [3] и Б. И. Плоткин и В. Г. Виляцер [1]). Для инвариантного ряда (1) класс нильпотентности группы устойчивости не больше $m-1$; в общем случае он может быть больше, но не превосходит $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Эта теорема Калужнина–Холла явилась источником ряда исследований. Назовем пару групп (G, Γ) *стабильной*, если в G существует возрастающий (быть может, трансфинитный) нормальный ряд из допустимых относительно Γ подгрупп, во всех факторах которого Γ индуцирует тождественный автоморфизм, и *локально стабильной*, если в (G, Γ) существует локальная система из стабильных подпар. Применяя эти определения к случаю точных пар, мы приходим к понятиям *стабильной* и *локально стабильной* группы автоморфизмов. Заметим, что локальная стабильность группы всех внутренних автоморфизмов группы G равносильна локальной нильпотентности группы G.

В. Г. Виляцер [2] показал, что стабильная группа автоморфизмов может не быть локально нильпотентной и даже не быть локально разрешимой. Однако локально конечная локально стабильная группа автоморфизмов локально нильпотентна (В. Г. Виляцер [3]). С другой стороны, Б. И. Плоткин [25] доказал, что всякая локально стабильная группа автоморфизмов Γ произвольной группы G является Z-группой; если при этом G — группа без кручения, то в Γ имеется центральная система с факторами без кручения. См. также Б. И. Плоткин [18]. [См. ДК.]

Γ-центральные ряды. Пусть Γ — некоторая группа автоморфизмов группы G. Для $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$ назовем элемент

$$[a, \alpha] = a^{-1}(a\alpha)$$

коммутатором элемента a и автоморфизма α; если α — внутренний автоморфизм, порождаемый элементом b, то $[a, \alpha] = [a, b]$. *Нижняя Γ-центральная цепь* группы G определяется следующим образом:

$$G_0 = G, G_i = \{[a, \alpha], a \in G_{i-1}, \alpha \in \Gamma\}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Если Γ — группа устойчивости ряда подгрупп (1), то нижняя Γ-центральная цепь группы G превращается в нижний Γ-центральный ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = E, \quad n \leqslant m$$

(Л. А. Калужнин [13]); здесь G_1 нормально в G, но для произвольного $n \geqslant 3$ существуют примеры, в которых ни одна из групп G_i, $i = 2, \ldots, n-1$, не является нормальной в G (Ф. Холл [15], Мохамед [1]). Для случая инвариантного ряда (1) подгруппа G_1 — Γ-*коммутант* группы G — нильпотентна класса нильпотентности $\leqslant n-1$ (Л. А. Калужнин [13]), в общем случае произвольного ряда (1) она локально нильпотентна (Ф. Холл [15]). См. также Мохамед [2].

Можно определить и изучать и верхние Γ-центральные ряды группы — см. Б. И. Плоткин [12], Л. А. Калужнин [16], Мохамед [1]. При этом Γ-*центром* группы G будет совокупность неподвижных при Γ элементов группы G, т. е. таких элементов $a \in G$, что для всех $\alpha \in \Gamma$ $a\alpha = a$ и поэтому $[a, \alpha] = 1$. Хаймо [5] изучает верхний Γ-центральный ряд группы G для случая, когда Γ — группа всех нормальных автоморфизмов группы G, т. е. автоморфизмов, перестановочных со всеми внутренними автоморфизмами. Понятие Γ-центра группы G можно перенести на случай любой пары (G, Γ); см. относящуюся сюда работу Глаубермана [1].

Некоторые подгруппы группы автоморфизмов. С другой стороны, можно рассматривать некоторые специальные подгруппы группы Γ, являющейся группой автоморфизмов группы G. Так, назовем подгруппу Δ группы Γ *локально стабильной*, если Δ локально стабильна как группа автоморфизмов группы G. Если группа Γ локально нётерова (см. Д.17.5), то подгруппа, порожденная в Γ всеми ее локально стабильными нормальными делителями, — *локально стабильный радикал* группы автоморфизмов Γ, — сама локально стабильна и совпадает с пересечением всех максимальных локально стабильных подгрупп группы Γ (Б. И. Плоткин [22]). В общем случае произведение двух локально стабильных нормальных делителей группы Γ может не быть локально стабильным (В. Г. Виляцер [5]).

Аналогичные результаты установлены в указанных работах и для *локально периодического радикала* группы автоморфизмов. При этом группа автоморфизмов Γ группы G называется *периодической*, если для любого $a \in G$ множество элементов $a\alpha$, где α пробегает всю группу Γ, конечно. См. в этой связи Бэр [45].

Понятие локально стабильной группы автоморфизмов связано со следующими понятиями (см. Б. И. Плоткин [12, 18]). Множество M автоморфизмов группы G называется *нильпотентным относительно* G, если для всякого $a \in G$ существует такое натуральное число $n = n(a)$, что

$$[\ldots[[a, \alpha_1], \alpha_2], \ \ldots, \ \alpha_n] = 1$$

для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in M$. В частности, если множество M, нильпотентное относительно G, состоит из одного автоморфизма α, то α называется *нильавтоморфизмом*.

Группа автоморфизмов Γ группы G *локально нильпотентна относительно* G (или *внешне локально нильпотентна*), если всякое конечное подмножество группы Γ нильпотентно относительно G. Всякая локально стабильная группа автоморфизмов внешне локально нильпотентна. Ясно, что всякая внешне локально нильпотентная группа автоморфизмов является группой нильавтоморфизмов. С другой стороны (см. В. Г. Виляцер [4]), существуют группы нильавтоморфизмов, даже для абелевой группы G, не являющиеся внешне локально нильпотентными. В работе В. Г. Виляцера [2] доказано, что всякая группа нильавтоморфизмов группы без кручения сама является группой без кручения.

В произвольной группе автоморфизмов Γ можно определить *внешне локально нильпотентный радикал* как объединение внешне локально нильпотентных нормальных делителей группы Γ, причем он всегда внешне локально нильпотентен. Соотношения между этим радикалом, локально стабильным радикалом и некоторыми другими подгруппами группы Γ изучаются, притом для произвольной групповой пары (G, Γ), в работах Б. И. Плоткина [20, 23]; см. также Б. И. Плоткин [25] и Ш. С. Кемхадзе [11].

Треугольные группы автоморфизмов. В. Г. Житомирский [1] называет группу автоморфизмов Γ группы G *треугольной*, если в G существует такой возрастающий нормальный ряд из Γ-допустимых подгрупп, в факторах которого Γ индуцирует скалярные группы автоморфизмов. При этом группа автоморфизмов Γ_0 группы G_0 называется *скалярной*, если всякий элемент из G_0 содержится в локально циклической Γ_0-допустимой подгруппе. Всякая скалярная группа автоморфизмов абелева; всякая треугольная группа автоморфизмов является расширением стабильной группы автоморфизмов при помощи абелевой группы. См. также В. Г. Житомирский [2, 3].

Часть четвертая

РАЗРЕШИМЫЕ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

§ Д.23. Обобщенные разрешимые группы

Некоторые общие свойства. В Д.20.4 отмечено, что теория радикалов дает некоторый общий подход к различным классам обобщенных разрешимых групп. Продолжается изучение, однако, и отдельных классов обобщенных разрешимых групп, введенных в § 57: устанавливаются их новые свойства, выясняются связи между ними, изучается влияние тех или иных условий конечности; при этом решаются некоторые проблемы из обзора А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [1]. В предшествующих параграфах нам уже встречались различные относящиеся сюда результаты; приведем некоторые другие, отсылая читателя за дальнейшими подробностями к обзорам Б. И. Плоткина [12] и С. Н. Черникова [28].

Я. Б. Ливчак [2] построил счетную локально конечную p-группу, некоторое циклическое расширение которой не является RI-группой; отсюда следует существование RN^*-группы, не являющейся RI-группой, и $\overline{RN}$-группы, не являющейся $\overline{RI}$-группой. В работе Я. Б. Ливчака [1] показано существование локально разрешимой группы, не являющейся RN^*-группой; более общий результат у М. И. Каргаполова [11] — см. Д.20.4 (см. также Ф. Холл [21] и Ю. И. Мерзляков [2]).

Ряд вопросов, поставленных в §§ 57 и 58, получил решение в работе Ф. Холла [20]. Так, классы RN-групп и RI-групп являются различными; отличны друг от друга также классы RN^*-групп и $\overline{RN}$-групп. Для класса RN^*-групп не имеет места локальная теорема. А. И. Мальцев [7] доказал, что свободное произведение RK-групп будет RK-группой и что существует RK-группа, длина ряда коммутантов которой является произвольным наперед заданным порядковым числом γ.

Ю. И. Мерзляков [1] и Ф. Холл [22] показали, что класс $\overline{RI}$-групп не замкнут относительно перехода к подгруппам. С другой стороны, указанный в § 57 класс групп О. Ю. Шмидта замкнут, понятно, относительно подгрупп. В работе Ф. Холла [21] показано, что существует не содержащаяся в этом последнем классе RN^*-группа, а также существует RI^*-группа, не являющаяся локально разрешимой. Перечисленные в этом абзаце результаты относятся к вопросу, поставленному в конце § 58.

В работе Д. М. Смирнова [9] для произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ доказана теорема, которая в применении к многообразию абелевых групп (т. е. $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ дает следующее: пусть T будет любое из свойств RN, RI, RN^*, RI^*, RK, разрешимость; если фактор-группа F/A свободной группы F является T-группой, то и группа $F/[A, A]$ будет T-группой, причем она обладает такой разрешимой нормальной (или инвариантной) системой (или рядом) соответствующего типа, что все ее (или его) факторы являются свободными абелевыми группами.

Баур [1] рассматривает один класс групп, промежуточный между классами RN-групп и RI-групп, а именно класс $S'(\mathfrak{A})$ тех групп, которые принадлежат к некоторому слою над классом абелевых групп (см. Д.20.3). Группа G этого класса будет абелевой, если абелевы все ее конечные фактор-группы.

Бэр [60] называет *почти-разрешимой* группу, всякий неединичный эпиморфный образ которой содержит неединичный нормальный делитель с конечным коммутантом. Показано, что нётеровы почти-разрешимые группы — это конечные расширения нётеровых разрешимых групп и только они.

Локально разрешимые группы. Из результатов § 59 (теорема С. Н. Черникова) следует, что локально разрешимые группы с условием минимальности для подгрупп разрешимы и экстремальны. Д. Маклейн [4] показал, что существуют локально разрешимые группы, удовлетворяющие условию минимальности для нормальных делителей, но не разрешимые и, следовательно, не удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп. Впрочем, в § 59 отмечена работа В. С. Чарина [1], по которой даже для разрешимых групп из условия минимальности для нормальных делителей не следует условие минимальности для подгрупп.

В. С. Чарин [4] доказал, что локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для нормальных делителей (и, следовательно, обладающая главными рядами), тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, если все факторы ее какого-либо главного ряда имеют конечный специальный ранг (см. § 53). См. также Д. Маклейн [4], где показано, в частности, что существуют локально разрешимые группы, удовлетворяющие условию максимальности для нормальных делителей, но не разрешимые.

Локально разрешимые группы конечного специального ранга изучаются в работе В. С. Чарина [8]. Так, если такая группа G является в то же время группой без кручения, то она разрешима, если же G не содержит истинных подгрупп конечного индекса, то она нильпотентна и будет (см. С. Н. Черников [28]) полной группой.

Локально разрешимая группа, все абелевы подгруппы которой имеют конечные специальные ранги, ограниченные в совокупности числом r, сама имеет конечный специальный ранг, не превосходящий числа, зависящего только от r (Ю. И. Мерзляков [2]; для групп без кручения см. В. С. Чарин [10], для периодических групп — Ю. М. Горчаков [6],

для разрешимых групп — М. И. Каргаполов [9]). В этой же работе Ю. И. Мерзлякова показано, что существуют локально разрешимые группы, ранги всех абелевых подгрупп которых конечны, но не ограничены в совокупности.

В работе Роузбледа [1], параллельной указанной в Д.16.7 работе Ф. Холла [16], устанавливаются условия, при которых счетная локально разрешимая (или локально нильпотентная) группа вкладывается в прямое произведение разрешимых (соответственно нильпотентных) групп, обладающих нормальными рядами, факторы которых периодичны или являются бесконечными циклическими.

Стонехевер [1], обобщая одну теорему Картера [1], относящуюся к конечным группам, строит теорию, напоминающую теорию силовских подгрупп. Пусть G — периодическая локально разрешимая группа, локально нильпотентный радикал которой $PH(G)$ (см. Д.20.6) имеет в ней конечный индекс. Тогда G обладает максимальными локально нильпотентными подгруппами, совпадающими со своим нормализатором, и все такие подгруппы сопряжены между собой. Показано, что в формулировке этой теоремы нельзя отказаться ни от периодичности, ни от конечности индекса радикала. Аналогичные теоремы справедливы в том случае, если вместо локальной нильпотентности говорить о свойствах N или ZA (см. § 63). При тех же условиях на группу G, которые указаны выше, эта группа обладает (полными) силовскими базами и они сопряжены между собой.

Некоторые свойства групп без кручения, обладающих локальной системой из RN^*-групп, — в работе Б. И. Плоткина [7].

Группы, радикальные в смысле Плоткина. Эти группы, некоторые свойства которых уже отмечены в Д.20.4, составляют еще один класс обобщенных разрешимых групп; будем в этом пункте называть их для краткости р а д и к а л ь н ы м и. Укажем еще некоторые свойства радикальных и локально радикальных групп.

Если в радикальной группе G локально нильпотентный радикал $PH(G)$ конечен или удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то и сама группа соответственно конечна или удовлетворяет этому условию максимальности (Б. И. Плоткин [6]). Если в периодической радикальной группе радикал $PH(G)$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то это условие выполняется во всей группе (Б. И. Плоткин [10]). Пусть группа G радикальна, а ее радикал $PH(G)$ обладает возрастающим рядом из инвариантных в G подгрупп с факторами конечного специального ранга; если при этом в G выполняется условие минимальности для нормальных делителей, содержащих радикал, то последний имеет в G конечный индекс (Б. И. Плоткин [15]).

Существует локально радикальная группа, полупростая в смысле радикала Плоткина (Я. Б. Ливчак [1]). Существует локально разрешимая группа, не являющаяся радикальной (Ф. Холл [21]).

RN*- и RI*-группы. Кулатилака [1] вводит класс RJ^*-*групп*, промежуточный между классами RI^*-групп и RN^*-групп, а именно класс групп, обладающих таким возрастающим разрешимым нормальным рядом, все члены которого достижимы в самой группе (ср. с Д.20.2). Всякая бесконечная RI^*-группа содержит бесконечную абелеву подгруппу, достижимую в группе в два шага, но может не содержать бесконечной инвариантной абелевой подгруппы; всякая бесконечная RJ^*-группа содержит бесконечную достижимую абелеву подгруппу; всякая бесконечная RN^*-группа содержит бесконечную субинвариантную абелеву погруппу, но может не содержать бесконечной достижимой абелевой подгруппы. Было бы интересно провести аналогичные исследования, опираясь на Д.20.2, для случая, когда абелевость заменяется некоторым другим свойством.

Следующие результаты В. С. Чарина [9, 12] примыкают к теореме Вендта–Черникова (см. § 64). Пусть группа G обладает возрастающим инвариантным рядом с абелевыми факторами, специальные ранги которых конечны и ограничены в совокупности; тогда некоторый s-й коммутант группы G будет ZA-группой. Если же эти факторы являются абелевыми группами с одним или двумя образующими, то $s = 3$.

Бэр [54, 65] называет *сверхразрешимыми* группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, т. е. группы 2-й ступени над классом циклических групп (см. Д.20.2). Доказана равносильность следующих свойств группы G: a) сверхразрешимость; b) локальная сверхразрешимость и требование, что всякий неединичный эпиморфный образ группы G содержит неединичную конечнопорожденную инвариантную подгруппу; c) конечные минимальные инвариантные подгруппы эпиморфных образов группы G цикличны, а всякий неединичный эпиморфный образ группы G содержит неединичную конечнопорожденную инвариантную подгруппу, коммутант которой конечен. Показано также, что совокупность элементов конечного порядка сверхразрешимой группы может не быть подгруппой. Некоторые характеризации локально сверхразрешимых групп — в работе Бэра [72].

Развивая другие результаты Бэра, Д. Маклейн [4] показал, что для локально сверхразрешимой группы равносильны условие максимальности для подгрупп, условие максимальности для нормальных делителей и конечнопорожденность; равносильны также условия минимальности для подгрупп и для нормальных делителей.

Некоторые специальные типы RI^*-групп рассматривают также Х. Х. Мухаммеджан [3] и Г. С. Шевцов [2]. Так, в первой из этих работ показано, что периодическая RI^*-группа тогда и только тогда будет разрешимой группой с условием минимальности для подгрупп, когда в этой группе и в ее фактор-группе по какому-либо одному максимальному абелеву нормальному делителю существуют максимальные абелевы нормальные делители, удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп.

Возрастающие ряды коммутантов. Это будут ряды вида

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots, \qquad (1)$$

где G_n является коммутантом группы G_{n+1}, $n = 0, 1, \ldots$. Если построение этого ряда начинается с данной группы G_0, то ряд может оборваться на месте n, если группа G_n не изоморфна коммутанту никакой группы, но не может стабилизироваться на месте n при $n > 1$, так как группа G_n не может совпадать со своим коммутантом. Если же ряд (1) бесконечен, то его объединение G будет некоторой RI^*-группой, совпадающей со своим коммутантом.

Б. Нейман [22], который ввел эти ряды, показал, что в бесконечном ряду коммутантов (1) факторы G_{n+2}/G_n, $n = 0, 1, \ldots$, не могут иметь конечных систем образующих, хотя некоторые из факторов G_{n+1}/G_n, $n = 0, 1, \ldots$, могут быть даже конечными. Баумслаг [2] показал, что в ряду (1) может быть даже бесконечно много конечных факторов этого вида. В работе Баумслага [8] указаны некоторые условия, при которых группа G_0 лежит в центре объединения G бесконечного ряда (1).

Аналогичные рассмотрения для случая, когда берется не коммутант, а вербальная подгруппа, определяемая произвольной заданной системой слов W (см. Д.3.4), — в работе Б. Неймана [23].

§ Д.24. Разрешимые группы

Разрешимые A_i-группы. Для $i = 1, 2, 3, 4, 5$ А. И. Мальцев [10] назвал *разрешимой A_i-группой* группу, обладающую конечным нормальным рядом с факторами, являющимися абелевыми A_i-группами. При этом *абелева A_1-группа* есть абелева группа, фактор-группа которой по периодической части имеет конечный ранг; *абелева A_i-группа* при $i = 2, 3, 4$ есть абелева A_1-группа, периодическая часть которой соответственно имеет конечный специальный ранг, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп или же конечна; наконец, *абелева A_5-группа* есть абелева группа с конечным числом образующих, т. е. удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

А. И. Мальцев доказал, что разрешимая A_i-группа, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, обладает конечным характеристическим рядом с абелевыми A_i-факторами. Фактор-группа разрешимой A_1-группы по ее максимальному периодическому нормальному делителю есть разрешимая A_4-группа. Всякая разрешимая A_3-группа обладает подгруппой конечного индекса, коммутант которой нильпотентен. В разрешимой A_4-группе имеется лишь конечное число несопряженных периодических подгрупп; в разрешимой A_1-группе имеется лишь конечное число несопряженных максимальных периодических подгрупп.

Особо выделим уже отмеченную в § 59 теорему А. И. Мальцева о том, что если все абелевы подгруппы разрешимой группы G имеют

тип A_5, то G сама будет разрешимой A_5-группой, т. е. является нётеровой. Новые доказательства и обобщения этой теоремы — в работе Бэра [53], где о группе G предполагается заранее, что она является лишь RI^*-группой, и в работе Б. И. Плоткина [10], где группа G может быть заранее лишь радикальной в смысле Плоткина, а тип A_5 должны иметь лишь абелевы подгруппы, лежащие в PH-радикале группы G.

В. С. Чарин [10] доказал, что разрешимая (или даже радикальная в смысле Плоткина) группа, все абелевы подгруппы которой имеют тип A_4, сама будет разрешимой A_4-группой. В работе В. С. Чарина [11] такое же утверждение доказано для случая A_3.

Группы автоморфизмов разрешимых A_i-групп. Многие результаты, перечисленные в предшествующем пункте, опираются на свойства групп автоморфизмов абелевых и разрешимых групп. Так, в работе А. И. Мальцева [10] установлено, что всякая разрешимая подгруппа группы автоморфизмов абелевой группы с условием максимальности для подгрупп сама удовлетворяет этому условию максимальности. Д. М. Смирнов [2] доказал, что всякая периодическая подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_4-группы конечна. В работе Д. М. Смирнова [3] показано, что всякая локально разрешимая подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_3-группы разрешима, а всякая разрешимая подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_5-группы имеет тип A_5; последнее обобщает отмеченный выше результат А. И. Мальцева. Группа всех автоморфизмов разрешимой A_4-группы конечна или счетна (Д. М. Смирнов [7]).

В. С. Чарин [5] изучает полные подгруппы групп автоморфизмов разрешимых групп. Так, полная подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_4-группы нильпотентна, без кручения и имеет конечный специальный ранг; полная подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_2-группы (т. е. разрешимой группы конечного специального ранга) разрешима.

Другие свойства нётеровых разрешимых групп. Заметим, что эти группы, т. е. разрешимые A_5-группы, называют также *полициклическими*, так как они могут быть определены как группы, обладающие конечным нормальным рядом с циклическими факторами, будем для краткости употреблять это название и мы. Помимо результатов, приведенных в § 59 и в предшествующих пунктах настоящего параграфа, отметим следующие.

Гирш [4, 6] доказал, как уже сказано в Д.17.9, что всякая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Обобщая это, Лернер [2] показал, что всякая полициклическая группа аппроксимируется конечными Π-группами для некоторого конечного набора Π простых чисел; см. также Лернер [1]. В работе К. Сексенбаева [2] показано, что существует полициклическая группа, аппроксимируемая конечными 2-группами, но не являющаяся конечным расширением нильпотентной группы; если, однако, полициклическая группа аппроксимируется конечными p-группами для бесконечного множества простых чисел p,

то она нильпотентна и без кручения. Цаппа [8] доказал, что если полициклическая группа G обладает таким автоморфизмом φ простого порядка, что (см. Д.22.4)

$$G = \{[a, \varphi], a \in G\},$$

то G нильпотентна. Некоторые условия, при которых полициклическая группа нильпотентна, — также в работе Гирша [4]. [См. ДК.]

В работе Ф. Холла [12] доказано, что конечнопорожденная группа, являющаяся расширением абелевой группы при помощи полициклической, удовлетворяет условию максимальности для нормальных делителей. Здесь же показано, что для разрешимых групп условие максимальности для нормальных делителей расположено строго между условием максимальности для подгрупп и существованием конечной системы образующих.

В полициклической группе G существуют конечные нормальные ряды с циклическими факторами, бесконечными или конечными простых порядков. Можно рассматривать в G, в частности, такие ряды с минимальной возможной длиной. Бауэрс [1] показал, что для этих рядов не имеет места теорема типа теоремы Жордана–Гёльдера.

Двуступенно разрешимые группы. В советской алгебраической литературе метабелевой называют обычно нильпотентную группу класса 2 (см. О. Ю. Шмидт [3], § 99, а также §§ 14 и 62 настоящей книги). С другой стороны, в зарубежной литературе этот термин означает, как правило, *двуступенно разрешимую группу*, т. е. любое расширение абелевой группы при помощи абелевой. По этой причине мы сейчас и в следующих параграфах будем избегать употребления термина «метабелева группа» и будем просто говорить соответственно о двуступенно разрешимых группах и о нильпотентных группах класса 2.

Приведем некоторые результаты, относящиеся к двуступенно разрешимым группам. В работе Ф. Холла [18] показано, что всякая конечнопорожденная двуступенно разрешимая группа (и вообще всякое конечнопорожденное расширение абелевой группы при помощи нильпотентной) финитно аппроксимируема; существует, однако, этим свойством не обладающая конечнопорожденная разрешимая группа с разрешимым рядом длины 3.

Цубои [1] доказал, что если нильпотентная группа G класса n является расширением абелевой группы A при помощи циклической группы, то (в обозначениях из § 62 для членов нижнего и верхнего центральных рядов группы G)

$$A/(A \cap Z_i) \simeq G_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Н. Ф. Сесекин и О. С. Широковская [1] изучают те неабелевы группы, отличные от своего коммутанта, все истинные нормальные делители которых абелевы. Фактор-группа такой группы G по ее коммутанту или примарная по p циклическая группа, или же прямое

произведение двух примарных циклических групп. Во втором случае G будет конечной p-группой; строение групп, относящихся к первому случаю, детально изучается. В некотором смысле двойственны исследования Ньюмэна [1, 2], в которых изучаются те неабелевы группы с абелевым коммутантом, все истинные фактор-группы которых абелевы. [См. ДК.]

Д. С. Робинсон [1] изучает *T-группы*, т. е. группы, всякая достижимая подгруппа которых инвариантна, и преимущественно *ST-группы*, т. е. разрешимые T-группы. Всякая ST-группа G двуступенно разрешима; если G конечнопорожденная, то она будет конечной или абелевой, а если G без кручения — то абелевой. Изучаются также группы, все подгруппы которых являются T-группами. См. также Пермутти [1].

В работах Хейнекена [6, 7] *правокоммутаторно замкнутой* называется такая группа G, для любых элементов a, b которой существует такой элемент c, что для всех $x \in G$

$$[a, [b, x]] = [c, x];$$

аналогично определяются *левокоммутаторно замкнутые группы*. Ясно, что группы, в которых коммутирование ассоциативно (т. е. нильпотентные группы класса 2, см. § 14), принадлежат к каждому из этих двух классов. Всякая правокоммутаторно замкнутая группа будет и левокоммутаторно замкнутой; обратное в общем случае неверно — сказывается несимметрия в определении коммутатора, — но справедливо для нильпотентных групп. Всякая левокоммутаторно замкнутая группа двуступенно разрешима.

В работе Б. Неймана [21] начато изучение классов $\mathfrak{M}_n$, $n = 2, 3, \ldots$, таких групп, всякая подгруппа которых с n образующими двуступенно разрешима. Показано, что класс $\mathfrak{M}_2$ шире класса $\mathfrak{M}_3$, а последний шире класса всех двуступенно разрешимых групп. Развитие этих результатов — в работе Макдональда [2], а в его работе [5] показано, что класс $\mathfrak{M}_3$ является многообразием, определяемым тождеством

$$[[x, y], [y, z]][[y, z], [z, x]][[z, x], [x, y]] = 1.$$

Это же многообразие, как показали Бахмут и Я. Левин [1], задается тождеством Якоби

$$[[x, y], z][[y, z], x][[z, x], y] = 1;$$

свободные группы этого многообразия аппроксимируются конечными 2-группами.

Свободные разрешимые группы. Все *n-ступенно разрешимые группы*, т. е. группы, обладающие разрешимым рядом длины n, составляют многообразие, определяемое тождеством

$$[[\ldots[x_1, x_2], [x_3, x_4]], \ldots], [\ldots, [[x_{2^n-3}, x_{2^n-2}], [x_{2^n-1}, x_{2^n}]]\ldots]] = 1.$$

Свободные группы этого многообразия, т. е. *свободные n-ступенно разрешимые группы* — это фактор-группы абсолютно свободных групп по их n-м коммутантам. Укажем некоторые свойства этих групп, часто аналогичные свойствам абсолютно свободных групп; при этом слова «свободная разрешимая группа» будут означать свободную n-ступенно разрешимую группу для некоторого n.

Чен [1] доказал, что факторы нижнего центрального ряда свободной двуступенно разрешимой группы являются свободными абелевыми группами. А. Л. Шмелькин [6] доказал это же для свободных n-ступенно разрешимых групп и даже в более общем случае — см. п. 6. Обобщение теоремы Чена в другом направлении — в работе Ри [2] (см. Д.7.2).

Свободные разрешимые группы аппроксимируются конечными p-группами для любого простого p (Грюнберг [2]). В работе А. И. Мальцева [13] доказано, что всякая свободная разрешимая группа является R-группой; всякая нециклическая абелева подгруппа такой группы лежит в ее последнем неединичном коммутанте. Конечнопорожденная (но не циклическая) свободная n-ступенно разрешимая группа при $n \geqslant 2$ не является конечноопределенной (А. Л. Шмелькин [7]).

Вопрос о подгруппах свободных разрешимых групп еще далеко не исчерпан. К нему относится следующая теорема, независимо доказанная Баумслагом [16] и А. Л. Шмелькиным [6]: подгруппа U свободной разрешимой группы F тогда и только тогда сама будет свободной разрешимой, если она обладает такой системой образующих, которая лежит в некотором члене ряда коммутантов группы F и линейно независима по модулю следующего члена этого ряда. А. Л. Шмелькин доказал при этом, что всякая подгруппа свободной разрешимой группы, являющаяся свободной в каком-либо многообразии, будет на самом деле свободной разрешимой группой, а также описал строение любой подгруппы с двумя образующими свободной разрешимой группы. См. также п. 6. [См. ДК.]

Полинильпотентные группы. В § 64 указано на возможность изучения разрешимых групп при помощи их инвариантных рядов с нильпотентными факторами. Реализацией этой идеи явилось следующее понятие, идущее от Грюнберга [2].

Пусть дана группа G. В соответствии с принятыми в § 14 обозначениями G_{k_1} есть k_1-й член нижней центральной цепи этой группы; напомним, что $G = G_0$. Если подгруппа $G_{k_1 k_2 \ldots k_i}$ уже определена, то k_{i+1}-й член ее нижней центральной цепи обозначим через $G_{k_1 k_2 \ldots k_i k_{i+1}}$. Если группа G такова, что

$$G_{k_1 k_2 \ldots k_n} = E,$$

то назовем ее *полинильпотентной* класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$; при этом считаем, что $k_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ясно, что полинильпотентная группа разрешима; с другой стороны, всякая n-ступенно разрешимая группа является полинильпотентной класса $(1, 1, \ldots, 1)$, где единица взята n раз. Полинильпотентные группы класса (k_1) — это в точности нильпотентные группы, класс которых в смысле § 62 не выше k_1.

Полинильпотентные группы класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ составляют многообразие, которое обозначим через $\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Многообразие $\mathfrak{N}_k$ нильпотентных групп определяется, очевидно, тождеством

$$[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_{k+1}] = 1;$$

в Д.10.4 отмечено, что это многообразие, как и вообще всякое нильпотентное многообразие, не раскладывается нетривиальным образом в произведение многообразий. С другой стороны,

$$\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \mathfrak{N}_{k_n} \mathfrak{N}_{k_{n-1}} \ldots \mathfrak{N}_{k_1},$$

а так как такое разложение единственное — полугруппа многообразий свободна, как указано в Д.10.4, — то различным наборам $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ соответствуют различные многообразия $\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ (А. Л. Шмелькин [6]).

Свободные группы многообразия $\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, т. е. *свободные полинильпотентные группы* класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — это фактор-группы абсолютно свободных групп F по их подгруппам $F_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Укажем некоторые свойства этих групп, иногда обобщающие свойства свободных разрешимых групп (см. п. 5).

Грюнберг [2] доказал, что свободная полинильпотентная группа класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ аппроксимируется конечными p-группами для всех p, больших $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$; поэтому (случай $n = 1$) свободная нильпотентная группа аппроксимируется конечными p-группами для любых p. Грюнберг доказал также, что пересечение нижней центральной цепи (с натуральными номерами) свободной полинильпотентной группы равно E. А. Л. Шмелькин [6] доказал, что факторы этой цепи являются свободными абелевыми группами; этот факт был ранее известен Ф. Холлу.

В указанной работе А. Л. Шмелькина доказано также следующее. Всякая нециклическая нильпотентная подгруппа свободной полинильпотентной группы G класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $n \geqslant 2$, содержится в подгруппе $G_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$. Нециклическая подгруппа U свободной полинильпотентной группы G класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ тогда и только тогда является свободной полинильпотентной группой этого же класса, если она обладает системой образующих, линейно независимой по модулю коммутанта группы G. Свободная полинильпотентная группа определяется структурой своих подгрупп; она является R-группой и обладает пополнением, являющимся полинильпотентной группой того же класса. [См. ДК.]

Многообразия $\mathfrak{N}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ являются примерами многообразий разрешимых групп. Некоторые другие такие многообразия рассматриваются

в работах Макдональда [2, 6] и Ф. Левина [2]. В работе Э. Б. Кикодзе [1] показано, что всякое многообразие, определяемое тождеством, левая часть которого есть сложный коммутатор длины n от элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с любым распределением скобок, состоит из разрешимых групп. [См. ДК.]

Некоторые обобщения. Обычное определение разрешимой группы допускает различные обобщения. Так, Д. М. Смирнов [6] и В. С. Чарин [7] изучают группы, обладающие конечным нормальным рядом, факторы которого абелевы или конечны. Можно рассматривать также группы, обладающие конечным нормальным рядом с нильпотентными или конечными факторами; так, Ф. Холл [14] изучает расширения конечных групп при помощи нильпотентных. Группы, обладающие (бесконечным) возрастающим нормальным рядом с нильпотентными или простыми факторами, рассматриваются в работе Б. И. Плоткина [10]; более общий случай — в работе Б. И. Плоткина [11].

§ Д.25. Обобщенные нильпотентные группы

Локально нильпотентные группы. В §§ 63–67 приведен ряд результатов о различных классах обобщенных нильпотентных групп. В дальнейшем развитие этой ветви теории групп шло весьма бурно; многочисленные результаты, сюда относящиеся, читатель уже встречал в предшествующих параграфах настоящего обзора. Существование обзорной статьи Б. И. Плоткина [12] позволяет нам, излагая некоторый дополнительный материал, не касаться многих заслуживающих внимания деталей. В настоящем параграфе мы будем рассматривать те классы обобщенных нильпотентных групп, которые изучались в указанных выше параграфах книги или же были введены в обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [1]; рассмотрению некоторых других классов обобщенных нильпотентных групп будет посвящен следующий параграф.

Особый интерес вызывали локально нильпотентные группы. В работе А. И. Мальцева [10] показано (определения см. в Д.24.1), что если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы G являются A_1-группами, то фактор-группа группы G по ее периодической части будет нильпотентной A_4-группой. Если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы G являются A_3-группами (A_4-группами), то G будет разрешимой A_3-группой (соответственно нильпотентной группой). Если группа G обладает локальной системой из нильпотентных нормальных делителей, а все ее абелевы подгруппы являются A_3-группами, то G будет нильпотентной A_3-группой.

Для случая локально нильпотентных групп без кручения эти результаты обобщает Н. Ф. Сесекин [2]. Он строит также пример полупрямого произведения двух абелевых групп, являющийся группой без центра, обладающей локальной системой из нильпотентных нормальных делителей. В связи с указанными результатами А. И. Мальцева см., далее, работу Ю. М. Горчакова [6].

Н. Н. Мягкова [1] показала, что локально нильпотентная группа конечного специального ранга является ZA-группой, и поставила вопрос о разрешимости этих групп. Отрицательный ответ — в работе Ю. И. Мерзлякова [2]. Напомним, что в Д.20.4 отмечен пример М. И. Каргаполова [11] локально нильпотентной группы, не являющейся RN^*-группой.

В работе В. С. Чарина [9] доказано, что локально нильпотентная группа, обладающая возрастающим инвариантным рядом с абелевыми факторами конечного специального ранга, будет ZA-группой.

Подгруппа A группы G называется *инфраинвариантной* (см. Краснер [1]), если все подгруппы, сопряженные с A в G, составляют по включению линейно упорядоченное множество. Д. М. Смирнов [5] доказал, что в локально нильпотентной группе всякая инфраинвариантная подгруппа является инвариантной; в разрешимых группах это уже не так. Пример характеристически простой (см. Д.3.2) локально нильпотентной группы построил Д. Маклейн [1]. В его же работе [2] передоказываются многие из приведенных в § 64 результатов о локально нильпотентных группах.

В работе Б. И. Плоткина [19] показано, что если группа G обладает таким нильпотентным нормальным делителем A, что фактор-группа G по коммутанту подгруппы A локально нильпотентна, то группа G сама локально нильпотентна.

В. Г. Виляцер [1] рассматривает группы, в которых всякая подгруппа с д в у м я образующими нильпотентна. В общем случае такая группа может не быть локально нильпотентной (см. Е. С. Голод [1]); если, однако, в ней все абелевы подгруппы имеют конечный специальный ранг, то группа будет локально нильпотентной. В. П. Шунков [2] показал, что бесконечная локально конечная группа, все истинные бесконечные подгруппы которой локально нильпотентны, сама или локально нильпотентна, или экстремальна.

Локально нильпотентные группы без кручения. Н. Н. Мягкова [1] доказала, что локально нильпотентная группа без кручения, имеющая конечный специальный ранг, нильпотентна.

Работа В. М. Глушкова [4] содержит, помимо результатов, уже отмеченных в § 67, также много других результатов. Так, локально нильпотентная группа без кручения тогда и только тогда является нильпотентной группой конечного специального ранга k, когда она обладает рациональным рядом длины k. При этом *рациональным рядом* группы называют, следуя С. Н. Черникову [22], нормальный ряд с абелевыми факторами без кручения ранга 1; аналогично определяется *рациональная система*.

В указанной работе В. М. Глушкова доказано также, что специальный ранг локально нильпотентной группы без кручения совпадает со специальным рангом ее пополнения. В полной локально нильпотентной группе без кручения все члены нижней центральной цепи и цепи коммутантов являются полными группами. Локально нильпотентная

группа без кручения обладает центральной системой, состоящей из изолированных подгрупп.

Б. И. Плоткин [3, 12] показал, что в локально нильпотентной группе без кручения всякая максимальная линейно упорядоченная по включению система изолированных подгрупп будет рациональной системой. В работе Н. Ф. Сесекина [2] доказана нильпотентность и конечность специального ранга локально нильпотентной группы без кручения, обладающей максимальной абелевой подгруппой конечного ранга, содержащейся в нильпотентном нормальном делителе группы.

Г. Ф. Бачурин [4] доказал, что нильпотентная группа без кручения будет иметь конечный специальный ранг, если хотя бы один из максимальных абелевых нормальных делителей этой группы удовлетворяет условию минимальности для содержащихся в нем сервантных нормальных делителей самой группы (определение сервантности переносится из § 25). Показано, что на локально нильпотентные группы и даже на ZA-группы эта теорема не может быть перенесена.

Отметим, наконец, следующий результат В. С. Чарина [2]: полная группа без кручения, обладающая конечным рациональным рядом, нильпотентна. В связи с этим Б. И. Плоткин [12] поставил вопрос: не будет ли всякая полная группа без кручения, обладающая бесконечным возрастающим рациональным рядом, локально нильпотентной? Отрицательный ответ — в работах С. Н. Черникова [28] и Баумслага [20].

Группы с нормализаторным условием. Доказанная в § 63 теорема Б. И. Плоткина о локальной нильпотентности групп с нормализаторным условием была передоказана в работах Б. И. Плоткина [5] и Гирша [8]; см. также Ш. С. Кемхадзе [8].

М. Г. Лишак [1, 2] обобщает на случай мультиоператорных групп понятие группы с нормализаторным условием — это условие называется здесь *идеализаторным*, — а также понятия группы с возрастающим центральным рядом и локально нильпотентной группы. Показано, что мультиоператорная группа с возрастающим центральным рядом всегда удовлетворяет идеализаторному условию, а при некоторых дополнительных условиях будет локально нильпотентной; однако не всякая мультиоператорная группа с идеализаторным условием локально нильпотентна.

***ZA*-группы.** Группы, обладающие возрастающим центральным рядом, остаются объектом интенсивного изучения. Так, объединяя некоторые результаты Х. Х. Мухаммеджана [1] и Н. Ф. Сесекина [1], Д. М. Смирнов [4] доказал, что если группа G обладает верхним центральным рядом, длина которого равна первому бесконечному порядковому числу ω_0, то факторы этого ряда, начиная со второго, не удовлетворяют условию минимальности для подгрупп, а хотя бы один из факторов не удовлетворяет условию минимальности для сервантных подгрупп. Кулатилака [1] показал, что в бесконечной ZA-группе всякий максимальный абелев нормальный делитель бесконечен.

В. М. Глушков [5] доказал, что если один из максимальных абелевых нормальных делителей ZA-группы содержится в ее гиперцентре с конечным номером (см. Д.3.3), то сама группа нильпотентна. В работе Х. Х. Мухаммеджана [3] показано, что если хотя бы в одном максимальном абелевом нормальном делителе периодической ZA-группы G обрываются убывающие цепочки содержащихся в нем нормальных делителей группы G, то сама группа G нильпотентна и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп; отказаться в этой теореме от предположения о периодичности группы нельзя даже в случае нильпотентных групп — см. Г. Ф. Бачурин [1]. Некоторые результаты указанной работы Х. Х. Мухаммеджана, относящиеся к p-группам, обобщаются в работе Блекберна [2], в основном посвященной передоказательству ряда теорем о p-группах Черникова. Показано также, что в p-группе Черникова фактор-группы членов верхнего центрального ряда с конечными номерами по центру группы конечны.

Г. Ф. Бачурин [5] доказал, что p-группа, в которой выполняется тождество $x^p = 1$, тогда и только тогда будет ZA-группой, когда она является полупрямым произведением циклических групп в смысле Д.13.1. В работе Г. Ф. Бачурина [3] изучаются смешанные ZA-группы с конечным центром.

Макдональд [3] рассматривает в произвольной группе G для любого ее элемента a подгруппу $K(a)$, порожденную всеми коммутаторами $[a, x]$, $x \in G$ (она будет даже нормальным делителем). Эти подгруппы используются, в частности, в формулировке одного условия того, чтобы группа G была ZA-группой. Некоторые новые характеризации ZA-групп с условием минимальности для подгрупп — в работе Хельда [2].

Цикл работ Бэра [49–52] посвящен изучению тех нормальных делителей A произвольной группы G, которые содержатся в верхнем гиперцентре этой группы (см. Д.3.3). Так, A тогда и только тогда обладает указанным свойством, если для любого нормального делителя H группы G, содержащегося в A, фактор-группа A/H имеет отличное от E пересечение с центром фактор-группы G/H. Этот и многие другие результаты обобщают известные свойства ZA-групп, т. е. групп, совпадающих со своим верхним гиперцентром. Изучаются также конечнопорожденные ZA-группы.

***ZD*-группы.** Так были названы в обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [1] группы, обладающие убывающим центральным рядом, в общем случае трансфинитным; иными словами, это группы, нижняя центральная цепь которых, продолженная быть может трансфинитно, доходит до E. ZD-группы принадлежат, понятно, к числу RK-групп. Ввиду теоремы Магнуса из § 36 всякая свободная группа будет ZD-группой, а поэтому класс ZD-групп не замкнут относительно эпиморфных образов; не верна для него и локальная теорема. С другой стороны, этот класс групп замкнут относительно подгрупп и прямых произведений.

ZD-группы, у которых равен E член нижнего центрального ряда с первым бесконечным номером ω_0, представляют особый интерес: это в точности группы, являющиеся подпрямыми произведениями нильпотентных групп, т. е. *нильпотентно аппроксимируемые группы*; свободные группы принадлежат к их числу. А. И. Мальцев [7] изучал свободные произведения нильпотентно аппроксимируемых групп. Так, свободное произведение нильпотентных групп A_α, $\alpha \in I$, тогда и только тогда нильпотентно аппроксимируемо, когда или все заданные группы A_α являются группами без кручения, или же для некоторого простого числа p ни одна из групп A_α не содержит отличного от 1 элемента, из которого по модулю любого члена нижнего центрального ряда группы A_α извлекаются корни степени p^k для всех k. Нильпотентно аппроксимируемые группы изучаются также в работе Лазара [2] в связи с кольцами Ли; группы автоморфизмов таких групп рассматривает Шенкман [3]. См. также Баумслаг [17].

Грюнберг [5] доказал, что если F — нециклическая свободная группа, A — ее нормальный делитель конечного индекса j, то факторгруппа группы F по коммутанту группы A нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $j = p^l$ для некоторого простого числа p. А. И. Лихтман [1] показал, что это утверждение остается справедливым и в том случае, если вместо коммутанта группы A взять любую ее подгруппу вида $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ (см. Д.24.6).

Длины нижних и верхних центральных рядов. В работе А. И. Мальцева [7] доказано существование ZD-группы, длина нижнего центрального ряда которой равна произвольному наперед заданному порядковому числу γ. Это же для ZA-групп и их верхних центральных рядов доказал В. М. Глушков [5]. Здесь показано также, что для любого $\gamma \geqslant \omega_0 + 1$ существует ZA-группа с равной γ длиной верхнего центрального ряда, не являющаяся ZD-группой. Если же ZA-группа G имеет верхний центральный ряд длины ω_0, то она будет ZD-группой с равной ω_0 или $\omega_0 + 1$ длиной нижнего центрального ряда (Д. М. Смирнов [1]). См. также Д. Маклейн [3].

В работе Хартли [1] изучаются *верхне-нижние центральные системы*, т. е. такие инвариантные системы $\mathfrak{A} = [A_\alpha]$ группы G, что для всякого скачка A_α, $A_{\alpha+1}$ этой системы

$$[A_{\alpha+1}, G] = A_\alpha$$

и в то же время фактор-группа $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ совпадает с центром фактор-группы G/A_α. Изучается возможный порядковый тип линейно упорядоченного множества скачков такой системы, называемый *типом* системы. Заметим, что в группе могут существовать многие верхне-нижние центральные системы различных типов. Ясно, впрочем, что нильпотентная группа может обладать лишь одной такой системой, причем тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний центральные ряды совпадают.

$\overline{Z}$-группы. Так названы в обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [1] группы, всякий эпиморфный образ которых является Z-группой, т. е. всякая инвариантная система которых может быть уплотнена до центральной системы. Этот класс групп является промежуточным между классами Z- и ZA-групп. Доказано, что для него справедлива локальная теорема; ясно, что он замкнут относительно эпиморфных образов.

Отвечая на вопросы, поставленные в указанном обзоре, М. И. Каргаполов [4] показал, что прямое произведение любого множества $\overline{Z}$-групп будет $\overline{Z}$-группой; подгруппа $\overline{Z}$-группы может не обладать свойством $\overline{Z}$; существует $\overline{Z}$-группа, не являющаяся $\widetilde{N}$-группой. В работе Ю. И. Мерзлякова [1] показано, что полное прямое произведение $\overline{Z}$-групп может не быть $\overline{Z}$-группой.

§ Д.26. Энгелевы группы

Энгелевы группы, энгелевы элементы. Пусть в группе G взяты элементы a и b. Введем обозначение:

$$[\dots[[a, b], b], \ \dots, b] = [a, {}_n b],$$

если слева элемент b стоит n раз. Группа G называется *энгелевой* [1]), если для любых элементов $a, b \in G$ существует такое зависящее от них натуральное число $n = n(a, b)$, что

$$[a, {}_n b] = 1. \tag{1}$$

Если при этом число n можно выбрать так, что оно не зависит от выбора элементов a, b, то группа G называется *энгелевой конечного класса*, а именно *класса* n. Энгелевы группы класса n составляют, очевидно, многообразие.

Элемент b произвольной группы G называется *энгелевым*, если для любого элемента $a \in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n = n(a)$, что выполняется равенство (1). Если при этом число n можно выбрать одно и то же для всех a, то элемент b называется *ограниченным энгелевым* или n*-энгелевым*.

Элемент a называется *право-энгелевым*, если для любого $b \in G$ существует такое $n = n(b)$, что имеет место равенство (1), и *ограниченным право-энгелевым* или n*-право-энгелевым*, если число n не зависит от выбора элемента b. Хейнекен [2] показал, что всякий право-энгелев элемент произвольной группы является энгелевым; n-право-энгелев элемент будет $(n + 1)$-энгелевым. Энгелев элемент может, однако, не быть право-энгелевым — см. п. 3.

[1]) Это название введено Грюнбергом [1]. Б. И. Плоткин [4] говорит о нильгруппах; этот последний термин теперь используется, впрочем, в другом смысле — см. п. 5.

Связи энгелевости с нильпотентностью. Всякая локально нильпотентная группа будет, понятно, энгелевой. Е. С. Голод [1] показал, однако, что существуют энгелевы, но не локально нильпотентные группы.

Всякая нильпотентная группа класса n является энгелевой этого же класса. Возникает вопрос, будет ли всякая энгелева группа конечного класса нильпотентной. Леви [6] показал, что энгелева группа класса 2 является нильпотентной класса не больше трех. Энгелевы группы класса 3 рассматривает Хейнекен [4]. Показано, что такая группа всегда локально нильпотентная, а если она не содержит элементов порядков 2 и 5, то нильпотентная класса не больше четырех; предположение об элементах порядка 2 отбросить нельзя (Грюнберг [3]). Пример двуступенно разрешимой энгелевой группы класса 3, удовлетворяющей тождеству $x^4 = 1$, но не нильпотентной — в работе Уэстона [1]. А. И. Ширшов [1] доказал, что в энгелевой группе класса 3 любые два сопряженных элемента порождают энгелеву подгруппу класса 2.

Грюнберг [1] показал, что все члены нижней центральной цепи конечнопорожденной энгелевой группы сами конечнопорожденные. Обобщая другую теорему Грюнберга, Б. И. Плоткин [4, 5] доказал, что всякая энгелева RN^*-группа локально нильпотентна. В этих же работах Б. И. Плоткина показано следующее: всякая энгелева группа без кручения является R-группой (обобщение на группы без П-кручения — в работе М. И. Эйдинова [1]); если в энгелевой группе G все абелевы подгруппы конечны, то G будет конечной нильпотентной группой; если в энгелевой группе без кручения G все абелевы подгруппы имеют конечные ранги, то G будет нильпотентной конечного специального ранга. Два последних результата объединяются в следующем утверждении: если в энгелевой группе G все абелевы подгруппы имеют тип A_4 (см. Д.24.1), то группа G нильпотентна (Б. И. Плоткин [12]).

Всякая энгелева группа, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, локально нильпотентна (В. Г. Виляцер [1]). Если в произвольной группе G энгелевы нормальные делители A и B таковы, что для некоторых конечных i и j пересечение $A_i \cap B_j$ локально разрешимо (где, например, A_i есть i-й член нижней центральной цепи группы A), то произведение AB будет энгелевым (Митра [1]); вопрос о справедливости этого утверждения в общем случае пока открыт.

Энгелевы элементы и локально нильпотентный радикал. Дальнейшее развитие теории потребовало рассмотрения энгелевых элементов в группах, уже не предполагаемых энгелевыми. В работе Шенкмана [1] показано, что в разрешимой локально конечной группе множество всех энгелевых элементов является нормальным делителем и S-группой. Б. И. Плоткин [8], отмечая, что в произвольной группе G все элементы локально нильпотентного радикала $PH(G)$ являются в G энгелевыми, поставил вопрос, не будут ли этим исчерпываться все энгелевы элементы группы. Отрицательный ответ на него дает, понятно, отмеченный в п. 2 результат Е. С. Голода. Положительный ответ

на указанный вопрос получен Б. И. Плоткиным для групп, радикальных в смысле Плоткина (см. Д.20.4), а Бэр [61] доказал позже это же для нётеровых групп.

Объединяя эти результаты, Б. И. Плоткин [13] доказал, что во всякой группе G, обладающей возрастающим нормальным рядом с локально нётеровыми факторами, совокупность энгелевых элементов совпадает с $PH(G)$. Это же будет в группе, все абелевы подгруппы которой обладают конечным числом образующих, а также в группе, всякий нормальный делитель которой, порожденный одним элементом, есть конечнопорожденная группа.

В работе Бэра [61] показано также, что в нётеровой группе всякий энгелев элемент является ограниченным и что это же справедливо для право-энгелевых элементов. Множество всех право-энгелевых элементов нётеровой группы совпадает с ее верхним гиперцентром.

Энгелевы и субинвариантные элементы. Изложенные выше исследования развиваются в работах Грюнберга [3, 4]. Элемент a группы G называется *субинвариантным* (*достижимым*), если циклическая подгруппа $\{a\}$ субинвариантна (соответственно достижима) в группе G; совокупность субинвариантных элементов этой группы обозначим через $\sigma(G)$, совокупность достижимых элементов — через $\overline{\sigma}(G)$. Далее, через $\rho(G)$ обозначим совокупность таких элементов $a \in G$, что всякий элемент $x \in G$ субинвариантен в подгруппе U_x, порожденной элементом x и всеми элементами, сопряженными в G с элементом a. Аналогично определяется $\overline{\rho}(G)$ — вместо субинвариантности нужно говорить о достижимости и дополнительно требовать существование нормального ряда ограниченной длины (независимо от x), связывающего $\{x\}$ с U_x.

В произвольной группе G подмножества $\sigma(G)$, $\overline{\sigma}(G)$, $\rho(G)$ и $\overline{\rho}(G)$ являются характеристическими подгруппами (для $\overline{\sigma}(G)$ это доказал еще Бэр [56]). Они связаны между собой и с радикалом $PH(G)$, верхним гиперцентром $\overline{Z}$ и ω_0-м гиперцентром Z_{ω_0} группы G (где ω_0 — первое бесконечное порядковое число) включениями

$$\overline{Z} \subseteq \rho(G) \subseteq \sigma(G) \subseteq PH(G),$$
$$Z_{\omega_0} \subseteq \overline{\rho}(G) \subseteq \overline{\sigma}(G).$$

Существует счетная периодическая двуступенно разрешимая группа G, в которой все шесть подпрупп $\sigma(G)$, $\overline{\sigma}(G)$, $\rho(G)$, $\overline{\rho}(G)$, $\overline{Z}$ и Z_{ω_0} различны. Если вместо периодической группы взять p-группу (группу без кручения), то непременно $\sigma(G) = \rho(G)$ (соответственно $\overline{\rho}(G) = Z_{\omega_0}$), а в остальном указанные подгруппы могут остаться различными.

Обозначим через $L(G)$, $\overline{L}(G)$, $R(G)$, $\overline{R}(G)$ соответственно множества всех энгелевых, ограниченных энгелевых, право-энгелевых и ограниченных право-энгелевых элементов группы G. Всегда справедливы

включения

$$\sigma(G) \subseteq L(G), \quad \overline{\sigma}(G) \subseteq \overline{L}(G), \quad \rho(G) \subseteq R(G), \quad \overline{\rho}(G) \subseteq \overline{R}(G).$$

Если $\sigma(G) = L(G)$, то ввиду

$$\sigma(G) \subseteq PH(G) \subseteq L(G),$$

будет

$$\sigma(G) = PH(G) = L(G);$$

последнее равенство специально интересовало нас в п. 3.

Все четыре равенства

$$\sigma(G) = L(G), \quad \overline{\sigma}(G) = \overline{L}(G), \quad \rho(G) = R(G), \quad \overline{\rho}(G) = \overline{R}(G) \qquad (2)$$

выполняются во всякой разрешимой группе, а также (см. Бэр [61]) во всякой нётеровой группе. Объединяя эти результаты, Грюнберг [4] показал, что равенства (2) справедливы во всякой группе, являющейся расширением разрешимой группы при помощи нётеровой; они справедливы и в такой группе G, в которой множество энгелевых элементов $L(G)$ порождает разрешимую локально нильпотентную подгруппу.

Задача объединения этих утверждений с приведенными в предшествующем пункте результатами Б. И. Плоткина представляет несомненный интерес.

Отметим здесь же работу Каппе [1], в которой доказано, что 2-право-энгелев элемент любой группы G перестановочен со своими сопряженными, т. е. порождает в G абелев нормальный делитель. Все 2-право-энгелевы элементы группы G составляют в ней характеристическую подгруппу. Некоторые результаты, относящиеся к вопросу о принадлежности n-право-энгелева элемента группы G к некоторому ее гиперцентру с конечным номером — в работе Хейнекена [5].

Квазинильпотентные группы, нильгруппы. Заслуживают дальнейшего изучения и сами подгруппы, введенные в предшествующем пункте. Ш. С. Кемхадзе [8] и Бэр [72] доказали, что в любой группе G подгруппа $\sigma(G)$ совпадает с пересечением локально нильпотентного радикала $PH(G)$ и максимальной инвариантной RN^*-подгруппы группы G; существование во всякой группе такой однозначно определенной инвариантной подгруппы очевидно. См. также работу Ш. С. Кемхадзе [9].

Группы, все элементы которых субинвариантны (т. е. $\sigma(G) = G$), изучаются под названием *квазинильпотентных групп* в работе Ш. С. Кемхадзе [8]. Их можно определить также как группы, в которых субинвариантны все конечнопорожденные подгруппы. Этот класс групп строго шире класса групп с нормализаторным условием (т. е. групп, все подгруппы которых субинвариантны), но строго содержится в классе локально нильпотентных групп, являясь пересечением последнего с классом RN^*-групп.

Бэр [56] называет *нильгруппой* группу G, все элементы которой достижимы (т. е. $\overline{\sigma}(G) = G$). Классы нильгрупп и ZA-групп лишь пересекаются, но ни один из них не содержит целиком другого; нильпотентные группы принадлежат, понятно, к их пересечению. Всякая нильгруппа обладает периодической частью, являющейся S-группой. Конечнопорожденные нильгруппы совпадают с нётеровыми нильпотентными группами. См. также Ш. С. Кемхадзе [10].

В § 14 определен взаимный коммутант $[A, B]$ любых подмножеств A, B группы G. Используя зто понятие, Чан Ван Хао [3] для любого элемента $a \in G$ полагает

$$[G, {}_1a] = [G, a], \quad [G, {}_{n+1}a] = [[G, {}_na], a]$$

и доказывает, что группа G тогда и только тогда будет нильгруппой, когда для всякого $a \in G$ существует такое натуральное число $n = n(a)$, что

$$[G, {}_na] = E.$$

В этой же работе изучаются нильгруппы, все абелевы подгруппы которых имеют тип A_2 (или тип A_3) (см. Д.24.1). Во втором из этих случаев группа будет нильпотентной и конечного специального ранга; существуют, однако, нильгруппы конечного специального ранга, но не нильпотентные.

Обобщения. Подгруппа A группы G называется *локально субинвариантной* (*локально достижимой*), если G обладает локальной системой подгрупп, содержащих A, в каждой из которых A субинвариантна (соответственно достижима). Если при этом $A = \{a\}$, то элемент a называется *локально субинвариантным* (*локально достижимым*).

В работе Б. И. Плоткина [12] показано, что в произвольной группе G ее локально нильпотентный радикал $PH(G)$ совпадает с множеством всех локально субинвариантных элементов этой группы. Множество всех локально достижимых элементов любой группы G также составляет в ней характеристическую подгруппу, которая может отличаться, впрочем, как от подгруппы $PH(G)$, так и от подгруппы $\overline{\sigma}(G)$ (Б. И. Плоткин и Ш. С. Кемхадзе [1], Е. М. Левич [1]).

Б. И. Плоткин [16] называет элемент b группы G *алгебраическим*, если для всякого $a \in G$ подгруппа, порожденная всеми элементами $[a, {}_nb]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. п. 1), порождается конечным числом этих элементов. Всякий энгелев элемент, а также всякий элемент конечного порядка являются алгебраическими элементами. Группа G названа *алгебраической*, если все ее элементы алгебраические. Всякая локально нётерова группа будет алгебраической. См. также Бэр [72].

В работе А. И. Ширшова [1] введена следующая конструкция. Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ задается одним тождеством от двух неизвестных

$$w(x, y) = 1. \tag{3}$$

Тогда тождество $w(x^{-1}yx, y) = 1$ определяет многообразие $\mathfrak{M}'$, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$. Положим $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathfrak{M}'_n$. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие всех абелевых групп, а $w(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$, то $\mathfrak{M}_n$ совпадает с многообразием энгелевых групп класса n. Перейдем, однако, от тождества (3) к тождеству $w(xy, yx) = 1$ и обозначим через $\mathfrak{M}''$ определяемое им многообразие, а затем положим $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}''_n$. Начиная снова с многообразия всех абелевых групп и тождества коммутативности, мы получим новую последовательность многообразий, при $n \geqslant 3$ отличных от многообразий энгелевых групп конечных классов.

Эта конструкция допускает разнообразные обобщения и несомненно может быть использована в теории многообразий групп.

§ Д.27. Нильпотентные группы

Некоторые отдельные результаты. О бесконечных нильпотентных группах, помимо результатов, вытекающих из теории обобщенных нильпотентных групп, и материала, разбросанного по различным предшествующим параграфам, можно указать еще ряд изолированных результатов.

В работах А. П. Дицмана [8] и Э. Б. Кикодзе [1] можно найти новые критерии нильпотентности группы. Леви [6] доказал, что если в группе G всякая подгруппа с двумя образующими является нильпотентной класса $\leqslant 2$, то сама группа G нильпотентная класса $\leqslant 3$; если же $n > 2$, то, как показал Хейнекен [3], группа G тогда и только тогда будет нильпотентной класса $\leqslant n$, когда все ее подгруппы с n образующими являются нильпотентными класса $\leqslant n$. Теоретико-категорное определение класса нильпотентности — в работе Экмана и Хилтона [1].

В работе Блекберна [1] рассмотрены нильпотентные группы, коммутант которых порождается двумя элементами, и показано, что в этом случае коммутант или абелев, или же конечен и является расширением циклической группы при помощи циклической, а его взаимный коммутант со следующим членом нижнего центрального ряда группы равен E. Ньюмэн [3] рассматривает связи между членами нижних центральных рядов нильпотентной группы и ее подгруппы.

Нильпотентные группы класса 2 являются первыми среди некоммутативных групп, для которых естественно стараться получить полное описание. Такое описание дано Н. Ф. Сесекиным [3] для конечнопорожденных нильпотентных групп без кручения класса 2.

Конрад [3] дает обозрение нильпотентных групп класса 2, строящихся следующим образом. Берутся абелевы группы A и B и функция $f : A \times A \to B$, билинейная, кососимметрическая и удовлетворяющая условию $f(a, a) = 0$ для всех $a \in A$. Тогда множество пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$, превращается в группу относительно операции

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', f(a, a') + b + b').$$

Эти группы описываются при дополнительном условии, что элементы $f(a, a')$, $a, a' \in A$, порождают всю группу B. К указанному классу групп принадлежат, в частности, все полные нильпотентные группы класса 2, а также все центральные расширения группы B при помощи группы A, если группа A без кручения или группа B не содержит элементов второго порядка.

В работе В. Н. Ремесленникова [1] дается некоторое обозрение подмногообразий многообразия нильпотентных групп класса 3. Г. Ф. Бачурин [2] изучает нильпотентные группы, удовлетворяющие условию минимальности для абелевых подгрупп или для абелевых нормальных делителей. [См. ДК.]

В. С. Чарин [6] показал, что если G — нильпотентная группа без кручения конечного специального ранга, то всякая ее локально нильпотентная группа автоморфизмов нильпотентна, причем описывается строение последней. Хаймо [4] рассматривает такие нильпотентные группы G класса 2, фактор-группы которых по коммутанту G' обладают конечной экспонентой, и изучает эндоморфизмы этих групп, индуцирующие в фактор-группе G/G' эндоморфизм вида $x \to x^n$, n фиксировано.

Отметим здесь же работу Ньюмэна и Уайголда [1], в которой, в развитие идущей от работы О. Ю. Шмидта [8] теории конечных ненильпотентных групп, все истинные подгруппы которых нильпотентны, рассматриваются бесконечные группы с этим свойством. Результаты, здесь полученные, имеют в основном условный характер, так как, например, пока нет примера бесконечной группы, не являющейся нильпотентной класса не выше k, все истинные подгруппы которой были бы нильпотентными класса не выше k.

Конечнопорожденные нильпотентные группы. Г. Хигмэн [7] показал, что если G — конечнопорожденная нильпотентная группа, то для любого бесконечного множества Π простых чисел пересечение всех подгрупп G^p, $p \in \Pi$, конечно. При этих же условиях существует такое натуральное число n, что равно E пересечение всех характеристических подгрупп группы G, индексы которых конечны и являются степенями простых чисел с показателями, не превосходящими n.

В работе Блекберна [3] показано, что если в конечнопорожденной нильпотентной группе G элементы a и b не сопряжены, то найдется такой эпиморфизм φ группы G на конечную группу H, что элементы $a\varphi$ и $b\varphi$ не будут сопряженными в H. Иными словами, если уравнение $x^{-1}axb^{-1} = 1$ не имеет решения в G, то уравнение $x^{-1}(a\varphi)x(b\varphi)^{-1} = 1$ не будет иметь решения в H. Этот результат в его последней формулировке нельзя перенести на случай произвольного слова $w(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$. [См. ДК.]

Линдон [4] показал, что в конечнопорожденной нильпотентной группе положительно решается проблема тождества. Подробнее изложение соответствующего алгоритма дано в работе А. И. Мальцева [11].

Свободные нильпотентные группы. В работе О. Н. Головина и Н. П. Гольдиной [1] для свободных нильпотентных групп класса 2, а затем в работе А. И. Мальцева [11] для свободных нильпотентных групп любого класса n доказано, что данная система элементов такой группы тогда и только тогда является системой свободных образующих свободной нильпотентной подгруппы того же класса, когда эта система линейно независима по модулю коммутанта группы. Доказательство А. И. Мальцева использует аппарат лиевых алгебр; теоретико-групповое доказательство дано в работе Мостовского [1]. Обобщение этой теоремы на случай свободных полинильпотентных групп, полученное А. Л. Шмелькиным, приведено в Д.24.6.

Доказательство Мостовского основано на следующей теореме: если x_i, $i \in I$,— система свободных образующих свободной (или свободной нильпотентной) группы F, то при любых элементах x_i', $i \in I$, лежащих в коммутанте F' группы F, и любых натуральных числах n_i, $i \in I$, элементы $x_i^{n_i} x_i'$ составляют систему свободных образующих порождаемой ими подгруппы. В указанной работе Мостовского показано также, что подгруппа A свободной нильпотентной группы F тогда и только тогда будет свободной нильпотентной группой, когда она или удовлетворяет условию $A' = A \cap F'$, или же является циклической.

В работе О. Н. Головина и Н. П. Гольдиной [1] строение подгрупп свободной нильпотентной группы F класса 2 описано почти исчерпывающим образом. Именно, если ρ — ранг группы F (т. е. мощность системы свободных образующих), то любая подгруппа $A \subseteq F$ имеет вид

$$A = A_\pi \cdot D,$$

где A_π — свободная нильпотентная группа класса 2 и ранга π, $\pi \leqslant \rho$; D — свободная абелева группа ранга $\sigma \leqslant \frac{1}{2}\rho(\rho-1)$ при конечном ρ и $\sigma \leqslant \rho$ при бесконечном ρ; коммутант подгруппы A_π лежит в D; D лежит в центре A. Обратно, при дополнительном предположении о конечности π всякая группа A, обладающая указанным строением, изоморфна подгруппе группы F.

Работа Морана [12] посвящена вопросу о строении подгрупп свободной нильпотентной группы F любого класса n. Приведем лишь один из результатов этой работы. Если $A \subseteq F$, то

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\},$$

причем а) A_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, есть свободная нильпотентная группа, класс которой равен целой части числа n/l; б) $[A_i, A_j] \subseteq \{A_{i+j}, \ldots \ldots, A_n\}$ при $i + j \leqslant n$ и $[A_i, A_j] = E$ при $i + j > n$; в) фактор-группа $\{A_l, \ldots, A_n\}/\{A_{i+1}, \ldots, A_n\}$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, является свободной абелевой группой, свободно порожденной образами свободных образующих группы A_l. С другой стороны, если группа A имеет указанное здесь строение, то можно лишь утверждать, что она нильпотентная без кручения класса не выше n.

В. Н. Ремесленников [1] доказал, что всякая характеристическая подгруппа свободной нильпотентной группы класса 2 вполне характеристична.

В работе Мостовского [2] изучается группа автоморфизмов нильпотентной группы G класса n, свободной в некотором многообразии. Так, эта группа автоморфизмов является расширением нильпотентной группы класса $n-1$ при помощи группы автоморфизмов группы G/G'.

Подгруппа Фраттини. Так называют теперь Ф-подгруппу $\Phi(G)$ группы G (см. § 62); для конечных групп эта подгруппа была введена и впервые изучалась в работе Фраттини [1]. Если группа G полициклическая (см. Д.24.3) и если подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ содержит коммутант G', то группа G нильпотентная (Гирш [4], Ито [1]).

Коммутант локально нильпотентной группы содержится в ее подгруппе Фраттини (Д. Маклейн [2]). Больше того, для свойства быть такой группой, коммутант которой содержится в подгруппе Фраттини, справедлива локальная теорема.

В работе Б. Неймана [23] отмечено, что $\Phi(G)$, являясь характеристической подгруппой группы G, может не быть вполне характеристической и что при эпиморфизме подгруппа Фраттини отображается в подгруппу Фраттини, но не обязательно на нее. Подгруппа Фраттини абелевой труппы всегда вполне характеристична (Длаб [7]); это же верно для периодической нильпотентной группы (М. С. Цаленко [2]).

По образцу возрастающих рядов коммутантов (см. Д.23.5) Б. Нейман [23] строит возрастающие ряды Фраттини. В некоторых случаях эти ряды могут обрываться, т. е. существуют группы, которые не могут быть изоморфными подгруппе Фраттини никакой группы (см. также Хобби [1]). С другой стороны, Длаб [7] показал, что всякая абелева группа G служит подгруппой Фраттини для некоторой абелевой группы H, даже такой, что всякий неединичный элемент из H в некоторой степени равен неединичному элементу из G. Группа H с этими свойствами определяется однозначно с точностью до изоморфизма над G и содержится во всякой абелевой группе $\overline{G}$, для которой $\Phi(\overline{G}) = G$.

Работы Длаба [5] и Длаба и Коржинека [1] посвящены вопросу о подгруппе Фраттини прямого произведения. Естественно ожидать, что эта подгруппа является прямым произведением подгрупп Фраттини прямых сомножителей. Это утверждение доказано во многих случаях: для абелевых групп, для конечнопорожденных групп, для RN^*-групп. Оно доказано также для прямых произведений конечнопорожденных групп, для прямых произведений групп с конечнопорожденными подгруппами Фраттини, а также для прямых произведений групп, в каждой из которых подгруппа Фраттини содержится в пересечении всех максимальных нормальных делителей, если такие существуют.

Вместе с тем справедливость рассматриваемого утверждения в общем случае оказалась равносильной справедливости, пока не доказанной и не опровергнутой, следующего утверждения: всякая простая группа обладает максимальной истинной подгруппой.

Г. Хигмэн и Б. Нейман [2] доказали, что всякий отличный от единицы элемент группы, разложимой в свободное произведение, лежит вне некоторой максимальной подгруппы, и поэтому подгруппа Фраттини такой группы равна E.

Нильпотентность подгруппы Фраттини. Еще Фраттини [1] доказал, что для любой конечной группы G подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна. Это же доказали Гирш [7] и Ито [1] для полициклических групп. С другой стороны, в работе Г. Хигмэна и Б. Неймана [2] строятся различные примеры групп, совпадающих со своей подгруппой Фраттини, но не нильпотентных и даже не являющихся ZA- или ZD-группами; см. также Д. Маклейн [2].

Шпехт [2] доказал, что если группа G периодична и по каждому простому числу p обладает лишь конечным числом силовских p-подгрупп, то ее подгруппа Фраттини будет S-группой (см. § 64).

Простой пример группы, подгруппа Фраттини которой не является локально нильпотентной, указан в работе Ф. Холла [19], посвященной подгруппам Фраттини конечнопорожденных групп. В этой работе доказаны также следующие утверждения (через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ обозначаются соответственно классы всех нильпотентных, всех абелевых и всех конечных групп; произведение классов понимается в смысле Д.21.3):

Если G — конечнопорожденная $\mathfrak{N}^{n+1}$-группа, то $\Phi(G)$ принадлежит к классу $\mathfrak{N}^n$, $n \geqslant 1$; в частности, подгруппа Фраттини конечнопорожденной $\mathfrak{N}^2$-группы нильпотентна. Существует $\mathfrak{A}^{n+2}$-группа G с двумя образующими, $n \geqslant 1$, для которой $\Phi(G)$ не является $\mathfrak{N}^n$-группой.

В указанной работе Ф. Холла изучаются также связи подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ со следующими характеристическими подгруппами группы G: *радикал Фиттинга* [6] $\rho_1(G)$, т. е. подгруппа, порожденная всеми нильпотентными нормальными делителями группы G; подгруппа $\rho_2(G)$, порожденная всеми инвариантными ZA-подгруппами этой группы; локально нильпотентный радикал $PH(G)$; подгруппа $\psi(G)$, состоящая из всех таких элементов $x \in G$, что для любых нормальных делителей K и H группы G, для которых $K \subset H$ и H/K является минимальным нормальным делителем в G/K, взаимный коммутант $[H, x]$ содержится в K.

Заметим, что подгруппы $\rho_1(G)$ и $\rho_2(G)$ могут не быть нильпотентными группами и соответственно ZA-группами, но всегда

$$\rho_1(G) \subseteq \rho_2(G) \subseteq PH(G).$$

Далее, всегда

$$\rho_2(G) \subseteq \psi(G), \quad (\rho_2(G))' \subseteq \Phi(G),$$

причем заменить здесь $\rho_2(G)$ на $PH(G)$ нельзя даже для конечнопорожденных групп.

Обозначим через $\rho_1 \bmod \Phi(G)$ полный прообраз подгруппы $\rho_1(G/\Phi(G))$; для конечных групп эта подгруппа совпадает с радикалом Фиттинга. Доказано, что если G конечнопорожденная $\mathfrak{N}^2\mathfrak{F}$-группа, то

$$\rho_1(G) = PH(G) = \psi(G) = \rho_1 \bmod \Phi(G)$$

и эта подгруппа нильпотентна. Построены также примеры конечнопорожденных групп G, для которых подгруппа $\rho_1(G)$ не является ZA-группой.

Часть пятая

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

§ Д.28. Основы теории абелевых групп

Введение. Теория абелевых групп развивалась в последние годы весьма интенсивно. Вскоре после выхода второго издания настоящей книги появилась монография Капланского [4], в которой многие основные результаты об абелевых группах получили новые доказательства и были перенесены на случай модулей над некоторыми ассоциативными кольцами. С другой стороны, около 1952 г. в теории абелевых групп развернулась активная работа венгерских алгебраистов, а в 1958 г. вышла богатая содержанием книга Фукса [14]. Эта книга оказала решающее влияние на дальнейшее развитие теории, в частности, благодаря сформулированным в ней многочисленным проблемам.

Давая в этом и следующих параграфах обзор работ по абелевым группам, мы не будем, понятно, касаться тех вопросов, которые уже рассматривались в предшествующих параграфах настоящего дополнения. Далее, мы ограничимся рассмотрением лишь абелевых групп б е з о п е р а т о р о в, так как операторные абелевы группы с областью операторов Σ будут модулями над некоторым ассоциативным кольцом, а именно над свободным кольцом с множеством Σ в качестве системы свободных образующих. Теория модулей к настоящему времени превратилась, однако, в самостоятельную ветвь общей алгебры, промежуточную между теорией групп и теорией колец, и ее обзор не входит в наши задачи. Тем более мы не будем касаться того немногого, что сделано относительно мультиоператорных абелевых групп (Хиггинс [1], М. Г. Лишак [3]).

Прямые суммы циклических групп. К этому классу групп относятся, в частности, конечнопорожденные абелевы группы (см. § 20) и свободные абелевы группы (см. § 19); ряд результатов о прямых суммах циклических групп, в частности основные теоремы Прюфера и Л. Я. Куликова, приведен в § 24.

Новые доказательства основной теоремы о конечнопорожденных абелевых группах опубликованы в работах Радо [1] и Шенкмана [8]. В работе Абияна [1] показано, что число прямых слагаемых в л ю б о м разложении конечнопорожденной абелевой группы G в прямую сумму циклических групп заключено между числами $r + l_1$ и $r + l_2$, где r — ранг группы G, а l_1 и l_2 — соответственно число прямых слагаемых в разложении периодической части группы G в прямую сумму

примарных циклических групп и в прямую сумму таких циклических групп, порядки которых последовательно делят друг друга.

В работе Л. С. Понтрягина [1] доказан следующий критерий: счетная абелева группа без кручения тогда и только тогда свободна, когда свободны все ее подгруппы конечных рангов, т. е. когда для всякого натурального n подгруппы ранга n удовлетворяют условию максимальности. Новое доказательство — в работе Селе [6].

Новым доказательствам и обобщениям теорем Прюфера и Л. Я. Куликова из § 24 посвящен ряд работ. Браконье [1] придал критерию Куликова следующую формулировку: p-примарная абелева группа G тогда и только тогда разложима в прямую сумму циклических групп, когда она является объединением возрастающей последовательности (1) (см. § 24) таких своих подгрупп, что $p^n G \cap A^{(n)} = O$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Дьёдонне [2] следующим образом обобщил критерий Куликова: если G примарная по p абелева группа, B — ее такая подгруппа, что G/B есть прямая сумма циклических групп, то G тогда и только тогда разложима в прямую сумму циклических групп, когда B есть объединение возрастающей последовательности

$$B^{(1)} \subseteq B^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq B^{(n)} \subseteq \ldots$$

таких подгрупп, что у каждой из них высоты элементов в группе G ограничены в совокупности. В работах Кертеса [3, 5, 6] получены критерии разложимости примарной абелевой группы в прямую сумму неразложимых групп (т. е. циклических и типа p^∞), обобщающие критерий Куликова.

В работе Фукса [2], подготовленной работами Селе [7] и Кертеса [2], установлены (параллельно с Дьёдонне [2]) условия, при которых абелево расширение прямой суммы циклических групп при помощи прямой суммы циклических групп само будет разложимым в прямую сумму циклических групп. В этой же работе Фукса для любой абелевой группы G доказано, что если ее подгруппа H является прямой суммой циклических групп и если для некоторого натурального n имеет место включение

$$nG \subseteq H,$$

то и само G будет прямой суммой циклических групп; см. также Мостовский и Сонсяда [1]. Ясно, что отсюда следует первая теорема Прюфера.

В основном работа Фукса [2] посвящена следующим рассмотрениям. Если перенести определение *базы* из § 20 на случай любой прямой суммы циклических групп, то, очевидно, подмножество M абелевой группы G тогда и только тогда будет базой для G, если оно является а) неприводимой системой образующих (см. § 6), б) максимальной независимой системой. При этом семейство элементов M абелевой группы называется *независимым*, если из всякого равенства вида

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_k a_k = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$, а $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — целые числа, всегда следует

$$n_1 a_1 = n_2 a_2 = \ldots = n_k a_k = 0.$$

В работе Фукса установлены некоторые условия, при которых семейство элементов, обладающее одним из свойств а), б), будет базой; из этих условий выводятся теоремы Прюфера, Понтрягина и Куликова.

Во всякой абелевой группе можно найти максимальные независимые (в определенном выше смысле) системы элементов. Длаб [1] показал, что в примарной группе все эти системы имеют одну и ту же мощность; в общем случае это не так.

Цзян У-чжун [1] описывает абелевы группы, обладающие одним из следующих свойств: (а) всякий ненулевой элемент группы G содержится в циклическом прямом слагаемом; (б) G есть прямая сумма циклических групп и для всякой подгруппы $H \subseteq G$ существуют такие базы x_α, $\alpha \in I$, в G и y_β, $\beta \in J$, в H, что всякое y_β кратно некоторому x_α; (в) для всякой независимой системы элементов a_α, $\alpha \in I$, группы G в этой группе можно найти такую независимую систему элементов b_α, $\alpha \in I$, что для всякого $\alpha \in I$ b_α кратно a_α и подгруппа $\{b_\alpha, \alpha \in I\}$ служит для G прямым слагаемым. См. также Цзян У-чжун и Цзян У-и [1].

Абелевы группы, близкие к прямым суммам циклических групп. Селе [9] рассматривает прямую сумму циклических групп с одной объединенной подгруппой и устанавливает условия, при которых эта группа разложима в прямую сумму циклических групп. Заметим, что всякая группа, являющаяся прямой суммой б е с к о н е ч н ы х циклических групп с объединенной подгруппой, разложима в прямую сумму некоторого множества конечных циклических групп и счетной группы с образующими $a_1, a_2, \ldots$ и определяющими соотношениями

$$n_1 a_1 = n_2 a_2 = \ldots,$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — различные натуральные числа.

В работах Рейда [1] и Ирвина и Кхаббаза [1] изучаются Σ^n-*циклические группы*, т. е. абелевы группы, порожденные n подгруппами, каждая из которых разложима в прямую сумму циклических групп, $n \geqslant 1$. Группа тогда и только тогда Σ^n-циклична, $n > 2$, когда она Σ^2-циклична. Примарная по p группа тогда и только тогда Σ^2-циклична, когда она не является прямой суммой группы с ограниченными в совокупности порядками элементов и конечного числа (не менее одной) групп типа p^∞. Периодическая абелева группа тогда и только тогда Σ^2-циклична, когда таковы все ее примарные компоненты. Произвольная абелева группа G с периодической частью T тогда и только тогда является Σ^2-циклической, когда или G/T имеет бесконечный ранг, или же G/T свободная группа конечного ранга, а подгруппа T Σ^2-циклична.

Опираясь на результаты Шпекера [1] и усиливая результат Ямабе [1], относящийся к счетному случаю, Б. и Х. Нейманы [5] показали, что если мощность абелевой группы G не превосходит первого несчетного кардинального числа и если на G можно задать билинейную функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую условию, что $\varphi(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$, то G будет свободной абелевой группой. Вопрос о возможности отказа от предположения о мощности группы пока открыт.

Пусть последовательность конечнопорожденных абелевых групп

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots \tag{1}$$

является прямым спектром с мономорфизмами $G_n \to G_{n+1}$ или обратным спектром с эпиморфизмами $G_{n+1} \to G_n$. Хилл [4] устанавливает необходимые и достаточные условия для того, чтобы предельные группы этих спектров определялись самой последовательностью (1), т. е. не зависели от выбора мономорфизмов $G_n \to G_{n+1}$ и соответственно эпиморфизмов $G_{n+1} \to G_n$. Показано также, что полные прямые суммы счетного числа циклических групп и групп целых p-адических чисел и только они могут служить предельными группами обратных спектров конечнопорожденных групп (1) с произвольными гомоморфизмами $G_{n+1} \to G_n$. См. также Хилл [2].

Полные абелевы группы. В дополнение к сказанному в § 23 отметим еще одну характеризацию полных абелевых групп, идущую от работы Бэра [26]. Назовем абелеву группу G *инъективной*, если для любых абелевых групп A и B, $A \subset B$, всякий гомоморфизм $\varphi : A \to G$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi : B \to G$. Оказывается, что полные абелевы группы и только они являются инъективными.

Селе [5] показал, что абелева группа будет полной тогда и только тогда, когда она совпадает со своей подгруппой Фраттини, а также тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых конечных эпиморфных образов. В работе Длаба [3] показано, что полные абелевы группы можно охарактеризовать как абелевы группы, которые не могут быть порождены объединением истинной подгруппы и одного элемента, а также как абелевы группы, всякая система образующих которых остается системой образующих после выбрасывания из нее любого одного элемента; такая система образующих названа *сильно приводимой*.

Кертес [4], продолжая начатое С. Маклейном [2] изучение двойственности между полными и свободными абелевыми группами, показал, что абелева группа тогда и только тогда является полной (свободной), когда она изоморфна фактор-группе (подгруппе) всякой абелевой группы, подгруппой (фактор-группой) которой она является. Показано также, что абелева группа A будет полной, свободной или прямой суммой полной и свободной групп тогда и только тогда, когда всякая абелева группа G, содержащая A и имеющая A эндоморфным образом, обладает прямым слагаемым, изоморфным A.

В работе Гочаи [1] рассматриваются системы линейных уравнений над полной абелевой группой G. Уравнения имеют вид

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_sx_s = a,$$

где $a \in G$, $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — целые числа. Система уравнений может быть бесконечной, совокупность неизвестных, входящих в эти уравнения, также не обязана быть конечной. Показано, что всякая совместная система линейных уравнений над полной абелевой группой G обладает решением в G. При этом система уравнений называется *совместной*, если всякая линейная зависимость между левыми частями уравнений переносится на их правые части; для полной группы это равносильно тому, что рассматриваемая система уравнений обладает решением в некоторой надгруппе группы G.

В конце § 23 показано, что пересечение нескольких полных подгрупп полной абелевой группы может не быть полным. Отвечая на вопрос, поставленный в книге Фукса [14], Шарль [2] и Кхаббаз [3] охарактеризовали подгруппы полной абелевой группы G, являющиеся пересечениями полных подгрупп этой группы. Так, в первой из этих работ показано, что подгруппа A тогда и только тогда обладает этим свойством, когда для любого простого числа p или подгруппа A p-полная, или же $A'_p \neq G'_p$, где, например, G'_p есть нижний слой p-примарной компоненты периодической части группы G. См. также Рангасвами [5].

Перенесение основных свойств полных абелевых групп на П-полные абелевы группы (см. Д.19.1) дано в работе Хилтона и Яхья [1].

Вполне разложимые группы. Обобщая определение, введенное в § 31, назовем абелеву группу *вполне разложимой*, если она разлагается в прямую сумму локально циклических групп, т. е. групп без кручения ранга 1, примарных циклических групп и групп типа p^∞. Л. Я. Куликов [3], обобщая некоторые результаты из §§ 23, 24, показал, что если вполне разложимая абелева группа G периодична или счетна, то любые два прямых разложения этой группы обладают изоморфными продолжениями; иными словами, любое прямое слагаемое такой группы само вполне разложимо. Показано также, что прямое слагаемое H вполне разложимой группы G будет само вполне разложимым, если фактор-группа H по периодической части счетна. См. также Ковач [4].

Системы образующих. В § 6 определено понятие неприводимой системы образующих. Переходом к отрицанию получаем понятие *приводимой* системы образующих; в п. 4 определены *сильно приводимые* системы образующих. Далее, система образующих группы G называется *наследственно приводимой*, если всякая ее подсистема, являющаяся системой образующих для G, приводима; аналогично определяется *наследственно сильно приводимая* система образующих.

В работах Длаба [3, 4] системы образующих классифицируются в зависимости от того, какими из указанных выше свойств они обладают, а какими нет, и устанавливается, какие комбинации типов

систем образующих могут реализоваться в одной и той же абелевой группе. В частности, в p-примарной группе, являющейся прямой суммой счетного числа групп типа p^∞ и счетного числа циклических групп порядка p, имеются системы образующих всех типов. См. также Длаб [9].

Бесконечная система образующих группы G называется *наследственной*, если всякая ее подсистема, ей равномощная, также служит для G системой образующих. В работах Лося, Сонсяды и Сломиньского [1] и Лося [2] описаны все абелевы группы, обладающие наследственной системой образующих. Группы с этим свойством непременно счетны. Периодическая группа тогда и только тогда обладает такой системой образующих, если она является прямой суммой полной группы, не более чем счетной мощности, и группы с циклическими примарными компонентами по всем p. Произвольная абелева группа тогда и только тогда обладает наследственной системой образующих, когда она конечного ранга и у нее нет нециклических конечных эпиморфных образов.

§ Д.29. Прямые слагаемые. Сервантные и высокие подгруппы

Прямые слагаемые. Кертес [1] показал, что тогда и только тогда всякая подгруппа группы G служит для G прямым слагаемым, если группа G абелева, периодическая и порядки ее элементов не делятся на квадрат никакого простого числа, т. е. если G есть прямая сумма циклических групп простых порядков.

В работе Селе [11] доказано, что подгруппа A абелевой группы G, являющаяся прямой суммой циклических групп одного и того же конечного порядка n, тогда и только тогда служит для G прямым слагаемым, если $A \cap nG = O$. Из этой теоремы выводятся описание абелевых групп с условием минимальности, полученное в работе А. Г. Куроша [1] (см. § 53), идущее от Бэра [13] и С. В. Фомина [1] достаточное условие расщепляемости смешанной абелевой группы, доказанное в § 29, а также теорема Л. Я. Куликова [1] о том, что всякая абелева группа, содержащая ненулевые элементы конечного порядка и отличная от примарных циклических групп и групп типа p^∞, разложима в прямую сумму (см. конец § 29).

В работе Эрдеи [2] указаны условия, при которых некоторая периодическая подгруппа абелевой группы содержится в прямом слагаемом с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Фукс [10] рассматривает прямое слагаемое A абелевой группы G, *абсолютное* в том смысле, что для всякой подгруппы $B \subseteq G$, максимальной относительно свойства удовлетворять условию $A \cap B = O$, будет $G = A + B$. Показано, что прямое слагаемое A тогда и только тогда абсолютное, когда или A полное, или же фактор-группа G/A периодична и в ее p-компоненте (для любого простого p) порядки

элементов не превосходят порядка любого элемента из p-компоненты A, не лежащего в pA.

Этот результат обобщается в работе Грецера и Е. Шмидта [2]. В ней для прямого слагаемого A абелевой группы G через A^* обозначается пересечение всех прямых слагаемых группы G, дополнительных к A, доказывается, что A^* будет вполне характеристической подгруппой в G, и устанавливаются условия, при которых для всякой подгруппы $B \subseteq G$, максимальной относительно свойств $B \supseteq A^*$, $A \cap B = O$, будет $G = A + B$.

Бьюмонт и Пирс [5] изучают *ID-группы*, т. е. абелевы группы, обладающие прямым слагаемым, изоморфным самой группе, а также *IP-группы*, т. е. группы, изоморфные своей истинной сервантной подгруппе. Существуют IP-группы, не являющиеся ID-группами. Если периодическая часть группы G и фактор-группа по ней не являются ID-группами, то и G не будет ID-группой. Полная группа G тогда и только тогда является ID-группой, когда бесконечны или ее ранг, или же p-ранг хотя бы для одного p. Группа тогда и только тогда является ID-группой, когда она обладает такими эндоморфизмами φ, ψ, что $\psi\varphi = \varepsilon$, $\varphi\psi \neq \varepsilon$, где ε — тождественный автоморфизм.

Сервантные подгруппы. Эти подгруппы определены в § 25; их называют также *чистыми*. В работе Фукса, Кертеса и Селе [2] показано, что у прямых сумм циклических групп простых порядков и только у них всякая подгруппа сервантна. В этой работе изучались также абелевы группы, всякая сервантная подгруппа которых служит прямым слагаемым; полное описание этих групп — в работе С. Н. Черникова [23].

Отметим следующую характеризацию сервантных подгрупп (Фукс [14]): подгруппа C абелевой группы G тогда и только тогда сервантна, когда для всех натуральных n C/nC служит прямым слагаемым для G/nC.

Гочаи [2] показал, что подгруппа A абелевой группы G тогда и только тогда сервантна в G (соответственно служит для G прямым слагаемым), когда любая, быть может бесконечная, система уравнений над A (ср. Д.28.4) относительно конечной системы неизвестных (соответственно относительно любого множества неизвестных), обладающая решением в G, разрешима в A. Бальцержик [1] предложил простое доказательство той части этого утверждения, которая относится к прямым слагаемым, причем показал, что можно ограничиться множеством неизвестных, мощность которого равна индексу A в G.

В книге Фукса поставлен вопрос о мощности множества сервантных подгрупп группы. Е. Уокер [2] показал, что во всякой абелевой группе без кручения бесконечного ранга, имеющей мощность $\mathfrak{m}$, для всякого бесконечного $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ можно найти $2^{\mathfrak{m}}$ сервантных подгрупп мощности $\mathfrak{m}$ и индекса $\mathfrak{n}$, пересекающихся по нулю. Бойер [2] доказал, что мощность множества сервантных подгрупп абелевой группы несчетной мощности $\mathfrak{m}$, имеющих эту же мощность $\mathfrak{m}$, равна $2^{\mathfrak{m}}$.

Наконец, Хилл [5] дал полное решение проблемы, показав, что мощность множества сервантных подгрупп абелевой группы G мощности $\mathfrak{m}$ равна $2^{\mathfrak{m}}$ во всех случаях, кроме следующего: $G = F + T$, где T есть прямая сумма конечной группы и групп типа p_i^∞, по одной для конечного числа различных простых чисел p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а F — группа без кручения конечного ранга r, причем F не имеет сервантных подгрупп, гомоморфно отображающихся на одну из групп типа p_i^∞, $i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае множество сервантных подгрупп не более чем счетно; оно конечно тогда и только тогда, когда или $r = 0$, или же $r = 1$ и $n = 0$.

В работе Хилла [6] изучаются *сервантно полные* примарные абелевы группы, т. е. группы, всякая подгруппа нижнего слоя которых служит нижним слоем для некоторой сервантной подгруппы. Мегиббен [4] рассматривает подгруппы примарной группы, являющиеся пересечениями сервантных подгрупп.

Шарль [3] ищет условия, при которых для подгруппы A абелевой группы G существует минимальная содержащая ее сервантная подгруппа. Так, если группа G примарная и не содержит элементов бесконечной высоты, а подгруппа A циклическая, то для A такая *сервантная оболочка* существует; между всякими двумя из них существует изоморфизм, продолжающий тождественный автоморфизм подгруппы A. Исправление одной неточности из этой работы — у Хэда [2] и Мегиббена [1]. В работе Хилла и Мегиббена [1] показано, в частности, что тогда и только тогда все подгруппы примарной группы G обладают сервантными оболочками, если G является прямой суммой полной группы и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Бойер и Е. Уокер [1], отметив, что лишь у прямых сумм циклических групп простых порядков все конечнопорожденные подгруппы сервантны, изучают абелевы группы, у которых всякая конечная система элементов содержится в конечнопорожденной сервантной подгруппе, называя их *почти локально сервантными*. Примарная группа тогда и только тогда обладает этим свойством, когда у нее нет элементов бесконечной высоты. Всякая счетная почти локально сервантная группа разлагается в прямую сумму циклических групп (обобщение второй теоремы Прюфера).

Обобщения сервантности. Хонда [1] ввел следующее понятие. Подгруппа C абелевой группы G называется *слабо сервантной* в G, если всякое уравнение вида $px = c$, $c \in C$, p — любое простое число, разрешимое в G, разрешимо в C, иными словами, если $C \cap pG = pC$ для всех простых p. Отметим следующие свойства этого понятия (см. Фукс [14]).

Слабо сервантная подгруппа группы без кручения сервантна. Если $A \subseteq G$ и C — подгруппа, максимальная относительно свойства $A \cap C = O$, то C слабо сервантна в G. Все слабо сервантные подгруппы группы G исчерпываются пересечениями G с полными подгруппами

пополнения $\overline{G}$ группы G. Для всякой подгруппы A абелевой группы G существует слабо сервантная оболочка; свойства этой оболочки изучает Рангасвами [1]. См. также Харрисон, Ирвин, Пирси и Е. Уокер [1], Длаб [1], Рангасвами [4, 5], Мегиббен [3].

Если p — фиксированное простое число, то Фукс [20] называет подгруппу C группы G *p-сервантной*, если $p^nC = C \cap p^nG$ для всех натуральных n. Если Π — фиксированное множество простых чисел, то подгруппа C группы G называется в работе Хилтона и Яхья [1] *Π-сервантной*, если всякое уравнение вида $nx = c$, где $c \in C$, а n делится лишь на простые числа из Π, разрешимое в G, обладает решением в C. [См. ДК.]

Пусть G — абелева группа, p — простое число. Для любого порядкового числа α положим $p^\alpha G = p(p^{\alpha-1}G)$, если число $\alpha - 1$ существует, и

$$p^\alpha G = \bigcap_{\beta<\alpha} p^\beta G,$$

если число α предельное. Развивая одну идею из работы Л. Я. Куликова [4], посвященной изучению модулей над кольцом целых p-адических чисел и над кольцом рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, Ирвин и Уокер [1] называют подгруппу C группы G *p^α-сервантной*, если $p^\beta C = C \cap p^\beta G$ для всех $\beta \leqslant \alpha$. Подгруппа, p^α-сервантная при любом p и фиксированном α, называется *α-сервантной*; подгруппа, p^α-сервантная при фиксированном p и любом α, называется *p-изотипной*.

В работах Фукса [15] и Лося [4] изучаются $\mathfrak{m}$-сервантные подгруппы, где $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Подгруппа A абелевой группы G называется *$\mathfrak{m}$-сервантной*, если в A разрешима всякая разрешимая в G система уравнений над A относительно множества неизвестных, мощность которого меньше $\mathfrak{m}$.

Высокие подгруппы. Пусть N — подгруппа абелевой группы G. Подгруппа $A \subset G$ называется *N-высокой*, если A — максимальная относительно свойства $N \cap A = O$. При некоторых предположениях о G и N все N-высокие подгруппы оказываются сервантными в G; в этом случае N называется *центром сервантности* группы G. Так, если G p-примарна и N или совпадает с одной из подгрупп p^nG, $n = 1, 2, \ldots$, или же содержится в $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^nG$, то N будет центром сервантности для G (Кхаббаз [2]). Более общие результаты — у Рейда [3], а Пирс [1] указал необходимые и достаточные условия для того, чтобы подгруппа N произвольной абелевой группы G была центром сервантности.

С другой стороны, существуют такие G и N, что ни одна N-высокая подгруппа группы G не является сервантной (Рейд [3]). Для p-примарной группы G и ее произвольной подгруппы N любая N-высокая подгруппа, содержащая базисную подгруппу группы G, будет сервантной в G (Ирвин [1]). Для произвольной абелевой группы G,

ее произвольной подгруппы N и N-высокой подгруппы A Рейд [3] доказал, что если для любого простого p или $A \subseteq pG$, или же p-компонента периодической части подгруппы N полна, то A сервантна в G. Если группа G произвольная и $N \subseteq p^{\alpha}G$, то всякая N-высокая подгруппа $p^{\alpha+1}$-сервантна (см. п. 3); всякая $p^{\alpha}G$-высокая подгруппа группы G p-изотипна (Ирвин и Е. Уокер [1]).

В работе Ирвина и Е. Уокера [2] показано, что совокупность N-высоких подгрупп периодической группы G исчерпывается пересечениями G с прямыми слагаемыми ее пополнения $\overline{G}$, дополнительными к содержащемуся в $\overline{G}$ пополнению подгруппы N.

Пусть $G^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nG$; это в некотором смысле совокупность элементов бесконечной высоты группы G. G^1-высокие подгруппы группы G называются *высокими*. Ирвин [1] показал, что всякая высокая подгруппа примарной абелевой группы содержит ее базисную подгруппу. В работах Ирвина и Е. Уокера [2] и Ирвина, Пирси и Е. Уокера [1] доказано, что для любой группы G и любых двух ее высоких подгрупп A и B фактор-группы G/A и G/B изоморфны между собой и являются полными группами; изоморфны между собой также фактор-группы G по периодическим частям подгрупп A и B, а также фактор-группы A и B по их периодическим частям. Во второй из указанных работ дано также некоторое обозрение всех высоких подгрупп редуцированной группы, разложимой в прямую сумму периодической группы и группы без кручения.

В двух работах, названных последними, а также в работах Мегиббена [2] и Рангасвами [2] изучаются абелевы группы, все высокие подгруппы которых разлагаются в прямую сумму циклических групп; эти группы названы Σ-*группами*. Все высокие подгруппы Σ-группы изоморфны между собой. Подгруппа Σ-группы может не быть Σ-группой; больше того, для всякой редуцированной периодической абелевой группы H найдется такая редуцированная периодическая Σ-группа G, что $H \simeq G^1$. Мегиббен [2] показал, что для такой периодической группы G, подгруппа которой G^1 не более чем счетна, равносильны свойства: а) G есть Σ-группа; б) G/G^1 —прямая сумма циклических групп, в) G есть прямая сумма счетной группы и прямой суммы циклических групп; у группы с этими свойствами все подгруппы являются Σ-группами. Ограничение на мощность подгруппы G^1 снять нельзя.

Алгебраически компактные группы. Абелева группа G называется *алгебраически компактной*, если она выделяется прямым слагаемым из всякой абелевой группы, в которой содержится в качестве сервантной подгруппы; к числу этих групп принадлежат все полные группы, а также, ввиду теоремы Прюфера–Куликова из § 25, все периодические группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Лось [3] и Бальцержик [2] показали, что группа G тогда и только тогда алгебраически компактна, когда она служит прямым слагаемым

для абелевой группы, допускающей бикомпактную топологизацию. Лось [3] показал также, что группа G алгебраически компактна тогда и только тогда, когда в G разрешима любая система уравнений (см. Д.28.4), всякая конечная подсистема которой обладает в G решением, а также тогда и только тогда, когда она изоморфна прямому слагаемому полной прямой суммы некоторого множества примарных циклических групп и групп типа p^∞ по некоторым p. Заметим, что в этой же работе доказано, что всякая абелева группа изоморфна сервантной подгруппе некоторой такой полной прямой суммы.

Бальцержик [2] описал строение алгебраически компактных групп, показав, что они совпадают с группами, введенными (под этим же названием) в книге Капланского [4]. Эти же группы изучает Л. Я. Куликов [5]. Другие характеризации алгебраически компактных групп — в работах Лося [5], Хуляницкого [2], Хуляницкого и Ньюмэна [1].

Бальцержик [3] и Хуляницкий [3] доказали, что фактор-группа полной прямой суммы последовательности абелевых групп G_n, $n = 1, 2, \ldots$, по (дискретной) прямой сумме этих групп алгебраически компактна. В работе Големы и Хуляницкого [1] эти фактор-группы полностью описываются для случая, когда группы G_n не более чем континуальной мощности. См. также Бальцержик [5], Фукс [21].

В работе Харрисона, Ирвина, Пирси и Е. Уокера [1] описываются абелевы группы, выделяющиеся прямым слагаемым из всякой абелевой группы, содержащей их в качестве слабо сервантной подгруппы: это будут прямые суммы полной группы и полной прямой суммы групп T_p, $pT_p = O$, где p пробегает все простые числа. В некоторую такую группу вкладывается в качестве слабо сервантной подгруппы любая абелева группа. Некоторые условия для того, чтобы группа выделялась прямым слагаемым из всякой абелевой группы, содержащей ее в качестве высокой подгруппы, — в работе Мегиббена [2].

§ Д.30. Примарные абелевы группы

Базисные подгруппы. Будем для краткости называть в этом параграфе p-примарную абелеву группу примарной группой. В § 26 было определено понятие базисной подгруппы примарной группы и приведены его основные свойства, установленные Л. Я. Куликовым [2]. В дальнейшем это понятие подвергалось изучению в работах ряда авторов.

Селе [12] показал, что подгруппа B примарной группы G тогда и только тогда будет базисной в G, когда

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots,$$

где для $n = 1, 2, \ldots$, B_n — прямая сумма циклических групп порядка p^n (или нуль), а $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ является максимальным прямым слагаемым группы G, порядки всех элементов которого

не превосходят p^n. В этой работе показано также, что базисная подгруппа примарной группы служит эпиморфным образом самой группы и что если прямая сумма циклических групп служит эпиморфным образом примарной группы, то она служит эпиморфным образом и для базисной подгруппы этой группы. Обобщая последнее, Фукс [7] доказал, что если G и H примарные группы и H служит эпиморфным образом для G, то базисная подгруппа группы H будет эпиморфным образом базисной подгруппы группы G.

В работе Ковача [1] показано, что подгруппа примарной группы G тогда и только тогда содержится в базисной подгруппе этой группы, когда она является объединением возрастающей последовательности подгрупп с ограниченными в G высотами.

Кхаббаз [4] доказал, что если некоторая базисная подгруппа примарной группы G содержит прямое слагаемое группы G, имеющее мощность $\mathfrak{m}$, то всякая базисная подгруппа группы G будет содержать прямое слагаемое этой группы, имеющее ту же мощность. Работа Кхаббаза [1] посвящена изучению примарных групп, равномощных с некоторой (и поэтому любой) своей базисной подгруппой. Доказано, что эти группы могут быть охарактеризованы, в частности, как примарные группы, обладающие неприводимой системой образующих, а также как примарные группы, равномощные с некоторым своим прямым слагаемым, являющимся прямой суммой циклических групп.

Известно, что если B — базисная подгруппа редуцированной примарной группы G, а $|B|$ и $|G|$ — мощности этих групп, то $|B|^{\lambda_0} \geqslant |G|$. Е. Уокер [5] показал, что для справедливости этого неравенства достаточно лишь того требования из определения базисной подгруппы, что фактор-группа G/B полна. Отметим в этой связи работу Хэда [1], в которой доказано, что среди примарных групп полные группы и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов и только они обладают тем свойством, что всякая их подгруппа, фактор-группа по которой полна, содержит некоторую базисную подгруппу самой группы.

В работе Ирвина и Кхаббаза [1] показано, что если примарная группа порождается конечным числом своих базисных подгрупп, то порождается уже двумя базисными подгруппами, причем указаны некоторые условия, для этого необходимые и достаточные.

Решая поставленную Фуксом проблему, Кхаббаз и Е. Уокер [1] показали, что мощность множества базисных подгрупп примарной группы G равна $|G|^{|B|}$ (где B — базисная подгруппа группы G, а $|G|$ и $|B|$ — мощности указанных групп) во всех случаях, кроме следующих: если G с ограниченными в совокупности порядками элементов или полная, то существует лишь одна базисная подгруппа; если G является прямой суммой конечного числа m групп типа p^∞ и конечного числа k циклических групп порядков $p^{n_1}, \ldots, p^{n_k}$, то число базисных

подгрупп группы G равно

$$p^{m\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

Другой подход к понятию базисной подгруппы, основанный на естественных топологизациях примарной группы, — в работе Шарля [4].

Хонда [2] следующим образом обобщает понятие базисной подгруппы, переходя при этом к произвольным абелевым группам. Фиксируются простое число p и некоторый набор его степеней

$$\sigma = \{p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots\}.$$

Подгруппа B абелевой группы G называется *σ-базисной* в G, если она сервантна в G и является прямой суммой циклических групп, порядки которых принадлежат к σ, а фактор-группа G/B не содержит сервантных циклических подгрупп, порядки которых принадлежали бы к σ. Доказано существование σ-базисных подгрупп во всякой абелевой группе и получены некоторые обобщения теорем Л. Я. Куликова о базисных подгруппах, доказанных в § 26. См. также Фукс [20].

Примарные группы без элементов бесконечной высоты. Ряд работ посвящен дальнейшей разработке изложенного в § 26 описания примарных групп без элементов бесконечной высоты, обладающих заданной базисной подгруппой, а также дальнейшему изучению *замкнутых* примарных групп без элементов бесконечной высоты, т. е. групп, совпадающих с замыканием $\overline{B}$ своей базисной подгруппы B.

Так, редуцированная примарная группа тогда и только тогда выделяется прямым слагаемым из всякой примарной группы, в которой она содержится в качестве сервантной подгруппы, если она замкнутая (Л. Я. Куликов [2], Папп [1]).

Л. Я. Куликов [2] доказал, что всякий изоморфизм между двумя базисными подгруппами замкнутой группы продолжается до (однозначно определенного) автоморфизма самой группы. Лептин [1, 3] и Энокс [2] показали, что замкнутые группы характеризуются этим свойством среди всех примарных групп без элементов бесконечной высоты. В работе Лептина [1] показано также, что существует $2^{\aleph}$ неизоморфных примарных групп без элементов бесконечной высоты, базисная подгруппа которых является прямой суммой циклических групп, по одной каждого порядка p^k, $k = 1, 2, \ldots$.

Любые два разложения примарной группы в прямую сумму замкнутых групп обладают изоморфными продолжениями (Энокс [1]). Так как всякая примарная циклическая группа замкнута, то этот результат обобщает соответствующую теорему из § 24 (для случая примарной группы).

Некоторые новые подходы к обозрению примарных групп без элементов бесконечной высоты (или вообще редуцированных примарных групп) с заданной базисной подгруппой (точнее, с заданным

мономорфизмом базисной подгруппы в группу) — в работах Харрисона [2] и Бьюмонта и Пирса [6].

В работе Кроули [1] строится бесконечная примарная группа без элементов бесконечной высоты, не изоморфная никакой своей истинной подгруппе; заметим, что такая группа не может иметь мощность, превосходящую мощность континуума, как показано в работе Бьюмонта и Пирса [1]. В работе Кроули [3] описываются периодические абелевы группы G, обладающие тем свойством, что для любых абелевых групп H и K из $G+H\simeq G+K$ следует $H\simeq K$. Кроули [2] строит пример неизоморфных примарных групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой. Зельмер [1] находит базисную подгруппу той несчетной примарной группы без элементов бесконечной высоты, с которой начинается § 26.

Ульмовские инварианты. Обобщение теоремы Цыпина (см. § 27) на случай примарных групп произвольной мощности независимо опубликовали Л. Я. Куликов [4] и Фукс [5]. Именно, пусть даны мощность $\mathfrak{m}$, порядковое число τ и для всякого α, $0\leqslant\alpha<\tau$, ненулевая примарная группа A_α без элементов бесконечной высоты. Тогда и только тогда существует редуцированная примарная группа мощности $\mathfrak{m}$, имеющая тип τ и последовательность групп A_α, $0\leqslant\alpha<\tau$, своей последовательностью ульмовских факторов, если выполняются следующие условия (здесь $|A_\alpha|$ — мощность группы A_α):

(1) $\sum\limits_{0\leqslant\alpha<\tau}|A_\alpha|\leqslant\mathfrak{m}\leqslant\prod\limits_{0\leqslant\alpha<\min(\omega_0,\,\tau)}|A_\alpha|$;

(2) $\sum\limits_{\beta\leqslant\alpha<\tau}|A_\alpha|\leqslant|A_\beta|^{\aleph_0}$ для всех $\beta<\tau$;

(3) для всех α, $\alpha+1<\tau$, и $n=1,2,\ldots$ мощность нижнего слоя группы p^nA_α не меньше мощности базисной подгруппы группы $A_{\alpha+1}$.

Новое доказательство теоремы Ульма дано в работе Капланского и Макки [1] (воспроизведено в книгах Капланского [4] и Фукса [14]). При этом последовательность ульмовских факторов заменяется следующей конструкцией. Если G — редуцированная примарная группа, то полагаем $G_0=G$ и для всякого порядкового числа β $\quad G_{\beta+1}=pG_\beta$; если число α предельное, то $G_\alpha=\bigcap\limits_{\beta<\alpha}G_\beta$. То первое λ, для которого $G_\lambda=O$, есть *длина* группы G. Если P_α — нижний слой группы G_α, то обозначим через $f_G(\alpha)$ мощность множества прямых слагаемых в разложении группы $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ в прямую сумму циклических групп; ясно, что $f_G(\alpha)=0$ при $\alpha\geqslant\lambda$, где λ — длина группы G. Функция $f_G(\alpha)$ называется *ульмовской функцией* группы G.

Шарль [5] обобщил теорему Ульма на случай, когда (в обозначениях начала § 27) подгруппа G^1 счетна, а фактор-группа G/G^1 разлагается в прямую сумму циклических групп. Колеттис [1] обобщает теорему Ульма на случай редуцированных примарных групп, разложимых в прямую сумму счетных групп; найдены также условия, описывающие ульмовские функции таких групп. Отметим, что, как показал

Нунке [4], подгруппа редуцированной примарной группы, разложимой в прямую сумму счетных групп, может в прямую сумму счетных групп не разлагаться. См. также Хонда [3, 4].

Новые примеры несчетных примарных групп, которые не определяются своими ульмовскими инвариантами, см., в частности, в работах Л. Я. Куликова [4] и Колеттиса [2].

Капланский [3, 4] рассматривает редуцированные примарные группы, любая пара элементов которых содержится в счетном прямом слагаемом. Описываются, в частности, вполне характеристические подгруппы таких групп и устанавливаются (на языке ульмовской функции) условия, при которых эти группы обладают характеристической, но не вполне характеристической подгруппой.

$\mathfrak{m}$-неразложимые группы. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечная мощность. Селе [13] и Фукс [9] изучают $\mathfrak{m}$-*неразложимые* примарные группы, т. е. примарные группы мощности $\geqslant \mathfrak{m}$, в любом прямом разложении которых мощность множества прямых слагаемых строго меньше $\mathfrak{m}$. Найдены условия на $\mathfrak{m}$, при которых существуют $\mathfrak{m}$-неразложимые группы. Мощность всякой $\mathfrak{m}$-неразложимой группы не больше $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Если $\mathfrak{m}$-неразложимые группы существуют, то среди них имеются и группы мощности $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$, причем множество таких групп имеет мощность $2^{\mathfrak{n}}$. Примером $\aleph_0$-неразложимой группы мощности континуум служит замыкание прямой суммы циклических групп, по одной для каждого порядка p^k, $k = 1, 2, \ldots$; счетных редуцированных $\aleph_0$-неразложимых групп не существует. См. также Кхаббаз [4].

§ Д.31. Абелевы группы без кручения

Группы конечного ранга без кручения. Некоторое обозрение этих групп, идущее от работ А. Г. Куроша [6], А. И. Мальцева [1] и Дэрри [1], изложено в §§ 32б, 32в. В книге Фукса [14] дано, притом сразу для счетного случая, другое построение этой теории, основанное на результатах Капланского [3] о модулях над кольцом целых p-адических чисел. См. также Секереш [1].

Понятие p-ранга $k_p(G)$ абелевой группы без кручения G конечного ранга, введенное в § 32б, изучает Прохазка [4]. Так, если для некоторой периодической абелевой группы P обозначим через $k_p^*(P)$ число прямых слагаемых типа p^∞ в разложении максимальной полной подгруппы p-примарной компоненты группы P, то

$$k_p(G) = k_p^*(G/C), \tag{1}$$

где C — подгруппа группы G, порожденная некоторой максимальной линейно независимой системой элементов этой группы. Изучаются также связи между p-рангами группы G и ее подгруппы H. Так, если ранги G и H совпадают, то

$$k_p(G) = k_p(H) + k_p^*(G/H).$$

Развитие этих результатов для групп бесконечного ранга — в работе Прохазки [8]. В частности, для групп счетного ранга равенство (1) заменяется равенством

$$k_p(G) = \min k_p^*(G/C),$$

где минимум берется по всем подгруппам C описанного выше вида.

Существуют и другие подходы к обозрению абелевых групп без кручения, счетных или конечного ранга. В работе Кемпбелла [1] для счетного случая строится теория, основанная на следующей конструкции. В группе G берем максимальную линейно независимую систему элементов $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и для всякого натурального числа m обозначаем через $f(m)$ совокупность тех целочисленных векторов $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ (с конечным числом ненулевых мест, если ранг группы G бесконечен), что элемент $k_1a_1 + \ldots + k_na_n + \ldots$ делится в группе G на m. Функция $f(m)$, $m = 1, 2, \ldots$, определяет группу G с точностью до изоморфизма. Дано абстрактное описание этих функций и установлены условия, при которых две такие функции определяют изоморфные группы.

Назовем *p-высотой* элемента a абелевой группы G и обозначим через $h_p(a)$ такое максимальное $k \geqslant 0$, что уравнение $p^k x = a$ разрешимо в G; если эти уравнения имеют решения для всех k, то $h_p(a) = \infty$. Ротман [1] доказал, что абелевы группы без кручения G и G' одного и того же конечного ранга n изоморфны тогда и только тогда, когда в них можно выбрать такие максимальные линейно независимые системы $a_1, \ldots, a_n$ и $a_1', \ldots, a_n'$ соответственно, что для всех простых p и любых целых $m_1, \ldots, m_n$

$$h_p\left(\sum_{i=1}^{n} m_i a_i\right) = h_p\left(\sum_{i=1}^{n} m_i a_i'\right).$$

Левая часть этого равенства есть функция от $p, m_1, \ldots, m_n$; для нее найдено абстрактное описание.

Еще один подход к обозрению абелевых групп без кручения конечного ранга — в работе Хонига [1].

С другой стороны, в работе Эрдёша [3] указан один способ задания абелевых групп без кручения, мощность которых не превосходит данного кардинального числа $\mathfrak{m}$, при помощи некоторых классов эквивалентных $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ матриц с рациональными элементами, имеющих в каждой строке лишь конечное число ненулевых элементов; перенесение этого на смешанные абелевы группы — в книге Фукса [14].

В работе Бьюмонта и Пирса [3], к которой примыкает работа Кёлера [1], задаются инвариантами и изучаются абелевы группы без кручения ранга 2.

Прохазка [7] указывает некоторые условия, формулируемые на языке инвариантов из § 32б, для разложимости абелевой группы без кручения ранга 2 в прямую сумму.

Абхьянкар [1] показал, что все конечные фактор-группы абелевой группы без кручения конечного ранга n разлагаются в прямую сумму циклических групп, число которых не больше n. См. также Кёлер [2] и Д.33.7.

Неразложимые группы. В § 32 поставлен вопрос о существовании неразложимых в прямую сумму абелевых групп без кручения произвольной бесконечной мощности и приведены примеры таких групп для мощностей, не превосходящих мощность континуума. Позже в работах Боньяра [1], Де Грота [3] и Де Грота и Де Вриса [1] были построены другие примеры таких групп, также для этих же мощностей, с теми или иными дополнительными свойствами; так, в последней из названных работ для любой мощности $\mathfrak{m}$, $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \aleph$, построена неразложимая группа без кручения мощности $\mathfrak{m}$, обладающая $2^{\mathfrak{m}}$ автоморфизмами.

С другой стороны, примеры для некоторых более высоких мощностей были построены в работах Сонсяды [3], Фукса [12] и Хуляницкого [1]. Полное решение проблемы дано в работе Фукса [17]: для любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ существует $2^{\mathfrak{m}}$ неизоморфных неразложимых абелевых групп без кручения мощности $\mathfrak{m}$.

Эта теорема выводится в указанной работе Фукса из следующей теоремы, для континуального случая доказанной в работе Де Грота [3]: для любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ существует *жесткая система* из $2^{\mathfrak{m}}$ абелевых групп без кручения мощности $\mathfrak{m}$, т. е. такая система групп G_i, $i \in I$, что: 1) при $i \neq j$ не существует нетривиального гомоморфизма G_i в G_j; 2) для всякого эндоморфизма φ группы G_i существует такое рациональное число r_φ, что для всех $a \in G_i$

$$a\varphi = r_\varphi a.$$

Армстронг [2] рассматривает абелевы группы без кручения, ни одна из сервантных подгрупп которых не разлагается в прямую сумму.

Изоморфизмы прямых разложений. Вопрос об изоморфизмах разложений абелевой группы без кручения конечного ранга в прямую сумму неразложимых групп (см. § 32) получил отрицательное решение в работе Йонсона [3] (первое сообщение — в заметке Йонсона [1]). Именно, существует группа G ранга 4, обладающая прямыми разложениями

$$G = A + B = C + D, \tag{2}$$

где подгруппы A, B, C, D неразложимые и имеют соответственно ранги 1, 3, 2, 2. Существует также группа G конечного ранга, обладающая такими прямыми разложениями вида (2), что A и C изоморфны между собой, но B и D не изоморфны, а также такая группа G конечного ранга с разложениями вида (2), что $A \simeq B$, $C \simeq D$, но A и B не изоморфны с C и D.

Первый из этих результатов получил следующее далеко идущее развитие. Отвечая на вопрос из книги Фукса [14], Ешманович [1]

показал, что для любых натуральных чисел r, r', s, s' со свойством $r + r' = s + s'$ существует абелева группа без кручения G с такими прямыми разложениями вида (2), что подгруппы A, B, C, D неразложимые и имеют соответственно ранги r, r', s, s'. С другой стороны, в работе Корнера [1] доказано, что для любых натуральных чисел n и k, $n \geqslant k$, существует такая абелева группа без кручения G ранга n, что для любого разложения $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ с целыми положительными слагаемыми существует прямое разложение

$$G = A_1 + A_2 + \ldots + A_k,$$

где подгруппа A_i неразложимая и ранга r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Указано одно обобщение этой теоремы на случай групп счетного ранга.

В работах Корнера [3, 4] установлен ряд других аномалий. Так, существует абелева группа без кручения счетного ранга, все ненулевые прямые слагаемые которой разложимы в прямую сумму. Существуют неизоморфные счетные абелевы группы без кручения G и H, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой (аналогичный пример для континуального случая — еще раньше в работе Сонсяды [7]). Для всякого натурального числа r существует редуцированная абелева группа без кручения счетного ранга, прямая сумма m экземпляров которой тогда и только тогда изоморфна прямой сумме n ее экземпляров, когда $m \equiv n (\mathrm{mod}\ r)$. В частности, существует группа указанного вида, изоморфная прямой сумме любого конечного числа групп, ей изоморфных, но не изоморфная прямой сумме счетного числа таких групп.

Вполне разложимые группы. В § 31 поставлен вопрос, будет ли всякое прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы без кручения само вполне разложимым? Отмеченный в конце указанного параграфа положительный ответ на этот вопрос для счетного случая опубликован в работе Л. Я. Куликова [3]. Отмеченный там же результат Бэра для случая, когда множество типов удовлетворяет условию максимальности, получил новое доказательство в работе Эрдёша [2], в которой показано также, что сервантная подгруппа вполне разложимой группы может не быть вполне разложимой.

Окончательный ответ на рассматриваемый вопрос о прямых слагаемых вполне разложимых групп, а именно ответ положительный, дал Фукс [18].

В работе Прохазки [9] показано, что если группа G обладает таким разложением в прямую сумму групп ранга 1, что множество типов этих прямых слагаемых вполне упорядочено по убыванию, то всякая сервантная подгруппа группы G сама будет вполне разложимой. См. также Прохазка [12].

Ковач [3] доказал, что если G — абелева группа без кручения и H — такая ее подгруппа, что $nG \subseteq H$ при некотором натуральном n, то если одна из групп G, H вполне разложима и множество типов ее прямых слагаемых ранга 1 вполне упорядочено

по убыванию, то $G \simeq H$. Существует, однако, такая вполне разложимая группа G с вполне упорядоченным по возрастанию множеством типов и в ней такая подгруппа H, что $2G \subseteq H$, но H не является вполне разложимой.

Ванг [1] называет подгруппу H абелевой группы без кручения G *регулярной*, если всякий элемент из H имеет в H и в G один и тот же тип, и описывает строение регулярных подгрупп группы G, обладающей следующим свойством: она является прямой суммой некоторой группы без кручения G_0 и некоторого множества групп ранга 1 с типами, не превосходящими типа любого ненулевого элемента из G_0 и вполне упорядоченными по убыванию.

Работа Прохазки [10] содержит многочисленные результаты, относящиеся к абелевой группе без кручения G и ее вполне разложимой подгруппе H и утверждающие, что при некоторых условиях группа G будет сама вполне разложимой или даже изоморфной с H. Так, если подгруппа H счетная и однородная (т. е. все ее ненулевые элементы имеют один и тот же тип — ср. § 30), а фактор-группа G/H является редуцированной Π-группой относительно конечного множества простых чисел Π, то $G \simeq H$. Если G сама однородная и содержит элементы бесконечной p-высоты (см. п. 1) лишь для конечного множества Π простых чисел p, H также однородная, а G/H является Π-группой, то G вполне разложима.

Заметим, что в работе Эрдёша [2] указаны условия для того, чтобы абелева группа без кручения, множество типов всех элементов которой удовлетворяет условию максимальности, разлагалась в прямую сумму однородных групп.

Полные прямые суммы групп ранга 1. В § 32 приведены установленные А. П. Мишиной [1] условия для того, чтобы полная прямая сумма групп ранга 1 была вполне разложимой группой. Обобщая этот результат, Лось [1] показал, что полная прямая сумма счетных абелевых групп без кручения G_α, $\alpha \in I$, тогда и только тогда разлагается в прямую сумму счетных групп, когда почти все группы G_α являются полными.

Пусть абелева группа без кручения G двумя способами представлена в виде полной прямой суммы групп ранга 1,

$$G = \widetilde{\sum_{\alpha \in I}} A_\alpha = \widetilde{\sum_{\beta \in J}} B_\beta. \tag{3}$$

При некотором ограничении на мощность группы G Сонсяда [5] доказал изоморфность разложений (3), т. е. существование между множествами индексов I и J такого взаимно однозначного соответствия, что соответствующие друг другу группы A_α и B_β будут изоморфными. Справедлива вместе с тем следующая теорема, доказанная А. П. Мишиной [3] при одном ограничении на множество типов групп A_α, $\alpha \in I$, и Сонсядой [5] в самом общем случае: если $A^{\mathfrak{a}}$ (соответственно $B^{\mathfrak{a}}$)

есть полная прямая сумма всех тех прямых слагаемых A_α (B_β) первого (второго) из разложений (3), которые имеют тип $\mathfrak{a}$, то $A^{\mathfrak{a}} \simeq B^{\mathfrak{a}}$ для всех $\mathfrak{a}$.

Решая проблему, поставленную в книге Фукса [14], А. П. Мишина [5] нашла необходимые и достаточные условия для того, чтобы полная прямая сумма групп ранга 1 была сепарабельной (см. § 32).

В работах Бальцержика, Бялыницкого-Бируля и Лося [1] и А. П. Мишиной [4] изучаются прямые слагаемые полных прямых сумм групп без кручения ранга 1. Во второй из этих работ показано, в частности, что такое прямое слагаемое тогда и только тогда вполне разложимо, когда оно является прямой суммой полной группы и редуцированной группы конечного ранга; отсюда следует, очевидно, упомянутый выше результат из работы А. П. Мишиной [1]. См. также следующий пункт.

Узкие группы. Пусть P — полная прямая сумма счетного множества бесконечных циклических групп с образующими e_i, $i = 1, 2, \ldots$. Лось (см. книгу Фукса [14]) назвал абелеву группу без кручения G *узкой*, если при любом гомоморфизме группы P в группу G почти все элементы e_i отображаются в нуль. Прямая сумма любого множества узких групп сама является узкой; в частности, всякая свободная абелева группа будет узкой.

Сонсяда [4] доказал, что всякая счетная редуцированная абелева группа без кручения является узкой. Больше того, в работе Нунке [2] показано, что абелева группа без кручения будет узкой тогда и только тогда, когда она редуцированная и не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел для некоторого простого p, и подгрупп, изоморфных введенной выше группе P.

Всякое узкое прямое слагаемое полной прямой суммы групп без кручения ранга 1 имеет конечный ранг (А. П. Мишина [4]).

Полные прямые суммы бесконечного множества бесконечных циклических групп и, в частности, группа P изучались в ряде работ, начиная с работы Шпекера [1]. Так, в работе Корнера [2] показано (при некоторых ограничениях на мощности $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$), что если $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{n}}$, то полная прямая сумма $P_{\mathfrak{m}}$ $\mathfrak{m}$ бесконечных циклических групп содержит подгруппу ранга $\mathfrak{n}$, не лежащую ни в каком истинном прямом слагаемом всей группы; если же $\mathfrak{m} > 2^{\mathfrak{n}}$, то всякая подгруппа ранга $\mathfrak{n}$ группы $P_{\mathfrak{m}}$ содержится в истинном прямом слагаемом этой группы. См. также Нунке [1].

Одна конструкция, более общая, чем полная прямая сумма бесконечных циклических групп, — в работе Бальцержика [3].

Другие вопросы. В. И. Мышкин [1] рассматривает *межпрямые суммы* групп без кручения ранга 1, т. е. такие подпрямые суммы групп A_α, $\alpha \in I$, ранга 1, которые содержат прямую сумму этих групп A_α. Всякая межпрямая сумма G счетного числа групп ранга 1 удовлетворяет следующему условию счетности: в ней существует счетная система прямых слагаемых C_i, $i = 1, 2, \ldots$, пересечение

которых равно нулю, а все фактор-группы G/C_i имеют конечные ранги. Доказано, что всякая однородная (см. п. 4) сепарабельная (см. § 32) абелева группа без кручения, удовлетворяющая условию счетности, будет межпрямой суммой счетного числа своих подгрупп ранга 1. Заметим здесь же, что в работе В. И. Мышкина [2] изучаются межпрямые суммы примарных абелевых групп.

Абелеву группу без кручения Брамере [2] называет *p-приведенной* (p — простое число), если она является q-полной для всех простых чисел q, отличных от p, но не содержит ненулевых p-полных подгрупп; среди групп ранга 1 это будут группы, изоморфные аддитивной группе R_p всех рациональных чисел, знаменатель которых взаимно прост с p, и только они. Подгруппа B p-приведенной группы G называется *базисной*, если она сервантная и является прямой суммой групп, изоморфных группе R_p, а фактор-группа G/B полная (ср. § 26). Изучаются связи между рангом группы G и ее *размерностью*, т. е. мощностью множества прямых слагаемых вида R_p в разложении базисной подгруппы.

Работы Прохазки [3, 5, 6] посвящены изучению *факторно-расщепляемых* абелевых групп без кручения, т. е. таких групп без кручения, все смешанные фактор-группы которых расщепляются (см. § 29). Не всякая группа без кручения ранга 2 является факторно-расщепляемой. Факторно-расщепляемой будет, однако, всякая прямая сумма двух групп ранга 1, а также такая прямая сумма конечного числа групп ранга 1, что типы прямых слагаемых составляют цепь относительно обычной частичной упорядоченности типов. Указаны многие другие случаи факторной расщепляемости групп без кручения конечного ранга. Факторно-расщепляемы все сервантные подгруппы аддитивной группы целых p-адических чисел.

Бьюмонт и Пирс [2] назвали абелеву группу без кручения G *факторно-делимой*, если она содержит такую свободную подгруппу F, что G/F — полная периодическая группа. Всякий эпиморфный образ без кручения факторно-делимой группы конечного ранга сам будет факторно-делимой группой. Рейд [1] показал, что всякая абелева группа без кручения бесконечного ранга факторно-делима.

Эренфойхт [1] доказал, что следующее свойство подгруппы H свободной абелевой группы F, необходимое для того, чтобы H служило прямым слагаемым для F, будет и достаточным, если H имеет в F счетный индекс: всякий гомоморфизм H в аддитивную группу целых чисел Z продолжается до гомоморфизма F в Z.

В работе Касселса [1] доказано, что если в абелевой группе без кручения G взяты элементы $a_1, a_2, \ldots, a_s$, не делящиеся в G на натуральные числа, большие единицы, и если $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — любые натуральные числа, а $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$, то в G существует подгруппа, индекс которой не больше $n + 1$ (а при $s > 1$ даже не больше n), не содержащая ни одного из элементов $k_i a_i$, $1 \leqslant k_i \leqslant n_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

§ Д.32. Смешанные абелевы группы

Расщепление смешанных абелевых групп. В § 29 приведено полное описание периодических абелевых групп T, обладающих тем свойством, что всякая абелева группа, периодическая часть которой изоморфна T, расщепляется; это описание получено в работах Бэра [13] и С. В. Фомина [1].

С другой стороны, Бэр [13] доказал, что если абелева группа без кручения H обладает тем свойством, что всякая абелева группа, фактор-группа которой по периодической части изоморфна H, расщепляется, то все счетные подгруппы группы H будут свободными. Вместе с тем Бэр [63], Эрдёш [4] и Сонсяда (см. книгу Фукса [14]) показали, что существует нерасщепляемая абелева группа, фактор-группа которой по периодической части изоморфна полной прямой сумме счетного множества бесконечных циклических групп.

Пусть даны периодическая абелева группа T и абелева группа без кручения H. Бэр [13] показал, что совокупность следующих условий необходима, а в случае счетной группы H и достаточна для того, чтобы расщеплялась всякая абелева группа, периодическая часть которой изоморфна T, а фактор-группа по ней изоморфна H:

1) группа H не содержит сервантной подгруппы S конечного ранга, фактор-группа H/S по которой обладает ненулевыми элементами, делящимися на бесконечно много таких простых чисел p, что $pT \neq T$;

2) группа H не содержит сервантной подгруппы S конечного ранга, фактор-группа H/S по которой обладает ненулевыми элементами, делящимися на все степени такого простого числа p, что $p^{k+1}T \neq p^kT$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Сонсяда [2] показал, что тогда и только тогда расщепляется всякое абелево расширение данной периодической группы T при помощи данной группы без кручения H, если расщепляются все абелевы расширения базисной подгруппы B группы T при помощи группы H.

Условия расщепления данной группы. Появляются также новые критерии расщепляемости данной смешанной группы — см., например, Л. Я. Куликов [6], В. С. Журавский [1, 2].

Н. Я. Виленкин поставил следующий вопрос: будет ли достаточным для расщепляемости данной смешанной абелевой группы G следующее условие, заведомо необходимое: если φ и ψ — произвольные автоморфизмы соответственно периодической части T группы G и фактор-группы G/T, то эта пара автоморфизмов *совместима*, т. е. существует такой автоморфизм χ группы G, который индуцирует в T автоморфизм φ, а в G/T автоморфизм ψ. А. П. Мишина [2] показала, что при некоторых условиях, наложенных на T или G/T, достаточной для расщепляемости группы G будет даже совместимость автоморфизма φ_0 группы T, определяемого равенством $x\varphi_0 = -x$, $x \in T$, с тождественным автоморфизмом группы G/T. Таковы, например, следующие

условия: 1) группа T не содержит элементов порядка 2; 2) в группе G/T всякий элемент делится на 2; 3) группа T 2-примарная, а группа G/T счетная.

Продолжая эти исследования, Б. М. Рудык [1] показал, что в рассматриваемом вопросе те или иные условия на T или G/T на самом деле необходимы: существует нерасщепляемая смешанная группа G, в которой указанный выше автоморфизм φ_0 периодической части T совместим с тождественным автоморфизмом группы G/T. Доказано также, что если T разложима в прямую сумму циклических групп и всякий автоморфизм группы T совместим с тождественным автоморфизмом группы G/T, то группа G расщепляема.

В работе Ирвина, Пирси и Е. Уокера [1] для характеризации расщепляемости данной группы используются ее высокие подгруппы (см. Д.29.4). Именно, редуцированная группа G с периодической частью T расщепляется тогда и только тогда, когда редуцирована фактор-группа G/T и расщепляема хотя бы одна из высоких подгрупп группы G. Вместе с тем существуют нерасщепляемые группы, все высокие подгруппы которых расщепляются, и расщепляемые группы, обладающие нерасщепляемыми высокими подгруппами.

В работах Прохазки [1, 2, 10] и Ковача [3] установлены многочисленные другие связи между расщепляемостью абелевой группы и расщепляемостью некоторых ее подгрупп. Так, в первой из этих работ доказано, что из расщепляемости группы следует расщепляемость всех ее подгрупп конечного индекса, а из расщепляемости хотя бы одной подгруппы конечного индекса следует расщепляемость самой группы. В последней из указанных работ доказано, что если $H \subset G$ и существует такое натуральное n, что $nG \subseteq H$, то из того, что одна из групп G, H расщепляема, а ее фактор-группа по периодической части разложима в прямую сумму групп конечного ранга, следует, что и вторая из этих групп расщепляема.

Смешанные группы ранга 1. Так как счетные периодические абелевы группы можно считать описанными, то естественно пытаться изучать счетные смешанные абелевы группы ранга 1, т. е. расширения счетных периодических групп при помощи групп без кручения ранга 1. Ротман [1] называет такую группу *KM-группой*, если ее элемент a тогда и только тогда имеет бесконечную p-высоту для некоторого простого числа p, когда порядок элемента a конечен и взаимно прост с p. KM-группы G и G' изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их периодические части и существуют такие элементы бесконечного порядка $a \in G$ и $a' \in G'$, что для всех простых p и целых m p-высоты элементов ma и ma' равны. В работе дано также некоторое обозрение KM-групп и указаны условия для того, чтобы в группе, разложимой в прямую сумму конечного числа KM-групп, любые два прямых разложения в прямую сумму (смешанных) групп ранга 1 были изоморфными.

В работе В. И. Мышкина [3] изучаются счетные смешанные абелевы группы ранга 1 со следующими свойствами: если G такая группа и T ее периодическая часть, то 1) $\bigcap\limits_n nT = O$, 2) хотя бы для одного простого числа p p-высота элемента $a \in G \setminus T$ меньше p-высоты его образа $\overline{a} = a + T$ в группе G/T. Такая группа разлагается в прямую сумму периодической группы и межпрямой суммы (см. Д.31.7) примарных циклических групп, не более чем по одной для каждого порядка p^k. Для групп этого последнего типа указывается некоторое обозрение. [См. ДК.]

§ Д.33. Операции Ext, Hom, тензорное умножение и Tor

Группа Ext. В конце п. 1 предшествующего параграфа рассматривался вопрос об условиях, при которых расщепляется всякое абелево расширение данной периодической группы T при помощи данной группы без кручения H. Если, однако, не всякое такое расширение расщепляется, то естественно пытаться обозреть все эти расширения, иными словами, описать группу абелевых расширений группы T при помощи группы H (см. § 52).

Еще более общей будет задача изучения группы абелевых расширений произвольной абелевой группы A при помощи любой абелевой группы B. Эту группу принято сейчас обозначать символом $\mathrm{Ext}(B, A)$; случай, когда всякое абелево расширение группы A при помощи группы B расщепляется, описывается равенством $\mathrm{Ext}(B, A) = O$.

Полного описания строения группы $\mathrm{Ext}(B, A)$ при произвольных A и B пока не получено, но в изучении этой группы уже достигнуто многое, в частности методами гомологической алгебры. Из теоремы Эйленберга и С. Маклейна [1], доказанной в § 52, можно вывести, например, следующее:

Если $B = \sum\limits_\alpha B_\alpha$, то $\mathrm{Ext}(B, A) \simeq \widetilde{\sum\limits_\alpha} \mathrm{Ext}(B_\alpha, A)$,

где, напомним, $\widetilde{\sum}$ есть символ полной прямой суммы.

Если $A = \widetilde{\sum\limits_\alpha} A_\alpha$, то $\mathrm{Ext}(B, A) \simeq \widetilde{\sum\limits_\alpha} \mathrm{Ext}(B, A_\alpha)$.

Если $A = A_0 + A'$, где группа A_0 полная, то $\mathrm{Ext}(B, A) \simeq \mathrm{Ext}(B, A')$; можно ограничиться следовательно, случаем редуцированной группы A.

Если хотя бы одна из групп A, B имеет ограниченные в совокупности порядки элементов, то это же верно и для группы $\mathrm{Ext}(B, A)$; точнее, если $nA = O$ или $nB = O$, то $n\,\mathrm{Ext}(B, A) = O$.

Много важных результатов содержит работа Бэра [63]. Условимся для абелевой группы G и простого числа p обозначать через G_p p-компоненту периодической части группы G. Справедливы следующие утверждения.

Тогда и только тогда $\mathrm{Ext}(B, A) = p\,\mathrm{Ext}(B, A)$, когда или $B_p = O$, или $pA = A$. Если $B_p = O$, то тогда и только тогда $\mathrm{Ext}(B, A)_p = O$ для всякой группы A, когда подгруппа pB содержит такую подгруппу U, что фактор-группа B/U свободна. Если группа B без кручения, причем или она счетна, или же фактор-группы B/pB конечны для всех простых p, а группа A периодическая, то $\mathrm{Ext}(B, A)$ будет группой без кручения.

Ограничения, наложенные в последней теореме, существенны. Именно, пусть P — полная прямая сумма счетного множества бесконечных циклических групп (см. Д.31.6), а $P(p)$ — ее подгруппа, составленная из таких последовательностей целых чисел, что для всякого натурального n почти все их компоненты делятся на p^n. Тогда эквивалентны следующие свойства p-примарной группы A: 1) A является прямой суммой полной группы и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов; 2) если $B_p = O$, то $\mathrm{Ext}(B, A) = O$; 3) $\mathrm{Ext}(P, A) = O$ (ср. Д.32.1); 4) $\mathrm{Ext}(P(p), A) = O$; 5) $\mathrm{Ext}(P, A)_p = O$; 6) $\mathrm{Ext}(P(p), A)_p = O$.

Другие результаты о группе Ext. С. Маклейн [4] изучает группу $\mathrm{Ext}(B, A)$, где B — счетная p-примарная группа. Указан, в частности, способ построения этой группы $\mathrm{Ext}(B, A)$ в том случае, когда для некоторого n или $p^n B = O$, или $p^{n+1}A = p^n A$. См. также Л. Я. Куликов [8].

В работах В. С. Журавского [3, 4] доказано, в частности, следующее. Если B — группа без кручения конечного ранга, C — ее свободная подгруппа того же ранга, а A — периодическая группа, то группа $\mathrm{Ext}(B, A)$ изоморфна фактор-группе группы $\mathrm{Ext}(B/C, A)$ по ее периодической части. Если $B_p = O$ и группа A периодическая, причем порядки элементов ее примарной компоненты A_p ограничены в совокупности, то $\mathrm{Ext}(B, A)p = O$. Если обе группы A, B без кручения, причем B ранга 1, то группа $\mathrm{Ext}(B, A)$ тогда и только тогда без кручения, когда A не содержит ненулевых элементов, тип которых меньше типа группы B.

Нунке [3] доказал, что если группа B без кручения, а A периодическая, то группа $\mathrm{Ext}(B, A)$ или нулевая, или же обладает элементами бесконечного порядка. В работе Харрисона [1] отмечено, что если B полная и без кручения, то при любой абелевой группе A группа $\mathrm{Ext}(B, A)$ будет полной без кручения.

В сообщении Л. Я. Куликова [7] указывается ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы данная редуцированная абелева группа G была изоморфна группе $\mathrm{Ext}(B, A)$ при некоторых A и B. К сожалению, подробное изложение пока не опубликовано.

См. также работы Тэллмана [1], Яхья [1] и К. Уокер [1].

***B*-группы, *W*-группы.** Обобщая рассмотрения, приведенные в Д.32.1, целесообразно изучать такие группы B, что $\mathrm{Ext}(B, A) = O$ для любой периодической группы A, а также такие группы A, что $\mathrm{Ext}(B, A) = O$ для любой группы B без кручения.

Группы первого типа под названием *B-группы* изучал Ротман [2]; одновременно он рассматривал *W-группы*, т. е. такие группы B, что $\mathrm{Ext}(B, Z) = O$, где Z — бесконечная циклическая группа. Еще Бэр [13] и, соответственно, Штейн [1] доказали, что счетные B-группы и счетные W-группы свободны. Ротман доказал, что B-группы и W-группы всегда без кручения. Всякая W-группа является сепарабельной, узкой (см. Д.31.6) и может быть вложена в качестве сервантной подгруппы в полную прямую сумму бесконечных циклических групп. Всякая сепарабельная B-группа является W-группой.

Обобщая один из результатов Ротмана, Нунке [2] доказал, что всякая B-группа будет узкой; см. также Чейз [1]. В Д.32.1 отмечено, что группа P (см. Д.31.6) не является B-группой. Не будет она и W-группой, так как не является узкой; больше того, в указанной работе Нунке установлено, что группа $\mathrm{Ext}(P, Z)$ изоморфна прямой сумме $2^{\aleph}$ групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел R, и $2^{\aleph}$ групп, изоморфных группе R/Z. См. также Вильоен [1].

***F*-группы, копериодические группы.** Харрисон [1] и Фукс [20] изучают такие абелевы группы A, что $\mathrm{Ext}(B, A) = O$ для любой абелевой группы B без кручения. Назовем их *F-группами* (в работе Фукса они названы B-группами); редуцированная F-группа называется *копериодической*.

Всякая алгебраически компактная группа (см. Д.29.5) будет, понятно, F-группой. В работе Фукса показано, что всякая группа вида $\mathrm{Ext}(B, A)$ при некоторых A и B также является F-группой, хотя не всегда будет алгебраически компактной. Всякая периодическая F-группа и всякая F-группа без кручения алгебраически компактны. В работе Фукса [18] доказано, что если группа A без кручения или алгебраически компактна, то и группа $\mathrm{Ext}(B, A)$ алгебраически компактна.

В работе Е. Уокера [6] доказано, что абелева группа A тогда и только тогда будет служить эндоморфным образом всякого своего абелева расширения при помощи группы без кручения, когда она является F-группой.

В работе Харрисона [1] изучаются копериодические группы. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми копериодическими группами без кручения и всеми полными периодическими группами. Группа без кручения копериодична тогда и только тогда, когда она изоморфна прямому слагаемому полной прямой суммы групп целых p-адических чисел. Копериодические группы без кручения G и H изоморфны тогда и только тогда, когда для всякого простого числа p равны размерности $\mathfrak{a}_p$ групп G/pG и H/pH как векторных пространств над простым полем характеристики p, причем этот набор кардинальных чисел $\mathfrak{a}_p$ может быть произвольным.

Копериодическая группа G называется *урегулированной*, если она не имеет прямых слагаемых без кручения; это будет тогда и только тогда, когда фактор-группа группы G по ее периодической части

полна. Всякая копериодическая группа однозначно разлагается в прямую сумму копериодической группы без кручения и урегулированной копериодической группы. Сопоставляя всякой урегулированной копериодической группе ее периодическую часть, мы получаем взаимно однозначное соответствие между всеми урегулированными копериодическими группами и всеми редуцированными периодическими группами.

Рангасвами [3] указал условия, при которых копериодическая группа будет алгебраически компактной. Е. Уокер [3] показал, что если полная прямая сумма копериодических групп обладает ненулевыми прямыми слагаемыми без кручения, то всякое такое прямое слагаемое несчетно.

В работе Нунке [2] доказано, что всякий эпиморфный образ группы P (см. Д.31.6) является прямой суммой полной группы, копериодической группы и не более чем счетного числа бесконечных циклических групп.

Группа Hom. Группа гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B была введена в § 21; ее обозначают сейчас символом $\mathrm{Hom}(A, B)$. Изучение этой группы, ведущееся в гомологической алгебре, тесно связано с изучением группы Ext. Сошлемся в качестве примера на теорему Эйленберга и С. Маклейна [1] из § 52, а также на следующую теорему из той же работы этих авторов: если группа B без кручения, A периодическая и $\overline{A}$ — минимальная полная группа, содержащая A, то

$$\mathrm{Ext}(B, A) \simeq \mathrm{Hom}(B, \overline{A}/A).$$

Отметим некоторые свойства группы $\mathrm{Hom}(A, B)$. Если группа A полная или группа B без кручения, то группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ без кручения. Если одна из групп A, B полная и без кручения, то и $\mathrm{Hom}(A, B)$ полная и без кручения. Если группа A периодическая, а B произвольная, то группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ изоморфна полной прямой сумме групп $\mathrm{Hom}(A_p, B_p)$, взятых для всех простых чисел p. Если обе группы A, B p-примарные, причем B редуцированная, то $\mathrm{Hom}(A, B)$ будет межпрямой суммой (см. Д.31.7) циклических p-групп. С другой стороны, как показал Харрисон [1], если A периодично, а B произвольно, то $\mathrm{Hom}(A, B)$ изоморфно прямому слагаемому полной прямой суммы конечных циклических групп.

Фукс [18] доказал, что если A периодично или B алгебраически компактно, то группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ будет алгебраически компактной.

В работе Фукса [20] изучается группа гомоморфизмов абелевой группы G в группу типа p^∞, которую обозначим здесь через $C(p^\infty)$. Так, если S p-сервантная подгруппа группы G (см. Д.29.3), то

$$\mathrm{Hom}(G, C(p^\infty)) \simeq \mathrm{Hom}(S, C(p^\infty)) + \mathrm{Hom}(G/S, C(p^\infty)).$$

Полное описание строения группы $\mathrm{Hom}(G, C(p^\infty))$ дано в работе Фукса [16]. В этой же работе описывается алгебраическое строение *группы характеров* абелевой группы G, т. е. группы гомоморфизмов

этой группы в фактор-группу аддитивной группы действительных чисел по подгруппе целых чисел, называемую группой каппа (напомним, что группы характеров введены Л. С. Понтрягиным [1] в рамках теории топологических абелевых групп). Именно, группа характеров группы G изоморфна полной прямой сумме групп $\mathrm{Hom}(G, C(p^\infty))$, взятых по одной для всех простых чисел p. Для всякой группы G ее группа характеров алгебраически компактна; она редуцирована тогда и только тогда, когда G периодична, неполна тогда и только тогда, когда G без кручения.

Пусть F — прямая и P — полная прямая сумма счетного множества бесконечных циклических групп Z. Ясно, что $\mathrm{Hom}(F, Z) \simeq P$. Шпекер [1] доказал, что $\mathrm{Hom}(P, Z) \simeq F$. См. также Эренфойхт и Лось [1], Зиман [1].

Тензорное произведение. Следующая конструкция, введенная в работе Уитни [1], играет в гомологической алгебре очень большую роль. Для абелевых групп A и B их *тензорным произведением* $A \otimes B$ называется абелева группа, для которой образующими служат всевозможные пары ab, $a \in A$, $b \in B$, а определяющими соотношениями — всевозможные равенства

$$(a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b, \quad a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2,$$

где $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$.

Укажем простейшие свойства тензорного умножения. Ясно, что $A \otimes B \simeq B \otimes A$. Если Z — бесконечная циклическая группа, то для любой группы A будет $A \otimes Z = A$. Если $pA = A$ или $pB = B$, то $p(A \otimes B) = A \otimes B$. Если A или B полная, то и $A \otimes B$ полно. Если $A = \sum\limits_\alpha A_\alpha$, $B = \sum\limits_\beta B_\beta$, то

$$A \otimes B = \sum_\alpha \sum_\beta (A_\alpha \otimes B_\beta).$$

Если A или B p-примарно, то и $A \otimes B$ будет p-примарным. Если A p-примарно, а $pB = B$, то $A \otimes B = O$. Из любого из двух последних утверждений следует, что если A p-примарно, B q-примарно и $p \neq q$, то $A \otimes B = O$.

Если S и T — сервантные подгруппы соответственно в A и B, то элементы st, $s \in S$, $t \in T$, порождают в $A \otimes B$ подгруппу, изоморфную $S \otimes T$. Если же группы A и B без кручения, то это утверждение справедливо для любых подгрупп $S \subseteq A$, $T \subseteq B$ (Дьёдонне [1]). Отсюда следует, что тензорное произведение ненулевых групп без кручения отлично от нуля и является группой без кручения.

Фукс [13] доказал, что если A_0 и B_0 — соответственно базисные подгруппы примарных групп A и B, то $A \otimes B \simeq A_0 \otimes B_0$. Отсюда следует, что тензорное произведение любых периодических групп является прямой суммой конечных циклических групп. С другой стороны, тензорное произведение p-примарной группы A и группы

без кручения B изоморфно прямой сумме стольких экземпляров группы A, каков ранг группы B/pB как векторного пространства над простым полем характеристики p. Описана также периодическая часть тензорного произведения любых групп. В работах Фукса [18] и Харрисона [3] дано описание тензорного произведения периодической группы A и произвольной группы B. См. также Фукс [20].

Группа Гротендика абелевых групп без кручения конечного ранга. Приведем одно применение тензорного умножения, указанное в работе Ротмана [3]. *Группой Гротендика* в классе $\mathfrak{K}$ всех абелевых групп без кручения конечного ранга называется абелева группа $G(\mathfrak{K})$, для которой образующими служат группы из класса $\mathfrak{K}$, а определяющими соотношениями — всевозможные равенства вида $A + B = C$, если группа C является расширением группы A при помощи группы B. Для элементов из $G(\mathfrak{K})$ определяется умножение при помощи тензорного произведения $A \otimes B$, после чего $G(\mathfrak{K})$ превращается в ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, изоморфное кольцу всех тех целочисленных функций на множестве натуральных чисел, которые принимают лишь конечное число различных значений. Сопоставляя каждой группе из $\mathfrak{K}$ ее ранг, мы определяем гомоморфизм кольца $G(\mathfrak{K})$ на кольцо целых чисел. Две группы A и B из $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда равны как элементы из $G(\mathfrak{K})$, когда для всех простых чисел p тензорные произведения группы целых p-адических чисел J_p на A и на B изоморфны, $J_p \otimes A \simeq J_p \otimes B$.

В этой же работе Ротмана показано, что в абелевой группе без кручения A для рядов подгрупп с факторами без кручения ранга 1 не имеет места теорема, аналогичная теореме Жордана–Гёльдера, — такие ряды могут не быть изоморфными. Однако для всякого простого p во всех таких рядах группы A число факторов, тензорное произведение которых на группу J_p изоморфно J_p, будет одно и то же; это число совпадает с p-рангом группы A (см. § 32б). Приведен также результат Хеллера: две группы A и B из $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда равны как элементы из $G(\mathfrak{K})$, когда в $\mathfrak{K}$ существует такая группа C, что прямые суммы $A + C$ и $B + C$ обладают изоморфными рядами указанного выше вида.

Группа Tor. Используется, наконец, и следующая конструкция. Для абелевых групп A, B их *периодическим произведением* $\mathrm{Tor}(A, B)$ называется абелева группа, для которой образующими служат всевозможные такие тройки вида (m, a, b), где m — целое число, $a \in A$, $b \in B$, что выполняются равенства $ma = 0$, $mb = 0$, а определяющими соотношениями — всевозможные равенства следующего вида:

$$\begin{aligned}(m, a_1, b) + (m, a_2, b) &= (m, a_1 + a_2, b),\\ (m, a, b_1) + (m, a, b_2) &= (m, a, b_1 + b_2),\\ (m, na, b) = (m, a, nb) &= (mn, a, b).\end{aligned}$$

Ясно, что $\mathrm{Tor}(A, B) = O$, если хотя бы одна из групп A, B без кручения. Вообще,

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \sum_p \mathrm{Tor}(A_p, B_p),$$

где, напоминаем, A_p есть p-примарная компонента периодической части группы A.

В работе Нунке [4] описываются ульмовские инварианты (см. Д.30.3) труппы $\mathrm{Tor}(A, B)$. В частности, если A и B редуцированные p-примарные труппы, то группа $\mathrm{Tor}(A, B)$ редуцированная и ее длина равна меньшей из длин групп A и B. Если, сверх того, A и B счетные, то A тогда и только тогда изоморфно прямому слагаемому группы $\mathrm{Tor}(A, B)$, если длина A не больше длины B. Несчетная примарная группа со счетной базисной подгруппой не содержится ни в какой группе вида $\mathrm{Tor}(A, B)$ с редуцированными группами A, B, хотя, очевидно, для любой p-примарной группы A $\mathrm{Tor}(A, C(p^\infty)) = A$.

Нами рассмотрено несколько примеров бинарных операций в классе абелевых групп. Можно ожидать, что они подскажут пути для разработки большой теории операций в классе абелевых групп, которая не будет покрываться ни общей теорией операций в классе всех групп (см. § Д.11), ни теорией функторов в категориях модулей.

§ Д.34. Эндоморфизмы и автоморфизмы абелевых групп

Кольца эндоморфизмов. Основные определения приведены в § 21. В работах Бэра [27] и Капланского [3] доказана следующая важная теорема: если кольца эндоморфизмов p-примарных абелевых групп A и B изоморфны, то изоморфны сами группы A и B. Шарль [1] описывает центр кольца эндоморфизмов примарной группы.

Корнер [3] доказал, что всякое счетное ассоциативное кольцо R с единицей, аддитивная группа которого редуцированная и без кручения, служит кольцом эндоморфизмов для некоторой счетной редуцированной абелевой группы G без кручения. Если при этом аддитивная группа кольца R имеет конечный ранг n, то можно подобрать группу G ранга $2n$, но не всегда меньшего ранга. Отметим, что кольцо R реализуется в условиях рассматриваемой теоремы как кольцо эндоморфизмов континуального множества неизоморфных групп G, т. е. теорема Бэра–Капланского на этот случай не может быть распространена. Отметим также, что ни одно из условий — «счетность», «редуцированность» и «без кручения», — входящих в формулировку теоремы Корнера, не может быть опущено. См. также Корнер [5].

В противоположность этому кольцо, изоморфное кольцу эндоморфизмов примарной абелевой группы G без элементов бесконечной высоты, имеет весьма специальное строение. Изучению этого кольца

и его связей с кольцом эндоморфизмов базисной подгруппы группы G посвящена работа Пирса [2].

Пусть G — произвольная абелева группа, $\overline{G}$ — минимальная полная группа, ее содержащая. Длаб [2] доказал, что кольцо эндоморфизмов группы G изоморфно фактор-кольцу кольца тех эндоморфизмов группы $\overline{G}$, которые отображают G в себя, по идеалу, составленному из тех эндоморфизмов группы $\overline{G}$, которые отображают G в нуль; этот идеал равен нулю, если G — группа без кручения. Указанное в § 21 описание кольца эндоморфизмов прямой суммы как некоторого кольца матриц распространяется на прямые суммы бесконечного множества групп. Описываются, в частности, кольца эндоморфизмов полных абелевых групп.

Селе [3] показал, что если кольцо эндоморфизмов абелевой группы G не имеет делителей нуля, то группа G не может быть смешанной, а если она периодическая, то или циклическая простого порядка p, или же группа типа p^∞. Селпал [1] описывает те абелевы группы G, аддитивная группа кольца эндоморфизмов которых есть группа без кручения; именно, это будет тогда и только тогда, когда $G = A + B$, где A — полная периодическая, а B без кручения, p-полная относительно всех тех простых чисел p, которые входят в порядки элементов группы A.

Селе и Сендреи [1] показали, что периодическая абелева группа G тогда и только тогда обладает коммутативным кольцом эндоморфизмов, когда она локально циклическая; этому равносильно предположение, что всякий эндоморфный образ группы G вполне характеристичен в G. Существуют, однако, абелевы группы без кручения, все эндоморфные образы которых вполне характеристичны, но кольцо эндоморфизмов не является коммутативным (Орсатти [1]). В работе А. П. Мишиной [6] доказано, что если в абелевой группе G всякий автоморфизм любой подгруппы продолжается до автоморфизма всей группы, то всякий эндоморфизм любой подгруппы продолжается до эндоморфизма всей группы, и обратно; описаны все абелевы группы G с этими свойствами.

Альтман [1] рассматривает абелеву группу G, обладающую эндоморфизмом φ, удовлетворяющим следующему условию: если $A_n = G\varphi^n$, B_n — ядро эндоморфизма φ^n, то обрываются обе цепочки $G = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, $O = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$. В этом случае указанные цепочки стабилизируются на одном и том же месте k, причем $G = A_k + B_k$.

Группы эндоморфизмов. Можно ограничиться, понятно, рассмотрением аддитивной группы кольца эндоморфизмов абелевой группы G, т. е. группы эндоморфизмов этой группы; это будет, иными словами, группа $\mathrm{Hom}(G, G)$.

Харрисон [3] показал, что существуют неизоморфные p-примарные группы, группы эндоморфизмов которых изоморфны. Для групп без кручения аналогичный результат в работе Сонсяды [6]; он вытекает также из приведенных в п. 1 результатов Корнера. Армстронг [1]

описывает те примарные группы, разложимые в прямую сумму циклических групп, которые определяются своей группой эндоморфизмов; описываются также те примарные группы, которые могут служить группой эндоморфизмов для некоторой абелевой группы.

Группы автоморфизмов. В конце § 21 приведен ряд работ, посвященных группам автоморфизмов абелевых групп. Рассмотрим некоторые новые работы.

Лептин [2] рассматривает p-примарную группу A и q-примарную группу B и предполагает, что изоморфны их группы автоморфизмов. Если $p = q \geqslant 5$, то оказывается, что изоморфны сами группы A и B. Если $p = q = 3$, то изоморфны базисные подгруппы групп A и B, в то время как вопрос об изоморфизме самих этих групп остался открытым. Если, наконец, $p \neq q$ и если, например, $3 \leqslant p < q$, то из изоморфизма групп автоморфизмов групп A и B следует, что A — циклическая порядка p^k, B — циклическая порядка q и $(p-1)p^{k-1} = q - 1$. См. также Х. Фридман [1].

Фукс [19] берет в примарной группе G убывающую последовательность подгрупп G_β, построенную в Д.30.3, строит в группе автоморфизмов A группы G возрастающую последовательность подгрупп A_β, причем A_β состоит из всех тех автоморфизмов, которые оставляют на месте все элементы из G_β, и изучает факторы этой возрастающей последовательности и их связи с ульмовскими инвариантами группы G; см. также Х. Фридман [1], Лептин [4]. В работе Фукса показано, в частности, что если группа автоморфизмов A является $\overline{RN}$-группой, то группа G будет конечной и, следовательно, группа A конечна и разрешима.

В работе Бэра [65] приведены условия на абелеву группу без кручения (или свободную абелеву группу) G типа существования некоторой конечной или абелевой группы автоморфизмов с различными дополнительными свойствами, достаточные для того, чтобы группа G оказалась циклической.

Работа Бэра [74] посвящена изучению групповой пары (G, Γ) (см.Д.22.1), где группа G абелева, а группа автоморфизмов Γ *неприводимая*, т. е. в G нет нетривиальных Γ-допустимых подгрупп. Если группа Γ локально конечная, то G будет p-примарной с элементами порядка p, централизатор Δ группы Γ в кольце эндоморфизмов группы G — абсолютно алгебраическим полем характеристики p, а подкольцо кольца эндоморфизмов, порожденное группой Γ, — локально конечным кольцом. Если группа Γ содержит периодическую абелеву группу конечного индекса, то G как векторное пространство над Δ конечномерно, а Γ имеет конечный специальный ранг. Если же, сверх того, порядки элементов в Γ ограничены в совокупности, то обе группы G и Γ конечны.

И. Х. Беккер [1] описывает те абелевы группы с конечным числом образующих, которые обладают ненулевыми элементами, остающимися неподвижными при всех автоморфизмах группы. Либек [2]

рассматривает свободную абелеву группу F конечного ранга и описывает те абелевы группы G с конечным числом образующих, что всякий изоморфизм между любыми фактор-группами группы F, изоморфными группе G (или всякий автоморфизм любой изоморфной G фактор-группы группы F) индуцируется некоторым автоморфизмом группы F.

Мощности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов. В Д.3.1 отмечена доказанная Бэром теорема о том, что у всякой (не обязательно абелевой) бесконечной периодической группы ее группа автоморфизмов также бесконечна. Бойер [1] показал, что группа автоморфизмов счетной периодической абелевой группы имеет мощность континуума.

В работе Е. Уокера [4] доказано, что если G — бесконечная периодическая абелева группа, то мощности ее группы автоморфизмов $\mathfrak{A}(G)$ и кольца эндоморфизмов $\mathfrak{E}(G)$ подчинены неравенствам (здесь $|M|$ означает мощность множества M):

$$|G| \leqslant |\mathfrak{A}(G)| \leqslant |\mathfrak{E}(G)| \leqslant 2^{|G|}.$$

Если G — полная периодическая группа, то $|\mathfrak{A}(G)| = 2^{|G|}$. Если G — редуцированная периодическая группа, а B — ее базисная подгруппа, то $|\mathfrak{E}(G)| = 2^{|B|}$.

§ Д.35. Другие направления в теории абелевых групп

Эпиморфные и эндоморфные образы. В работах Кертеса и Селе [1], Сонсяды [1] и Фукса, Кертеса и Селе [3] описаны абелевы группы, эндоморфным образом которых служит соответственно любая их конечнопорожденная подгруппа, любая счетная подгруппа и вообще любая подгруппа. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда любая подгруппа, разложимая в прямую сумму циклических групп, служит эндоморфным образом группы, а для примарных групп — тогда и только тогда, когда сама группа является эпиморфным образом своей базисной подгруппы. В работе Фукса, Кертеса и Селе [4] описываются такие абелевы группы G, что всякий эпиморфный образ группы G изоморфен некоторому эндоморфному образу этой группы.

Работы Фукса, Кертеса и Селе [1] и Фукса [6] посвящены изучению следующего понятия: абелевы группы A и B называются *дуальными*, если всякая подгруппа (эпиморфный образ) каждой из этих групп изоморфна (изоморфен) эпиморфному образу (подгруппе) другой. Описываются дуальные пары групп и, в частности, *самодуальные группы* (случай $A = B$); отметим, что среди групп без кручения самодуальных групп нет.

Фукс [11] называет эпиморфный образ H абелевой группы G *универсальным*, если всякий эпиморфный образ группы G изоморфен

некоторой подгруппе группы H; подгруппа U группы G названа *универсальной*, если всякая подгруппа группы G является эпиморфным образом группы U. Описываются абелевы группы, обладающие универсальным эпиморфным образом или универсальной подгруппой. Так, всякая периодическая группа обладает универсальным эпиморфным образом, всякая группа бесконечного ранга — универсальной подгруппой. В работе Грецера и Е. Шмидта [1] описываются те абелевы группы G, которые обладают такой универсальной подгруппой, что фактор-группа по ней служит для G универсальным эпиморфным образом.

Некоторые теоремы о мощностях. Скотт [2] обозначает через $K = K(G)$ множество тех элементов $a \in G$, что множество таких элементов из G, никакое кратное которых не равно a, имеет меньшую мощность, чем мощность $|G|$ самой группы G. Отметим, что если G есть группа типа p^∞, то $K(G) = G$. Доказано, что для абелевой группы G тогда и только тогда $K(G)$ будет группой типа p^∞, когда G является прямой суммой группы типа p^∞ и конечной группы. Если G — несчетная абелева группа, $\mathfrak{R}$ — множество ее подгрупп, имеющих мощность $|G|$, а D — пересечение всех этих подгрупп, то $|\mathfrak{R}| = 2^{|G|}$, $K(G) = D = O$. Отсюда следует, что если все истинные подгруппы абелевой группы G имеют меньшую мощность, чем $|G|$, то G будет или конечной, или группой типа p^∞. Если абелева группа G счетная, но не представимая в виде прямой суммы конечной группы и группы типа p^∞, то $K(G) = D = O$.

Бойер [1] дополнил последний результат следующим утверждением: если G — счетная абелева группа и A — ее свободная подгруппа, фактор-группа по которой периодична, то G имеет счетное множество подгрупп, если ранг G конечен и фактор-группа G/A является прямой суммой конечной группы и конечного числа групп типа p^∞, относящихся к различным p; во всех других случаях множество подгрупп рассматриваемой группы G имеет мощность континуума.

В работе Скотта [3] показано, что если G — абелева группа несчетной мощности $\mathfrak{m}$ и $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, то G содержит $2^{\mathfrak{m}}$ подгрупп мощности $\mathfrak{m}$, имеющих в G индекс $\mathfrak{n}$, причем пересечение всех этих подгрупп равно нулю. Больше того, в G можно найти $2^{\mathfrak{m}}$ таких подгрупп мощности $\mathfrak{m}$ и индекса $\mathfrak{n}$, фактор-группы по которым изоморфны между собой.

Скотт [4] описывает абелевы группы G, изоморфные со всякой своей подгруппой (со всякой своей фактор-группой), имеющей мощность $|G|$. Описываются также, в обобщение результатов Селе и Селпала [1], те абелевы группы G, которые не имеют истинных эндоморфных образов мощности $|G|$, а также те группы G, всякий эндоморфизм которых на подгруппу мощности $|G|$ является автоморфизмом.

Обобщения изоморфизма. Абелевы группы A и B называются *почти изоморфными*, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой. Простые примеры показывают, что почти изоморфные группы могут не быть изоморфными.

Йонсон [4] использует это понятие для того, чтобы построить следующую теорию, заменяющую теорему об изоморфизме прямых разложений абелевой группы без кручения конечного ранга, теорему, которая, как указано в Д.31.3, не имеет места. Ненулевая абелева группа называется *сильно неразложимой*, если она не является почти изоморфной никакой абелевой группе, разложимой в прямую сумму. Если $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ — сильно неразложимые абелевы группы без кручения конечного ранга и прямые суммы $A_1 + \ldots + A_m$ и $B_1 + \ldots + B_n$ почти изоморфны между собой, то $m = n$ и слагаемые этих двух прямых сумм можно так поставить во взаимно однозначное соответствие, что соответствующие группы будут почти изоморфными. См. также Рейд [2].

Де Грот [2, 4] указывает некоторые условия, при которых из того, что каждая из абелевых групп A, B изоморфна сервантной подгруппе (или прямому слагаемому) другой, следует изоморфность самих этих групп. Так, если группы A и B почти изоморфны по прямым слагаемым и в каждой из них объединение возрастающей последовательности прямых слагаемых будет прямым слагаемым, то эти группы изоморфны.

Фиксируем теперь некоторый абстрактный класс абелевых групп K и назовем абелевы группы A и B K-*квазиизоморфными*, если существуют такие подгруппы $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, что $A' \simeq B'$, а фактор-группы A/A' и B/B' принадлежат к классу K. Если K — класс групп с ограниченными в совокупности порядками элементов, то говорят просто о *квазиизоморфизме*.

Ряд результатов о квазиизоморфных группах можно найти в работах Бьюмонта и Пирса [2, 4, 7]. Так, найдены условия для квазиизоморфизма счетных периодических групп и групп, разложимых в прямую сумму конечных циклических групп; эти условия формулируются на языке ульмовских инвариантов. Прохазка [11] указал некоторые условия, при которых абелева группа без кручения конечного ранга изоморфна всякой абелевой группе, с которой она квазиизоморфна. К. Уокер [1] построила пример квазиизоморфных смешанных групп, из которых одна расщепляется, а другая нет. Если, однако, или фактор-группа группы G по ее периодической части T счетна, или же фактор-группы $G/(pG + T)$ конечны для всех простых p, то из квазиизоморфности группы G с расщепляющейся группой следует расщепляемость самой G.

Перенесение теории квазиизоморфных групп в теорию категорий — в работе Е. Уокера [7].

Другие работы. Фукс и Селе [1] описали те абелевы группы, которые обладают единственной максимальной подгруппой — это будут группы, разложимые в прямую сумму полной группы и или примарной циклической группы, или сервантной подгруппы аддитивной группы целых p-адических чисел.

В работе Брайента [1] описываются абелевы группы G, обладающие тем свойством, что если все конечнопорожденные подгруппы (или подгруппы с фиксированным числом k образующих) некоторой группы H изоморфно вкладываются в G, то и сама группа H изоморфно вложима в G.

Длаб [10] рассматривает такие системы A ненулевых элементов абелевой группы G, которые содержат всякий элемент из G, зависящий от элемента из A (или от линейно независимой системы элементов из A, или от любой системы элементов из A). При этом элемент x *зависит* от элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если

$$nx = m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_ka_k$$

при некоторых целых $n, m_1, m_2, \ldots, m_k$ и $nx \neq 0$ (ср. Д.28.2).

Подгруппа A абелевой группы G названа в работе Абияна и Райнхарта [1] *честной*, если всякая циклическая подгруппа группы G или содержится в A, или же имеет с A нулевое пересечение. Честная подгруппа или содержится в периодической части T группы G, или же содержит ее. Ненулевая истинная подгруппа A группы T тогда и только тогда будет честной в G, если T p-примарно, а A является прямой суммой циклических групп порядка p и служит прямым слагаемым для G. Если же $T \subseteq A \subset G$, то A является честной в G тогда и только тогда, когда G/A — группа без кручения.

В работе Брамере [1] изучаются абелевы группы, структура вполне характеристических подгрупп которых линейно упорядочена.

———

ДК. Дополнительные замечания при корректуре

[Д.6.1] В самое последнее время теорию изоморфизмов полных прямых разложений далеко продвинул А. Х. Лившиц в рамках теории категорий.

[Д.7.5] Теорему о подгруппах свободного произведения операторных групп с группой операторов, обобщающую теорему Завало, доказал В. А. Артамонов.

[Д.8.2] Вопрос о вложении амальгамы групп, обладающих некоторым свойством, подчиненным естественным требованиям, в группу с этим же свойством рассмотрел М. С. Бургин.

[Д.10.6] К. К. Андреев и А. Ю. Ольшанский доказали для групп $F/W(N)$ обращение одной аппроксимационной теоремы Баумслага. М. А. Бронштейн, обобщая ряд теорем из Д.9.2, доказал, что предположение, сделанное в работе П. Неймана [3], выполняется при любой непустой системе тождеств W. В работе А. А. Виноградова

(Алг. и лог. **5**: 4, 1966, 5–13) рассматриваются квазимногообразия нильпотентных групп.

[Д.11.2] В работах М. А. Бронштейна (Сиб. матем. ж. **7**, 1966, 1250–1258), М. А. Бронштейна и О. Н. Головина и в примыкающей к ним работе Г. К. Генова почти завершена классификация точных операций.

[Д.11.5] В. Н. Лифшиц построил примеры нильпотентных групп без кручения любого класса с неизоморфными нильпотентными разложениями.

[Д.11.6] Условия ассоциативности поливербальной операции рассматриваются также в работе С. А. Ашманова и О. Н. Мацедонской (Сиб. матем. ж. **7**, 1966, 1216–1229).

[Д.12.1] По образцу теории расширений, изложенной в § 49–51, Б. М. Рудык построил теорию расширений в категории модулей над всевозможными ассоциативными кольцами.

[Д.13.4] В. А. Шериев (ДАН СССР **172**, 1967, 52–53) изучает группы, все неинвариантные подгруппы которых дополняемы.

[Д.15.4] Проблеме тождества посвящены также работы Л. А. Бокутя (Алг. и лог. **5**: 5, 1966, 5–23; **6**: 1, 1967, 15–24, 25–38), проблеме сопряженности — работа М. И. Каргаполова и В. Н. Ремесленникова (Алг. и лог. **5**: 6, 1966, 15–25), проблеме вхождения — работы К. А. Михайловой (Матем. сб. **70**, 1966, 241–251) и Г. Г. Щепина (ДАН СССР **160**, 1965, 294–297). Исследования М. Д. Гриндлингера развиваются в его работах (Изв. АН СССР, сер. матем. **29**, 1965, 245–268; Сиб. матем. ж. **7**, 1966, 785–803) и в работах В. В. Солдатовой (Сиб. матем. ж. **7**, 1966, 627–637) и Д. И. Молдованского.

[Д.16.5] В работе С. П. Струнков (ДАН СССР **170**, 1966, 279–281) показано, что всякая бесконечная группа, все подгруппы которой с двумя образующими конечны, обладает бесконечной абелевой подгруппой. И. Н. Абрамовский (Сиб. матем. ж. **7**, 1966, 481–485; Алг. и лог. **6**: 1, 1967, 5–8) изучает локально конечные группы, для подгрупп которых инвариантно свойство транзитивности.

[Д.16.7] Л. А. Калужнин (Сб. «Алгебра и матем. логика», Киев, 1966, 62–71) рассматривает одно обобщение локальной нормальности.

[Д.17.2] В работе В. П. Шункова (Сиб. матем. ж. **8**, 1967, 213–229) положительно решена для локально конечных групп поставленная в Заключении к первому изданию (см. с. 519 настоящей книги) проблема счетности всякой группы с условием минимальности для подгрупп.

[Д.18.2] В работе Г. А. Карасева (Сиб. матем. ж. **7**, 1966, 1014–1032) продолжается изучение n-нильпотентных групп.

[Д.19.5] Сформулированная в этом пункте программа обобщения теории Баумслага, основанного на привлечении n-арных мультиоператоров, уже реализована Бялыницким-Бируля и Бровкиным (Варшава).

Системы уравнений в П-полных локально нильпотентных группах рассматривает А. Л. Шмелькин (Алг. и лог. **6**: 2, 1967, 111–113).

[Д.20.4] К. К. Щукин (Уч. зап. Кишиневск. ун-та **82**, 1965, 97–99) рассматривает радикальные классы, состоящие из групп, совпадающих со своей вербальной подгруппой по некоторой системе тождеств.

[Д.20.5] Один класс радикалов в классе абелевых групп описывает Ю. М. Рябухин (Материалы IV конфер. молодых ученых, Кишинев, 1964, 74–75).

[Д.22.2] Книга Б. И. Плоткина вышла в 1966 г.

[Д.22.3] Одно обобщение стабильных групп автоморфизмов рассматривает Р. В. Асатиани (Сообщ. АН Груз. ССР **41**, 1966, 3–10; **42**, 1966, 23–28).

[Д.24.3] А. Л. Шмелькин установил некоторые условия, при которых полициклическая группа обладает нильпотентной подгруппой конечного индекса.

[Д.24.4] Г. М. Ромалис и Н. Ф. Сесекин изучают группы, в которых всякая неабелева подгруппа инвариантна (Матем. зап., Уральск. ун-т, **5**: 3, 1966, 101–106).

[Д.24.5] Изучение свободных разрешимых групп продолжается в работе А. Л. Шмелькина (Алг. и лог. **6**: 2, 1967, 95–109).

[Д.24.6] Дальнейшее изучение подгрупп свободных полинильпотентных групп — в работе А. Л. Шмелькина (ДАН СССР **169**, 1966, 1024–1025). Д. И. Эйделькинд рассмотрел конечнопорожденные нормальные делители свободных полинильпотентных групп. Одно обобщение полинильпотентных групп — в работе Э. Б. Кикодзе (Алг. и лог. **5**: 4, 1966, 15–23). Некоторые многообразия разрешимых групп рассмотрел Э. Б. Кикодзе (Изв. АН СССР, серия матем. **31**, 1967, 269–274), а А. Л. Шмелькин описал многообразия разрешимых групп, не содержащие целиком многообразие всех двуступенно разрешимых групп.

[Д.27.1] Полное обозрение нильпотентных многообразий класса 3 независимо дали Йонсон и Ю. А. Белов.

[Д.27.2] Перенесение теоремы Блекберна на некоторые классы разрешимых групп опубликовано в работах М. И. Каргаполова (Алг. и лог. **6**: 1, 1967, 63–68) и Е. И. Тимошенко (Алг. и лог. **6**: 2, 1967, 89–94), аналог этой теоремы для подгрупп (а не элементов) конечнопорожденных нильпотентных групп — в работе В. Н. Ремесленникова (Алг. и лог. **6**: 2, 1967, 61–76).

[Д.29.3] Можно рассматривать также сервантность по заданным степеням заданных простых чисел. В. С. Рохлина описала абелевы группы, в которых всякая сервантная в этом смысле подгруппа выделяется прямым слагаемым.

[Д.32.3] Изучение смешанных абелевых групп ранга 1 продолжается в работах В. И. Мышкина (Изв. АН СССР, серия матем. **30**, 1966, 789–824; Сб. «Алгебра и матем. логика», Киев, 1966, 21–36).

Указатель литературы [1])

Абиян (Abian A.)

[1] On the lengths of bases of a finitely generated abelian group. — Boll. Unione mat. ital. **19** (1964), 12–15. [65:5, 166] (Д.28.2)

Абиян и Райнхарт (Abian A., Rinehart D.)

[1] Honest subgroups of abelian groups. — Rend. Circolo Mat. Palermo **12** (1963), 353–356. [66:4, 127] (Д.35.4)

Абхьянкар (Abhyankar Sh.)

[1] On the finite factor groups of abelian groups of finite rational rank, — Amer. J. Math. **79** (1957), 190–192. [57:11,8449] (Д.31.1)

Адельсбергер (Adelsberger H.)

[1] Über unendliche diskrete Gruppen. — J. reine angew. Math. **163** (1930), 103–124.

Адо И. Д.

[1] О нильпотентных алгебрах и p-группах. — ДАН СССР **40** (1943), 339–342. (58, Д.3.2)

[2] О подгруппах счетной симметрической группы. — ДАН СССР **50** (1945), 15–18.

[3] Локально конечные p-группы с условием минимальности для нормальных делителей. — ДАН СССР **54** (1946), 475–478. (53)

[4] Доказательство счетности локально конечной p-группы с условием минимальности для нормальных делителей. — ДАН СССР **58** (1947), 523–524.

Адян С. И.

[1] Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп. — Тр. Моск. матем. о-ва **6** (1957), 231–298. [58:10, 8524] (Д.15.4)

Альтман (Altman M.)

[1] Généralisation aux groupes abéliens de la théorie de F. Riesz. — C. R. Paris **246** (1958), 1135–1138. [60:8, 8609] (Д.34.1)

Амицур (Amitsur S. A.)

[1] A general theory of radicals. — Amer. J. Math. **74** (1952), 774–786; 76 (1954), 100–136. [55:11, 5654] (Д.20.1)

Армстронг (Armstrong J. W.)

[1] A note on endomorphism group. — Publ. Math. **10** (1963), 116–119. [65:8, 171] (Д.34.2)

[2] On the indecomposability of torsion-free abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 323–325. [66:10, 134] (Д.31.2)

[1]) В квадратных скобках указываются координаты реферата рассматриваемой работы в Реферативном журнале «Математика», причем [64:9, 341] означает: 1964 год, выпуск 9А, реферат 341. В круглых скобках указываются те параграфы книги, в которых эта работа упоминается.

Артин (Artin E.)
[1] The free product of groups. — Amer. J. Math. **69** (1947), 1–4.
Асано (Asano K.)
[1] Bemerkungen über die Erweiterungstheorie von Gruppen. — J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ. **A5** (1954), 75–80. [57:1, 139] (Д.12.1)
Атия (Atiyah M.)
[1] On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves. — Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 307–317. [59:3, 2425] (Д.5.3)
Ауслендер и Линдон (Auslander M., Lyndon R. C.)
[1] Commutator subgroups of free groups. — Amer. J. Math. **77** (1955), 929–931. [56:11, 7893] (Д.9.2)
Бальцержик (Balcerzyk S.)
[1] Remark on a paper of S. Gacsályi. — Publ. Math. **4** (1956), 357–358. [60:4, 3808] (Д.29.2)
[2] On algebraically compact groups of I. Kaplansky. — Fund. Math. **44** (1957), 91–93. [59:9, 8851] (Д.29.5)
[3] On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups. — Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 141–142. [61:6, 204] (Д.29.5, Д.31.6)
[4] On classes of abelian groups. — Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 327–329. [62:11, 138] (Д.21.2)
[5] On groups of functions defined on Boolean algebras. — Fund. Math. **50** (1962), 347–367. [63:11, 161] (Д.29.5)
[6] On classes of abelian groups. — Fund. Math. **51** (1962), 149–178; 56 (1964), 199–202. [64:11, 174; 66:1, 212] (Д.21.2)
Бальцержик, Бялыницкий-Бируля и Лось (Balcerzyk S., Bialynicki-Birula A., Los J.)
[1] On direct decompositions of complete direct sums of groups of rank 1. — Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 451–454. [62:3, 177] (Д.31.5)
Баранович Т. М.
[1] О политождествах в универсальных алгебрах. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 976–986. [65:7, 244] (Д.11.6)
Барнес и Уолл (Barnes D. W., Wall G. E.)
[1] On normaliser preserving lattice isomorphisms between nilpotent groups. — J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 454–469. [66:7, 193] (Д.14.4)
Баумслаг (Baumslag G.)
[1] A theorem on infinite groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **53** (1957), 545–548. [58:5, 3557] (Д.3.3)
[2] Finite factors in infinite ascending derived series. — Math. Z. **68** (1958), 465–478. [58:10, 8591] (Д.23.5)
[3] Wreath products and p-groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **55** (1959), 224–231. [60:6, 6203] (Д.12.4, Д.19.2, Д.19.5)
[4] On a problem of Lyndon. — J. London Math. Soc. **35** (1960), 30–32. [61:1, 207] (Д.9.1)
[5] Roots and wreath products. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **56** (1960), 109–117. [62:2, 201] (Д.12.4)
[6] Some aspects of groups with unique roots. — Acta Math. **104** (1960), 217–303. [61:10, 196] (Д.19.1)
[7] Wreath products and finitely presented groups. — Math. Z. **75** (1961), 22–28. [61:10, 194] (Д.12.4)

[8] A remark on hyperabelian groups. — Arch. Math. **12** (1961), 321–323. [62:8, 145] (Д.23.5)
[9] A generalisation of a theorem of Malcev. — Arch. Math. **12** (1961), 405–408. [63:1, 194] (Д.19.4)
[10] Some remarks on nilpotent groups with roots. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 262–267. [61:11, 205] (Д.19.2)
[11] On generalised free products. — Math. Z. **78** (1962), 423–438. [63:8, 157] (Д.8.1)
[12] A non-Hopfian group. — Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 196–198. [63:5, 163] (Д.15.1)
[13] A remark on generalised free products. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 53–54. [62:10, 151] (Д.15.2)
[14] Automorphism groups of residually finite groups. — J. London Math. Soc. **38** (1963), 117–118. [64:8, 154] (Д.17.9)
[15] On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 193–209. [64:8, 173] (Д.17.9)
[16] Some subgroup theorems for free $\mathfrak{B}$-groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 516–525. [64:5, 181] (Д.10.6, Д.24.5)
[17] On the residual nilpotence of some varietal products. — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 357–365. [64:5, 182] (Д.11.4, Д.19.4, Д.25.5)
[18] Wreath products and extensions. — Math. Z. **81** (1963), 286–299. [63:11, 181] (Д.10.5)
[19] Groups with one defining relator. — J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 385–392. [65:12, 231] (Д.15.2)
[20] On a problem of Plotkin concerning locally nilpotent groups. — Math. Z. **83** (1964), 25–26. [64:6, 172] (Д.25.2)
[21] On free D-groups. — Comm. pure and appl. math. **18** (1965), 25–30. [65:12, 225] (Д-19.3)

Баумслаг и Блекберн (Baumslag G., Blackburn N.)
[1] Direct summands of unrestricted direct sums of abelian groups. — Arch. Math. **10** (1959), 403–408. [61:7, 224] (Д.6.1)
[2] Groups with cyclic upper central factors. — Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 531–544. [61:6, 212] (Д.3.3)

Баумслаг и Б., Х. и П. Нейманы (Baumslag G., B., H. and P. Neumanns)
[1] On varieties generated by a finitely generated group. — Math. Z. **86** (1964), 93–122. [65:12, 237] (Д.10.5)

Баумслаг и Солитэр (Baumslag G., Solitar D.)
[1] Some two-generator one-relator non-Hopfian groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 199–201. [63:5, 203] (Д.15.1)

Баумслаг и Стейнберг (Baumslag G., Steinberg A.)
[1] Residual nilpotence and relations in free groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 283–284. [64:10, 176] (Д.9.1)

Баур (Baur H.)
[1] Ein Kommutativitätskriterium für unendliche anflösbare Gruppen. — Arch. Math. **11** (1960), 176–182. [61:12, 273] (Д.23.1)

Бауэр (Bauer M.)
[1] Über die alternierende Gruppe. — Mat. fiz. Lap. **39** (1932), 25–26. (9)

Бауэрс (Bowers J. F.)
[1] On compositions series of polycyclic groups. — J. London Math. Soc. **35** (1960), 433–444. [61:8, 190] (Д.24.3)
Бахмут и Левин Я. (Bachmuth S., Lewin J.)
[1] The Jacobi identity in groups. — Math. Z. **83** (1964), 170–176. [64:9, 164] (Д.24.4)
Бачурин Г. Ф.
[1] О группах с возрастающим центральным рядом. — Матем. сб. **45** (1958), 105– 112. [59:6, 5575] (Д.25.4)
[2] Об одном классе нильпотентных групп. — Сб. научн. тр. Магнитогорск. горно-металлург. ин-та **16** (1958), 99–112. [59:6, 5573] (Д.27.1)
[3] О смешанных ZA-группах с конечным центром. — Матем. сб. **52** (1960), 879– 890. [61:7, 219] (Д.25.4)
[4] Один критерий конечности ранга нильпотентной группы без кручения. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1963, № 6, 25–28. [64:7, 216] (Д.25.2)
[5] Об однослойных p-группах, обладающих возрастающим центральным рядом. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 5, 27–30. [66:2, 229] (Д.25.4)
Беккер И. Х.
[1] О центроиде абелевой группы с конечным числом образующих. — Тр. Томск. ун-та **155** (1961), 190–193. [62:11, 137] (Д.34.3)
[2] О голоморфах абелевых групп. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 1228–1238; **7** (1966), 231. [65:10, 173] (Д.3.2)
Бенадо (Benado M.)
[1] Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. I. — Math. Nachr. **14** (1955), 213–234. [59:3, 2370] (Д.11.3)
[2] Sur la théorie générale des produits réguliers. — C. R. Paris **243** (1956), 1092–1093. [60:5, 4953] (Д.11.5)
[3] Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. II. — Math. Nachr. **16** (1957), 137–194. [60:5, 4952] (Д.11.3)
[4] Sur la théorie générale des produits réguliers. — C. R. Paris **244** (1957), 1595–1597, 1702–1704. [60:5, 4954, 4978] (Д.11.3)
[5] Sur la théorie générale des produits réguliers de Monsieur O. N. Golowine. V. — Publ. Univ. Alger **A4** (1957), 111–143. [61:9, 217] (Д.11.3)
[6] Remarques sur un théoréme de Monsieur Oleg N. Golovine. — Чехосл. матем. ж. **9** (1959), 475–484. [61:9, 219] (Д.11.3)
[7] Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. III. — Math. Nachr. **21** (1960), 1–36. [61:9, 216] (Д.11.3)
[8] Über den Kommutatrixbegriff. — Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 514–530. [61:9, 227] (Д.11.3)
Берлинков М. Л.
[1] Группы, обладающие компактной структурой подгрупп. — ДАН СССР **82** (1952), 505–508.
[2] Группы, обладающие компактной структурой подгрупп. — Матем. сб. **34** (1954), 473–498. [55:9, 4265] (Д.14.2)
[3] О структуре подгрупп слойно-конечной группы. — УМН **12**, № 4 (1957), 267–271. [58:6, 4507] (Д.14.2)
[4] Обобщенная сходимость и обобщенная компактность в σ-структурах. — Матем. сб. **53** (1961), 233–260. [62:3, 256] (Д.14.2)

[5] Обобщенная компактность в структуре подгрупп периодической абелевой группы. I. — Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 1 (1963), 5–17. [64:6, 170] (Д.14.2)

Берман С. Д. и Любимов В. В.

[1] Группы, допускающие любую перестановку факторов композиционного ряда. — УМН **12**, № 5 (1957), 181–183. [58:10, 8585] (Д.2.5)

Бернсайд (Burnside W.)

[1] The theory of groups of finite order. — Cambridge, 1897; 2-е изд., 1911.

[2] On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. — Quart. J. **33** (1902), 230–238. (38, Заключение к 1-му изд., Д.16.2)

[3] On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions. — Proc. London Math. Soc. **3** (1905), 435–440. (Заключение к 1-му изд.)

Биркгоф (Birkhoff G.)

[1] On the combination of subalgebras. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **29** (1933), 441–464.

[2] Transfinite subgroup series. — Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 847–850. (56)

[3] Subgroups of Abelian groups. — Proc. London Math. Soc. **38** (1934), 385–401. (20)

[4] Lattices and their applications. — Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 793–800.

[5] Lattice theory. — New York, 1940. Rev. ed., 1948. (Русский перевод: Теория структур. — ИЛ, 1952.) (43)

[6] The radical of a group with operators. — Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 751–753.

Биркгоф и Холл Ф. (Birkhoff G. and Hall Ph.)

[1] On the order of groups of automorphisms. — Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 496–499. (12)

Блекберн (Blackburn N.)

[1] Nilpotent groups in which the derived group has two generators. — J. London Math. Soc. **35** (1960), 33–35. [61:3, 188] (Д.27.1)

[2] Some remarks on Černikov p-groups. III. — J. Math. **6** (1962), 421–433. [63:5, 194] (Д.25.4)

[3] Conjugacy in nilpotent groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 143–148. [65:12, 220] (Д.27.2)

Бойер (Boyer D. L.)

[1] Enumeration theorems in infinite abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 565–570. [58:1, 135] (Д.34.4)

[2] A note on a problem of Fuchs. — Pacif. J. Math. **10** (1960), 1147. [61:9, 240] (Д.29.2)

Бойер и Уокер Е. (Boyer D. L., Walker E. A.)

[1] Almost locally pure abelian groups. — Pacif. J. Math. **9** (1959), 409–413. [61:6, 225] (Д.29.2)

Боньяр (Bognar M.)

[1] Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen. — Publ. Math. **4** (1956), 509–511. [60:2, 1377] (Д.31.2)

Боревич З. И. и Фаддеев Д. К.

[1] Теория гомологии в группах. — Вестн. ЛГУ, 1956, № 7, 3–39; 1959, № 7, 72–87. [57:4, 2921; 61:6, 234] (Д.12.1)

Брайент (Bryant S.)
[1] Isomorphism order for abelian groups. — Pacif. J. Math. **8** (1958), 679–683. [61:1, 212] (Д.35.4)
Брак (Bruck R. H.)
[1] On the restricted Burnside problem. — Arch. Math. **13** (1962), 179–186. [63:9, 161] (Д.16.4)
Браконье (Braconnier J.)
[1] Sous-modules d'un module complètement décomposable. — Ann. Univ. Lyon **14** (1951), 29–33. (Д.28.2)
Брамере (Brameret M.-P.)
[1] Sous-groupes complètement invariants d'un groupe abélien. — C. R. Paris **255** (1962), 1369–1370. [63:11, 152] (Д.35.4)
[2] Sur les groupes p-réduits. — C. R. Paris **256** (1963), 345–346. [64:2, 251] (Д.31.7)
Браун (Brown A. B.)
[1] Group invariants and torsion coefficients. — Ann. of Math. **33** (1932), 373–376.
Бриттон (Britton J. L.)
[1] Solution of the word problem for certain types of groups. — Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1956), 45–54, 68–90. [60:1, 151, 152] (Д.15.4)
[2] The word problem for groups. — Proc. London Math. Soc. **8** (1958), 493–506. [60:12, 13589] (Д.15.4)
[3] The word problem. — Ann. Math. **77** (1963), 16–32. [64:10, 175] (Д.15.4)
Брумберг Н. Р.
[1] Связь сплетений групп с другими операциями над группами. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 1221–1234. [64:6, 179] (Д.12.4)
Бун (Boone W. W.)
[1] The word problem. — Ann. Math. **70** (1959), 207–265. [60:10, 11183] (Д.15.4)
Бундгард и Нильсен (Bundgaard S. and Nielsen J.)
[1] On normal subgroups with finite index in F-groups. — Mat. Tidsskrift, **B** (1951), 56–58.
Бусаркин В. М.
[1] Вполне расщепляемые группы с перестановочным базисом расщепления. Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 1 (1963), 18–21. [63:10, 149] (Д.19.7)
Бусаркин В. М. и Старостин А. И.
[1] О расщепляемых локально конечных группах. — Матем. сб. **62** (1963), 275–294. [64:6, 163] (Д.19.7)
Бьюмонт (Beaumont R. A.)
[1] Projections of non-abelian groups upon abelian groups containing elements of infinite order. — Amer. J. Math. **64** (1942), 115–136. (Д.14.4)
[2] Projections of the prime-power abelian group of order p^m and type $(m - 1, 1)$. — Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 866–870.
[3] Groups with isomorphic proper subgroups. — Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 381–387.
Бьюмонт и Пирс (Beaumont R. A., Pierce R. S.)
[1] Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules. — Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 209–219. [60:12, 13639] (Д.30.2)

[2] Torsion-free rings. III. — J. Math. **5** (1961), 61–98. [63:3, 180] (Д.31.7, Д.35.3)
[3] Torsion free groups of rank two. — Mem. Amer. Math. Soc. Providence, 1961. [63:8, 146] (Д.31.1)
[4] Quasi-isomorphism of p-groups. — Proc. Colloq. on abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 13–27. [66:1, 216] (Д.35.3)
[5] Isomorphic direct summands of abelian groups. — Math. Ann. **153** (1964), 21–37. [65:5, 169] (Д.29.1)
[6] Some invariants of p-groups. — Mich. Math. J. **11** (1964), 137–149. [66:3, 170] (Д.30.2)
[7] Quasi-isomorphism of direct sums of cyclic groups. — Acta Math. Hung. **16** (1965), 33–36. [65:12, 219] (Д.35.3)

Бэр (Baer R.)
[1] Zur Einführung des Scharbegriffs. — J. reine angew. Math. **160** (1929), 199–207.
[2] Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. — S.-B. Heidelberg. Akad. **2** (1933), 12–17. (476, Д.14.3)
[3] Der Kern, eine charakteristische Untergruppe. — Comp. Math. **1** (1934), 254–283. (Д.3.3)
[4] Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen. — Math. Z. **38** (1934), 375–416. (48, 51)
[5] The decomposition of enumerable, primary, abelian groups into direct summands. — Quart. J. (Oxford) **6** (1935), 217–221. (28)
[6] The decomposition of abelian groups into direct summands. — Quart. J. (Oxford) **6** (1935), 222–232.
[7] Types of elements and characteristic subgroups of abelian groups. — Proc. London Math. Soc. **39** (1935), 481–514.
[8] Gruppen mit hamiltonschem Kern. — Comp. Math. **2** (1935), 241–246. (Д.3.3)
[9] Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung. — Comp. Math. **2** (1935), 247–249. (Д.3.3)
[10] Automorphismen von Erweiterungsgruppen. — Actualités scient. et industr., № 205, Paris, 1935.
[11] Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich. — Studia Math. **5** (1934), 15–17.
[12] Gruppen mit vom Zentrum wesentlich verschiedenem Kern und abelscher Faktorgruppe nach dem Kern. — Comp. Math. **4** (1936), 1–77. (Д.3.3)
[13] The subgroup of the elements of finite order of an abelian group. — Ann. Math. **37** (1936), 766–781. (29, Заключение к 1-му изд., Д.29.1, Д.32.1)
[14] Primary abelian groups and their automorphisms. — Amer. J. Math. **59** (1937), 99–117. (21)
[15] Abelian groups without elements of finite order. — Duke math. J. **3** (1937), 68–122. (31, 32)
[16] Dualism in abelian groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 121–124.
[17] Groups with abelian central quotient group. — Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 357–386.
[18] Groups with preassigned central and central quotient group. — Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 387–412.
[19] The applicability of lattice theory to group theory. — Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 817–820.

[20] The significance of the system of subgroups for the structure of the group. — Amer. J. Math. **61** (1939), 1–44. (47б, Д.14.4)
[21] Duality and commutativity of groups. — Duke math. J. **5** (1939), 824–838. (Д.14.5)
[22] Almost hamiltonian groups. — Comp. Math. **6** (1939), 382–406.
[23] Groups with abelian norm quotient group. — Amer. J. Math. **61** (1939), 700–708. (Д.3.3)
[24] Nilpotent groups and their generalization. — Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 393–434. (54, 59, 62–64)
[25] Sylow theorems for infinite groups. — Duke math. J. **6** (1940), 598–614. (54, 55, 60, Д.18.1, Д.18.3)
[26] Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 800–806. (23, Д.28.4)
[27] Automorphism rings of primary abelian operator groups. — Ann. of Math. **44** (1943), 192–227. (21, Д.34.1)
[28] A theory of crossed characters. — Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 103–170. (49)
[29] The higher commutator subgroups of a group. — Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 143–160. (Д.16.4)
[30] Groups without proper isomorphic quotient groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 267–278. (64)
[31] Crossed isomorphisms. — Amer. J. Math. **66** (1944), 341–404. (49)
[32] Representations of groups as quotient groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 295–419. (37, 52, 64, Д.15.2, Д.17.7)
[33] Absolute retracts in group theory. — Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 501–506.
[34] The double chain condition in cyclic operator groups. — Amer. J. Math. **69** (1947), 37–45.
[35] Splitting endomorphisms. — Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 508–516.
[36] Endomorphisms rings of operator loops. — Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 517–529.
[37] Direct decompositions. — Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 62–98. (42, Д.5.4)
[38] The role of the center in the theory of direct decompositions. — Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 167–174. (42, Д.5.4)
[39] Direct decompositions into infinitely many summands. — Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 519–551. (42, Д.5.4)
[40] Finiteness properties of groups. — Duke math. J. **15** (1948), 1021–1032. (53, Д.17.6)
[41] Groups with descending chain condition for normal subgroups. — Duke math. J. **16** (1949), 1–22. (53, Д.17.3)
[42] Extension types of abelian groups. — Amer. J. Math. **71** (1949), 461–490.
[43] Die Schar der Gruppenerweiterungen. — Math. Nachr. **2** (1949), 317–327.
[44] Free sums of groups and their generalizations. — Amer. J. Math. **71** (1949), 706–742; 72 (1950), 625–646, 647–670. (Д.8.2)
[45] Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen. — Math. Ann. **124** (1952), 161–177. (Д.17.7, Д.22.5)
[46] Klassifikation der Gruppenerweiterungen. — J. reine und angew. Math. **187** (1949), 75–94. (Д.12.2)

[47] Ein Einbettungssatz für Gruppenerweiterungen. — Arch. Math. **2** (1950), 178–185. (Д.12.1)
[48] Factorization on n-soluble and n-nilpotent groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15–26. [53:2, 598] (Д.18.2)
[49] The hypercenter of a group. — Acta Math. **89** (1953), 165–208. [54:3, 2524] (Д.25.4)
[50] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. — Arch. Math. **4** (1953), 86–96. [54:3, 2525] (Д.25.4)
[51] Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. — Math. Z. **59** (1953), 299–338. [55:4, 1668] (Д.25.4)
[52] Das Hyperzentrum einer Gruppe. IV. — Arch. Math. **5** (1954), 56–59. [55:9, 4261] (Д.22.1, Д.25.4)
[53] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. — Math. Ann. **129** (1955), 139– 173. [56:2, 1076] (Д.24.1)
[54] Supersoluble groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 16–32. [56:4, 2807] (Д.23.4)
[55] Finite extensions of abelian groups with minimum condition. — Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 521–540. [56:6, 4350] (Д.3.1, Д.17.2, Д.17.3, Д.18.1)
[56] Nilgruppen. — Math. Z. **62** (1955), 402–437. [56:9, 6413] (Д.20.4, Д.26.4, Д.26.5)
[57] Burnsidesche Eigenschaften. — Arch. Math. **6** (1955), 165–169. [56:9, 6414] (Д.21.3)
[58] Noethersche Gruppen. — Math. Z. **66** (1956), 269–288. [57:5, 3803] (Д.15.2 Д.17.5)
[59] Norm and hypernorm. — Publ. Math. **4** (1956), 347–350. [59:4, 3544] (Д.3.3)
[60] Lokal Noethersche Gruppen. — Math. Z. **66** (1957), 341–363. [58:2, 1023] (Д.17.5, Д.23.1)
[61] Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen. — Math. Ann. **133** (1957), 256–270. [58:2, 1024] (Д.26.3, Д.26.4)
[62] Classes of finite groups and their properties. III. — J. Math. **1** (1957), 115–187. [60:1, 147] (Д.21.1)
[63] Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe. — Math. Ann. **135** (1958), 219–234. (Русский перевод — «Математика» **4**, № 4 (1960), 3–19.) [59:5, 5181] (Д.32.1, Д.33.1)
[64] Die Potenzen einer gruppentheoretischen Eigenschaft. — Abh. Math. Sem. Hamburg **22** (1958), 276–294. [59:11, 10849] (Д.21.3)
[65] Überauflösbare Gruppen. — Abh. Math. Sem. Hamburg **23** (1959), 11–28. [60:10, 11329] (Д.23.4, Д.34.3)
[66] Kriterien für die Endlichkeit von Gruppen. — Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **63** (1960), 53–77. [61:5, 224] (Д.17.1)
[67] Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften. — Math. Z. **79** (1962), 344–363. [63:3, 169] (Д.21.3)
[68] Gruppentheoretische Eigenschaften. — Math. Ann. **149** (1963), 181–210. [63:12, 157] (Д.21.3)
[69] Gruppen mit Minimalbedingung. — Mat. Ann. **150** (1963), 1–44. [63:11, 137] (Д.17.2, Д.18.1)
[70] Groups with minimum condition. — Acta arithm. **9** (1964), 117–132. [65:3, 182] (Д.17.3, Д.21.3)

[71] Der reduzierte Rang einer Gruppe. — J. reine und angew. Math. **214–215** (1964), 146–173. [65:3, 169] (Д.21.3)
[72] Erreichbare und engelsche Gruppenelemente. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **27** (1964), 44–74. [65:3, 193] (Д.20.1, Д.23.4, Д.26.5, Д.26.6)
[73] The hypercenter of functorially defined subgroups. III. — J. Math. **8** (1964), 177–230. [65:4, 141] (Д.21.4)
[74] Irreducible groups of automorphisms of abelian groups. — Pacif. J. Math. **14** (1964), 385–406. [65:7, 169] (Д.34.3)
[75] Endlich definierbare gruppentheoretische Funktionen. — Math. Z. **87** (1965), 163–213. [65:10, 160] (Д.21.4)
[76] Group theoretical properties and functions. — Coll. Math. **14** (1966), 285–328. (Д.21.4)

Бэр и Леви (Baer R. und Levi F.)
[1] Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen. — S.-B. Heidelberg. Akad. **2** (1932), 3–12 (Beitr. zur Algebra. — 18). (3а)
[2] Freie Produkte und ihre Untergruppen. — Comp. Math. **3** (1936), 391–398. (34, 35, Д.7.1)

Бэр и Уильямс (Baer R. and Williams Ch.)
[1] Splitting criteria and extension types. — Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 729–743.

Бючи и Райт (Büchi J. R., Wright J. B.)
[1] Invariants of the anti-automorphisms of a group. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1134–1140. [59:6, 5576] (Д.3.5)

Вагнер (Wagner A.)
[1] On the associative law of groups. — Rend. mat. e applic. Roma **21** (1962), 60–76. [63:8, 182] (Д.1.1)

Валуцэ И. И.
[1] Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. — Матем. сб. **62** (1963), 371–384. [64:7, 297] (Д.9.4)

Ванг (Wang J. S. P.)
[1] On completely decomposable groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 184–186. [65:2, 269] (Д.31.4)

Ван-дер-Варден (van der Waerden B. L.)
[1] Gruppen von linearen Tranformationen. — Berlin, 1935. (Заключение к 1-му изд.)
[2] Free products of groups. — Amer. J. Math. **70** (1948), 527–528.

Ван-Кампен (van Kampen E. R.)
[1] On some lemmas in the theory of groups. — Amer. J. Math. **55** (1933), 268–273.

Вейхзель (Weichsel P. M.)
[1] On critical p-groups. — Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 83–100. [65:1, 182] (Д.10.5)

Вефер (Wever F.)
[1] Über Regeln in Gruppen. — Math. Ann. **122** (1950), 334–339.

Виланд (Wielandt H.)
[1] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. — Math. Z. **45** (1939), 209–244. (Д.2.6)
[2] Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen. — Math. Z. **41** (1936), 281–282. (62)

[3] p-Sylowgruppen und p-Faktorgruppen. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 180–183.
[4] Zum Satz von Sylow. — Math. Z. **60** (1954), 407–408. [55:9, 4249] (Д.18.2)
[5] Vertauschbare nachinvariante Untergruppen. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21** (1957), 55–62. [58:3, 1850] (Д.2.6)
[6] Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. — Math. Z. **69** (1958), 463–465. [60:2, 1386] (Д.2.6)
[7] Zum Satz von Sylow. II. — Math. Z. **71** (1959), 461–462. [60:9, 10019] (Д.18.2)

Виленкин Н. Я.
[1] Прямые разложения топологических групп. I. — Матем. сб. **19** (1946), 85–154. (17)

Вильоен (Viljoen G.)
[1] A contribution to the extensions of abelian groups. — Ann. Univ. Budapest **6** (1963), 125–132. [64:11, 175] (Д.33.3)

Виляцер В. Г.
[1] К теории локально нильпотентных групп. — УМН **13**, № 2 (1958), 163–168. [59:3, 2366] (Д.25.1, Д.26.2)
[2] О некоторых свойствах групп автоморфизмов. — Уч. зап. Уральск. ун-та **23**, № 2 (1959), 3–10. [60:12, 13600] (Д.22.3, Д.22.5)
[3] Стабильные группы автоморфизмов. — ДАН СССР **131** (1960), 728–730. [60:12, 13576] (Д.22.3)
[4] Некоторые примеры групп автоморфизмов. — ДАН СССР **139** (1961), 1283–1286. [62:4, 185] (Д.22.5)
[5] К теории радикалов в группах автоморфизмов. — Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 3 (1963), 79–88. [64:12, 175] (Д.22.5)

Винберг Э. Б.
[1] К теореме о бесконечномерности ассоциативной алгебры. — Изв. АН СССР, сер. матем. **29** (1965), 209–214. [65:7, 191] (Д.16.1)

Виноградов А. А.
[1] Квазимногообразия абелевых групп. — Алгебра и логика (семинар) **4**, № 6 (1965), 15–19. (Д.10.6)

Витт (Witt E.)
[1] Treue Darstellung Liescher Ringe. — J. reine angew. Math. **177** (1937), 152–160. (36)

Вольф (Wolf P.)
[1] Das Homomorphieproblem von Gruppenerweiterungen. — Math. Nachr. **19** (1958), 190–202. [61:1, 225] (Д.12.1)

Вуссинг (Wussing H.)
[1] Über Einbettungen endlicher Gruppen. — Ber. Sächsisch. Acad., Math.-natur. Kl. **103** (1958), 5–38. [59:10, 9792] (Д.1.3)

Гашюц (Gaschütz W.)
[1] Zu einem von B. H. und H. Neumann gestellten Problem. — Math. Nachr. **14** (1955), 249–252. [58:10, 8588] (Д.15.1)

Гёльдер (Hölder O.)
[1] Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4 — Math. Ann. **43** (1893), 301–412. (Заключение к 1-му изд.)
[2] Bildung zusammengesetzter Gruppen. — Math. Ann. **46** (1895), 321–422. (13)

Георг (Georg E.)
[1] Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier. — J. reine angew. Math. **180** (1939), 110–120.
Гечег Ф.
[1] Шрейерово расширение мультиоператорных групп. — Acta sci. math. **23** (1962), 58–63. [63:3, 255] (Д.12.1)
Гика (Ghika A.)
[1] Multimi intregi, convexe, strinse si absorbante in grupurile cu radicali. — Comun. Acad. RPR **5** (1955), 1229–1233. [56:10, 7155] (Д.19.3)
Гилберт (Gilbert J. D.)
[1] A note on a theorem of Fuctis. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 433–435. [62:7, 167] (Д.6.2)
Гирш (Hirsch K. A.)
[1] On infinite soluble groups. I. — Proc. London Math. Soc. **44** (1938), 53–60. (59)
[2] On infinite soluble groups. II. — Proc. London Math. Soc. **44** (1938), 336–344. (59)
[3] On skew-groups. — Proc. London Math. Soc. **45** (1939), 357–368.
[4] On infinite soluble groups. III. — Proc. London Math. Soc. **49** (1946), 184–194. (59, Д.17.9, Д.24.3, Д.27.4)
[5] Eine kennzeichnende Eigenschaft nilpotenter Gruppen. — Math. Nachr. **4** (1951), 47–49. (64)
[6] On infinite soluble groups. IV. — J. London Math. Soc. **27** (1952), 81–85. (Д.17.9, Д.24.3)
[7] On infinite soluble groups. V. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 250–251. [55:5, 2116] (Д.27.5)
[8] Über lokal-nilpotente Gruppen. — Math. Z. **63** (1955), 290–294. [56:7, 5119] (Д.20.6, Д.25.3)
[9] Assoziative Operationen an Gruppen. — Sitzungsber. Berliner Math. Gesellsch., 1957–1958. — 12–19. [61:9, 225] (Д.11.1)
Гладкий А. В.
[1] О простых словах Дикка. — Сиб. матем. ж. **2** (1961), 36–45. [62:1, 215] (Д.15.4)
[2] О группах с k-сократимым базисом. — Сиб. матем. ж. **2** (1961), 366–383. [62:2, 197] (Д.15.4)
Глауберман (Glauberman G.)
[1] Fixed points in groups with operator groups. — Math. Z. **84** (1964), 120–125. [65:1, 186] (Д.22.4)
Гливенко В. И.
[1] Théorie générale des structures. — Actualités scient. et industr. **652**, Paris, 1938.
Глушков В. М.
[1] О нормализаторах полных подгрупп в полной группе. — ДАН СССР **71** (1950), 421–424. (67)
[2] К теории ZA-групп. — ДАН СССР **74** (1950), 885–888.
[3] О локально нильпотентных группах без кручения. — ДАН СССР **80** (1951), 157–160.
[4] О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения. — Матем. сб. **30** (1952), 79–104. (53, 67, Д.25.2)

[5] О центральных рядах бесконечных групп. — Матем. сб. **31** (1952), 491–496. (Д.25.4, Д.25.6)

Голди (Goldie A. W.)

[1] On direct decompositions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **48** (1952), 1–22, 23– 34. (Д.5.3)

Голема и Хуляницкий (Golema K., Hulanicki A.)

[1] The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups. II. — Fund. Math. **53** (1954), 177–185. [65:5, 170] (Д.29.5)

Головин О. Н.

[1] Множители без центров в прямых разложениях групп. — Матем. сб. **6** (1939), 423–426. (42, 47, 47а, Д.5.3, Д.5.5)

[2] Об ассоциативных операциях на множестве групп. — ДАН СССР **58** (1947), 1257–1260. (62, Д.11.1, Д.11.3)

[3] Нильпотентные произведения групп. — Матем. сб. **27** (1950), 427–454. (14, 62, Д.11.1, Д.11.3)

[4] Метабелевы произведения групп. — Матем. сб. **28** (1951), 431–444. (62, Д.11.1, Д.11.5)

[5] К вопросу об изоморфизме нильпотентных разложений группы. — Матем. сб. **28** (1951), 445–452. (62, Д.11.1, Д.11.5)

[6] Политождественные соотношения в группах. — ДАН СССР **145** (1962), 967– 970. [63:3, 190] (Д.11.6, Д.11.7)

[7] Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп. — Тр. Моск. матем. о-ва **12** (1963), 413–435. [63:11, 176] (Д.11.6)

[8] Функторные операции на классе всех групп. — ДАН СССР **149** (1963), 12–15. [63:11, 175] (Д.11.2)

[9] Структура поливербальных операций. — ДАН СССР **153** (1963), 1238–1241. [64:5, 184] (Д.11.6)

Головин О. Н. и Гольдина Н. П.

[1] Подгруппы свободных метабелевых групп. — Матем. сб. **37** (1955), 323–336. [56:5, 3676] (Д.27.3)

Головин О. Н. и Садовский Л. Е.

[1] О группах автоморфизмов свободных произведений. — Матем. сб. **4** (1938), 505–514. (35)

Голод Е. С.

[1] О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах. — Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), 273–276. [64:9, 220] (Д.16.1, Д.18.4, Д.25.1, Д.26.2)

Голод Е. С. и Шафаревич И. Р.

[1] О башне полей классов. — Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), 261–272. [65:2, 336] (Д.16.1)

Гольберг П. А.

[1] Бесконечные полупростые группы. — Матем. сб. **17** (1945), 131–142. (61)

[2] Силовские П-подгруппы локально нормальных групп. — Матем. сб. **19** (1946),. 451–460. (55, 60)

[3] Силовские базы П-отделимых групп. — ДАН СССР **64** (1949), 615–618. (60)

[4] Силовские базы бесконечных групп. — Матем. сб. **32** (1953), 465–476. [53:1, 88] (Д.18.3)
[5] Об одном признаке сопряженности силовских П-баз произвольной группы. — Матем. сб. **36** (1955), 335–340. [56:7, 5114] (Д.18.3)
[6] К теореме Виландта. — УМН **14**, № 1 (1959), 153–156. [60:5, 4947] (Д.18.2)
[7] VF-подгруппы бесконечных групп. — Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1959, № 4. — 50–55. [60:8, 8611] (Д.21.2)
[8] S-радикал и силовские базы бесконечных групп. — Матем. сб. **50** (1960), 25–42. [60:12, 13590] (Д.18.3, Д.20.6)
[9] Холловские базы некоторых классов групп. — Сиб. матем. ж. **1** (1960), 14–44. [61:4, 175] (Д.18.3)
[10] Холловские Θ-базы конечных групп. — Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1961, № 1. — 36–43. [61:8, 188] (Д.18.3)

Гольдина Н. П.
[1] Подгруппы метабелевых произведения циклических групп порядка p. — Изв. вузов. Математика, 1960, № 3. — 118–126. [61:9, 221] (Д.11.5)

Гольфанд Ю. А.
[1] Об изоморфизме между расширениями групп. — ДАН СССР **60** (1948), 1123– 1125. (48)
[2] Метаспециальные группы. — Матем. сб. **27** (1950), 229–248.
[3] О группе автоморфизмов голоморфа группы. — Матем. сб. **27** (1950), 333–350. (13)

Гопкинс (Hopkins Ch.)
[1] Non-abelian groups whose groups of isomorphisms are abelian. — Ann. Math. **29** (1928), 508–520.
[2] An extension of a theorem of Remak. — Ann. Math. **40** (1939), 636–638.

Горчаков Ю. М.
[1] Примитивно факторизуемые группы. — ДАН СССР **131** (1960), 1246–1248. [61:5, 211] (Д.13.4)
[2] Примитивно факторизуемые группы. — Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (I960), 15–31. [62:4, 177] (Д.13.4)
[3] О примарно факторизуемых группах. — Укр. матем. ж. **14** (1962), 3–9. [63:1, 178] (Д.13.4)
[4] Примитивно π-факторизуемые группы. — ДАН СССР **146** (1962), 14–16. [63:7, 146] (Д.13.4)
[5] О локально нормальных группах. — ДАН СССР **147** (1962), 537–539. [63:7, 147] (Д.16.7)
[6] О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в локально разрешимых группах. — ДАН СССР **156** (1964), 17–20. [64:9, 160] (Д.23.2, Д.25.1)
[7] О бесконечных группах Фробениуса. — Алгебра и логика (семинар) **4**, № 1 (1965), 15–29. [65:10, 176] (Д.19.7)
[8] О локально нормальных группах. — Матем. сб. **67** (1965), 244–254. [66:2, 222] (Д.16.7)

Горчинский Ю. Н.
[1] Группы с конечным числом классов сопряженных элементов. — Матем. сб. **31** (1952), 167–182. (Д.17.8)
[2] Периодические группы с конечным числом классов сопряженных элементов. — Матем. сб. **31** (1952), 209–216. (Д.17.8)

Гохин (Goheen H.)
[1] Proof of a theorem of Hall. — Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 143–144. (60)
Гочаи (Gacsályi S.)
[1] On algebraically closed abelian groups. — Publ. Math. **2** (1952), 292–296. [55:4, 1658] (Д.28.4)
[2] On pure subgroups and direct summands of abelian groups. — Publ. Math. **4** (1955), 89–92. [56:12, 8606] (Д.29.2)
Граев М. И.
[1] К теории полных прямых произведений групп. — Матем. сб. **17** (1945), 85–104. (17, Д.6.1)
[2] Прямые суммы циклов в дедекиндовых структурах. — Матем. сб. **19** (1946), 439–450.
[3] Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах. — Изв. АН СССР, сер. матем., **11** (1947), 33–46. (42, Д.5.5)
Грецер и Шмидт Е. (Grätzer G., Schmidt E. T.)
[1] On a problem of L. Fuchs concerning universal subgroups and universal homomorphic images of abelian groups. — Proc. Nederl. Akad. **A64** (1961), 253–255. [62:4, 169] (Д.35.1)
[2] A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups. — Ann. Univ. Budapest **3–4** (1960–1961), 85–87. [63:7, 149] (Д.29.1)
Грин (Green J. A.)
[1] On groups with odd prime-power exponent. — J. London Math. Soc. **27** (1952), 476–485. (Д.16.3)
[2] On the number of automorphisms of a finite group. — Proc. Roy. Soc. **A237** (1956), 574–581. [57:8, 6161] (Д.3.1)
Гриндлингер М. Д.
[1] Dehn's algorithm for the word problem. — Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 67–83. [62:6, 165] (Д.15.4)
[2] On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications. — Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 641–677. [62:6, 166] (Д.15.4)
[3] An analogue of a theorem of Magnus. — Arch. Math. **12** (1961), 94–96. [62:6, 167] (Д.15.4)
[4] A class of groups all of whose elements have trivial centralizers. — Math. Z. **78** (1962), 91–96. [64:1, 233] (Д.15.4)
[5] Решение проблемы изоморфизма одного класса групп. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **31** (1963), 59–61. [64:6, 177] (Д.15.4)
[6] К магнусовой обобщенной проблеме тождества слов. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 955–957. [65:1, 60] (Д.15.4)
[7] Усиление двух теорем для одного класса групп. — Сиб. матем. ж. **6** (1965), 972–984. [66:2, 232] (Д.15.4)
[8] К проблемам тождества слов и сопряженности. — Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 245–268. [65:12, 228] (Д.15.4)
Гриффитс (Griffiths H. B.)
[1] A note on commutators in free products. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **50** (1954), 178–188; 51 (1955), 245–251. [56:5, 3678; 57:1, 141] (Д.7.4)
[2] Infinite products of semi-groups and local connectivity. — Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 455–480. [57:4, 2928] (Д.7.4)

Грушко И. А.
[1] Решение проблемы тождества в группах с несколькими соотношениями специального вида. — Матем. сб. **3** (1938), 543–551. (Д.15.4)
[2] О базисах свободного произведения групп. — Матем. сб. **8** (1940), 169–182. (39, 40)
Грюн (Grün O.)
[1] Beiträge zur Gruppentheorie. I. — J. reine angew. Math. **174** (1935), 1–14. (64)
[2] Über eine Faktorgruppe freier Gruppen. I. — Deutsche Math. **1** (1936), 772–782.
[3] Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 158–177.
[4] Beiträge zur Gruppentheorie. II. — J. reine angew. Math. **186** (1948), 165–169.
[5] Beiträge zur Gruppentheorie. III. — Math. Nachr. **1** (1948), 1–24.
[6] Beiträge zur Gruppentheorie. IV. — Math. Nachr. **3** (1949), 77–94. (Д.18.2)
[7] Beiträge zur Gruppentheorie. VI. — Math. Nachr. **16** (1957), 271–280. [58:10, 8593] (Д.3.4)
[8] Automorphismen von Gruppen und Endoisomorphismen freier Gruppen. III. — J. Math. **2** (1958), 759–763. [60:5, 4948] (Д.15.1)
[9] Beiträge zur Gruppentheorie. IX. — Arch. Math. **13** (1962), 49–54. [63:9, 147] (Д.18.2)
Грюнберг (Gruenberg K. W.)
[1] Two theorems on Engel groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **49** (1953), 377–380. [54:1, 1566] (Д.26.1, Д.26.2)
[2] Residual properties of infinite soluble groups. — Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 29–62. [58:4, 2741] (Д.7.3, Д.9.2, Д.11.3, Д.17.9, Д.24.5, Д.24.6)
[3] The Engel elements of a soluble group. III. — J. Math. **3** (1959), 151–168. [61:8, 184] (Д.26.2, Д.26.4)
[4] The upper central series in soluble groups. III. — J. Math. **5** (1961), 436–466. [62:7, 162] (Д.26.4)
[5] The residual nilpotence of certain presentations of finite groups. — Arch. Math. **13** (1962), 408–417. [64:5, 168] (Д.25.5)
Гуревич В. (Hurewicz W.)
[1] Zu einer Arbeit von O. Schreier. — Hamburg. Abh. **8** (1930), 307–314. (36)
Гуревич Ю. Ш.
[1] Группы с характеристическим покрытием. — Матем. зап. Уральск. ун-та **4** (1963), 32–39. [63:10, 151] (Д.19.6)
Гуха (Guha U.)
[1] On the endomorphic mapping $\{m\}$ of a group. — Bull. Calcutta Math. Soc. **38** (1946), 101–107.
Данвуди (Dunwoody M. J.)
[1] On relation groups. — Math. Z. **81** (1963), 180–186. [63:11, 139] (Д.3.4)
[2] On T-systems of groups. — J. Austral. Math. Soc. **3** (1963), 172–179. [64:2, 253] (Д.3.4)
Де Брёйн (de Bruijn N. G.)
[1] Embedding theorems for infinite groups. — Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 560–569; **A67** (1964), 594–595. [58:9, 7502; 65:6, 164] (Д.1.2)

Де Врис и Де Миранда (de Vries H., de Miranda A. B.)
[1] Groups with a small number of automorphisms. — Math. Z. **68** (1958), 450–464. [58:10, 8592] (Д.3.1)
Де Грот (de Groot J.)
[1] Exemple d'un groupe avec deux générateurs. — contenant un sous-groupe commutatif sans un système fini de générateurs. — Nieuw Archief voor Wiskunde **23** (1950), 128–130.
[2] An isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups. — Math. Ann. **132** (1956), 328–332. [57:11, 8448] (Д.35.3)
[3] Indecomposable abelian groups. — Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 137–145. [58:5, 3554] (Д.31.2)
[4] Equivalent abelian groups. — Canad. J. Math. **9** (1957), 291–297. [60:8, 8608] (Д.35.3)
Де Грот и Де Врис (de Groot J., de Vries H.)
[1] Indecomposable abelian groups with many automorphisms. — Nieuw Arch. Wisk. **6** (1958), 55–57. [60:2, 1372] (Д.31.2)
Дедекинд (Dedekind R.)
[1] Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteiler sind. — Math. Ann. **48** (1897), 548–561.
[2] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. — Math. Ann. **53** (1900), 371–403.
Джеббер (Jabber M. A.)
[1] On S-groups. — Bull. Calcutta Math. Soc. **35** (1943), 111–113.
Джекобсон (Jacobson N.)
[1] Structure theory for algebraic algebras of bounded degree. — Ann. Math. **46** (1945), 695–707. (Д.16.1)
Дженингс (Jennings S. A.)
[1] A note on chain conditions in nilpotent rings and groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 759–763. (53)
Джонс (Jones A. W.)
[1] The lattice isomorphisms of certain finite groups. — Duke math. J. **12** (1945), 541–560. (44)
Джонсон (Johnson H. H.)
[1 On the anticenter of a group. — Amer. Math. Monthly **68** (1961), 469–472. [62:1, 190] (Д.3.3)
Дик (Dyck W.)
[1] Gruppentheoretische Studien. — Math. Ann. **20** (1882), 1–44; **22** (1883), 70–108.
Диксмье (Dixmier S.)
[1] Exposants des quotients des suites centrales descendante et ascendante d'un groupe. — C. R. Paris **259** (1964), 2751–2753. [65:4, 142] (Д.3.3)
Диксон Л. (Dickson L. E.)
[1] Linear Groups, with an exposition of the Galois Field theory. — Leipzig, 1901. (Заключение к 1-му изд.)
Диксон С. (Dickson S. E.)
[1] On torsion classes of abelian groups. — J. Math. Soc. Japan **17** (1965), 30–35. [66:1, 209] (Д.20.5)
Дицман А. П.
[1] О p-группах. — ДАН СССР **15** (1937), 71–76. (53, 54)
[2] Sur les groupes infinis. — C. R. Paris **205** (1937), 952–953.

[3] О центре p-групп. — Труды семинара по теории групп, 1938. — 30–34.
[4] Некоторые теоремы о бесконечных группах. — Сборник памяти акад. Граве, 1940. — 63–67.
[5] О мультигруппах классов сопряженных элементов группы. — ДАН СССР **49** (1945), 323–326.
[6] On an extension of Sylow's theorem. — Ann. Math. **48** (1947), 137–146. (54, Д.18.1)
[7] О теореме Силова. — ДАН СССР **59** (1948), 1235–1236. (54, Д.18.1)
[8] О мультигруппах, образуемых подмножествами группы. — Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та **71** (1953), 71–79. [54:11, 5464] (Д.27.1)
[9] О p-подгруппах групп и теоремах, аналогичных теореме Силова. — Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та **108** (1957), 99–114. [59:4, 3546] (Д.18.1)

Дицман А. П., Курош А. Г. и Узков А. И.
[1] Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen. — Матем. сб. **3** (1938), 179–185. (54, Д.18.2, Д.18.3)

Длаб (Dlab V.)
[1] D-hodnost Abelovy grupy. — Časop. pěstov. mat. **82** (1957), 314–334. [59:1, 140] (Д.28.2, Д.29.3)
[2] Die Endomorphismenringe abelscher Gruppen und die Darstellung von Ringen durch Matrizenringe. — Чехосл. матем. ж. **7** (1957), 485–523. [61:1, 217] (Д.34.1)
[3] Заметка к теории полных абелевых групп. — Чехосл. матем. ж. **8** (1958), 54–61. [59:6, 5570] (Д.28.4, Д.28.6)
[4] Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп. — Чехосл. матем. ж. **9** (1959), 161–171. [61:6, 223] (Д.28.6)
[5] Poznámka k jednomu problému týkajicimu se Frattiniho podgrup. — Časop. pěstov. mat. **85** (1960), 87–90. [61:1, 219] (Д.27.4)
[6] On a problem of Mazur and Ulam about irreducible generating systems in groups. — Colloq. Math. **7** (1960), 171–176. [61:5, 2021 (Д.1.3)
[7] The Frattini subgroups of abelian groups. — Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 1–16. [61:6, 2181 (Д.27.4)
[8] On cyclic groups. — Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 244–254. [62:1, 192] (Д.1.3)
[9] On a characterization of primary abelian groups of bounded order. — J. London Math. Soc. **36** (1961), 139–144. [62:4, 170] (Д.28.6)
[10] On the dependence relation over abelian groups. — Publ. Math. **9** (1962), 75–80. [64:3, 151] (Д.35.4)
[11] A note on powers of a group. — Acta sci. math. **25** (1964), 177–178. [66:1, 199] (Д.1.3)

Длаб и Коржинек (Dlab V., Kořínek V.)
[1] The Frattini subgroup of a direct product of groups. — Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 350–358. [61:6, 2191 (Д.27.4)

Домбек (Dombek J.)
[1] Anticenters of several classes of groups. — Amer. Math. Monthly **69** (1962), 738–741. [63:7, 1401 (Д.3.3.)

Донияхи Х. А.
[1] Линейное представление свободного произведения циклических групп. — Уч. зап. ЛГУ **55** (1940), 158–165.

Дуингер (Dwinger Ph.)
[1] Direct products in modular lattices. — Proc. Nederl. Acad. **A59** (1956), 435–443. [58:8, 65501 (Д.5.3)
Дуингер и Де Грот (Dwinger Ph., de Groot J.)
[1] On the axioms of Baer and Kurosh in modular lattices. — Proc. Nederl. Acad. **A59** (1956), 596–601. [57:10, 7712] (Д.5.3)
Дьёдонне (Dieudonné J.)
[1] Sur les produits tensoriels. — Ann. Ecole Norm. Sup. **64** (1948), 101–117. (Д.33.6)
[2] Sur les p-groupes abéliens infinis. — Portug. Math. **11** (1952), 1–5. (Д.28.2)
Дьюгид (Duguid A. M.)
[1] A class of hiper FC-groups. — Pacif. J. Math. **10** (1960), 117–120. [61:6, 215] (Д.17.6)
Дьюгид и Маклейн Д. (Duguid A. M., McLain D. H.)
[1] FC-nilpotent and FC-soluble groups. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 391–398. [57:5, 3800] (Д.17.6)
Дэй (Dey J. M. S.)
[1] Relations between the free and direct products of groups. — Math. Z. **80** (1962), 121–147. [64:8, 175] (Д.7.3)
[2] Free products of Hopf groups. — Math. Z. **85** (1964), 274–284. [65:12, 232] (Д.7.2, Д.15.1)
Дэн (Dehn M.)
[1] Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. — Math. Ann. **71** (1912), 116–144. (41)
Дэрри (Derry D.)
[1] Über eine Klasse von Abelschen Gruppen. — Proc. London Math. Soc. **43** (1937), 490–506. (21, 32б, 32в, Д.31.1)
[2] On finite abelian p-groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 874–881.
Дюбюк П. Е.
[1] О подгруппах конечного индекса бесконечной группы. — Матем. сб. **10** (1942), 147–150.
Дюбюк П. Е. и Туркин В. К.
[1] Théorèmes sur les groupes infinis. — C. R. Paris **205** (1937), 435–437.
[2] Теоремы о бесконечных группах. — Матем. сб. **3** (1938), 425–429.
Еремин И. И.
[1] Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп. — Матем. сб. **47** (1959), 45–54. [60:10, 11336] (Д.17.7)
[2] О центральных расширениях с помощью тонких слойно-конечных групп. — Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1960, № 2. — 93–95. [61:5, 229] (Д.17.7)
[3] О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданными свойствами. — ДАН СССР **137** (1961), 772–773. [62:2, 175] (Д.17.7)
Ешманович (Jesmanowicz L.)
[1] On direct decompositions of torsion free abelian groups. — Bull. Acad. Polon. **8** (1960), 505–510. [62:3, 178] (Д.31.3)
Житомирский В. Г.
[1] Треугольные автоморфизмы в группах. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 187–194. [62:11, 144] (Д.22.6)

[2] Треугольные группы автоморфизмов квазиоператорных групп. — ДАН СССР **144** (1962), 487–489. [63:2, 189] (Д.22.6)
[3] Треугольная группа автоморфизмов прямого произведения групп. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1962), 30–36; **4**, № 1 (1963), 40–44; **4**, № 3 (1963), 89–94. [63:11, 163; 64:3, 158; 64:12, 172] (Д.22.6)

Журавский В. С.
[1] О расщеплении некоторых смешанных абелевых групп. — Матем. сб. **48** (1959), 499–508. [61:1, 209] (Д.32.2)
[2] Обобщение некоторых критериев расщепления смешанных абелевых групп. — Матем. сб. **51** (1960), 377–382. [61:7, 225] (Д.32.2)
[3] К вопросу о группе абелевых расширений абелевых групп. — ДАН СССР **134** (1960), 29–32. [62:8, 144] (Д.33.2)
[4] О группе абелевых расширений периодической абелевой группы с помощью абелевой группы без кручения. — УМН **16**, № 4 (1961), 161–166. [62:12, 144] (Д.33.2)

Завало С. Т.
[1] Операторные Г-свободцые группы. — Матем. сб. **33** (1953), 399–432. [54:2, 2002] (Д.7.5)
[2] Операторные S-свободные группы. — Укр. матем. ж. **16** (1964), 593–601, 730–751. [65:7, 173, 174] (Д.7.5)

Зайцев Д. И.
[1] Группы с условием коммутаторной минимальности. — Сиб. матем. ж. **6** (1965), 1014–1020. [66:2, 223] (Д.17.4)

Залесский А. Е.
[1] О локально конечных группах с условием минимальности для централизаторов. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. н., 1965, № 3. — 127–129. [66:3, 169] (Д.18.1)

Зельманзон М. Б.
[1] О группах, у которых все подгруппы циклические. — УМН **16**, № 2 (1961), 109–113. [62:1, 191] (Д.1.3)

Зельмер (Zelmer V.)
[1] Despre un subgrup bazà al unui grup abelian primar. — An. Univ. Jaşi **5** (1959), 1–4. [61:9, 235] (Д.30.2)

Зиман (Zeeman E. C.)
[1] On direct sums of free cycles. — J. London Math. Soc. **30** (1955), 195–212. [56:11, 7887] (Д.33.5)

Иванюта И. Д.
[1] Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы. — Укр. матем. ж. **15** (1963), 240–249. [65:1, 181] (Д.18.1)

Ивасава (Iwasawa K.)
[1] Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **4** (1941), 171–199. (44)
[2] Einige Sätze über freie Gruppen. — Proc. Acad. Tokyo **19** (1943), 272–274. (36)
[3] On the structure of infinite M-groups. — Jap. J. Math. **18** (1943), 709–728. (44, Д.14.2)

Ивахори и Хаттори (Iwahori N., Hattori A.)
[1] On associative compositions in finite nilpotent groups. — Nagoya Math. J. **7** (1954), 145–148. [55:10, 4894] (Д.1.1)

Ирвин (Irwin J. M.)
[1] High subgroups of abelian torsion groups. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 1375–1384. [63:4, 150] (Д.29.4)
Ирвин и Кхаббаз (Irwin J. M., Khabbaz S. A.)
[1] On generating subgroups of abelian groups. — Proc. Colloq. on abelian groups, 1963; Budapest, 1964. — 87–97. [66:1, 213] (Д.28.3, Д.30.1)
Ирвин, Пирси и Уокер Е. (Irwin J., Peercy C., Walker E.)
[1] Splitting properties of high subgroups. — Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 185–192. [63:7, 152] (Д.29.4, Д.32.2)
Ирвин и Уокер Е. (Irwin J. M., Walker E. A.)
[1] On isotype subgroups of abelian groups. — Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 451–460. [63:4, 148] (Д.29.3, Д.29.4)
[2] On N-high subgroups of abelian groups. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 1363–1374. [63:4, 149] (Д.29.4)
Ито (Itô N.)
[1] Note on S-groups. — Proc. Japan Acad. **29** (1953), 149–150. [57:7, 5362] (Д.27.4, Д.27.5)
[2] Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. — Math. Z. **62** (1955), 400–401. [56:6, 4349] (Д.13.2)
Йонсон (Jónsson B.)
[1] On unique factorization problem for torsionfree abelian groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 364. (32, Д.31.3)
[2] Universal relational systems. — Math. Scand. **4** (1956), 193–208. [58:6, 4555] (Д.1.2)
[3] On direct decompositions of torsionfree abelian groups. — Math. Scand. **5** (1957), 230–235. [59:3, 2358] (Д.31.3)
[4] On direct decomposition of torsion free abelian groups. — Math. Scand. **7** (1959), 361–371. [62:2, 187] (Д.35.3)
Казачков Б. В.
[1] О теоремах типа Силова. — ДАН СССР **80** (1951), 5–7. (60)
[2] Об одной локальной теореме в теории групп. — ДАН СССР **83** (1952), 525–528. (60)
[3] О некоторых условиях факторизуемости периодических групп. — Уч. зап. Томск. пед. ин-та **15** (1956), 452–457. [57:11, 8454] (Д.13.4)
[4] О теореме Шура–Цасенхауза для счетных локально конечных групп. — Матем. сб. **50** (1960), 499–506. [61:3, 185] (Д.18.2)
[5] Об условиях сильной факторизуемости групп. — Матем. сб. **57** (1962), 323–332; **63** (1964), 646. [63:6, 178; 64:10, 171] (Д.13.4, Д.18.2)
[6] О конечной П-сопряженности групп. — ДАН СССР **144** (1962), 971–973. [63:6, 177] (Д.18.2)
Калашников В. А. и Курош А. Г.
[1] Свободные произведения групп с объединенными подгруппами центров. — ДАН СССР **1** (1935), 285–286. (Заключение к 1-му изд.)
Калужнин Л. А.
[1] Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn A. Kurosch. — Hamburg. Abh. **12** (1938), 247–255. (32б)
[2] Une méthode de construction de sous-groupes infra-invariants. — C. R. Paris **208** (1939), 1869–1871.
[3] Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m. — C. R. Paris **221** (1945), 222–224. (Д.12.3)

[4] La structure du p-groupe de Sylow du groupe symétrique du degré p^2. — C. R. Paris **222** (1946), 1424–1425.
[5] Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m (Suite centrale ascendante et descendante). — C. R. Paris **223** (1946), 703–705.
[6] Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m (Sous-groupes caractéristiques, sous-groupes parallelotopiques). — C. R. Paris **224** (1947), 253–255.
[7] Sur le groupe P_∞ des tableaux infinis. — C. R. Paris **224** (1947), 1097–1099.
[8] Sur les groupes abéliens primaires sans éléments de hauteur infinie. — C. R. Paris **225** (1947), 713–715. (26)
[9] Sur les sous-groupes centraux dun produit complet de groupes abéliens. — C. R. Paris **229** (1949), 1289–1291.
[10] Caractérisation des certains sous-groupes centraux d'un produit complet de groupes abéliens. — C. R. Paris **230** (1950), 1633–1634.
[11] Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. — C. R. Paris **230** (1950), 2067–2069. (Д.23.3)
[12] Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. (Généralisation d'un théorème de M. Ph. Hall). — C. R. Paris **231** (1950), 400–402. (Д.23.3)
[13] Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen. — Ber. Math.-Tagung Berlin, 1953. — 164–172. [55:1, 91] (Д.22.3, Д.22.4)
[14] Центральные расширения абелевых групп. I. — Укр. матем. ж. **8** (1956), 262–272. [57:7, 5359] (Д.12.3)
[15] Центральные Г-подрасширения полного произведения абелевых групп. — Укр. матем. ж. **8** (1956), 413–422. [57:10, 7657] (Д.12.3)
[16] Об одном отношении Галуа в теории групп. — Укр. матем. ж. **11** (1959), 38–51. [61:3, 203] (Д.22.4)

Калужнин Л. А. и Краснер М. (Kaloujnine L. et Krasner M.)
[1] Le produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension des groupes. — C. R. Paris **227** (1948), 806–808.
[2] Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension des groupes. — Acta Sci. Math., Szeged. **13** (1950), 208–230; 14 (1951), 39–66.
[3] Produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension des groupes. III. — Acta Sci. Math., Szeged. **14** (1951), 69–82. (Д.12.1, Д.12.3)

Камм (Camm R.)
[1] Simple free products. — J. London Math. Soc. **28** (1953), 66–76. [53:1, 86] (Д.2.4, Д.8.1)

Капланский (Kaplansky I.)
[1] A note on groups without isomorphic subgroups. — Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 529–530.
[2] Elementary divisors and modules. — Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464–491.
[3] Some results on abelian groups. — Proc. Nat. Acad. USA **38** (1952), 538–540. (Д.30.3, Д.31.1, Д.34.1)
[4] Infinite abelian groups. — Ann. Arbor, — 1954. [58:1, 154] (Д.28.1, Д.29.5, Д.30.3)

Капланский и Макки (Kaplansky I., Mackey G. W.)
[1] A generalization of Ulm's theorem. — Summa Brasil. Math. **2** (1951), 195–202. (Д.30.3)
Каппе (Kappe W.)
[1] Die A-Norm einer Gruppe. III. — J. Math. **5** (1961), 187–197. [62:3, 166] (Д.3.3, Д.26.4)
Карасев Г. А.
[1] Факторизация некоторых классов групп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 378–385. [63:6, 183] (Д.18.2)
Каргаполов М. И.
[1] О факторизации П-отделимых групп. — ДАН СССР **114** (1957), 1155–1157. [58:9, 7496] (Д.18.3)
[2] О сопряженности силовских p-подгрупп локально нормальной группы. — УМН **12**, № 4 (1957), 297–300. [58:10, 8586] (Д.18.1)
[3] К теории полупростых локально нормальных групп. — Научн. докл. высш. шк. Физ.-матем. науки, 1958, № 6. — 3–7. [60:10, 11328] (Д.16.7)
[4] К теории $\overline{Z}$-групп. — ДАН СССР **125** (1959), 255–257. [60:2, 1385] (Д.25.7)
[5] Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп. — ДАН СССР **127** (1959), 1164–1166. [60:8, 8612] (Д.13.4, Д.18.1, Д.18.2)
[6] Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами. — Сиб. матем. ж. **2** (1961), 853–873. [62:8, 143] (Д.16.5)
[7] О пополнении локально нильпотентных групп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 695–700. [63:5, 198] (Д.19.4)
[8] О П-пополнении локально нильпотентных групп. — Алгебра и логика (семинар) **1**, № 1 (1962), 5-13. [63:11, 165] (Д.19.4)
[9] О разрешимых группах конечного ранга. — Алгебра и логика (семинар) **1**, № 5 (1962), 37–44. [63:9, 160] (Д.23.2)
[10] О проблеме О. Ю. Шмидта. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 232–235. [63:8, 145] (Д.16.5)
[11] Об обобщенных разрешимых группах. — Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 19–28. [64:10, 174] (Д.16.5, Д.18.3, Д.23.1, Д.25.1)
Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. и Ремесленников В. Н.
[1] О пополнении групп. — ДАН СССР **134** (1960), 518–520. [61:6, 210] (Д.19.4)
[2] Об одном способе пополнения групп. — Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (1960), 9–11. [62:3, 195] (Д.19.4)
Каролинская Л. Н.
[1] Прямые разложения абстрактных алгебр с отмеченными подалгебрами. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1960, № 4. — 106–113. [62:6, 242] (Д.6.1)
Каррас, Магнус и Солитэр (Karrass A., Magnus W., Solitar D.)
[1] Elements of finite order in groups with a single defining relation. — Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 57–66. [62:8, 448] (Д.15.2)
Каррас и Солитэр (Karrass A., Solitar D.)
[1] Some remarks of the infinite symmetric groups. — Math. Z. **66** (1956), 64–69. [57:6, 4633] (Д.2.4)

[2] Note on a theorem of Schreier. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 696–697. [58:7, 5524] (Д.9.1)
[3] On free products. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 217–221. [59:9, 8849] (Д.7.2)
[4] Subgroup theorems in the theory of groups given by defining relations. — Comm. pure and appl. Math. **11** (1958), 547–571. [60:2, 1388] (Д.7.1, Д.9.1)

Картан и Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)
[1] Homological algebra. — Princeton, 1956. (Русский перевод: Гомологическая алгебра. — ИЛ, 1960.) (Д.12.1)

Картер (Carter R. W.)
[1] Nilpotent selfnormalizing subgroups of soluble groups. — Math. Z. **75** (1961), 136–139. [61:12, 272] (Д.23.2)

Касселс (Cassels J. W. S.)
[1] On the subgroups of infinite abelian groups. — J. London Math. Soc. **33** (1958), 281–284. [59:9, 8842] (Д.31.7)

Кегель (Kegel O. H.)
[1] Lokal endliche Gruppen mit nichttrivialer Partition. — Arch. Math. **13** (1962), 10–28. [63:5, 185] (Д.19.7)

Кемпбелл (Campbell M.)
[1] Countable torsionfree abelian groups. — Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 1–23. [61:8, 192] (Д.31.1)

Кемхадзе Ш. С.
[1] О регулярности p-групп при $p = 2$. — Сообщ. АН Груз. ССР **11** (1950), 607–611. (Д.18.4)
[2] Базы единственности в бесконечных регулярных p-группах. — Укр. матем. ж. **4** (1952), 57–64. (Д.18.4)
[3] К определению регулярных p-групп. — УМН **7**, № 6 (1952), 193–196. (Д.18.4)
[4] Регулярные p-группы без элементов бесконечной высоты. — Сообщ. АН Груз. ССР **17** (1956), 673–680. [57:5, 3799] (Д.18.4)
[5] П-регулярные группы. — Сообщ. АН Груз. ССР **27** (1961), 3–8. [62:6, 164] (Д.18.4)
[6] О группах, порожденных нильпотентными и ZA-подгруппами. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 827–837. [65:3, 192] (Д.13.2)
[7] Факторизация групп достижимыми подгруппами. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 838–843. [65:3, 200] (Д.13.2)
[8] Квазинильпотентные группы. — ДАН СССР **155** (1964), 1003–1005. [64:9, 162] (Д.25.3, Д.26.5)
[9] О стабильных группах автоморфизмов. — ДАН СССР **158** (1964), 510–512. [65:3, 194] (Д.26.5)
[10] К определению нильгруппы Бэра. — Сообщ. АН Груз. ССР **33** (1964), 279–284. [64:12, 173] (Д.26.5)
[11] О внешне нильпотентных группах автоморфизмов. — Сообщ. АН Груз. ССР **34** (1964), 265–270. [64:12, 174] (Д.22.5)
[12] О некоторых свойствах факторизуемых групп. — Сообщ. АН Груз. ССР **35** (1964), 257–263. [65:3, 201] (Д.13.2)

Кертес (Kertész A.)
[1] On groups every subgroup of which is a direct summand. — Publ. Math. **2** (1951), 74–75. (Д.29.1)

[2] On the decomposibility of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups. — Acta Math. Hung. **3** (1952), 122–126. (Д.28.2)
[3] On fully decomposable abelian torsion groups. — Acta Math. Hung. **3** (1952), 225–232. (Д.28.2)
[4] On subgroups and homomorphic images. — Publ. Math. **3** (1953), 174–179. [57:1, 142] (Д.28.4)
[5] On a theorem of Kulikov and Dieudonné. — Acta sci. math. **15** (1953), 61–69. [55:5, 2117] (Д.28.2)
[6] Abel-féle torziocsoportok. — Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. **4** (1954), 111–126. [55:10, 4890] (Д.28.2)

Кертес и Селе (Kertész A., Szele T.)
[1] Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image. — Acta sci. math. **15** (1953), 70–76. [55:5, 2118] (Д.35.1)

Кёлер (Koehler J.)
[1] Some torsion free rank two groups. — Acta Sci. Math. **25** (1964), 186–190. [66:4, 126] (Д.31.1)
[2] The type set of a torsion-free group of finite rank. III. — J. Math. **9** (1965), 66–86. [66:12, 176] (Д.31.1)

Кётэ (Köthe G.)
[1] Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring. — Math. Z. **39** (1934), 31–44.

Кикодзе Э. Б.
[1] О сложных коммутаторах элементов группы. — УМН **12**, № 4 (1957), 301–303. [58:11, 9567] (Д.24.6, Д.27.1)

Киокемейстер (Kiokemeister F.)
[1] A note on the Schmidt-Remak theorem. — Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 957–958.

Кишкина З. М.
[1] Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения. — Изв. АН СССР, сер. матем. **9** (1945), 201–232. (21)

Клиффорд (Clifford A. H.)
[1] Representations induced in an invariant subgroup. — Ann. of Math. **38** (1937), 533–550.

Клиффорд и Маклейн (Clifford A. H. and MacLane S.)
[1] Factor-sets of a group in its abstract unit group. — Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 385–406.

Клэпхем (Clapham C. R. J.)
[1] Finitely presented groups with word problem of arbitrary degrees of insolubility. — Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 633–676. [65:7, 175] (Д.15.3)

Кнезер и Сверчковский (Kneser M., Swierszkowski S.)
[1] Embedding in groups of countable permutations. — Coll. Math. **7** (1960), 177–179. [61:6, 205] (Д.1.2)

Ковач (Kovács L.)
[1] On subgroups of the basis subgroup. — Publ. Math. **5** (1958), 261–264. (Д.30.1)
[2] Groups with regular automorphisms of order four. — Math. Z. **75** (1961), 277–294. [62:2, 190] (Д.3.1)
[3] On a paper of Ladislav Procházka. — Чехосд. матем. ж. **13** (1963), 612–618. [65:1, 174] (Д.31.4, Д.32.2)

[4] Admissible direct decompositions of direct sums of abelian groups of rank one. — Publ. Math. **10** (1963), 254–263. [65:5, 168] (Д.28.5)

Ковач, Нейман Б. и Де Врис (Kovács L. G., Neumann B. H., de Vries H.)

[1] Some Sylow subgroups. — Proc. Roy. Soc. **A260** (1961), 304–316. [62:2, 192] (Д.18.1)

Ковач и Ньюмэн (Kovács L. G., Newman M. F.)

[1] Direct complementation in groups with operators. — Arch. Math. **13** (1962), 427–433. [63:8, 156] (Д.5.1)

Когаловский С. Р.

[1] Структурные характеристики универсальных классов. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 97–119. [64:3, 69] (Д.10.1)

[2] К теореме Биркгофа. — УМН **20**, № 5 (1965), 206–207. [66:3, 258] (Д.10.1)

Коккрофт (Cockcroft W. H.)

[1] The word problem in a group extension. — Quart. J. (Oxford sec. series) **2** (1951), 123–134.

Кокстер (Coxeter H. S. M.)

[1] On simple isomorphism between abstract groups. — J. London Math. Soc. **9** (1934), 211–212.

[2] Abstract groups of the form $V_1^k = V_j^3 = (V_i V_j)^2 = 1$. — J. London Math. Soc. **9** (1934), 213–219. (Заключение к 1-му изд.)

[3] The groups determined by the relations $S^l = T^m = (S^{-1}T^{-1}ST)^p = 1$. I. — Duke math. J. **2** (1936), 61–73. (Заключение к 1-му изд.)

[4] An abstract definition for the alternating group in terms of two generators. — J. London Math. Soc. **11** (1936), 150–156.

[5] The abstract groups $R^m = S^m = (R^j S^j)^{p_j} = 1$, $S^m = T^2 = (S^j T)^{2^{p_j}} = 1$, and $S^m = T^2 = (S^{-j} S^j T)^{p_j} = 1$. — Proc. London Math. Soc. **41** (1936), 278–301. (Заключение к 1-му изд.)

[6] The abstract groups $G^{m,n,p}$. — Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 73–150. (Заключение к 1-му изд.)

[7] A method for proving certain abstract groups to be infinite. — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 246–251.

Кокстер и Мозер (Coxeter H. S. M., Moser W. O. J.)

[1] Generators and relations for discrete groups. — Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957; 2-е изд., 1965. [61:11, 222] (Д.15.2)

Колете (Kolettis G.)

[1] Direct sums of countable groups. — Duke Math. J. **27** (1960), 111–125. [61:10, 201] (Д.30.3)

[2] Semi-complete primary abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 200–205. [62:1, 200] (Д.30.3)

Кон (Cohn P. M.)

[1] A countable generated group which cannot be covered by finite permutable subsets. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 248–249. [55:3, 1113] (Д.19.6)

[2] A remark on the general product of two infinite cyclic groups. — Arch. Math. **7** (1956), 94–99. [57:2, 1159] (Д.13.2)

[3] The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 520–521. [57:7, 5356] (Д.5.1)

Конрад (Conrad P.)
[1] The groups of word preserving permutations of a group. — J. Indian Math. Soc. **22** (1958), 149–179. [60:11, 12517] (Д.3.5)
[2] Completions of groups of class 2. III. — J. Math. **5** (1961), 212–224. [62:2, 191] (Д.19.4)
[3] Skew tensor products and groups of class two. — Nagoya Math. J. **23** (1963), 15–51. [65:2, 273] (Д.27.1)
Конторович П. Г.
[1] О некоторых свойствах полупрямых произведений. — ДАН СССР **22** (1939), 557–559.
[2] Инвариантно покрываемые группы. — Матем. сб. **8** (1940), 423–430. (Д.19.6)
[3] Группы с базисом расщепления. I. — Матем. сб. **12** (1943), 56–70. (Д.19.6)
[4] Группы с базисом расщепления. II. — Матем. сб. **19** (1946), 287–308. (Д.19.6)
[5] Группы с базисом расщепления. III. — Матем. сб. **22** (1948), 79–100. (56, Д.19.6)
[6] К теории некоммутативных групп без кручения. — ДАН СССР **59** (1948), 213–216.
[7] Группы с базисом расщепления. IV. — Матем. сб. **26** (1950), 311–320. (32, 56, Д.19.6)
[8] Инвариантно покрываемые группы. II. — Матем. сб. **28** (1951), 79–88. (63, Д.19.6)
[9] Замечания о гиперцентрах группы. — Уч. зап. Уральск. ун-та **23** (1960), 27–29. [61:9, 232] (Д.3.3)
Конторович П. Г., Пекелис А. С. и Старостин А. И.
[1] Структурные вопросы теории групп. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1961), 3–50. [62:10, 131] (Д.14.1, Д.19.6)
Конторович П. Г. и Плоткин Б. И.
[1] Структуры с аддитивным базисом. — Матем. сб. **35** (1954), 187–192. [56:4, 2826] (Д.14.4)
Коржинек (Kořinek V.)
[1] Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes. — Čas. mat. fys. **66** (1937), 261–286; **67** (1938), 209–210. (42, Заключение к 1-му изд., Д.5.3)
[2] Les groupes qui ne contiennent pas des sousgroupes caractéristiques propres. — Věstn. Krai. Česke Spol. Nauk, 1938. — 1–20.
[3] Bemerkung über charakteristisch einfache Gruppen. — Věstn. Krai. Česke Spol. Nauk (1940), 1–8.
[4] Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden. — Věstn. Krai. Česke Spol. Nauk (1941), 1–29. (44)
Корнер (Corner A. L.)
[1] A note on rank and direct decompositions of torsion-free abelian groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **57** (1961), 230–233. [61:11, 206] (Д.31.3)
[2] Wildly embedded subgroups of complete direct sums of cyclic groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 249–251. [63:11, 156] (Д.31.6)
[3] Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring. — Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 687–710. [65:5, 171] (Д.31.3.Д.34.1)

[4] On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups. — Proc. Colloq. on Abelian groups, 1963; Budapest, 1964. — 43–48. [65:5, 167] (Д.31.4)
[5] Three examples on hopficity in torsion-free abelian groups. — Acta Math. Hung. **16** (1965), 303–310. [66:11, 165] (Д.34.1)

Кострикин А. И.
[1] Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5. — Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955), 233–244. [56:7, 5133] (Д.16.4)
[2] О связи между периодическими группами и кольцами Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **21** (1957), 289–310. [59:5, 4483] (Д.16.4)
[3] Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля. — Изв. АН СССР, сер. матем., **21** (1957), 515–540. [59:5, 4484] (Д.16.4)
[4] О проблеме Бернсайда. — Изв. АН СССР, сер. матем., **23** (1959), 3–34. [60:7, 7311] (Д.16.4)
[5] Об энгелевых свойствах групп с тождественным соотношением $x^{p^\alpha} = 1$. — ДАН СССР **135** (1960), 524–526. [62:3, 1931 (Д.16.4)
[6] Конечные группы. — «Итоги науки. Алгебра. 1964». — М., 1966. — 7–46. (Д. Предисловие)

Кохендёрфер (Kochendörffer R.)
[1] Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte. — J. reine und angew. Math. **192**, (1953), 96–101. [55:8, 3634] (Д.13.3)
[2] Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen. — Leipzig, 1966.

Коэн (Cohen D. E.)
[1] Certain subgroups of free products. — Mathematika **7** (1960), 117–124. [62:4, 181] (Д.7.3)
[2] A topological proof in group theory. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 277–282. [63:11, 178] (Д.8.1)

Коэн и Линдон (Cohen D. E., Lyndon R. C.)
[1] Free bases for normal subgroups of free groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **108**, (1963), 526–537. [64:5, 180] (Д.9.2)

Краснер (Krasner M.)
[1] Une généralisation de la notion de sousgroupe invariant. — C. R. Paris **208** (1939), 1867–1869. (Д.25.1)

Краузе (Krause E. F.)
[1] Groups of exponent 8 satisfy the 14th Engel congruence. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 491–496. [65:1, 171] (Д.16.4)
[2] On the collection process. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 497–504. [65:1, 1721 (Д.16.4)

Крауч (Crouch R. B.)
[1] A class of irreducible systems of generators for infinite symmetric groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 910–911. [60:11, 12518] (Д.1.3)

Кроули (Crawley P.)
[1] An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups. — Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 463–467. [63:7, 1511 (Д.30.2)
[2] Solution of Kaplansky's test problems for primary abelian groups. — J. of Algebra **2** (1965), 413–431. (Д.30.2)
[3] The cancellation of torsion abelian groups in direct sums. — J. of Algebra **2** (1965), 432–442. (Д.30.2)

Кроули и Йонсон (Crawley P., Jónsson B.)
[1] Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. — Pacif. J. Math. **14** (1964), 797–855. [66:6, 249] (Д.5.3)
Круль В. (Krull W.)
[1] Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen. — Math. Z. **23** (1925), 161–196.
[2] Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen. — S.-B. Heidelberg. Akad., 1926. — 1–32.
[3] Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. — S.-B. Heidelberg. Akad., 1932, **2**; Abh., 13–38 (Beitr. zur Algebra, **19**). (42)
Круль М. (Król M.)
[1] On free generators of the commutator subgroup of a free group. — Bull. Acad. Polon. **13** (1965), 279–282. [66:2, 231] (Д.9.2)
Кубота (Kubota R.)
[1] The subgroup theorem. — Arch. Math. **16** (1965), 3–5. [65:12, 200] (Д.9.1)
Кулаков А. А.
[1] Über die Anzahl der eigentlichen Untergruppen und der Elemente von gegebener Ordnung in p-Gruppen. — Math. Ann. **104** (1931), 778–793.
Кулатилака (Kulatilaka C. R.)
[1] Infinite abelian subgroups of some infinite groups. — J. London Math. Soc. **39** (1964), 240–244. [65:2, 271] (Д.23.4, Д.25.4)
Куликов Л. Я.
[1] К теории абелевых групп произвольной мощности. — Матем. сб. **9** (1941), 165–182. (25, 26, 29, Заключение к 1-му изд., Д.29.1)
[2] К теории абелевых групп произвольной мощности. — Матем. сб. **16** (1945), 129–162. (23, 24, 26, 28, Д.30.1, Д.30.2)
[3] О прямых разложениях групп. — Укр. матем. журн. **4** (1952), 230–275, 347–372. (Д.5.2, Д.5.5, Д.28.5, Д.31.4)
[4] Обобщенные примарные группы. — Тр. Моск. матем. о-ва **1** (1952), 247–326; **2** (1953), 85–167. [55:7, 3087] (37a, Д.30.3)
[5] Универсально полные абелевы группы. — Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда **1** (1956), 26–28. [57:3, 2073] (Д.29.5)
[6] Условия расщепляемости смешанных абелевых групп. — УМН **13**, № 3 (1958), 247. [60:8, 8605] (Д.32.2)
[7] Группы расширения абелевых групп. — Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда **2** (1961), 9–11. (Д.33.2)
[8] Строение группы абелевых расширений произвольной абелевой группы с помощью периодической. — УМН **19**, № 2 (1964), 228. (Д.33.2)
Кун (Kuhn H. W.)
[1] Subgroup theorems for groups presented by generators and relations. — Ann. of Math. **56** (1952), 22–46. (Д.6.1, Д.7.1, Д.8.1)
Курата (Kurata Y).
[1] A decomposition of normal subgroups in a group. — Osaka J. Math. **1** (1964), 201–229. [66:3, 166] (Д.17.5)
Курош А. Г.
[1] Zur Zerlegung unendlicher Gruppen. — Math. Ann. **106** (1932), 107–113. (42, Д.5.3, Д.29.1)
[2] Über freie Produkte von Gruppen. — Math. Ann. **108** (1933), 26–36. (35, Заключение к 1-му изд.)

[3] Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen. — Math. Ann. **109** (1934), 647–660. (34, 35, Д.7.1)
[4] Eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes. — Math. Ann. **111** (1935), 13–18. (56)
[5] Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. — Матем. сб. **1** (1936), 345–350. (45, 47а, Д.5.2)
[6] Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range. — Ann. Math. **38** (1937), 175–203. (32б, 32в, Д.31.1)
[7] Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп. — УМН, вып. 3 (1937), 5–15. (Д.11.1)
[8] Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte. — Матем. сб. **2** (1937), 995–1001. (35)
[9] Несколько замечаний к теории бесконечных групп. — Матем. сб. **5** (1939), 347–354. (26, 37а, 54)
[10] Локально свободные группы. — ДАН СССР **24** (1939), 99–101. (37а)
[11] Теорема Жордана–Гёльдера в произвольных структурах. — Сборник памяти акад. Граве (1940), 110–116. (44)
[12] К теории частично упорядоченных систем конечных множеств. — Матем. сб. **5** (1939), 343–346. (55)
[13] Изоморфизмы прямых разложений. — Изв. АН СССР, сер. матем., **7** (1943), 185–202. (42, 44, 45, Д.5.2, Д.5.5)
[14] Композиционные системы в бесконечных группах. — Матем. сб. **16** (1945), 59–72. (56)
[15] Силовские подгруппы нульмерных топологических групп. — Изв. АН СССР, сер. матем., **9** (1945), 65–78. (54, Д.18.1)
[16] Изоморфизмы прямых разложений. II. — Изв. АН СССР, сер. матем., **10** (1946), 47–72. (42, 47, Д.5.2, Д.5.3, Д.5.5)
[17] Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах. — Изв. АН СССР, сер. матем., **5** (1941), 233–241. (Д.16.1)
[18] Радикалы колец и алгебр. — Матем. сб. **33** (1953), 13–26. [55:4, 1680] (Д.20.1)
[19] Прямые разложения в алгебраических категориях. — Тр. Моск. матем. о-ва **8** (1959), 391–412; **9** (1960), 562. [61:3, 281] (Д.5.3)
[20] Свободные суммы мультиоператорных групп. — Acta Sci. Math. **21** (1960), 187–196. [61:4, 218] (Д.7.5)
[21] Лекции по общей алгебре. — Физматгиз, 1962. (Д.4.3, Д.7.1, Д.10.1)
[22] Радикалы в теории групп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 912–931; **6** (1965), 715. [64:6, 173] (Д.20.1–Д.20.5)

Курош А. Г. и Черников С. Н.
[1] Разрешимые и нильпотентные группы. — УМН **2**, № 3 (1947), 18–59. (55–58, 63, 64, Д.23.1, Д.25.1, Д.25.5, Д.25.7)

Курцио (Curzio M.)
[1] Su di un particolare isomorfismo di struttura. — Ricerche Mat. **2** (1953), 288–300. [56:4, 2808] (Д.14.6)
[2] Su alcuni gruppi complementati. — Ricerche Mat. **8** (1959), 172–179. [60:12, 13601] (Д.14.2)
[3] Sugli automorfismi uniformi nei gruppi a condizione minimale. — Riv. mat. Univ. Parma **1** (1960), 107–122. [61:6, 221] (Д.3.1)
[4] Alcuni criteri di finitezza per i gruppi a condizione massimale o minimale. — Ric. Mat. **9** (1960), 248–254. [61:10, 203] (Д.17.1)

Кутыев К. М.
[1] О ПC-изоморфизме некоторых классов R-групп. — Изв. АН СССР, сер. матем., **27** (1963), 701–722. [64:3, 144] (Д.14.6)
[2] Замечание о ПC-изоморфизме R-групп, локально удовлетворяющих условию (N). — Укр. матем. ж. **16** (1964), 534–536. [65:2, 260] (Д.14.6)
Кхаббаз (Khabbaz S. A.)
[1] Abelian torsion groups having a minimal system of generators. — Trans. Amer. Math. Soc. **98** (1961), 527–538. [62:1, 197] (Д.30.1)
[2] On a theorem of Charles and Erdélyi. — Bull. Soc Math. France **89** (1961), 103–104. [62:1, 198] (Д.29.4)
[3] The subgroups of a divisible group G which can be represented as intersections of divisible subgroups of G. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 267–273. [62:6, 157] (Д.28.4)
[4] On the decomposability of abelian groups. — J. London Math. Soc. **38** (1963), 137–147. [64:5, 177] (Д.30.1, Д.30.4)
Кхаббаз и Уокер Е. (Khabbaz S. A., Walker E. A.)
[1] The number of basic subgroups of primary groups. — Acta Math. Hung. **15** (1964), 153–155. [65:1, 175] (Д.30.1)
Лазар (Lazard M.)
[1] Problèmes d'extension concernant les N-groupes; inversion de la formule de Hausdorff. — C. R. Paris **237** (1953), 1377–1379. [55:10, 4895] (Д.19.1)
[2] Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. — Ann. Ecole norm. supér. **71** (1954), 101–190 [56:1, 221] (Д.19.4, Д.25.5)
Ларин С. В.
[1] Полуизоморфизмы периодических абелевых групп. — Сиб. матем. ж. **7** (1966), 298–306. [66:10, 140] (Д.2.1)
Ларин С. В. и Лойко Н. В.
[1] Полуизоморфизмы абелевых групп без кручения. — Сиб. матем. ж. **7** (1966), 293–297. [66:11, 164] (Д.2.1)
Леви (Levi F.)
[1] Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen. — Dissertation. — Leipzig, 1917. (32б, 32в)
[2] Über die Untergruppen freier Gruppen. — Math. Z. **32** (1930), 315–318 (36, Д.9.1)
[3] Über die Untergruppen der freien Gruppen. II. — Math. Z. **37** (1933), 90–97. (37, Д.9.1)
[4] The commutatorgroup of a free product. — J. Indian Math. Soc. **4** (1940), 136–144.
[5] On the number of generators of a free product and a lemma of Alexander Kurosch. — J. Indian Math. Soc. **5** (1941), 149–155.
[6] Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions. — J. Indian Math. Soc. **6** (1942), 87–97. (14, Д.26.2, Д.27.1)
[7] Notes on group theory. — J. Indian Math. Soc. **8** (1944), 1–9, 44–56, 78–91; **9** (1945), 37–42. (Д.11.4)
Леви и Ван-дер-Варден (Levi F. und van der Waerden B. L.)
[1] Über eine besondere Klasse von Gruppen. — Hamburg. Abh. **9** (1932), 154–158. (38, Заключение к 1-му изд., Д.16.3)
Левин Н. (Levine N.)
[1] The anticenter of a group. — Amer. Math. Monthly **67** (1960), 61–63. [60:12, 13594] (Д.3.3)

Левин Ф. (Levin F.)
[1] Solutions of equations over groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 603–604. [63:8, 142] (Д.19.5)
[2] On some varieties of soluble groups. I. — Math. Z. **85** (1964), 369–372. [65:7, 179] (Д.24.6)
[3] One variable equations over groups. — Arch. Math. **15** (1964), 179–188. [65:12.227] (Д.15.1, Д.19.5)
Левич Е. М.
[1] Локально достижимые элементы группы. — Изв. АН Латв. ССР, сер. физ. и техн. наук, 1965, № 3, 71–73. [65:11, 193] (Д.26.6)
Ледерман и Нейман Б. (Ledermann W., Neumann B. H.)
[1] On the order of the automorphism group of a finite group. II. — Proc. Roy. Soc. **A235** (1956), 235–246. [59:3, 2355] (Д.3.1)
Лептин (Leptin H.)
[1] Zur Theorie der überabzählbaren abelschen p-Gruppen. — Abh. Math. Sem. Hamburg **24** (1960), 79–90. [61:9, 243] (Д.30.2)
[2] Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen. — Math. Z. **73** (1960), 235–253. [61:10, 2001 (Д.34.3)
[3] Eine Charakterisierung gewisser abelscher p-Gruppen. — Arch. Math. **13** (1962), 82–85. [63:5, 192] (Д.30.2)
[4] Einige Bemerkungen über die Automorphismen abelscher p-Gruppen. — Proc. Colloq. on Abel. groups, 1963. — Budapest, 1964. — 99–104. [66:1, 211] (Д.34.3).
Лернер (Learner A.)
[1] The embedding of a class of polycyclic groups. — Proc. London Math. Soc. **12** (1962), 496–510. [63:5, 197] (Д.24.3)
[2] Residual properties of polycyclic groups. III. — J. Math. **8** (1964), 536–542. [65:9, 192] (Д.24.3)
Либек (Liebeck H.)
[1] Concerning nilpotent wreath products. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **58** (1962), 443–451. [63:5, 208] (Д.12.4)
[2] Concerning automorphisms in finitely generated abelian groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 25–31. [64:8, 164] (Д.34.3)
[3] Locally inner and almost inner automorphisms. — Arch. Math. **15** (1964), 18–27. [64:11, 160] (Д.3.1)
Ливчак Я. Б.
[1] Локально разрешимая группа, не являющаяся RN^*-группой. — ДАН СССР **125** (1959), 266–268. [60:4, 3811] (Д.23.1, Д.23.3)
[2] К теории обобщенно-разрешимых групп. — Сиб. матем. ж. **1** (1960), 617–622. [61:8, 187] (Д.23.1)
Лившиц А. Х.
[1] О теореме Жордана–Гёльдера в структурах. — Матем. сб. **24** (1949), 227–235. (44)
[2] К теории прямых разложений групп. — ДАН СССР **64** (1949), 289–292. (42)
[3] Прямые разложения вполне дедекиндовых структур. — Матем. сб. **28** (1951), 481–502. (42)
[4] Прямые разложения с неразложимыми слагаемыми в алгебраических категориях. — Матем. сб. **51** (1960), 427–458. [61:12, 334] (Д.5.3)

[5] Прямые разложения в алгебраических категориях. — Тр. Моск. матем. о-ва **9** (1960), 129–141. [61:12, 335] (Д.5.3)
[6] Прямые разложения идемпотентов в полугруппах. — Тр. Моск. матем. о-ва **11** (1962), 37–98. [64:1, 254] (Д.5.3)
[7] Теоретико-категорные основы двойственности радикальности и полупростоты. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 319–336. [65:3, 344] (Д.20.1)

Линдон (Lyndon R. C.)
[1] The cohomology theory of group extensions. — Duke math. J. **15** (1948), 271–292.
[2] New proof for a theorem of Eilenberg and MacLane. — Ann. Math. **50** (1949), 731–735.
[3] Cohomology theory of groups with a single defining relation. — Ann. Math. **52** (1950), 650–665.
[4] Two notes on nilpotent groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 579–583. (Д.10.5, Д.27.2)
[5] On Burnside's problem. — Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 202–215. [56:3, 1997] (Д.16.3)
[6] On Burnside's problem. II. — Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 329–332. [56:11, 7894] (Д.16.3)
[7] The equation $a^2b^2 = c^2$ in free groups. — Michigan Math. J. **6** (1959), 89–95. [60:1, 150] (Д.9.1)
[8] Equations in free groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 445–457. [63:2, 193] (Д.9.5)
[9] Dependence and independence in free groups. — J. reine und angew. Math. **210** (1962), 148–174. [63:3, 186] (Д.15.2)
[10] Length functions in groups. — Math. Scand. **12** (1963), 209–234. [65:7, 178] (Д.7.1)
[11] Grushko's theorem. — Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 822–826. [66:10, 146] (Д.7.2)
[12] Dependence in groups. — Coll. Math. **14** (1966), 275–283. [66:12, 191] (Д.9.5)

Линдон и Шютценбергер (Lyndon R. C., Schützenberger M. P.)
[1] The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group. — Mich. Math. J. **9** (1962), 289–298. [63:11, 169] (Д.9.1)

Липшуц (Lipschutz S.)
[1] Elements in S-groups with trivial centralizers. — Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 679–683. [62:6, 168] (Д.15.4)
[2] On powers of elements in S-groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 181–186. [63:3, 185] (Д.15.4)
[3] On square roots in eighth-groups. — Comm. pure and appl. Math. **15** (1962), 39–43. [64:1, 234] (Д.15.4)
[4] An extension of Greendlinger's result on the word problem. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 37–43. [65:6, 160] (Д.15.4)

Лихтман А. И.
[1] О нильпотентно-аппроксимируемых группах. — Сиб. матем. ж. **6** (1965), 862–866. [66:7, 197] (Д.25.5)

Лишак М. Г.
[1] Ω-группы с идеализаторным условием. — Изв. АН Каз.ССР, сер. физ.-мат. наук, вып. 2 (1964), 63–68. [65:3, 360] (Д.25.3).

[2] Метабелевы и слабо метабелевы Ω-группы; идеализаторное условие. — Вестн. АН Каз.ССР **10** (1964), 75–79. [65:4, 246] (Д.25.3)
[3] О периодической части абелевой Ω-группы. — Тр. 1-й Казахст. межвуз. научн. конфер. по матем. и мех., 1963; Алма-Ата, 1965. — 140–146. (Д.28.1)

Лози (Losey G.)
[1] A note on groups of prime power exponent satisfying an Engel congruence. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 209–211. [64:11, 172] (Д.16.4)

Лойко Н. В.
[1] S-изоморфизм абелевых групп без кручения. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1961), 67–71. [62:7, 161] (Д.14.6)
[2] S-изоморфизмы смешанных абелевых групп ранга $r \geqslant 2$. — Матем. зап. Уральск. ун-та **4** (1963), 57–59. [63:11, 158] (Д.14.6)
[3] S-изоморфизмы смешанных абелевых групп ранга $r = 1$. — Сиб. матем. журн. **6** (1965), 1053–1067. [66:2, 225] (Д.14.6)
[4] Естественные S-изоморфизмы групп без кручения. — Матем. зап., Красноярск. пед. ин-т, кафедра алгебры, вып. 1, 1965. — 46–53. (Д.14.6)

Лонстра (Loonstra F.)
[1] Sur les extensions du groupe additif des entiers rationnels par le meme groupe. — Proc. Nederl. akad. **A57** (1954), 263–272. [56:10, 7146] (Д.12.1)
[2] Homomorphe Abbildungen von Gruppenerweiterungen. — Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 44–54. [57:10, 7659] (Д.12.1)
[3] Erweiterungen von Grenzgruppen. — Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 548–559. [59:3, 2359] (Д.12.1)
[4] Fortsetzung von Gruppenhomomorphismen. — J. reine und angew. Math. **199** (1958), 192–202. [59:8, 7790] (Д.12.1)
[5] Klassifikation der Darstellungen einer Gruppe. — Acta Math. Hung. **11** (1960), 223–229. [62:3, 203] (Д.2.1, Д.12.2)
[6] Darstellungen von Gruppen als homomorphes Bild. — Math. Z. **76** (1961), 149–154. [62:3, 204] (Д.2.1)
[7] Homomorphe Abbildungen in einer Gruppe. — Ann. mat. pura ed appl. **55** (1961), 159–169. [63:5, 162] (Д.2.1)
[8] Das System aller Erweiterungen einer Gruppe. — Arch. Math. **12** (1961), 262–279. [62:12, 138] (Д.12.2)
[9] Extensions de deux suites exactes. — Ann. mat. pura ed appl. **56** (1961), 329–343. [63:3, 171] (Д.12.1)
[10] Über subdirekte Produkte von Gruppen. — Rend. mat. e appl. **21** (1962), 364–372. [64:1, 235] (Д.6.2)

Лоренц А. А.
[1] Бескоэффициентные уравнения в свободных группах. — ДАН СССР **160** (1965), 538–540. [65:6, 159] (Д.9.5)

Лоренцен (Lorenzen P.)
[1] Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. — Math. Z. **49** (1944), 313–327. (За, Д.1.1)
[2] Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz. — Math. Z. **49** (1944), 647–653.

Лось (Loś J.)
[1] On the complete direct sum of countable abelian groups. — Publ. Math. **3** (1954), 269–272. [56:12, 8607] (Д.31.5)

[2] On the torsion-free abelian groups with hereditarily generating sequences. — Бюлл. Польской АН **4** (1956), 165–167. [57:8, 6164] (Д.28.6)
[3] Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups. — Fund. Math. **44** (1957), 84–90. [59:4, 3535] (Д.29.5)
[4] Linear equations and pure subgroups. — Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 13–18. [61:5, 215] (Д.29.3)
[5] Generalized limits in algebraically compact groups. — Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 19–21. [61:3, 197] (Д.29.5)

Лось, Сонсяда и Сломиньский (Loś J., Sąsiada E., Slomiński Z.)
[1] On abelian groups with hereditarily generating systems. — Publ. Math. **4** (1956), 351–356. [60:2, 1374] (Д.28.6)

Лохер (Locher L.)
[1] Die Untergruppen der freien Gruppen. — Comment. math. helv. **6** (1933), 76–82.(36)

Льюис (Lewis P. E.)
[1] Characters of abelian groups. — Amer. J. Math. **64** (1942), 81–105.

Любельский (Lubelski S.)
[1] Zur Verscharfung des Jordan-Hölderschen Satzes. — Матем. сб. **9** (1941), 277–280.

Лю Шао-сюэ
[1] О прямых слагаемых в группах с мультиоператорами. — Scientia Sinica **13** (1964), 1735–1745. [65:8, 262] (Д.5.1)

Ляпин Е. С.
[1] Über die Ordnung der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe. — Матем. сб. **1** (1936), 887–905. (12)
[2] О разложении абелевых групп без кручения, имеющих конечный ранг, в прямую сумму групп первого ранга. — Матем. сб. **3** (1938), 167–177.
[3] О разложении абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, № 2. — 141–148. (29)
[4] Некоторые свойства разложений абелевых групп без кручения в прямые суммы. — ДАН СССР **24** (1939), 8–10.
[5] Разложение исчислимых абелевых групп без кручения в прямые суммы групп первого ранга. — ДАН СССР **24** (1939), 11–13.
[6] О разложении абелевых групп в прямые суммы рациональных групп. — Матем. сб. **8** (1940), 205–237. (31)
[7] Полные действия в классах ассоциативных систем и групп. — Уч. зап. Пед. ин-та им. Герцена. — Ленинград, **86** (1949), 93–106. (62, Д.11.7)

Ляховицкий В. Н.
[1] К вопросу о разложимости группы в разноименные нильпотентные произведения. — Матем. сб. **40** (1956), 401–414. [59:3, 2371] (Д.11.5)

Магнус (Magnus W.)
[1] Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz). — J. reine angew. Math. **163** (1930), 141–165. (41, Заключение к 1-му изд.)
[2] Untersuchungen über einige unendliche diskontinuierliche Gruppen. — Math. Ann. **105** (1931), 52–74.
[3] Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. — Math. Ann. **106** (1932), 295–307. (41)

[4] Über n-dimensionale Gittertransformationen. — Acta math. **64** (1935), 353–367.
[5] Über den Beweis des Hauptidealsatzes. — J. reine angew. Math. **170** (1934), 235–240.
[6] Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring. — Math. Ann. **111** (1935), 259–280. (36, 39, Заключение к 1-му изд.)
[7] Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. — J. reine angew. Math. **177** (1937), 105–115.
[8] Neuere Ergebnisse über auflösbare Gruppen. — Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **47** (1937), 69–78.
[9] Über freie Faktorgruppen und freie Untergruppen gegebener Gruppen. — Monatsh. Math. Phys. **47** (1939), 307–313. (Заключение к 1-му изд.)
[10] On a theorem of Marshall Hall. — Ann. Math. **40** (1939), 764–768.
[11] Allgemeine Gruppentheorie. — Enzyklopädie der math. Wiss., **2**. Aufl. 1939.
[12] Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 142–149. (Д.16.4)
[13] A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside. — Ann. Math. **52** (1950), 111–126. (Д.16.3)

Магнус, Каррас и Солитэр (Magnus W., Karrass A., Solitar D.)
[1] Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations. — New York, London, Sydney, 1966. (Д.7.1)

Макбет (Macbeath A. M.)
[1] Packings, free products and residually finite groups. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **59** (1963), 555–558. [64:2, 254] (Д.17.9)

Макгенри (MacHenry T.)
[1] The tensor product and the 2nd nilpotent product of groups. — Math. Z. **73** (1960), 134–145. [61:12, 263] (Д.11.5)
[2] The tensor product of non-abelian groups and exact sequences. — Arch. Math. **11** (1960), 166–170. [61:12, 264] (Д.9.2, Д.11.5)

Макдональд (Macdonald I. D.)
[1] A class of FC-groups. — J. London Math. Soc. **34** (1959), 73–80. [60:6, 6201] (Д.17.6, Д.17.7)
[2] On certain varieties of groups. — Math. Z. **76** (1961), 270–282; **78** (1962), 175–188. [62:3, 182; 62:8, 146] (Д.24.4, Д.24.6)
[3] On a set of normal subgroups. — Proc. Glasgow Math. Assoc. **5** (1962), 137–146. [62:10, 150] (Д.25.4)
[4] On central series. — Proc. Edinburgh Math. Soc. **13** (1962), 175–178. [63:11, 138] (Д.3.3)
[5] Another law for the 3-metabelian groups. — J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 452–453. [65:12, 222] (Д.24.4)
[6] Some metabelian-like varieties. — Amer. Math. Monthly **72** (1965), 159–162. (Д.24.6)

Маклейн Д. (McLain D. H.)
[1] A characteristically-simple group. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **50** (1954), 641–642. [56:1, 224] (Д.3.2, Д.25.1)
[2] On locally nilpotent groups. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 5–11. [56:12, 8613] (Д.25.1, Д.27.4, Д.27.5)
[3] Remarks on the upper central series of a group. — Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1956), 38–44. [57:11, 8452] (Д.3.3, Д.17.3, Д.17.6, Д.25.6)

[4] Finiteness conditions in locally soluble groups. — J. London Math. Soc. **34** (1959), 101–107. [60:2, 1383] (Д.23.2, Д.23.4)

Маклейн С. (MacLane S.)

[1] Cohomology theory in abstract groups. III. — Ann. Math. **50** (1949), 736–761. (50)

[2] Duality for groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 485–516. (Д.28.4)

[3] A proof of the subgroup theorem for free products. — Mathematika **5** (1958), 13–19. [59:6, 5579] (Д.7.1)

[4] Group extensions by primary abelian groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 1–16. [61:4, 186] (Д.33.2)

[5] Homology. — Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963. (Русский перевод: Гомология. — Изд.: Мир, 1966) (Д.12.1)

Маланьина Г. А.

[1] Полупрямые произведения циклических групп. — ДАН СССР **132** (1960), 762–765. [61:4, 177] (Д.13.1)

[2] Полупрямые произведения циклических p-групп. — Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (1960), 33–67. [62:3, 190] (Д.13.1)

[3] К вопросу о полупрямом произведении. — Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 27–30. [63:8, 154] (Д.13.1)

[4] О полупрямом произведении двух циклических p-групп ($p \neq 2$). — Уч. зап. Пермск. ун-та **103** (1963), 43–45. [65:1, 179] (Д.13.1)

Мальцев А. И.

[1] Абелевы группы конечного ранга без кручения. — Матем. сб. **4** (1938), 45–68. (32б, Д.31.1)

[2] Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. — Матем. сб. **8** (1940), 405–422. (36, 64, Заключение к 1-му изд., Д.17.9)

[3] Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, физ.-мат. фак., **1** (1941), 3–9. (55, 58, 63)

[4] О группах конечного ранга. — Матем. сб. **22** (1948), 351–352. (37а, 53)

[5] Об одном классе однородных пространств. — Изв. АН СССР, сер. матем., **13** (1949), 9–32. (67)

[6] Нильпотентные группы без кручения. — Изв. АН СССР, сер. матем., **13** (1949), 201–212. (63, 66, 67)

[7] Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы. — Матем. сб. **25** (1949), 347–366. (14, 36, 64, Д.17.9, Д.23.1, Д.25.5, Д.25.6)

[8] О бесконечных разрешимых группах. — ДАН СССР **67** (1949), 23–25.

[9] Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями. — Матем. сб. **26** (1950), 19–33. (37, 62)

[10] О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. — Матем. сб. **28** (1951), 567–588. (59, 64, Д.24.1, Д.24.2, Д.25.1)

[11] Два замечания о нильпотентных группах. — Матем. сб. **37** (1955), 567–572. [57:1, 146] (Д.27.2, Д.27.3)

[12] О гомоморфизмах на конечные группы. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **18** (1958), 49–60. [60:5, 4941] (Д.17.9)

[13] О свободных разрешимых группах. — ДАН СССР **130** (1960), 495–498. [61:3, 191] (Д.24.5)

[14] Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе. — Алгебра и логика (семинар) **1**, № 5 (1962), 45–50. [63:9, 164] (Д.9.3)

Маркьонна-Тибилетти (Marchionna-Tibiletti C.)
[1] Immersione in prodotti completi di prodotti ordinati die più gruppi. — Ann. mat. pura ed appl. **44** (1957), 233–244. [59:4, 3543] (Д.13.2)
[2] Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei. — Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino **17** (1957–1958), 209–221. [63:1, 201] (Д.13.3)
[3] Una scomposizione di un piu generale prodotto sghembo di gruppi. — Univ. e Polit. Torino Rend. Sem. Mat. **18** (1958–1959), 77–89. [63:3, 188] (Д.13.3)
[4] Ampliamenti di automorfismi in prodotti di gruppi permutabili. — Boll. Un. mat. ital. **16** (1961), 449–464. [63:3, 189] (Д.13.2)
Маурер (Maurer I.)
[1] Contributii la studiul grupărilor pe baza cvasicentrului. — Comun. Acad. RPR **5** (1955), 1029–1034. [56:10, 7149] (Д.3.3)
Мацедонская О. Н.
[1] О нейтральных поливербальных операциях. — Матем. сб. **69** (1966), 286–299. [67:3, 136] (Д.11.6)
Мегиббен (Megibben Ch. K.)
[1] A note on a paper of Bernard Charles. — Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 453– 454. [64:12, 169] (Д.29.2)
[2] On high subgroups. — Pacif. J. Math. **14** (1964), 1353–1358. [65:11, 190] (Д.29.4, Д.29.5)
[3] Kernels of purity in abelian groups. — Publ. Math. **11** (1964), 160–164. [66:10, 135] (Д.29.3)
[4] On subgroups of primary abelian groups. — Publ. Math. **12** (1965), 293–294. [66:10, 139] (Д.29 2)
Мейер-Вундерли (Meier-Wunderli H.)
[1] Über endliche p-Gruppen, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen. — Comm. math. Helv. **24** (1950), 18–45.
[2] Über die Struktur der Burnsidegruppen mit zwei Erzeugenden und vom Primzahlexponenten $p > 3$. — Comm. math. Helv. **30** (1956), 144–160. [57:7, 5360] (Д.16.3)
Мерзляков Ю. И.
[1] К теории обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп. — Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 29–36. [64:7, 217] (Д.23.1, Д.25.7)
[2] О локально разрешимых группах конечного ранга. — Алгебра и логика (семинар) **3**, № 2 (1964), 5–16. [65:3, 190] (Д.23.1, Д.23.2, Д.25.1)
Милс (Mills W. H.)
[1] Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 379–392.
[2] On the non-isomorphism of certain holomorphs. — Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 428–443. [54:1, 1571] (Д.3.2)
[3] Decomposition of holomorphs. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 1443–1446. [63:2, 194] (Д.3.2)
Митра (Mitra A.)
[1] A theorem on Engel groups. — J. Indian Math. Soc. **25** (1961), 155–161. [63:9, 153] (Д.26.2)
Михайлова К. А.
[1] Проблема вхождения для прямых произведений групп. — ДАН СССР **119** (1958), 1103–1105. [59:1, 79] (Д.15.4)

[2] Проблема вхождения для свободных произведений групп. — ДАН СССР **127** (1959), 746–748. [60:3, 2668] (Д.15.4)

Мишина А. П.

[1] О полных прямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга. — Укр. матем. ж. **2**, № 4 (1950), 64–70. (32, Д.31.5)

[2] Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп. — Укр. матем. ж. **3** (1951), 218–232. (29, Д.32.2)

[3] Об изоморфизме полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1. — Матем. сб. **31** (1952), 118–127. (Д.31.5)

[4] О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 244–249. [62:11, 136] (Д.31.5, Д.31.6)

[5] Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1. — Матем. сб. **57** (1962), 375–383. [62:12, 143] (Д.31.5)

[6] Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп. — Вестн. МГУ, Матем., мех., 1962, № 4. — 39–43. [63:2, 183] (Д.34.1)

Моран (Moran S.)

[1] Associative operations on groups. I. — Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 581–596. [59:3, 2369] (Д.11.4)

[2] Associative operations on groups. II. — Proc. London Math. Soc. **8** (1958), 548–568. [60:9, 10029] (Д.11.4)

[3] Duals of a verbal subgroup. — J. London Math. Soc. **33** (1958), 220–236; **34** (1959), 250. [60:9, 10025, 10026] (Д.3.4)

[4] The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the cartesian subgroup of a free product. — J. London Math. Soc. **33** (1958), 237–245; **34** (1959), 250. [60:9, 10027] (Д.3.4)

[5] Further duals of a verbal subgroup. — Proc. Glasgow Math. Assoc. **4** (1959), 88–91. — [61:9, 222] (Д.3.4)

[6] Associative operations on groups. III. — Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 287–317. [61:9, 224] (Д.11.7)

[7] Associative regular operations on groups corresponding to a property P. — Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 796–799. [61:9, 226] (Д.11.7)

[8] Unrestricted verbal products. — J. London Math. Soc. **36** (1961), 1–23. [62:3, 194] (Д.7.4, Д.11.8)

[9] Properties of N-multiplications and N^*-multiplications. — J. London Math. Soc. **36** (1961), 193–210. [62:2, 205] (Д.11.7)

[10] Note on a question of Malcev. — Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 853–855. [63:4, 153] (Д.11.3)

[11] Unrestricted nilpotent products. — Acta Math. **108** (1962), 61–88. [63:11, 173] (Д.11.8)

[12] A subgroup theorem for free nilpotent groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 495–515; **112** (1964), 79–83. [63:5, 199; 65:2, 275] (Д.27.3)

Моримото (Morimoto A.)

[1] A lemma on a free group. — Nagoya Math. J. **7** (1954), 149–150. [56:2, 1083] (Д.1.1)

Мостовский (Mostowski A. W.)

[1] Nilpotent free groups. — Fund. Math. **49** (1961), 259–269. [62:1, 206] (Д.27.3)

[2] On automorphisms of relatively free groups. — Fund. Math. **50** (1962), 403–411. [62:11, 147] (Д.27.3)

Мостовский и Сонсяда (Mostowski A. W., Sąsiada E.)
[1] On the bases of modules over a principal ideal ring. — Bull. Acad. Polon. **3** (1955), 473–474. [56:12, 8644] (Д.28.2)
Мохамед (Mohamed I. J.)
[1] On series of subgroups related to groups of automorphisms. — Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 711–723. [64:5, 1411 (Д.22.4)
[2] On the class of the stability group of a subgroup chain. — J. London Math. Soc. **39** (1964), 109–114. [64:12, 171] (Д.22.4)
Мочульский Е. Н.
[1] Прямые разложения дедекиндовых структур. — Матем. сб. **37** (1955), 89–102. [57:8, 6202] (Д.5.3)
[2] Прямые разложения в структурах. — Изв. АН СССР, сер. матем., **25** (1961), 717–748; **26** (1962), 161–210. [62:7, 225; 64:2, 346] (Д.5.3)
Мурасуги (Murasugi K.)
[1] The center of a group with a single defining relation. — Math. Ann. **155** (1964), 246–251. [65:1, 183] (Д.15.2)
Мурата (Murata K.)
[1] A subdirect representation of a group. — J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. **A11** (1960), 11–14. [62:2, 198] (Д.20.6)
Мухаммеджан Х. Х.
[1] К теории бесконечных групп, обладающих возрастающим центральным рядом. — ДАН СССР **65** (1949), 269–272. (Д.25.4)
[2] О группах с возрастающим центральным рядом. — Матем. сб. **28** (1951), 185–196. (64, 65)
[3] О группах, обладающих разрешимым возрастающим инвариантным рядом. — Матем. сб. **39** (1956), 201–218. [57:5, 3802] (Д.23.4, Д.25.4)
Мышкин В. И.
[1] Однородные сепарабельные абелевы группы без кручения. — Матем. сб. **64** (1964), 3–9. [65:5, 172] (Д.31.7)
[2] Про один клас нерозщеплюваних змішаних абелевих груп. — ДАН УРСР, 1964, № 12. — 1572–1574. [65:5, 173] (Д.31.7)
[3] Про зчисленні абелеві групи рангу 1. — ДАН УРСР, 1965, № 8. — 974–977. [66:1, 217] (Д.32.3)
Мягкова Н. Н.
[1] О группах конечного ранга. — Изв. АН СССР, сер. матем., **13** (1949), 495–512. (64, Д.25.1, Д.25.2)
Нагао (Nagao H.)
[1] Über die Beziehungen zwischen dem Erweiterungssatz von O. Schreier und dem von K. Shoda. — Proc. Japan Acad. **21** (1945), 359–362. (Д.12.1)
Нагата (Nagata M.)
[1] Note on groups with involutions. — Proc. Japan. Acad. **28** (1952), 564–566. (Д.3.1)
Нейман Б. (Neumann B. H.)
[1] Die Automorphismengruppe der freien Gruppen. — Math. Ann. **107** (1932), 367–386. (35)
[2] Über ein gruppentheoretisch-arithmetisches Problem. — S.-B. Preuss. Akad. (1933), 429–444.
[3] Decomposition of groups. — J. London Math. Soc. **10** (1935), 3–6. (38, Заключение к 1-му изд., Д.13.2, Д.16.2)

[4] Identical relations in groups. I. — Math. Ann. **114** (1937), 506–525. (37, Д.3.4, Д.10.3, Д.10.5)
[5] Some remarks on infinite groups. — J. London Math. Soc. **12** (1937), 120–127. (38, 62)
[6] Groups whose elements have bounded orders. — J. London Math. Soc. **12** (1937), 195–198.
[7] Adjunction of elements to groups. — J. London Math. Soc. **18** (1943), 4–11. (67, Д.19.5)
[8] On the number of generators of a free product. — J. London Math. Soc. **18** (1943), 12–20. (39)
[9] A two-generator group isomorphic to a proper factor group. — J. London Math. Soc. **25** (1950), 247–248. (38)
[10] On a special class of infinite groups. — Nieuw Archief voor Wiskunde **23** (1950), 117–127.
[11] On the commutativity of addition. — J. London Math. Soc. **15** (1940), 203–208. (Д.3.1)
[12] Groups with finite classes of conjugate elements. — Proc. London Math. Soc. **1** (1951), 178–187. (Д.17.6)
[13] A note on algebraically closed groups. — J. London Math. Soc. **27** (1952), 247–249. (Д.19.5)
[14] On a problem of Hopf. — J. London Math. Soc. **28** (1953), 351–353. [54:10, 5068] (Д.15.1)
[15] An essay on free products of groups with amalgamations; Phil. Trans. Roy. Soc. London **A246** (1954), 503–554. [55:9, 4259] (Д.8.1, Д.8.2)
[16] Groups covered by permutable subsets. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 236–248. [55:3, 1112] (Д.17.7, Д.19.6)
[17] Groups covered by finitely many cosets. — Publ. Math. **3** (1954), 227–242. [57:2, 1169] (Д.19.6)
[18] Groups with finite classes of conjugate subgroups. — Math. Z. **63** (1955), 76–96. [56:7, 5116] (Д.17.7)
[19] Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed. — Arch. Math. **7** (1956), 1–5. [57:1, 148] (Д.3.1)
[20] On a question of Gaschütz. — Arch. Math. **7** (1956), 87–90. [57:1, 133] (Д.3.4)
[21] On a conjecture of Hanna Neumann. — Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1956), 13–17. [57:7, 5358] (Д.24.4)
[22] Ascending derived series. — Comp. Math. **13** (1956), 47–64; **18** (1957), 128. [57:10, 7660; 58:10, 8590] (Д.12.3, Д.23.5)
[23] Ascending verbal and Frattini series. — Math. Z. **69** (1958), 164–172. [59:1, 143] (Д.23.5, Д.27.4)
[24] Isomorphism of Sylow subgroups of infinite groups. — Math. Scand. **6** (1958), 299–307. [60:9, 10021] (Д.18.1)
[25] On amalgams of periodic groups. — Proc. Roy. Soc. **A255** (1960), 477–489. [61:6, 203] (Д.8.2)
[26] Permutational products of groups. — J. Austral. Math. Soc. **1** (1960), 299–310. [62:2, 206] (Д.8.2)
[27] On a theorem of Auslander and Lyndon. — Arch. Math. **13** (1962), 4–9. [63:9, 163] (Д.9.2)
[28] Twisted wreath products of groups. — Arch. Math. **14** (1963), 1–6. [63:11, 179] (Д.12.3)

[29] Supplements of direct powers in cartesian powers. — Math. Z. **87** (1965), 17–18. [65:7, 182] (Д.6.1)

Нейман Б. и Нейман Х. (Neumann B. H. and Neumann H.)

[1] A remark on generalized free products. — J. London Math. Soc. **25** (1950), 202–204. (Д.8.1)

[2] Zwei Klassen charakteristischer Untergruppen und ihre Faktorgruppen. — Math. Nachr. **4** (1951), 106–125. (Д.3.4)

[3] Extending partial endomorphisms of groups. — Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 337–348. (Д.3.5)

[4] A contribution to the embedding theory of group amalgams. — Proc. London Math. Soc. **3** (1953), 243–256. [54:2, 2003] (Д.8.2)

[5] On a class of abelian groups. — Arch. Math. **4** (1953), 79–85. [54:4, 2869] (Д.28.3)

[6] Partial endomorphisms of finite groups. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 434–440. [56:1, 213] (Д.3.5)

[7] Embedding theorems for groups. — J. London Math. Soc. **34** (1959), 465–479. [60:11, 12519] (Д.15.1)

[8] On linked products of groups. — Acta Sci. Math. **21** (1960), 197–205. [62:2, 207] (Д.13.6)

Нейман Б., Нейман Х. и Нейман П. (Neumann B. H., Neumann H., Neumann P. M.)

[1] Wreath products and varieties of groups. — Math. Z. **80** (1962), 44–62. [63:8, 160] (Д.10.4, Д.10.6, Д.12.3)

Нейман Б. и Уайголд (Neumann B. H., Wiegold J.)

[1] On certain embeddability criteria for group amalgams. — Publ. Math. **9** (1962), 57–64. [64:8, 167] (Д.8.2, Д.11.8)

Нейман Х. (Neumann H.)

[1] Generalized free products with amalgamated subgroups. — Amer. J. Math. **70** (1948), 590–625; **71** (1949), 491–540. (35, Д.8.1, Д.8.2)

[2] Generalized free sums of cyclical groups. — Amer. J. Math. **72** (1950), 671–685. (35, Д.8.2)

[3] On an amalgam of abelian groups. — J. London Math. Soc. **26** (1951), 228–232. (35, Д.8.2)

[4] On varieties of groups and their associated near-rings. — Math. Z. **65** (1956), 36–69. [57:1, 147] (Д.9.4, Д.10.4)

[5] On the intersection of finitely generated free groups. — Publ. Math. **4** (1956), 186–189; **5** (1957), 128. [59:5, 4477, 4478] (Д.9.1)

Нейман Х. и Уайголд (Neumann H., Wiegold J.)

[1] Linked products and linked embedding of groups Math. Z. **73** (1960), 1–19. [61:12, 266] (Д.13.6)

Нейман П. (Neumann P. M.)

[1] Some indecomposable varieties of groups. — Quart. J. Math. **14** (1963), 46–50. [63:11, 180] (Д.10.4, Д.10.5)

[2] On the structure of standard wreath products of groups. — Math. Z. **84** (1964), 343–373. [65:2, 284] (Д.12.4)

[3] On word subgroups of free groups. — Arch. Math. **16** (1965), 6–21. [65:12, 233] (Д.10.6)

Нейман П. и Уайголд (Neumann P. M., Wiegold J.)

[1] Schreier varieties of groups. — Math. Z. **85** (1964), 392–400. [65:7, 180] (Д.10.6)

Нефедьев Г. Н.
[1] Периодические абелевы расширения группы типа p^{∞}. — Тр. Уральск. политехн. ин-та **51** (1954), 92–106. [55:9, 4255] (Д.12.1)
Нильсен (Nielsen J.)
[1] Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. — Math. Ann. **78** (1917), 385–397. (35)
[2] Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation. — Math. Ann. **79** (1918), 269–272. (35)
[3] Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien. — Mat. Tidsskrift B, 1921. — 77–94. (36, 39)
[4] Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. — Math. Ann. **91** (1924), 169– 209. (35)
[5] A basis for subgroups of free groups. — Math. Scand. **3** (1955), 31–43. [56:3, 1999] (Д.9.1)
Нисневич В. Л.
[1] О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем. — Матем. сб. **8** (1940), 395–404. (Заключение к 1-му изд.)
Нишигори (Nishigôri N.)
[1] On some properties of FC-groups. — J. Hiroshima Univ. **A21** (1957), 99–105. [59:3, 2360] (Д.17.6)
[2] On skew products of groups. — J. Hiroshima Univ. **A24** (1960), 477–508. [62:4, 182] (Д.13.3)
[3] On FC-solvable groups. — J. Hiroshima Univ. **A25** (1961), 367–368. [63:2.188] (Д.17.6)
Новиков П. С.
[1] Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. — ДАН СССР **85** (1952), 709-712. (41).
[2] Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. — Изв. АН ССС, сер. матем., **18** (1954), 485–524. [55:6, 2521] (Д.15.4)
[3] Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теори групп. — Тр. Матем. ин-та АН СССР **44** (1955), 3–143. [56:1, 112] (Д.15.4)
[4] О периодических группах. — ДАН СССР **127** (1959), 749–752. [60:6, 6197] (Д.16.2)
Нунке (Nunke R. J.)
[1] On direct products of infinite cyclic groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 66–71. [63:6, 182] (Д.31.6)
[2] Slender groups. — Acta Sci. Math. **23** (1962), 67–73. [63:12, 177] (Д.31.6, Д.33.3, Д.33.4)
[3] A note on abelian group extensions. — Pacif. J. Math. **12** (1962), 1401–1403. [64:6, 171] (Д.33.2)
[4] On the structure of Tor. — Proc. Coll. on abelian groups, 1963; Budapest, 1964. — 115–124. [66:3, 173] (Д.30.3, Д.33.8)
Ньюмэн (Newman M. F.)
[1] On a class of metabelian groups. — Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 354–364. [62:2, 203] (Д.24.4)
[2] On a class of nilpotent groups. — Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 365–375. [62:2, 204] (Д.24.4)
[3] On subgroup commutators. — Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 724–728. [64:4, 188] (Д.27.1)

Ньюмэн и Уайголд (Newman M. F., Wiegold J.)
[1] Groups with many nilpotent subgroups. — Arch. Math. **15** (1964), 241–250. [65:12, 223] (Д.27.1)
Ньюуайрт (Neuwirth L.)
[1] An alternative proof of a theorem of Iwasawa on free groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **57** (1961), 895–896. [62:3, 192] (Д.9.2)
Орсатти (Orsatti A.)
[1] Su di un problema di T. Szele e J. Szendrei. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **35** (1965), 171–175. [66:5, 164] (Д.34.1)
Орэ (Ore O.)
[1] On the foundation of abstract algebra. I. — Ann. Math. **36** (1935), 406–437. (44)
[2] On the foundation of abstract algebra. II. — Ann. Math. **37** (1936), 265–292. (42)
[3] Direct decompositions. — Duke math. J. **2** (1936), 581–596.
[4] Structures and group theory. I. — Duke math. J. **3** (1937), 149–174. (Д.3.3)
[5] On the theorem of Jordan-Hölder. — Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 266– 275. (44)
[6] Structures and group theory. II. — Duke math. J. **4** (1938), 247–269. (44)
[7] On the application of structure theory to groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 801–806.
[8] A remark on the normal decompositions of groups. — Duke math. J. **5** (1939), 172–173.
[9] Contributions to the theory of groups of finite order. — Duke math. J. **5** (1939), 431–460. (60)
[10] A remark on groups which are the direct product of their Sylow groups. — Monatsh. Math. Phys. **48** (1939), 41–42.
[11] Theory of monomial groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), 15–64.
[12] Some remarks on commutators. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 307–314.
[13] On coset representatives in groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 665–670. [60:2, 1387] (Д.2.3)
Оутс и Пауэлл (Oates Sh., Powell M. B.)
[1] Identical relations in finite groups. — J. of Algebra **1** (1964), 11–39. [65:7, 176] (Д.10.5)
Охара (Ohara A.)
[1] Note on commutator subgroups of factorisable groups. — Proc. Japan Acad. **31** (1955), 612–614. [57:1, 149] (Д.13.2)
Папп (Papp Z.)
[1] On the closure of the basic subgroup. — Publ. Math. **5** (1958), 256–260. (Д.30.2)
Пейффер (Peiffer R.)
[1] Über Identitäten zwischen Relationen. — Math. Ann. **121** (1949), 67–99.
Пекелис А. С.
[1] Структурные изоморфизмы групп. — обладающих конечным рациональным рядом. — УМН **11**, № 4 (1956), 143–147. [57:7, 5363] (Д.14.4)
[2] Структурные изоморфизмы разрешимых групп с условием максимальности и с условием минимальности. — Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 51–59. [59:5, 4475] (Д.14.4)

[3] О группах с изоморфными структурами подполугрупп. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1. — 189–194. [60:2, 1392] (Д.14.6)
[4] Подгрупповая структура некоторых классов групп. — Уч. зап. Уральск. ун-та **23** (1960), 30–39. [61:12, 270] (Д.14.4)
[5] О структурных изоморфизмах разрешимых групп. — ДАН СССР **133** (1960), 281–283. [61:6, 214] (Д.14.4)
[6] Структурные изоморфизмы локально нильпотентных непериодических групп. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1961), 72–76. [62:9, 148] (Д.14.4)
[7] Структурные изоморфизмы локально нильпотентных групп без кручения. — УМН **18**, № 3 (1963), 187–190. [63:11, 164] (Д.14.4)
[8] Структурные изоморфизмы смешанных нильпотентных групп. — Сиб. матем. ж. **6** (1965), 1315–1321. [66:5, 165] (Д.14.4)

Пекелис А. С. и Садовский Л. Е.
[1] Проектирования метабелевой группы без кручения. — ДАН СССР **151** (1963), 42–44. [64:3, 154] (Д.14.4)

Переманс (Peremans W.)
[1] Completeness of holomorphs. — Proc. Nederl. Akad. **A60** (1957), 608–619. [58:9, 7501] (Д.3.2, Д.5.1)

Пермутти (Permutti R.)
[1] Distributivita nel reticolo dei sottogruppi normali di un T-gruppo. — Matematiche **20** (1965), 46–63. [66:3, 175] (Д.24.4)

Петерсен И.
[1] О построении произведений двух перестановочных групп. — Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, **9** (1960), 296–300. [62:2, 208] (Д.13.2)

Петреску (Petresco J.)
[1] Sur les commutateurs. — Math. Z. **61** (1954), 348–356. [56:2, 1079] (Д.3.3)
[2] Sur les groupes libres. — Bull. sci. math. **80** (1956), 6–32. [57:4, 2917] (Д.9.1)
[3] Sur le théorème de Kuroš dans les produits libres. — Ann. Ecole norm. supér. **75** (1958), 107–123. [60:2, 1390] (Д.7.1)

Петропавловская Р. В.
[1] Об определяемости группы структурой ее подсистем. — Матем. сб. **29** (1951), 63–78. (47б, Д.14.6)
[2] Ассоциативные системы, структурно изоморфные группе I, II, III. — Вестн. ЛГУ, 1956, № 13. — 6–25; № 19. — 80–99; 1957, № 19. — 5–19. [57:6, 4640; 60:4, 3821] (Д.14.6)
[3] О некотором классе групп, определяющемся структурой своих подполугрупп. — Матем. сб. **66** (1965), 265–271. [65:8, 162] (Д.14.6)

Пик (Pic Gh.)
[1] Despre quasi-centrul unui grup. — Studii şi Cerc. mat. **4** (1953), 7–21. [54:5, 3239] (Д.3.3)
[2] Sur le quasi-centré d'un groupe. II. — Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR **1** (1957), 467–472. [61:4, 178] (Д.3.3)
[3] Despre o teoremă a lui B. H. Neumann. — Studia Univ. Babeş — Bolyai, 1960, № 1. — 21–26. [62:11, 143] (Д.17.6)
[4] O proprietate a grupurilor FC-nilpotente. — Comun. Acad. RPR **12** (1962), 969–972. [63:6, 185] (Д.17.6)

Пикар (Piccard S.)
[1] Structure des groupes libres. — Ann. Ecole norm. **76** (1959), 1–58. [60:9, 10023] (Д.9.3)
[2] Les éléments libres des groupes libres. — C. R. Paris **251** (1960), 1328–1330. [61:6, 207] (Д.9.3)
[3] Les groupes quasi libres. — C. R. Paris **251** (1960), 2271–2274. [62:1, 213] (Д.9.6)
[4] Les groupes pseudo-libres et les groupes fondamentaux. — C. R. Paris **259** (1964), 24–26. [65:6, 162] (Д.9.6)
Пикерт (Pickert G.)
[1] Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen. — Math. Z. **53** (1951), 456–462.
Пирс (Pierce R. S.)
[1] Centers of purity in abelian groups. — Pacif. J. Math. **13** (1963), 215–219. [64:6, 169] (Д.29.4)
[2] Endomorphism rings of primary abelian groups. — Proc. Colloq. on abelian groups, 1963; Budapest, 1964. — 125–137. [66:2, 226] (Д.34.1)
Плоткин Б. И.
[1] К теории некоммутативных групп без кручения. — ДАН СССР **73** (1950), 655–657. (66, 67)
[2] К теории локально нильпотентных групп. — ДАН СССР **76** (1951), 639–641. (63)
[3] К теории некоммутативных групп без кручения. — Матем. сб. **30** (1952), 197–212. (66, 67, Д.25.2)
[4] О нильгруппах. — ДАН СССР **94** (1954), 999–1001. [54:11, 5458] (Д.26.1, Д.26.2)
[5] О некоторых признаках локально нильпотентных групп. — УМН **9**, № 3 (1954), 181–186. [56:2, 1069] (Д.20.6, Д.25.3, Д.26.2)
[6] К теории разрешимых групп с условиями конечности. — ДАН СССР **100** (1955), 417–420. [56:2, 1075] (Д.23.3)
[7] К теории разрешимых групп без кручения. — Матем. сб. **36** (1955), 31–38. [56:5, 3677] (Д.23.2)
[8] Радикальные группы. — Матем. сб. **37** (1955), 507–526. [56:12, 8614] (Д.16.7, Д.20.4, Д.26.3)
[9] Некоторые вопросы теории групп без кручения. — Укр. матем. ж. **8** (1956), 325–329. [57:5, 3801] (Д.14.4)
[10] Радикальные и полупростые группы. — Тр. Моск. матем. о-ва **6** (1957), 299–336. [60:5, 4946] (Д.2.5, Д.14.4, Д.20.4, Д.23.3, Д.24.1, Д.24.7)
[11] О некоторых классах бесконечных групп. — УМН **13**, № 1 (1958), 189–192. [58:11, 9563] (Д.24.7)
[12] Обобщенные разрешимые и обобщенные нилыготентные группы. — УМН **13**, № 4 (1958), 89–172. [59:7, 6652] (Д.14.1, Д.20.4, Д.20.6, Д.21.1, Д.21.2, Д.21.4, Д.22.5, Д.23.1, Д.25.1. Д.25.2, Д.26.2, Д.26.6)
[13] Радикал и нильэлементы в группах. — Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 1. — 130–135. [59:4, 3545] (Д.26.3)
[14] Абстрактные силовские свойства. — Тр. Уральск. — электромех. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 2. — 7–14. [62:6, 161] (Д.18.2, Д.21.2)
[15] Радикальные группы, у которых радикал обладает возрастающим центральным рядом. — Уч. зап. Уральск. ун-та **23**, № 2 (1960), 40–43. [61:4, 179] (Д.23.3)

[16] Об алгебраических элементах в абстрактных группах. — Уч. зап. Уральск. ун-та **23**, № 2 (1960), 44–48. [61:6, 216] (Д.26.6)
[17] Нормальные делители, ограничивающие группу. — Матем. сб. **53** (1961), 343–352. [61:12, 275] (Д.20.6)
[18] Локально стабильные группы автоморфизмов. — Сиб. матем. ж. **2** (1961), 100–114. [61:12, 271] (Д.22.3, Д.22.5)
[19] Некоторые свойства автоморфизмов нильпотентных групп. — ДАН СССР **137** (1961), 1303–1306. [62:1, 211] (Д.25.1)
[20] Радикалы в групповых парах. — ДАН СССР **140** (1961), 1019–1022. [62:8, 147] (Д.22.5)
[21] Äussere lokale Eigenschaften von Automorphismengruppen. — Arch. Math. **13** (1962), 401–407. [65:7, 172] (Д.22.2)
[22] О некоторых радикалах групп автоморфизмов. — УМН **17**, № 4 (1962), 165–171. [63:3, 183] (Д.22.5)
[23] Радикалы, связанные с представлениями групп. — ДАН СССР **144** (1962), 52–55. [63:3, 182] (Д.22.5)
[24] Некоторые замечания о групповых парах. — Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 1 (1963), 63–69. [63:9, 146] (Д.22.2)
[25] Обобщенные стабильные и обобщенные нильпотентные группы автоморфизмов. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 1389–1403. [64:7, 219] (Д.22.2, Д.22.3, Д.22.5)
[26] Одна теорема о локально нильпотентных группах автоморфизмов. — Сб. памяти Н. Г. Чеботарева. — Казань, 1964. — 67–74. [65:5, 177] (Д.22.2)

Плоткин Б. И. и Виляцер В. Г.
[1] К теории локально стабильных групп автоморфизмов. — ДАН СССР **134** (1960), 529–532. [61:6, 211] (Д.22.3)

Плоткин Б. И. и Кемхадзе Ш. С.
[1] Об одной схеме построения радикалов в группах. — Сиб. матем. ж. **6** (1965), 1197–1201. [66:2, 230] (Д.20.6, Д.26.6)

Половицкий Я. Д.
[1] Одно условие абелевости группы. — Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 41–42. [63:7, 148] (Д.1.1)
[2] Слойно экстремальные группы. — Матем. сб. **56** (1962), 95–106. [62:11, 135] (Д.17.4)
[3] О локально экстремальных и слойно экстремальных группах. — Матем. сб. **58** (1962), 685–694. [63:5, 184] (Д.17.4)
[4] О группах с условием π-максимальности для подгрупп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 582–590. [63:1, 179] (Д.17.4)
[5] Группы с экстремальными классами сопряженных элементов. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 891–895. [65:3, 183] (Д.17.6)

Понтрягин Л. С.
[1] The theory of topological commutative groups. — Ann. Math. **35** (1934), 361–388. (32в, Д.28.2, Д.33.5)

Попп (Popp G. Ch.)
[1] Beiträge zur Theorie der Zappaschen Produkte. — Math. Nachr. **20** (1959), 303–328. [62:2, 200] (Д.13.2)

Прохазка (Procházka L.)
[1] Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп. — Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 479–492. [62:4, 172] (Д.32.2)

[2] К проблеме расщепления некоторых абелевых расширений расщепляемых абелевых групп. — Чехосл. матем. ж. **11** (1961), 365–380; **13** (1963), 322–323. [62:5, 199; 64:2, 249] (Д.32.2)
[3] О расщепляемости фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга. — Чехосл. матем. ж. **11** (1961), 521–557. [63:1, 193] (Д.31.7)
[4] О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга. — Чехосл. матем. ж. **12** (1962), 3–43. [64:2, 246] (Д.31.1)
[5] Заметка о факторно-расщепляемых абелевых группах. — Časop. pěstov. mat. **87** (1962), 404–414. [64:2, 247] (Д.31.7)
[6] Заметка о структуре фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга. — Чехосл. матем. ж. **12** (1962), 529–535. [64:2, 248] (Д.31.7)
[7] Условия разложимости в прямую сумму некоторых абелевых групп без кручения ранга два. — Mat.-fyz. časop. **12**, № 3 (1962), 166–202. [64:8, 160] (Д.31.1)
[8] Bemerkung über den p-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges. — Чехосл. матем. ж. **13** (1963), 1–23. [64:8, 162] (Д.31.1)
[9] A generalization of a theorem of R. Baer. — Comm. Math. Univ. Carolinae **4** (1963), 105–108. [64:11, 173] (Д.31.4)
[10] Об однородных абелевых группах без кручения. — Чехосл. матем. ж. **14** (1964), 171–202. [65:11, 185] (Д.31.4, Д.32.2)
[11] Заметка о квазиизоморфизме групп без кручения конечного ранга. — Чехосл. матем. ж. **15** (1965), 1–8. [66:10, 137] (Д.35.3)
[12] Über eine Klasse torsionsfreier abelscher Gruppen. — Časop. Pest. Mat. **90** (1965), 153–159. [66:10, 133] (Д.31.4)

Прюфер (Prüfer H.)
[1] Unendliche Abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung. — Dissertation, 1921. (26)
[2] Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primaren Abelschen Gruppen. — Math. Z. **17** (1923), 35–61. (24, 25)
[3] Theorie der Abelschen Gruppen. I. — Math. Z. **20** (1924), 165–187.
[4] Theorie der Abelschen Gruppen. II. — Math. Z. **22** (1925), 222–249.

Рабин (Rabin M. O.)
[1] Recursive unsolvability of group theoretic problems. — Ann. Math. **67** (1958), 172–194. [59:8, 7677] (Д.15.4)

Радо (Rado R.)
[1] A proof of the basis theorem for finitely generated abelian groups. — J. London Math. Soc. **26** (1951), 74–75, 160. (Д.28.2)

Райт (Wright C. R. B.)
[1] On the nilpotency class of a group of exponent four. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 387–394. [62:3, 170] (Д.16.3)

Рангасвами (Rangaswamy K. M.)
[1] Neat subgroups of abelian groups. — J. Madras Univ. **B33** (1963), 129–135. [66:3, 172] (Д.29.3)
[2] On Σ-groups. — Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 259–262. [66:2, 227] (Д.29.4)
[3] A note on algebraic compact groups. — Bull. Acad. Polon. **12** (1964), 369–371. [65:5, 186] (Д.33.4)
[4] Full subgroups of abelian groups. — Indian J. Math. **6** (1964), 21–27. [66:2, 228] (Д.29.3)

[5] Characterisation of intersections of neat subgroups of abelian groups. — J. Indian Math. Soc. **29** (1965), 31–36. [66:10, 136] (Д.28.4, Д.29.3)

Рапапорт (Rapaport E. S.)

[1] On free groups and their automorphisms. — Acta Math. **99** (1958), 139–163. [59:8, 7791] (Д.9.4)

[2] Groups of order 1. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 828–833. [66:1, 221] (Д.15.2)

Редеи (Rédei L.)

[1] Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen. I. — Acta Math. Hung. **1** (1950), 74–98. (Д.13.2)

[2] Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. — J. reine und angew. Math. **188** (1950), 201–227. (Д.13.3)

[3] The Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe. — Acta Math. Hung. **5** (1954), 169–195. [57:9, 6890] (Д.3.2)

Редеи и Сеп (Rédei L., Szép J.)

[1] Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Záppa–Casadio. — Acta sci. math. **16** (1956), 165–170. [56:12, 8612] (Д.13.2)

Редеи и Штейнфельд (Rédei L., Steinfeld O.)

[1] Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen. — Acta sci. math. **15** (1954), 243–250. [56:2, 1081] (Д.12.1)

Редеи и Штёр (Rédei L., Stöhr A.)

[1] Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie. — Acta sci. math. **15** (1953), 7–11. [55:8, 3633] (Д.13.3)

Рейд (Reid J. D.)

[1] A note on torsion free abelian groups of infinite rank. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 222–225. [63:8, 147] (Д.28.3, Д.31.7)

[2] On quasi-decompositions of torsion-free abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 550–554. [63:8, 148] (Д.35.3)

[3] On subgroups of an abelian group maximal disjoint from a given subgroup. — Pacif. J. Math. **13** (1963), 657–664. [64:6, 168] (Д.29.4)

Рейдемейстер (Reidemeister K.)

[1] Knoten und Gruppen. — Hamburg. Abh. **5** (1926), 7–23. (Заключение к 1-му изд.)

[2] Über unendliche diskrete Gruppen. — Hamburg. Abh. **5** (1926), 33–39.

[3] Einführung in die kombinatorische Topologie. — Braunschweig, 1932. (36, 41, Д.7.1)

[4] Über Identitäten von Relationen. — Hamburg. Abh. **16** (1949), 114–118.

Релла (Rella T.)

[1] Über Abelsche Operatorgruppen. — J. reine angew. Math. **167** (1932), 235–247.

Ремак (Remak R.)

[1] Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. — J. reine angew. Math. **139** (1911), 293–308. (42)

[2] Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. — J. reine angew. Math. **153** (1923), 131–140.

[3] Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte. — J. reine angew. Math. **163** (1930), 1–44. (Заключение к 1-му изд.)

[4] Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen. — J. reine angew. Math. **164** (1931), 197–242. (Заключение к 1-му изд.)
[5] Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren. — J. reine angew. Math. **166** (1931), 65–100. (Заключение к 1-му изд.)

Ремесленников В. Н.
[1] Два замечания о 3-ступенно нильпотентных группах. — Алгебра и логика (семинар) **4**, № 2 (1965), 59–65. [66:7, 192] (Д.27.1, Д.27.3)

Ри (Ree R.)
[1] The existence of outer automorphisms of some groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 962–964; **9** (1958), 105–109. [58:2, 1021; 59:3, 2356] (Д.3.1)
[2] Commutator groups of free products of torsion-free abelian groups. — Ann. Math. **66** (1957), 380–394. [60:2, 1380] (Д.7.2, Д.24.5)

Робинсон Д. А. (Robinson D. A.)
[1] Sums of normal semi-endomorphisms. — Amer. Math. Monthly **70** (1963), 537–539. [64:7, 207] (Д.3.6)

Робинсон Д. С. (Robinson D. S.)
[1] Groups in which normality is a transitive relation. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **60** (1964), 21–38. [64:9, 161] (Д.24.4)
[2] Joins of subnormal subgroups. III. — J. Math. **9** (1965), 144–168. [65:11, 183] (Д.2.6)
[3] On the theory of subnormal subgroups. — Math. Z. **89** (1965), 30–51. [66:2, 214] (Д.2.6, Д.17.4)

Рогов В. В.
[1] О группах с дополнениями. — Матем. зап. Красноярск. пед. ин-т, кафедра алгебры. — Вып. 1, 1965. — 54–58. (Д.13.4)

Розати (Rosati L. A.)
[1] Sui gruppi ogni sottogruppo ciclico del quali é caratteristico. — Boll. Unione mat. ital. **11** (1956), 544–552. [57:11, 8450] (Д.3.2)

Розенфельд Х. М.
[1] Некоторые классы бесконечных групп с заданными свойствами индексов. — Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 58–64. [63:11, 166] (Д.16.7)
[2] О локально нормальных группах с одним свойством индексов инвариантных подгрупп. — Уч. зап. Пермск. ун-та **103** (1963), 73–76. [65:1, 177] (Д.16.7)

Розенфилд (Rosenfeld A.)
[1] Finitely generated abelian groups as unions of proper subgroups. — Amer. Math. Monthly **70** (1963), 1070–1073. [64:12, 170] (Д.19.6)

Ротлендер (Rottlaender A.)
[1] Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen. — Math. Z. **28** (1928), 641–653. (47б, Д.14.4)

Ротман (Rotman J.)
[1] Torsion-free and mixed abelian groups. III. — J. Math. **5** (1961), 131–143. [62:1, 202] (Д.31.1, Д.32.3)
[2] On a problem of Baer and a problem of Whitehead in abelian groups. — Acta Math. Hung. **12** (1961), 245–254. [62:2, 189] (Д.33.3)
[3] The Grothendieck group of torsion-free abelian groups of finite rank. — Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 724–732. [65:2, 268] (Д.33.7)

Роузблед (Roseblade J. E.)
[1] On certain classes of locally soluble groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **58** (1962), 185–195. [62:11, 148] (Д.23.2)
[2] The automorphism group of McLain's characteristically simple group. — Math. Z. **82** (1963), 267–282. [64:7, 218] (Д.3.2)
[3] On certain subnormal coalition classes. — J. of Algebra **1** (1964), 132–138. [65:4, 162] (Д.2.6)
Рудык Б. М.
[1] К теории расщепляемости смешанных абелевых групп. — Вестн. МГУ, Матем., механ., 1965, № 3. — 20–27. [65:11, 192] (Д.32.2)
Рюкс (Rühs F.)
[1] Über ein speziellen Redeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie. — Acta sci. math. **16** (1955), 160–164. [56:10, 7152] (Д.13.3)
[2] Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte. — J. reine und angew. Math. **198** (1957), 81–86. [58:4, 2744] (Д.13.3)
[3] Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt. — J. reine und angew. Math. **200** (1958), 99–111. [59:9, 8847] (Д.13.3)
Садовский Л. Е.
[1] О структурных изоморфизмах свободных групп. — ДАН СССР **32** (1941), 171–174. (Д.14.3)
[2] Структурные изоморфизмы свободных групп и свободных произведений. — Матем. сб. **14** (1944), 155–173. (47б)
[3] О структурных изоморфизмах свободных произведений групп. — Матем. сб. **21** (1947), 63–82. (47б, Д.14.3)
[4] Структура подгрупп нильпотентной группы без кручения. — УМН **12** (1957), 201–204. [58:7, 5523] (Д.14.4)
[5] О структурной определяемости локально нильпотентной группы без кручения. — ДАН СССР **154** (1964), 1283–1286. [64:8, 165] (Д.14.4)
[6] Аппроксимационная теорема и структурные изоморфизмы. — ДАН СССР **161** (1965), 300–303. [65:8, 161] (Д.14.3)
[7] Проектирования и изоморфизмы нильпотентных групп. — Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 171–208. [65:10, 174] (Д.14.4)
Санов И. Н.
[1] Решение проблемы Бернсайда для показателя 4. — Уч. зап. ЛГУ **55** (1940), 166–170. (38, Заключение к 1-му изд., Д.16.2)
[2] Свойство одного представления свободной группы. — ДАН СССР **57** (1947), 657–659.
[3] О проблеме Бернсайда. — ДАН СССР **57** (1947), 759–761. (38, Д.16.3)
[4] О некоторой системе соотношений в периодических группах с периодом степенью простого числа. — Изв. АН СССР, сер. матем., **15** (1951), 477–502. (Д.16.4)
[5] Установление связи между периодическими группами с периодом простым числом и кольцами Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952), 23–58. (Д.16.4)
Сас (Szász F.)
[1] Über Gruppen, deren samtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind. — Acta sci. math. **17** (1956), 83–84. [58:2, 1016] (Д.1.3)
[2] A characterization of the cyclic groups. — Rev. math. pures et appl. RPR **1** (1956), 13–16. [61:5, 219] (Д.1.3)

[3] Reduktion eines gruppentheoretischen Problems von O. J. Schmidt. — Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 369–372. [60:9, 10024] (Д.16.5)
[4] Bemerkung zu meiner Arbeit «Über Gruppen, deren samtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind». — Acta sci. math. **23** (1962), 64–66. [63:11, 154] (Д.1.3)

Сато (Sato S.)
[1] On groups and the lattices of subgroups. — Osaka Math. J. **1** (1949), 135–149. (Д.14.2)
[2] On the lattice homomorphisms of infinite groups. — Osaka Math. J. **4** (1952), 229–234; **6** (1954), 109–118. (Д.14.4)

Секанина (Sekanina M.)
[1] Poznámka k faktorisaci nekomutativnich grup. — Časop. pěst. mat. **87** (1962), 94–97. [63:2, 187] (Д.13.5)

Секереш (Szekeres G.)
[1] Countable abelian groups without torsion. — Duke math. J. **15** (1948), 293–306. (Д.31.1)

Секи (Seki T.)
[1] Über die Existenz der Zerfällungsgruppe in der Erweiterungstheorie der Gruppen. — Tóhoku math. J. **48** (1941), 235–238. (Д.12.1)

Сексенбаев К.
[1] Об антицентре группы. — Вестн. АН Каз. ССР, 1964, № 7. — 73–76. [65:2, 258] (Д.3.3)
[2] К теории полициклических групп. — Алгебра и логика (семинар) **4**, № 3 (1965), 79–83. [66:7, 191] (Д.24.3)

Селе (Szele T.)
[1] Sur la décomposition directe des groupes abéliens. — C R. Paris **229** (1949), 10i52–1053.
[2] Die unendiche Quaternionengruppe. — Acad. Repub. Pop. Române, Bui. Sti. **1** (1949), 799–802.
[3] Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. — Publ. Math., Debrecen **1** (1949), 89–91. (Д.34.1)
[4] Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. — Acta sci. math., Szeged. **13** (1950), 54–56.
[5] Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen. — J. reine und angew. Math. **188** (1950), 167–192. (Д.28.4)
[6] On a theorem of Pontrjagin. — Acta Math. Hung. **2** (1951), 121–123. (Д.28.2)
[7] On direct sums of cyclic groups. — Publ. Math. **2** (1951), 76–78. (Д.28.2)
[8] On groups with atomic layers. — Acta Math. Hung. **3** (1952), 127–129. (Д.1.2)
[9] On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup. — Publ. Math. **2** (1952), 302–307. [55:1, 94] (Д.28.3)
[10] Az egysëggyökök multiplikativ csoportjáról. — Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. **3** (1953), 55–58. [56:3, 2000] (Д.1.2)
[11] On direct decomposition of abelian groups. — J. London Math. Soc. **28** (1953), 247–250. [53:2, 599] (Д.29.1)
[12] On the basic subgroups of abelian p-groups. — Acta Math. Hung. **5** (1954), 129– 41. [55:9, 4256] (Д.30.1)
[13] On quasi-indecomposable abelian torsion groups. — Acta Math. Hung. **7** (1956), 109–114. [57:6, 4631] (Д.30.4)

Селе и Селпал (Szele T. und Szélpál I.)
[1] Über drei wichtige Gruppen. — Acta sci. math., Szeged. **13** (1950), 192–194. (Д.35.2)
Селе и Сендреи (Szele T., Szendrei J.)
[1] On abelian groups with commutative endomorphism ring. — Acta Math. Hung. **2** (1951), 309–324. (Д.34.1)
Селпал (Szélpál I.)
[1] The abelian groups with torsion-free endomorphism ring. — Publ. Math. **3** (1953), 106–108. [55:7, 3077] (Д.34.1)
Сеп (Szep J.)
[1] On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups. — Acta sci. math., Szeged. **12A** (1950), 57–61. (Д.13.2)
[2] Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen. — Acta sci. math. **16** (1955), 54–57. [56:8, 5732] (Д.13.2)
[3] Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen. I. — Publ. Math. **6** (1959), 60–71. [60:6, 6205] (Д.13.3)
Сергеев М. И.
[1] Вполне FX-факторизуемые группы. — ДАН СССР **155** (1964), 532–534. [64:8, 176] (Д.13.4)
Серр (Serre J. P.)
[1] Cohomologie des extensions de groupes. — C. R. Paris **231** (1950), 643–646.
[2] Sur un théorème de T. Szele. — Acta sci. math., Szeged. **13** (1950), 190–191.
Сесекин Н. Ф.
[1] К теории специальных групп без кручения. — ДАН СССР **70** (1950), 185–188. (66, Д.25.4)
[2] О локально нильпотентных группах без кручения. — Матем. сб. **32** (1953), 407–442. [53:1, 87] (Д.25.1, Д.25.2)
[3] О классификации метабелевых групп без кручения с конечным числом образующих. — Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 27–41. [60:2, 1382] (Д.27.1)
[4] О произведении перестановочных полных абелевых групп. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1962), 45–49. [64:3, 157] (Д.13.2)
Сесекин Н. Ф. и Старостин А. И.
[1] Об одном классе периодических групп. — УМН **9**, № 4 (1954), 225–228. [56:1, 222] (Д.18.1)
Сесекин Н. Ф. и Широковская О. С.
[1] Об одном классе двуступенных групп. — Матем. сб. **46** (1958), 133–142. [59:8, 7787] (Д.24.4)
Силов (Sylow L.)
[1] Théorèmes sur les groupes de substitutions. — Math. Ann. **5** (1872), 584–594. (54)
Симон (Simon H.)
[1] Noethersche Gruppen mit endlicher Hyperzentrumfaktorgruppe. III. — J. Math. **8** (1964), 231–240. [65:3, 186] (Д.17.5)
[2] Noethersche Gruppen mit nilpotenten Normalteilern von endlichem Index. III. — J. Math. **8** (1964), 241–247. [65:3, 185] (Д.17.5)

Синков (Sinkov A.)
[1] Families of groups generated by two operators of the same order. — Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 372–385.
[2] The groups determined by the relations $S^l = T^m = (S^{-1}T^{-1}ST)^p = 1$. II. — Duke math. J. **2** (1936), 74–83. (Заключение к 1-му изд.)
[3] On the group-defining relations $(2, 3, 7; p)$. — Ann. Math. **38** (1937), 577–584. (Заключение к 1-му изд.)
Скопин А. И.
[1] Фактор-группы одного верхнего центрального ряда свободной группы. — ДАН СССР **74** (1950), 425–428.
Скорца (Scorza G.)
[1] I gruppi che possono pensarti come somma di tre loro sottogruppi. — Boll. Unione mat. ital. **5** (1926), 216–218. (Д.19.6)
Скотт (Scott W. R.)
[1] Algebraically closed groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 118–121. (Д.19.5)
[2] Groups and cardinal numbers. — Amer. J. Math. **74** (1952), 187–197. (Д.35.2)
[3] The number of subgroups of given index in nondenumerable abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 19–22. [55:7, 3075] (Д.35.2)
[4] On infinite groups. — Pacif. J. Math. **5** (1955), 589–598. [56:12, 8610] (Д.35.2)
[5] On a result of B. H. Neumann. — Math. Z. **66** (1956), 240. [57:7, 5365] (Д.17.7)
[6] Half-homomorphisms of groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1141–1144. [58:9, 7512] (Д.2.1)
[7] Solvable factorizable groups. II, III. — J. Math. **4** (1960), 652–655. [61:12, 269] (Д.13.2)
[8] Group theory. — Englewood Cliffs, 1964.
Слэтер (Slater M.)
[1] A single postulate for groups. — Amer. Math. Monthly **68** (1961), 346–347 [62:1, 188] (Д.1.1)
Смирнов Д. М.
[1] К теории локально нильпотентных групп. — ДАН СССР **76** (1951), 643–646. (59, 67, Д.25.6)
[2] Об автоморфизмах разрешимых групп. — ДАН СССР **84** (1952), 891–894. (Д.24.2)
[3] О группах автоморфизмов разрешимых групп. — Матем. сб. **32** (1953), 365– 384. [53:1, 90] (Д.24.2)
[4] О группах с верхним центральным рядом. — Матем. сб. **33** (1953), 471–484. [54:2, 2005] (Д.25.4)
[5] Инфраинвариантные подгруппы. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **4** (1953), 92–96. [54:11, 5459] (Д.25.1)
[6] Об одном классе бесконечных групп. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **5** (1954), 57–60. [56:2, 1078] (Д.24.7)
[7] О двух классах разрешимых групп конечного ранга. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **18** (1958), 67–74. [59:9, 8844] (Д.24.2)
[8] К теории финитно аппроксимируемых групп. — Укр. матем. ж. **15** (1963), 453–457. [64:6, 164] (Д.17.9)

[9] Об обобщенно разрешимых группах и их групповых кольцах. — Матем. сб. **67** (1965), 366–383. (Д.10.6, Д.23.1)

Смирнов Д. М. и Тайцлин М. А.

[1] О финитно аппроксимируемых абелевых мультиоператорных группах. — УМН **17**, № 5 (1962), 137–142. [63:7, 204] (Д.17.9)

Солиан (Solian A.)

[1] О n-полноте в группах. — Журн. чист. и прикл. матем. Акад. РНР **1** (1956), 5–22. [59:1, 1421 (Д.19.3)

Сонсяда (Sąsiada E.)

[1] Об абелевых группах, всякая счетная подгруппа которых является эндоморфным образом. — Бюл. Польской АН **2** (1954), 365–368. [56:2, 1089] (Д.35.1)

[2] An application of Kulikov's basic subgroups in the theory of abelian mixed groups. — Бюл. Польской АН **4** (1956), 403–405. [58:2, 1018] (Д.32.1)

[3] Construction of directly indecomposable abelian groups of power higher than that of the continuum. — Bull. Acad. Polon. **5** (1957), 701–703; **7** (1959), 23–26. [58:8, 6497; 60:12, 13577] (Д.31.2)

[4] Proof that every countable and reduced torsion-free abelian group is slender. — Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 143–144. [61:1, 213] (Д.31.6]

[5] On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete directs sums of groups of rank one. — Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 145–149. [61:5, 213] (Д.31.5)

[6] On two problems concerning endomorphism groups. — Ann. Univ. Budapest, Sec. math. **2** (1959), 65–66. [61:1, 215] (Д.34.2)

[7] Negative solution of I. Kaplansky's first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups. — Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 331–334. [62:8, 288] (Д.31.3)

Старостин А. И.

[1] Строение вполне расщепляемого ядра локально конечных групп. — Уч. зап. Уральск. ун-та **23** (1959), 29–34. [60:12, 13596] (Д.19.7)

[2] Периодические локально разрешимые вполне расщепляемые группы. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1960, № 2. — 168–177. [60:12, 13597] (Д.19.7)

[3] Ядро расщепления локально конечных групп. — Матем. сб. **66** (1965), 551–567. [65:10, 172] (Д.19.7)

[4] О группах с расщепляемыми централизаторами. — Изв. АН СССР, сер. матем. **29** (1965), 605–614. [66:1, 205] (Д.19.7)

Старостин А. И. и Эйдинов М. И.

[1] О силовских базах бесконечных групп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 273–279. [63:6, 179] (Д.18.3)

[2] О холловских подгруппах одного класса инвариантно покрываемых групп. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 359–376. [63:11, 167] (Д.18.3)

Стейнберг (Steinberg A.)

[1] On free nilpotent quotient groups. — Math. Z. **85** (1964), 185–196. [65:12, 226] (Д.15.2)

Стендер П. В.

[1] О применении метода решета к решению проблемы тождества для некоторых групп со счетным множеством порождающих элементов и счетным множеством определяющих соотношений. — Матем. сб. **32** (1953), 97–107. [53:1, 84] (Д. 15.4)

[2] О примитивных элементах в свободной группе ранга 2. — Изв. вузов. Математика, 1962, № 5. — 101–106. [63:5, 204] (Д.9.3)

Станехевер (Stonehewer S. E.)

[1] Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups. — Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 520–536. [65:3, 184] (Д.23.2)

Стрёйк (Struik R. R.)

[1] On associative products of groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 425–452. [59:3, 2368] (Д.11.4)

[2] Notes on a paper by Sanov. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 638–641. [60:9, 10018] (Д.16.4)

[3] On verbal products of groups. — J. London Math. Soc. **34** (1959), 397–400. [61:9, 223] (Д.11.4)

[4] On nilpotent products of cyclic groups. — Canad. J. Math. **12** (1960), 447–462. [62:2, 202] (Д.11.5)

[5] Notes on a paper by Sanov. II. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 758–763. [62:6, 169] (Д.16.4)

[6] On nilpotent products of cyclic groups. II. — Canad. J. Math. **13** (1961), 557–568. [63:1, 200] (Д.11.5)

Строуд (Stroud P. W.)

[1] On a property of verbal and marginal subgroups. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **61** (1965), 41–48. [65:12, 236] (Д.17.7)

Струнков С. П.

[1] О проблеме О. Ю. Шмидта. — Сиб. матем. ж. **7** (1966), 476–479. [66:12, 163] (Д.16.5)

Судзуки (Suzuki M.)

[1] On the lattice of subgroups of finite groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 345–371. (Д.14.5)

[2] On the L-homomorphisms of finite groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 372–386. (Д.14.4)

[3] Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. — 1956. (Русский перевод: Строение группы и строение структуры ее подгрупп. — ИЛ, 1960.) [57:7, 5371] (Д.14.1, Д.14.4)

Султанов Р. М.

[1] Про розклад абелевих груп без кручення в пряму суму циклічних підгруп. — Научн. зап. Львовск. ун-та. V. сер. физ.-мат. **2** (1947), 108–115.

Сю (Hsu Nai-chao)

[1] The group of automorphisms of the holomorph of a group. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 999–1012. [62:11, 131] (Д.3.2)

[2] The holomorphs of free abelian groups of finite rank. — Amer. Math. Monthly **72** (1965), 754–756. (Д.3.2)

Сюзева В. И.

[1] Полупрямые произведения циклических групп простого порядка. — Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (1960), 69–72. [62:3, 189] (Д.13.1)

Такахаси (Takahasi M.)

[1] Bemerkungen über den Untergruppensatz im freien Produkte. — Proc. Acad. Tokyo **20** (1944), 589–594. (34, Д.7.1, Д.9.1)

[2] On partitions of free products of groups. — Osaka math. J. **1** (1949), 49–51.

[3] Note on locally free groups. — J. Osaka City Univ. **1** (1950), 65–70. (Д.9.6)

[4] Note on word subgroups in free product subgroups. — J. Inst. politechn. Osaka City Univ., Ser. A., **2** (1951), 13–18. (Д.7.1)

[5] Note on chain conditions in free groups. — Osaka Math. J. **3** (1951), 221–225. (Д.9.1)
[6] Group extensions and their splitting groups. — J. Inst. politechn. Osaka City Univ. **A5** (1954), 81–85. [56:10, 7151; 61:5, 228] (Д.12.1)

Тамашке (Tamaschke O.)
[1] Die Kongruenzrelationen in Verband der zugänglichen Subnormalteiler. — Math. Z. **75** (1961), 115–126. [61:9, 229] (Д.2.6)
[2] Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband. — Math. Z. **75** (1961), 211–214. [61:9, 230] (Д.2.6)

Тартаковский В. А.
[1] О процессе погашения. — ДАН СССР **58** (1947), 1605–1608. (41)
[2] О проблеме тождества для некоторых типов групп. — ДАН СССР **58** (1947), 1909–1910. (41)
[3] Метод решета в теории групп. — Матем. сб. **25** (1949), 3–50. (41)
[4] Применение метода решета к решению проблемы тождества в некоторых типах групп. — Матем. сб. **25** (1949), 251–274. (41)
[5] Решение проблемы тождества для группы с k-сократимым базисом при $k > 6$. — Изв. АН СССР, сер. матем., **13** (1949), 483–494. (41)
[6] О примитивной композиции. — Матем. сб. **30** (1952), 39–52. (41)

Таусская (Taussky O.)
[1] Über isomorphe Abbildungen von Gruppen. — Math. Ann. **108** (1933), 615–620.

Тейхмюллер (Teichmüller O.)
[1] Der Elementarteilersatz für nichtkommutative Ringe. — S.-B. Preuss. Akad. (1937), 169–177. (22, 22a)

Тернер-Смит (Turner-Smith R. F.)
[1] Marginal subgroup properties of outer commutator words. — Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 321–341. [65:4, 140] (Д.3.4)

Тице (Tietze H.)
[1] Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. — Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 1–118. (41)

Тобин (Tobin S.)
[1] Simple bounds for Burnside p-groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 704–706. [62:8, 149] (Д.16.3)

Товбин А. В.
[1] О существовании центра у бесконечных и конечных групп. — ДАН СССР **31** (1941), 198.

Трелл (Thrall R. M.)
[1] A note on a theorem by Witt. — Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 303–308.

Трельфалль (Threlfall W.)
[1] Gruppenbilder. — Abh. math.-phys. Klasse Sachs. Akad. **41**, № 6 (1932), 1–59.

Тышкевич Р. И.
[1] Обобщение некоторых теорем о конечных группах. — ДАН БССР **6** (1962), 471–474. [63:9, 158] (Д.18.1, Д.18.2)

Тьюринг (Turing A. M.)
[1] The extensions of a group. — Comp. Math. **5** (1938), 357–367.

Тэйлор (Taylor R. L.)
[1] Compound group extensions. I, II. — Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 106–135, 304–310. [55:2, 628, 629] (Д.12.1)
[2] Compound group extensions. III. — Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 490–520. [57:2, 1167] (Д.12.1)
Тэллман (Tellman S. G.)
[1] Images of induced endomorphisms in $\mathrm{Ext}(H, G)$. — Acta Sci. Math. **23** (1962), 290–291. [64:2, 245] (Д.33.2)
Уагнер (Wagner D. H.)
[1] On free products of groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 352–378. [58:4, 2742] (Д.7.1, Д.7.2)
Уайголд (Wiegold J.)
[1] Groups with boundedly finite classes of conjugate elements. — Proc. Roy. Soc. **A238** (1957), 389–401. [57:10, 7658] (Д.17.7)
[2] Nilpotent products of groups with amalgamations. — Publ. Math. **6** (1959), 131–168. [61:12, 265] (Д.8.2, Д.11.8)
[3] On a note of B. H. Neumann. — J. London Math. Soc. **35** (1960), 63–64. [60:12, 13591] (Д.19.3)
[4] On direct factors in groups. — J. London Math. Soc. **35** (1960), 310–320. [61:9, 212] (Д.5.1, Д.7.2)
[5] Some remarks on generalised products of groups with amalgamations. — Math. Z. **75** (1961), 57–78. [63:1, 199] (Д.8.2, Д.11.8)
[6] Embedding group amalgams in wreath products. — Math. Z. **80** (1962), 148–153. [63:5, 206] (Д.8.2)
[7] Adjunction of elements to nilpotent groups. — J. London Math. Soc. **38** (1963), 17–26. [64:8, 168] (Д.19.4)
[8] Soluble embedding of group amalgams. — Publ. Math. **12** (1965), 227–230. [66:12, 196] (Д.8.2)
Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
[1] On certain sets of elements in a free group. — Proc. London Math. Soc. **41** (1936), 48–56.
[2] On equivalent sets of elements in a free group. — Ann. Math. **37** (1936), 782–800. (35, 41, Д.9.4)
[3] On group extensions with operators. — Quart. J. (Oxford sec. series) **1** (1950), 219–228.
Узков А. И.
[1] О теореме Jordan'a-Hölder'a. — Матем. сб. **4** (1938), 31–43. (44)
Уитмэн (Whitman P. M.)
[1] Groups with a cyclic group as lattice-homomorph. — Ann. Math. **49** (194.8), 347–351. (Д.14.4)
Уитни (Whitney H.)
[1] Tensor products of abelian groups. — Duke math. J. **4** (1938), 495–528. (Д.33.6)
Ульм (Ulm H.)
[1] Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen. — Math. Ann. **107** (1933), 774–803. (28)
[2] Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären Abelschen Gruppen. — Math. Z. **40** (1935), 205–207. (26)

Уокер Е. (Walker E. A.)
[1] Cancellation in direct sums of groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 898–902. [58:2, 1022] (Д.5.1)
[2] Subdirect sums and infinite abelian groups. — Pacif. J. Math. **9** (1959), 287–291. [61:1, 211] (Д.29.2)
[3] Direct summands of direct products of abelian groups. — Arch. Math. **11** (1960), 241–243. [61:4, 181] (Д.33.4)
[4] On the orders of the automorphism groups of infinite torsion abelian groups. — J. London Math. Soc. **35** (1960), 385–388. [62:3, 176] (Д.34.4)
[5] Quotient groups of reduced abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 91–92. [61:11, 207] (Д.30.1)
[6] Torsion endomorphic images of mixed abelian groups. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 375–377. [62:6, 156] (Д.33.4)
[7] Quotient categories and quasi-isomorphisms of abelian groups. — Proc. Colloq on abelian groups, 1963; Budapest, 1964. — 147–162. [66:10, 131] (Д.35.3)
Уокер К. (Walker C. P.)
[1] Properties of Ext and quasi-splitting of abelian groups. — Acta Math. Hung. **15** (1964), 157–160. [66:1, 214] (Д.33.2, Д.35.3)
Уос (Wos L. T.)
[1] On commutative prime power subgroups of the norm. III. — J. Math. **2** (1958), 271–284. [60:1, 155] (Д.3.3)
Ушаков В. И.
[1] Структурно-системные изоморфизмы непериодических локально нильпотентных групп. — Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1957, № 1. — 223–226. [60:5, 4951] (Д.14.6)
[2] P-радикальные группы. — Изв. вузов. Математика, 1960, № 6. — 233–238. [61:8, 186] (Д.20.5)
Уэйр (Weir A. J.)
[1] The Reidemeister–Schreier and Kuroš subgroup theorems. — Mathematika **3** (1956), 47–55. [57:11, 8453] (Д.7.1)
Уэстон (Weston K. W.)
[1] ZA-groups which satisfy the m-th Engel condition. III. — J. Math. **8** (1964), 458–472. [65:9, 194] (Д.26.2)
Фаддеев Д. К.
[1] О фактор-системах в абелевых группах с операторами. — ДАН СССР **58** (1947), 361–364. (48)
[2] К теории гомологии в группах. — Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952), 17–22.
Фаермарк Д. С.
[1] Алгоритм для установления тождества слов в нильпотентном произведении групп. — ДАН СССР **137** (1961), 291–294. [62:1, 216] (Д. 15.4)
Федерер и Йонсон (Federer H. and Jónsson B.)
[1] Some properties of free groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 1–27. (36, Д.7.2, Д.9.1)
Федоров Ю. Г.
[1] О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс. — УМН **6**, № 1 (1951), 187–189. (Д.17.7)

Фейт и Томпсон (Feit W., Thompson J. G.)
[1] Solvability of groups of odd order. — Pacif. J. Math. **13** (1963), 775–1029. [65:9, 184] (Д.Предисловие)
Ферстенберг (Furstenberg H.)
[1] The inverse operation in groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 991–997. [57:1, 151] (Д.1.1)
Фиттинг (Fitting H.)
[1] Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogen bei nicht kommutativen Gruppen. — Math. Ann. **107** (1932), 514–542; **109** (1933), 616. (21)
[2] Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren. Math. Z. **39** (1934), 16–30. (42)
[3] Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. — Math. Z. **41** (1936), 380–395. (45, 47a, Д.5.2)
[4] Über den Automorphismenbereich einer Gruppe. — Math. Ann. **114** (1937), 84–98. (21)
[5] Die Gruppe der zentralen Automorphismen einer Gruppe mit Hauptreihe. — Math. Ann. **114** (1937), 355–372.
[6] Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. — Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **48** (1938), 77–141. (Заключение к 1-му изд., Д.27.5)
Фокс (Fox R. H.)
[1] Free differential calculus. I, II, III. — Ann. Math. **57** (1953), 547–560; **59** (1954), 196–210; **64** (1956), 407–419. [55:4, 1666, 1667; 61:5, 204] (Д.9.1, Д.15.2)
Фомин С. В.
[1] Über periodische Untergruppen der unendlichen Abelschen Gruppen. — Матем. сб. **2** (1937), 1007–1009. (Д.29.1, Д.32.1)
Фраттини (Frattini G.)
[1] Intorno alia generazione dei gruppi di operazioni. — Atti Acad. dei Lincei, Rend. (IV) **1** (1885), 281–285, 455–457. (Д.27.4, Д.27.5)
Фраш (Frasch H.)
[1] Die Erzeugenden der Hauptkongruenzgruppen für Primzahlstufen. — Math. Ann. **108** (1933), 229–252.
Фредерик (Frederik K. N.)
[1] The Hopfian property for a class of fundamental groups. — Comm. pure and appl. Math. **16** (1963), 1–8. [64:5, 179] (Д.15.2)
Фридман А. А.
[1] О взаимоотношении между проблемой тождества и проблемой сопряженности в конечноопределенных группах. — Тр. Моск. матем. о-ва **9** (1960), 329–356. [61:3, 99] (Д.15.4)
Фридман М. А.
[1] Полукоммутативное умножение групп и некоторые его свойства. — Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 112–142. [59:3, 2372] (Д.11.7)
[2] Условие ассоциативности полукоммутативного умножения любого множества групп. — Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 143–148. [59:3, 2373] (Д.11.7)
[3] Элементы конечного порядка, центр полукоммутативного произведения. Решение проблемы тождества для полукоммутативного произведения групп. — Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 155–167. [59:3, 2374] (Д.11.7)

[4] Конкретные ассоциативные полукоммутативные умножения групп. — Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 168–183. [59:3, 2375] (Д.11.7)
[5] О полукоммутативных умножениях. — ДАН СССР **109** (1956), 710–712. [59:3, 2376] (Д.11.7)
[6] К одному вопросу о вполне правильных операциях на классе групп. — УМН **14**, № 3 (1959), 181–183. [61:9, 218] (Д.11.7)
[7] О коммутанте полукоммутативного произведения групп. — Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **6** (1959), 53–66. [61:12, 261] (Д.11.7)
[8] Распространение одной теоремы Бэра и Леви на полукоммутативные умножения групп. — Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **6** (1959), 67–71. [61:12, 262] (Д.11.7)

Фридман Х. (Freedman H.)
[1] The automorphisms of countable primary reduced abelian groups. — Proc. London Math. Soc. **12** (1962), 77–99. [63:6, 181] (Д.34.3)

Фробениус (Frobenius G.)
[1] Über die Kongruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. — J. reine angew. Math. **101** (1887), 273–299. (54)

Фробениус и Штикельбергер (Frobenius G. und Stickelberger L.)
[1] Über Gruppen von vertauschbaren Elementen. — J. reine angew. Math. **86** (1879), 217–262. (20)

Фройденталь (Freudenthal H.)
[1] Teilweise geordnete Moduln. — Proc. Akad. Wet. Amsterdam **39** (1936), 641–651.

Фукс (Fuchs L.)
[1] On subdirect unions. I. — Acta Math. Hung. **3** (1952), 103–120. (Д.6.2)
[2] The direct sum of cyclic groups. — Acta Math. Hung. **3** (1952), 177–195. (Д.28.2)
[3] Rédeian skew product of operator groups. — Acta Sci. Math. **14** (1952), 228–238. (Д.13.3)
[4] Über die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen. — Monatsh. Math. **57** (1953), 109–112. [54:3, 2523] (Д.2.3)
[5] On the structure of abelian p-groups. — Acta Math. Hung. **4** (1953), 267–288. [55:11, 5623] (Д.30.3)
[6] On a special kind of duality in group theory. II. — Acta Math. Hung. **4** (1953), 299–314. [55:1, 92] (Д.35.1)
[7] On a property of basic subgroups. — Acta Math. Hung. **5** (1954), 143–144. [55:9, 4257] (Д.30.1)
[8] On groups with finite classes of isomorphic subgroups. — Publ. Math. **3** (1954), 243–252. [57:1, 136] (Д.17.7)
[9] On abelian torsion groups which can not be represented as the direct sum of a given cardinal number of components. — Acta Math. Hung. **7** (1956), 115–124. [57:6, 4632] (Д.30.4)
[10] On a useful lemma for abelian groups. — Acta sci. math. **17** (1956), 134–138. [58:2, 1015] (Д.29.1)
[11] Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen. — Publ. Math. **5** (1957), 185–196. [59:6, 5571] (Д.35.1)
[12] On a directly indecomposable abelian group of power greater than continuum. — Acta Math. Hung. **8** (1957), 453–454. [59:9, 8840] (Д.31.2)

[13] Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen. — Acta Sci. Math. **18** (1957), 29–32. [61:5, 217] (Д.33.6)
[14] Abelian groups. — Будапешт, 1958. [61:1, 241] (Д.13.5, Д.28.1, Д.28.4, Д.29.2, Д.29.3, Д.30.3, Д.31.1, Д.31.3, Д.31.5, Д.31.6, Д.32.1)
[15] On generalized pure subgroups of abelian groups. — Ann. Univ. Budapest, Ser. math., **1** (1958), 41–47. [60:2, 1373] (Д.29.3)
[16] On character groups of discrete abelian groups. — Acta Math. Hung. **10** (1959), 133–140. [61:5, 214] (Д.33.5)
[17] The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power. — Acta Math. Hung. **10** (1959), 453–457. [60:11, 12515] (Д.31.2)
[18] Notes on abelian groups. I. — Ann. Univ. Budapest, Ser. math., **2** (1959), 5–23. [61:9, 238] (Д.31.4, Д.33.4–Д.33.6)
[19] On the automorphism group of abelian p-groups. — Publ. Math. **7** (1960), 122–129. [61:9, 241] (Д.34.3)
[20] Notes on abelian groups. II. — Acta Math. Hung. **11** (1960), 117–125. [62:1, 199] (Д.29.3, Д.30.1, Д.33.4–Д.33.6)
[21] Note on factor groups in complete direct sums. — Bull. Acad. Polon. **11** (1963), 39–40. [63:11, 157] (Д.29.5)

Фукс, Кертес и Селе (Fuchs L., Kertész A., Szele T.)
[1] On a special kind of duality in group theory. — Acta Math. Hung. **4** (1953), 169–178. [54:8, 4358] (Д.35.1)
[2] Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand. — Publ. Math. **3** (1953), 95–105. [55:10, 4891] (Д.29.2)
[3] On abelian groups wbose subgroups are endomorphic images. — Acta sci. math. **16** (1955), 77–88. [56:7, 5113] (Д.35.1)
[4] On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded. — Acta Math. Hung. **7** (1956), 467–475. [58:4, 2737] (Д.35.1)

Фукс и Селе (Fuchs L., Szele T.)
[1] Abel-csoportok egyetlen maximális alcsoporttal. — Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. **5** (1955), 387–389. [57:10, 7654] (Д.35.4)

Фукс-Рабинович Д. И.
[1] Об одном представлении свободной группы. — Уч. зап. ЛГУ **55** (1940), 154–157.
[2] О непростоте локально свободной группы. — Матем. сб. **7** (1940), 327–328. (37a)
[3] Пример группы с конечным числом производящих и конечным числом соотношений, непредставимой изоморфно при помощи матриц конечного порядка. — ДАН СССР **27** (1940), 425–426. (Заключение к 1-му изд.)
[4] Пример дискретной группы с конечным числом производящих и соотношений, не имеющей полной системы линейных представлений. — ДАН СССР **29** (1940), 549–550.
[5] On the determinators of an operator of the free group. — Матем. сб. **7** (1940), 197–208. (36)
[6] О группах автоморфизмов свободных произведений. I. — Матем. сб. **8** (1940), 265–276. (35)
[7] О группах автоморфизмов свободных произведений. II. — Матем. сб. **9** (1941), 183–220. (35)

Хаймо (Haimo F.)
[1] The FC-chain of a group. — Canad. J. Math. **5** (1953), 498–511. [55:2, 627]

[2] Some non-abelian extensions of completely divisible groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 25–28. [55:6, 2569] (Д.19.3)
[3] Automorphisms generated by a class of subnormal subgroups. — Duke Math. J. **21** (1954), 349–353. [56:1, 220] (Д.22.3)
[4] Power-type endomorphisms of some class 2 groups. — Pacif. J. Math. **5** (1955), 201–213. [56:9, 6407] (Д.27.1)
[5] Normal automorphisms and their fixed points. — Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 150–167. [57:4, 2915] (Д.22.4)
[6] Semi-direct products with ample homomorphisms. — Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 401–425. [58:10, 8595] (Д.22.1)

Хайош (Hajós G.)
[1] Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. — Math. Z. **47** (1942), 427–467. (Д.13.5)

Хакен (Haken H.)
[1] Zum Identitätsproblem bei Gruppen. — Math. Z. **56** (1952), 335–362. (Д.15.4)

Хактон (Houghton C. H.)
[1] On the automorphism groups of certain wreath products. — Publ. Math. **9** (1962), 307–313. [64:1, 237] (Д.12.4)

Хар (Haar A.)
[1] Über unendliche kommutative Gruppen. — Math. Z. **33** (1931), 129–15.
[2] Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen. — Acta Litt. Sci Szeged. **5** (1932), 172–186.

Харви (Harvey J.)
[1] Complete holomorphs. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 961–970. [62:11, 1421 (Д.3.2)

Харрисон (Harrison D. K.)
[1] Infinite abelian groups and homological methods. — Ann. Math. **69** (1959), 366–391. [61:1, 214] (Д.33.2, Д.33.4)
[2] A characterization of torsion abelian groups once basic subgroups have been chosen. — Acta Math. Hung. **11** (1960), 335–339. [61:8, 193] (Д.30.2)
[3] Two of the problems of L. Fuchs. — Publ. Math. **7** (1960), 316–319. [61:9 239] (Д.33.6, Д.34.2)

Харрисон, Ирвин, Пирси и Уокер Е. (Harrison D. K., Irwin J. M., Peercy C. L., Walker E. A.)
[1] High extensions of abelian groups. — Acta Math. Hung. **14** (1963), 319–330. [65:8, 169] (Д.29.3, Д.29.5)

Хартли (Hartley B.)
[1] The order-types of central series. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **61** (1965), 303–319. [66:1, 198] (Д.25.6)

Хасимото (Hashimoto J.)
[1] Direct, subdirect decompositions and congruence relations. — Osaka Math. J. **9** (1957), 87–111. [59:2, 1297] (Д.6.1)

Хаусон (Howson A. G.)
[1] On the intersection of finitely generated free groups. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 428–434. [56:4, 2810] (Д.9.1)

Хейбер и Розенфилд (Haber S., Rosenfeld A.)
[1] Groups as unions of proper subgroups. — Amer. Math. Monthly **66** (1959), 491–494. [60:10, 11337] (Д.19.6)

Хейнекен (Heineken H.)
[1] Eine Verallgemeinerung des Subnormalteilerbegriffs. — Arch. Math. **11** (1960), 244–252. [61:4, 171] (Д.2.6)
[2] Eine Bemerkung über engelsche Elemente. — Arch. Math. **11** (1960), 321. [61:8.185] (Д.26.1)
[3] Über em Levisches Nilpotenzkriterium. — Arch. Math. **12** (1961), 176–178. [62:3, 181] (Д.27.1)
[4] Engelsche Elemente der Lange drei. III. — J. Math. **5** (1961), 681–707. [62:10, 145] (Д.26.2)
[5] Endomorphismenringe und engelsche Elemente. — Arch. Math. **13** (1962), 29–37. [63:9, 151] (Д.26.4)
[6] Commutator closed groups. III. — J. Math. **9** (1965), 242–255. [66:1, 219] (Д.24.4)
[7] Linkskommutatorgeschlossene Gruppen. — Math. Z. **87** (1965), 37–41. [65:6, 153] (Д.24.4)
Хельд (Held D.)
[1] Closure properties and partial Engel conditions in groups. III. — J. Math. **8** (1964), 705–712. [65:8, 165] (Д.16.8)
[2] Nilpotenz- und Verstreutheitskriterien für artinsche Gruppen. — Math. Z. **87** (1965), 49–61. [66:3, 167] (Д.16.8, Д.25.4)
Херема (Heerema N.)
[1] Sums of normal endomorphisms. — Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 137–143. [57:11, 8455] (Д.3.6)
Херстейн и Рухте (Herstein J. N., Ruchte M. F.)
[1] Semi-automorphisms of groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 145–150. [59:3, 2362] (Д.3.5)
Хиггинс (Higgins P. J.)
[1] Groups with multiple operators. — Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 366–416. (Русский перевод — сб. «Математика» **3**, № 4 (1959), 55–106.) [57:4, 2951] (Д.4, Д.5.4, Д.28.1)
[2] Presentations of groupoids, with applications to groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **60** (1964), 7–20. (Д.7.1, Д.9.1)
Хигмэн Г. (Higman G.)
[1] Note on a theorem of R. Baer. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **45** (1949), 321–327.
[2] A finitely related group with an isomorphic proper factor group. — J. London Math. Soc. **26** (1951), 59–61. (38)
[3] A finitely generated infinite simple group. — J. London Math. Soc. **26** (1951), 61–64. (38)
[4] Unrestricted free products, and varieties of topological groups. — J. London Math. Soc. **27** (1952), 73–81. (Д.7.4)
[5] On a problem of Takahasi. — J. London Math. Soc. **28** (1953), 250–252. [55:7, 3084] (Д.9.6)
[6] On infinite simple permutation groups. — Publ. Math. **3** (1954), 221–226. [57:2, 1161] (Д.2.4)
[7] A remark on finitely generated nilpotent groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 284–285. [56:4, 2811] (Д.27.2)
[8] On finite groups of exponent five. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **52** (1956), 381–390. [58:11, 9557] (Д.16.4)

[9] Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements. — J. London Math. Soc. **32** (1957), 321–334. [58:4, 2762] (Д.3.1)
[10] Some remarks on varieties of groups. — Quart. J. Math. **10** (1959), 165–178. [61:8, 180] (Д.10.5)
[11] Identical relations in finite groups. — Conv. intern. teoria gruppi finiti e appl., 1960. — 93–100. [64:5, 166] (Д.10.5)
[12] Subgroups of finitely presented groups. — Proc. Roy. Soc. London **A262** (1961), 455–475. [63:8, 67] (Д.15.3, Д.15.4)
[13] Amalgams of p-groups. — J. of Algebra **1** (1964), 301–305. [65:12, 235] (Д.8.2)

Хигмэн Г. и Нейман Б. (Higman G., Neumann B. H.)
[1] Groups as groupoids with one law. — Publ. Math. **2** (1952), 215–221. [55:4, 1674] (Д.1.1)
[2] On two questions of Itô. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 84–88. [55:9, 4258] (Д.27.4, Д.27.5)

Хигмэн Г., Нейман Б. и Нейман Х. (Higman G., Neumann B. H. and Neumann H.)
[1] Embedding theorems for groups. — J. London Math. Soc. **24** (1949), 247–254. (38, 53, Д.15.1)

Хигмэн Г. и Стоун (Higman G., Stone A. H.)
[1] On inverse systems with trivial limits. — J. London Math. Soc. **29** (1954), 233–236. [56:9, 6454] (Д.2.2)

Хигмэн Д. (Higman D. G.)
[1] Lattice homomorphisms induced by group homomorphisms. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 467–478. (Д.14.4)

Хилл (Hill P. D.)
[1] Relation of a direct limit group to associated vector groups. — Pacif. J. Math. **10** (1960), 1309–1312. [61:8, 179] (Д.2.2)
[2] Note on a direct limit group. — Amer. Math. Monthly **67** (1960), 998–1000. [62:4, 174] (Д.28.3)
[3] The anticenters of abelian groups. — Amer. Math. Monthly **68** (1961), 898. [62:7, 160] (Д.3.3)
[4] Limits of sequences of finitely generated abelian groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 946–950. [63:5, 189] (Д.28.3)
[5] On the number of pure subgroups. — Pacif. J. Math. **12** (1962), 203–205. [63:11, 153] (Д.29.2)
[6] Pure subgroups having prescribed socles. — Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 608–609. [66:10, 132] (Д.29.2)

Хилл и Мегиббен (Hill P., Megibben Ch.)
[1] Minimal pure subgroups in primary groups. — Bull. Soc. math. France **92** (1964), 251–257. [65:11, 191] (Д.29.2)

Хилтон (Hilton P. J.)
[1] Remark on free products of groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 478–487. [61:12, 267] (Д.7.3)

Хилтон и Яхья (Hilton P. J., Yahya S. M.)
[1] Unique divisibility in abelian groups. — Acta Math. Hung. **14** (1963), 229–239. [65:3, 189] (Д.19.3, Д.28.4, Д.29.3)

Хобби (Hobby Ch.)
[1] The Frattini subgroup of a p-group. — Pacif. J. Math. **10** (1960), 209–212. [61:6, 220] (Д.27.4)

Холенвег (Holenveg W.)
[1] Die Dimensionsdefekte der Burnside-Gruppen mit zwei Erzeugenden. — Comm. Math. Helv. **35** (1961), 169–200. (Д.16.3)
[2] Über die Ordnung von Burnside-Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. — Comm. Math. Helv. **36** (1961), 83–90. [63:5, 201] (Д.16.3)
Холл М. (Hall M.)
[1] Group rings and extensions. I. — Ann. Math. **39** (1938), 220–234.
[2] Coset representations in free groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 421–432. (36)
[3] Subgroups of finite index in free groups. — Canadian J. Math. **1** (1949), 187–190.
[4] A topology for free groups and related groups. — Ann. of Math. **52** (1950), 127–139. (36)
[5] Subgroups of free products. — Pacif. J. Math. **3** (1953), 115–120. [53:3, 1081] (Д.7.1)
[6] Solution of the Burnside problem for exponent six. III. — J. Math. **2** (1958), 764–786. [60:5, 4944] (Д.16.2, Д.16.3)
[7] The theory of groups. — New York, 1959. (Русский перевод: Теория групп. — ИЛ, 1962.) [60:12, 13617] (Д.7.1, Д.16.2)
Холл М. и Радо Т. (Hall M. and Radó T.)
[1] On Schreier systems in free groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 386–408.
Холл Ф. (Hall Ph.)
[1] A note on soluble groups. — J. London Math. Soc. **3** (1928), 98–105. (60, Д.18.2)
[2] A contribution to the theory of groups of prime-power order. — Proc. London Math. Soc. **36** (1933), 29–95. (14, Д.18.4)
[3] On a theorem of Frobenius. — Proc. London Math. Soc. **40** (1935), 468–501. (Заключение к 1-му изд.)
[4] A characteristic property of soluble groups. — J. London Math. Soc. **12** (1937), 198–200. (60, Д.13.4, Д.18.2)
[5] Complemented groups. — J. London Math. Soc. **12** (1937), 201–204. (Д.13.5)
[6] On the Sylow systems of a soluble group. — Proc. London Math. Soc. **43** (1937), 316–323. (60)
[7] The classification of prime-power groups. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 130–141.
[8] Verbal and marginal subgroups. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 156–157. (Д.3.4).
[9] On groups of automorphisms. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 194–204.
[10] The construction of soluble groups. — J. reine angew. Math. **182** (1940), 206–214.
[11] The splitting properties of relatively free groups. — Proc. London Math. Soc. **4** (1954), 343–356. [58:7, 5525] (Д.10.6)
[12] Finiteness conditions for soluble groups. — Proc. London Math. Soc. **4** (1954), 419–436. [56:7, 5117] (Д.15.2, Д.24.3)
[13] Theorems like Sylow's. — Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 286–304. [57:3, 2071] (Д.18.2)

[14] Finite-by-nilpotent groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **52** (1956), 611–616. [57:5, 3798] (Д.3.3, Д.24.7)
[15] Some sufficient conditions for a group to be nilpotent. III. — J. Math. **2** (1958), 787–801. [61:1, 220] (Д.20.6, Д.22.3, Д.22.4)
[16] Periodic FC-groups. — J. London Math. Soc. **34** (1959), 289–304. [60:10, 11327] (Д.16.7, Д.23.2)
[17] Some constructions for locally finite groups. — J. London Math. Soc. **34** (1959), 305–319. [60:6, 6200] (Д.2.4, Д.16.6)
[18] On the finiteness of certain soluble groups. — Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 595–622. [60:11, 12520] (Д.24.4)
[19] The Frattini subgroups of finitely generated groups. — Proc. London Math. Soc. **11** (1961), 327–352. [62:1, 204] (Д.21.1, Д.27.5)
[20] Wreath powers and characteristically simple groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **58** (1962), 170–184. [63:5, 196] (Д.3.2, Д.23.1)
[21] On non-strictly simple groups. — Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 531–553. [64:3, 143] (Д.2.5, Д.23.1, Д.23.3)
[22] A note on $\overline{SI}$-groups. — J. London Math. Soc. **39** (1964), 338–344. [65:2, 272] (Д.9.2, Д.23.1)

Холл Ф. и Кулатилака (Hall Ph., Kulatilaka C. R.)
[1] A property of locally finite groups. — J. London Math. Soc. **39** (1964), 235–239. [65:2, 257] (Д.16.5)

Холл Ф. и Хигмэн Г. (Hall P., Higman G.)
[1] On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. — Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 1–42. [58:6, 4509] (Д.16.4)

Хонда (Honda K.)
[1] Realism in the theory of abelian groups. I. — Comm. math. Univ. St. Pauli **5** (1956), 37–75. [58:3, 1845] (Д.29.3)
[2] From a theorem of Kulikov to a problem of Kaplansky. — Comm. math. Univ. St. Pauli **6** (1957), 43–48. [59:11, 10846] (Д.5.1)
[3] Realism in the theory of abelian groups. II. — Comm. math. Univ. St. Pauli **9** (1961), 11–28. [62:6, 154] (Д.30.3)
[4] Realism in the theory of abelian groups. III. — Comm. math. Univ. St. Pauli **12** (1964), 75–111. [65:11, 187] (Д.30.3)

Хониг (Honig Ch.)
[1] Sur les groupes sans torsion. — C. R. Paris **258** (1964), 1679–1682. [65:8, 170] (Д.31.1)

Хостинский (Hostinsky L. A.)
[1] Direct decomposition in lattices. — Amer. J. Math. **73** (1951), 741–755. (Д.5.3)

Хуляницкий (Hulanicki A.)
[1] Note on a paper of de Groot. — Proc. Nederl. Akad. **A61** (1958), 114. [59:9, 8841] (Д.31.2)
[2] On algebraically compact groups. — Bull. Acad. Polon. **10** (1962), 71–75. [63:11, 159] (Д.29.5)
[3] The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups. — Bull. Acad. Polon. **10** (1962), 77–80. [63:11, 160] (Д.29.5)

Хуляницкий и Ньюмэн (Hulanicki A., Newman M. F.)
[1] Existence of unrestricted direct products with one amalgamated subgroup. — J. London Math. Soc. **38** (1963), 169–175; **39** (1964), 672. [63:11, 174] (Д.6.1, Д.29.5)
Хуляницкий и Сверчковский (Hulanicki A., Swierczkowski S.)
[1] On group operations other than xy or yx. — Publ. Math. **9** (1962), 142–148. [63:5, 205] (Д.1.1)
Хэд (Head T. J.)
[1] Dense submodules. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 197–199. [63:7, 150] (Д.30.1)
[2] Remarks on a problem in primary abelian groups. — Bull. Soc. math. France **91** (1963), 109–112. [64:2, 250] (Д.29.2)
[3] Note on the occurrence of direct factors in groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 193–195. [64:11, 178] (Д.5.1, Д.6.2)
Цакер (Zacher G.)
[1] Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22** (1953), 113–122. [54:10, 5069] (Д.14.2)
[2] I gruppi risolubili con duale. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **31** (1961), 104–113. [62:2, 177] (Д.14.5)
Цаленко М. С.
[1] Несколько замечаний о бесконечных простых группах. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 227–231. [63:8, 141] (Д.2.4, Д.19.4)
[2] Об изоморфизмах нильпотентных произведений p-групп. — Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), 225–236. [64:9, 163] (Д.И.4, Д.11.5, Д.27.4)
[3] R-полные подкатегории категории групп. — УМН **21**, № 1 (1966), 174–175 (Д. 20.1)
Цаппа (Zappa G.)
[1] Remark on a recent paper of O. Ore. — Duke math. J. **6** (1940), 511–512.
[2] Sui gruppi di Hirsch supersolubili. — Rend. Sem. mat. Univ. Padova **12** (1941), 1–11, 62–80. (59)
[3] Sui comportamente degli elementi periodici in un gruppo di Dedekind infinito. — Comm. math. helv. **18** (1945), 42–44. (44)
[4] Sui sottogruppi finiti dei gruppo di Hirsch. — Giorn. Mat. **2** (1948), 55–70. (59)
[5] Sulla condicione perchè un emitropismo inferiore tipico tra due gruppi sia un omotropismo. — Giorn. Mat. **4** (1951), 80–101. (Д.14.4)
[6] Costituzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro. — Atti Sec. Congresso Unione Mat. Ital., Bologna, 1940. — 119–125. (Д.13.2)
[7] Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow. — Boll. Unione mat. ital. **9** (1954), 349–353. [56:2, 1065] (Д.18.2)
[8] Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch. — Ricerche mat. **7** (1958), 3–13. [59:7, 6651] (Д.24.3)
[9] Fondamenti di teoria dei gruppi. Vol. I. — Roma, 1965. [67:3, 127]
Цасенхауз (Zassenhaus H.)
[1] Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier. — Hamburg. Abh. **10** (1934), 106–108. (11, 16)
[2] Lehrbuch der Gruppentheorie. T. I. — Leipzig, Berlin, 1937. (60, 62)

[3] Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen. — Hambrug. Abh. **12** (1938), 289–312.

Цзе Бан-чжен (Hsien Pang-chien)

[1] Chains of admissible subgroups of groups with operators. — Sc. Sinica **7** (1958), 704–715. [59:11, 10851] (Д.17.5)

Цзян У-чжун (Hsiang Wu-chung)

[1] Abelian groups characterized by their independent subsets. — Pacif. J. Math. **8** (1958), 447–457. [60:12, 13578] (Д.28.2)

Цзян У-чжун, Цзян У-и (Hsiang Wu-chung, Hsiang Wu-yi)

[1] Those abelian groups characterized by their completely decomposable subgroups of finite rank. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 547–558. [63:1, 192] (Д.28.2)

Цишанг (Zieschang H.)

[1] Über Worte $s_1^{a_1}s_2^{a_2}\dots s_q^{a_q}$ in einer freien Gruppe mit p freien Erzeugenden. — Math. Ann. **147** (1962), 143–153. [63:1, 198] (Д.9.4)

Цубои (Tsuboi T.)

[1] Note on metabelian groups. — Sci. Rep. Saitama Univ. **A2** (1953), 59–62. [55:4, 1669; 55:11, 5625] (Д.24.4)

Цыпин (Zippin L.)

[1] Countable torsion groups. — Ann. Math. **36** (1935), 86–99. (27, 28)

Чабан И. А.

[1] О полукоммутативных и вербальных произведениях групп. — УМН **17**, № 5 (1962), 153–155. [63:5, 207] (Д.11.7)

Чан Ван Хао

[1] О полупростых классах групп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 943–949. [64:6, 174] (Д.20.1, Д.20.3)

[2] О минимальном радикальном классе над классом абелевых групп. — ДАН СССР **149** (1963), 1270–1273. [63:11, 168] (Д.20.4)

[3] Нильгруппы конечного ранга. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 459–464. [65:1, 178] (Д.26.5)

Чанг (Chang Bomshik)

[1] The automorphism group of the free group with two generators. — Mich. Math. J. **7** (1960), 79–81. [61:4, 174] (Д.9.4)

Чарин В. С

[1] Замечание об условии минимальности для подгрупп. — ДАН СССР **66** (1949), 575–576. (59, Д.23.2)

[2] О полных группах с корневым рядом конечной длины. — ДАН СССР **66** (1949), 809–811. (Д.25.2)

[3] К теории локально нильпотентных групп. — Матем. сб. **29** (1951), 433–454. (65)

[4] Об условии минимальности для нормальных делителей локально разрешимых групп. — Матем. сб. **33** (1953), 27–36. [54:1, 1564] (Д.23.2)

[5] О группах автоморфизмов некоторых классов разрешимых групп. — Укр. матем. ж. **5** (1953), 363–369. [54:6, 3622] (Д.24.2)

[6] О группах автоморфизмов нильпотентных групп. — Укр. матем. ж. **6** (1954), 295–304. [55:7, 3082] (Д.27.1)

[7] К теории нильпотентных групп. — Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 21–25. [58:6, 4508] (Д.24.7)

[8] О локально разрешимых группах конечного ранга. — Матем. сб. **41** (1957), 37–48. [57:8, 6165] (Д.23.2)

[9] О группах, обладающих разрешимыми возрастающими инвариантными рядами. — Матем. сб. **41** (1957), 297–316. [58:3, 1848] (Д.23.4, Д.25.1)
[10] О разрешимых группах типа A_4. — Матем. сб. **52** (1960), 895–914. [61:9, 233] (Д.23.2, Д.24.1)
[11] О разрешимых группах типа A_3. — Матем. сб. **54** (1961), 489–499. [62:3, 183] (Д.24.1)
[12] Замечание о группах, обладающих возрастающими разрешимыми инвариантными рядами. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1962), 50–54. [64:3, 155] (Д.23.4)

Чейз (Chase S.)
[1] On direct sums and products of modules. — Pacif. J. Math. **12** (1962), 847–854. [64:1, 298] (Д.33.3)

Чен (Chen K. T.)
[1] Integration in free groups. — Ann. Math. **54** (1951), 147–162. (Д.24.5)
[2] A group ring method for finitely generated groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 275–287. [58:11, 9570] (Д.15.2)

Чен, Фокс и Линдон (Chen K. T., Fox R. H., Lyndon R. C.)
[1] Free differential calculus. IV. — Ann. Math. **68** (1958), 81–95. [61:5, 205] (Д.15.2)

Черников С. Н.
[1] Перенесение одной теоремы Frobenius'a на бесконечные группы. — Матем. сб. **3** (1938), 413–416.
[2] К теореме Frobenius'a. — Матем. сб. **4** (1938), 531–539.
[3] Бесконечные специальные группы. — Матем. сб. **6** (1939), 199–214. (64)
[4] Бесконечные локально разрешимые группы. — Матем. сб. **7** (1940), 35–64. (59, 63)
[5] К теории бесконечных специальных групп. — Матем. сб. **7** (1940), 539–548. (69)
[6] О группах с сиповским множеством. — Матем. сб. **8** (1940), 377–394.
[7] К теории локально разрешимых групп. — Матем. сб. **13** (1943), 317–333. (59, 64)
[8] О бесконечных специальных группах с конечным центром. — Матем. сб. **17** (1945), 105–130.
[9] К теории бесконечных p-групп. — ДАН СССР **50** (1945), 71–74.
[10] Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом. — Матем. сб. **18** (1946), 397–422. (65)
[11] К теории конечных p-расширений абелевых p-групп. — ДАН СССР **58** (1947), 1287–1289. (53)
[12] Бесконечные слойно-конечные группы. — Матем. сб. **22** (1948), 101–133. (53)
[13] К теории полных групп. — Матем. сб. **22** (1948), 319–348, 455–456. (65, Д.19.1)
[14] К теории специальных p-групп. — ДАН СССР **63** (1948), 11–14.
[15] К теории локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп. — ДАН СССР **65** (1949), 21–24.
[16] О полных группах с возрастающим центральным рядом. — ДАН СССР **70** (1950), 965–968.
[17] О централизаторе полного абелевого нормального делителя в бесконечной периодической группе. — ДАН СССР **72** (1950), 243–246.

[18] Об условии минимальности для абелевых подгрупп. — ДАН СССР **75** (1950), 345–347.
[19] Периодические ZA-расширения полных групп. — Матем. сб. **27** (1950), 117–128. (65, 66)
[20] О специальных p-группах. — Матем. сб. **27** (1950), 185–200. (63, 64)
[21] О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. — Матем сб. **28** (1951), 119–129. (59)
[22] К теории групп без кручения, обладающих возрастающим центральным рядом. — Уч. зап. Уральск. ун-та **7** (1949), 3–21. (Д.25.2)
[23] Группы с системами дополняемых подгрупп. — Матем. сб. **35** (1954), 93–128. [56:1, 226] (Д.13.4, Д.29.2)
[24] О дополняемости силовских П-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп. — Матем. сб. **37** (1955), 557–566. [56:12, 8615] (Д.13.4, Д.18.2)
[25] О группах с конечными классами сопряженных элементов. — ДАН СССР **114** (1957), 1177–1179. [58:11, 9561] (Д.17.7)
[26] О строении групп с конечными классами сопряженных элементов. — ДАН СССР **115** (1957), 60–63. [58:10, 8589] (Д.17.6)
[27] О слойно-конечных группах. — Матем. сб. **45** (1958), 415–416. [59:5, 4470] (Д.17.7)
[28] Условия конечности в общей теории групп. — УМН **14**, № 5 (1959), 45–96. [61:8, 181] (Д.17.1, Д.17.3, Д.17.4, Д.18.1, Д.23.1, Д.23.2, Д.25.2).
[29] О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами. — Матем. сб. **52** (1960), 647–652. [61:5, 209] (Д.16.5)
[30] Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп. — ДАН СССР **159** (1964), 759–760. [65:4, 163] (Д.13.4, Д.17.4)

Черникова Н. В.
[1] Группы с дополняемыми подгруппами. — Матем. сб. **39** (1956), 273–292. [57:5, 3804] (Д.13.4)

Чехата (Chehata C. G.)
[1] Commutative extension of partial automorphisms of groups. — Proc. Glasgow Math. Assoc. **1** (1955), 170–181. [57:11, 8456] (Д.3.5)
[2] Embedding theorems for groups. — Proc. Edinburgh Math. Soc. **13** (1962), 153–157. [63:11, 141] (Д.3.5)
[3] Embedding theorems for abelian groups. — Canad. J. Math. **15** (1963), 766–770. [64:9, 158] (Д.3.5)
[4] Existence theorem for groups. — Proc. Edinburgh Math. Soc. **13** (1963), 290–294. [65:2, 255] (Д.3.5)

Чунихин С. А.
[1] О разрешимых группах. — Изв. НИИММ Томского гос. ун-та **2** (1938), 220–223. (60)
[2] О p-свойствах групп. — ДАН СССР **55** (1947), 481–484.
[3] О подгруппах относительно разрешимых групп. — ДАН СССР **58** (1947), 1295–1296.
[4] О П-отделимых группах. — ДАН СССР **59** (1948), 443–445. (60)
[5] О силовски-правильных группах. — ДАН СССР **60** (1948), 773–774.
[6] О П-свойствах конечных групп. — Матем. сб. **25** (1949), 321–346. (60)
[7] О теоремах типа Силова. — ДАН СССР **66** (1949), 165–168.
[8] Об условиях теорем типа Силова. — ДАН СССР **69** (1949), 735–737.

[9] О силовских свойствах конечных групп. — ДАН СССР **73** (1950), 29–32.
[10] Силовские свойства и полуинвариантные подгруппы. — ДАН СССР **77** (1951), 973–975.
[11] Подгруппы конечных групп. — Минск, 1964. [66:7, 179] (Д.Предисловие)

Шаар (Schaar G.)
[1] Über ein spezielles dreifaches schiefes Produkt. — Acta sci. math. **25** (1964), 143–148. [65:2, 283] (Д.13.3)

Шайн Б. М.
[1] К теореме Биркгофа–Когаловского. — УМН **20**, № 6 (1965), 173–174. (Д.10.1)

Шарль (Charles B.)
[1] Le centre de l'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien primaire. — C. R. Paris **236** (1953), 1122–1123. [53:1, 91] (Д.34.1)
[2] Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles. — C. R. Paris **250** (1960), 256–257. [60:9, 10015] (Д.28.4)
[3] Étude suf les sous-groupes d'un groupe abélien. — Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 217–227. [62:1, 201] (Д.29.2)
[4] Sous-groupes de base des groupes abéliens primaires. — Sèm. Dubreil et Pisot **13** (1961), 17.1–17.7. [62:11, 140] (Д.30.1)
[5] Note sur la structure des groupes abéliens primaires. — C. R. Paris **252** (1961), 1547–1548. [62:6, 155] (Д.30.3)

Шатле (Chatelet A.)
[1] Les groupes abéliens finis et les modules de points entiere. — Paris–Lille, 1925.

Шеврин Л. Н.
[1] О структурных свойствах полугрупп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 446–470. [63:3, 198] (Д.14.6)
[2] Структурно-подполугрупповая характеристика коммутативных непериодических групп. — Сиб. матем. ж. **5** (1964), 671–678. [65:2, 307] (Д.14.6)

Шевцов Г. С.
[1] Полупрямые произведения рациональных групп. — Изв. вузов. Математика, 1958, № 1. — 184–201. [59:3, 2367] (Д.13.1)
[2] К вопросу о рациональных инвариантных подгруппах полуразложимой группы. — Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 91–97. [63:10, 157] (Д.23.4)
[3] К вопросу о понятии полупрямого произведения групп. — Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 98–103. [63:8, 155] (Д.13.1)
[4] О коммутанте полупрямого произведения групп. — Уч. зап. Пермск. ун-та **103** (1963), 108–110. [64:11, 177] (Д.13.1)

Шевцов Г. С. и Хлебутина В. И.
[1] Смешанные полуразложимые группы. — Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 104–115. [63:10, 158] (Д.13.1)

Шеницер (Shenitzer A.)
[1] Decomposition of a group with a single defining relation into a free product. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 273–279. [56:6, 4353] (Д.15.2)

Шенкман (Schenkman E.)
[1] A generalization of the central elements of a group. — Pacif. J. Math. **3** (1953), 501–504. [54:1, 1565] (Д.26.3)
[2] Two theorems on finitely generated groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 497–498. [56:1, 215] (Д.16.2)

[3] On the structure of the automorphism group. — Portug. Math. **13** (1954), 129–135. [58:7, 5522] (Д.18.1, Д.25.5)
[4] A splitting theorem and the principal ideal theorem for some infinitely generated groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 870–873. [57:10, 7661] (Д.13.1)
[5] The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups of groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 375-381. [59:6, 5580] (Д.17.5)
[6] The equation $a^n b^n = c^n$ in a free group. — Ann. Math. **70** (1959), 562–564. [60:10, 11334] (Д.9.1)
[7] On the norm of a group. III. — J. Math. **4** (1960), 150–152. [60:12, 13599] (Д.3.3)
[8] The basis theorem for finitely generated abelian groups. — Amer. Math. Monthly **67** (1960), 770–771. [61:9, 237] (Д.28.2)

Шенкман и Уэйд (Schenkman E., Wade L.I.)
[1] The mapping which takes each element of a group into its n-th power. — Amer. Math. Monthly **65** (1958), 33–34. [59:3, 2357] (Д.3.5)

Шик (Schiek H.)
[1] Ähnlichkeitsanalyse von Gruppenrelationen. — Acta Math. **96** (1956), 157–252. [58:11, 9566] (Д.15.4)
[2] Adjunktionsproblem und inkompressible Relationen. — Math. Ann. **146** (1962), 314-320. [63:8, 158] (Д.19.5)
[3] Das Adjunktionsproblem der Gruppentheorie. — Math. Ann. **147** (1962), 158–165. [63:8, 159] (Д.19.5)

Ширшов А. И.
[1] О некоторых группах, близких к энгелевым. — Алгебра и логика (семинар) **2** (1963), 5–18. [64:11, 159] (Д.26.2, Д.26.6)

Шифман (Shiffman M.)
[1] The ring of automorphisms of an abelian group. — Duke math. J. **6** (1940), 579–597. (21)

Шмейдлер (Schmeidler W.)
[1] Bemerkungen zur Theorie der abzahlbaren Abelschen Gruppen. — Math. Z. **6** (1920), 274–280.

Шмелькин А. Л.
[1] К теории правильных произведений групп. — Матем. сб. **51** (1960), 277–292. [61:9, 220] (Д.11.3, Д.11.4)
[2] Нильпотентные произведения и нильпотентные группы без кручения. — Сиб. матем. ж. **3** (1982), 625–640. [63:4, 154] (Д.11.5, Д.19.4)
[3] Одно свойство полупростых классов групп. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 950–951. [64:6, 175] (Д.20.1)
[4] Об изоморфизме нильпотентных разложений нильпотентных групп без кручения. — Сиб. матем. ж. **4** (1963), 1412–1425. [64:8, 174] (Д.11.5)
[5] Полугруппа многообразий групп. — ДАН СССР **149** (1963), 543–545. [63:8, 161] (Д.10.4)
[6] Свободные полинильпотентные группы. — Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1904), 91–122. [64:8, 170] (Д.12.3, Д.24.5, Д.24.6)
[7] О разрешимых произведениях групп. — Сиб. матем. ж. **6** (1965), 212–220. [65:9, 196] (Д.11.2, Д.11.3, Д.11.5, Д.11.6, Д.24.5)
[8] Сплетения и многообразия групп. — Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 149–170. [65:9, 195] (Д.9.2, Д.10.5, Д.10.6, Д.12.3)

Шмидт О. Ю.
[1] Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. — Изв. Киевского ун-та, 1912. — 1–6. (42)
[2] Sur les produits directs. — Bull. Soc. Math. France **41** (1913), 161–164. (42)
[3] Абстрактная теория групп. — Киев, 1916; 2-е изд., Москва, 1933. Избранные труды. Математика. — М., 1959. — 17–175. (Д.24.4)
[4] Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette. — Math. Z. **29** (1928), 34–41. (42, 47a)
[5] Новое доказательство теоремы А. Кулакова в теории групп. — Матем. сб. (стар. серия) **39** (1932), № 1–2. — 66–71.
[6] О бесконечных специальных группах. — Матем. сб. **8** (1940), 363–375. (54, 63, 64)
[7] Бесконечные разрешимые группы. — Матем. сб. **17** (1945), 145–162. (53, 57–59)
[8] Группы, все подгруппы которых специальные. — Матем. сб. (стар. серия) **31** (1924), 366–372. (Д.27.1)
[9] Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп. Избранные труды. Математика. — М., 1959. — 298–300. [60:6, 6065] (Д.19.7)
Шода (Shoda K.)
[1] Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe. — Math. Ann. **100** (1928), 674–686. (21)
[2] Über die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe. — Math. Z. **31** (1930), 611–624.
[3] Über den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe. — Proc. Acad. Tokyo **6** (1930), 9–11. (21)
[4] Gruppentheoretischer Beweis des Äquivalenz und Enthaltenseinsatzes in der Theorie der Matrizen mit ganzen Koeffizienten. — Proc. Acad. Tokyo **6** (1930), 217–219.
[5] Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1930), 25–50. (Заключение к 1-му изд.)
[6] Über direkt zerlegbare Gruppen. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1930), 51–72. (Заключение к 1-му взд.)
[7] Bemerkungen Über vollstandig reduzible Gruppen. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1931), 203–209.
[8] Über die Schreiersche Erweiterungstheorie. — Proc. Acad. Tokyo **19** (1943), 518–519. (Д.12.1)
Шолендер (Sholander M.)
[1] Postulates for commutative groups. — Amer. Math. Monthly **66** (1959), 93–95 [60:10, 11320] (Д.1.1)
Шольц (Scholz A.)
[1] Die Behandlung der zweistufigen Gruppe als Operatorengruppe. — S.-B. Heidelberg. Akad. **2** (1933), 17–22.
Шпейзер (Speiser A.)
[1] Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. — 1923; 2 Aufl., 1927; 3 Aufl., 1937.
Шпекер (Specker E.)
[1] Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen. — Port. Math. **9** (1950), 131–140. (Д.28.3, Д.31.6, Д.33.5)

Шпехт (Specht W.)
[1] Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen. — Math. Z. **37** (1933). 321–341.
[2] Gruppentheorie. — Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1956. [59:6, 5598] (Д.3.2. Д.5.2, Д.5.4, Д.7.1, Д.21.1, Д.21.2, Д.27.5)
[3] Beiträge zur Gruppentheorie. I. Lokalendliche Gruppen. — Math. Nachr. **18** (1958), 39–56. [59:8, 7788] (Д.16.5, Д.20.4)
Шрейер И. и Улам (Schreier J. und Ulam S.)
[1] Sur le groupe des permutations de la suite des nombres naturels. — C. R. Paris **197** (1933), 737–738.
[2] Über die Permutationsgruppe der naturlichen Zahlenfolge. — Studia Math. **4** (1933), 134–141.
[3] Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge. — Fund. Math. **28** (1937), 258–260. (13)
Шрейер О. (Schreier O.)
[1] Über die Gruppen $A^aB^b = 1$. — Hamburg. Abh. **3** (1924), 167–169. (Заключение к 1-му изд.)
[2] Über die Erweiterung von Gruppen. I. — Monatsh. Math. Phys. **34** (1926), 165–180. (48)
[3] Über die Erweiterung von Gruppen. II. — Hamburg. Abh. **4** (1926), 321–346. (48)
[4] Die Untergrappen der freien Gruppen. — Hamburg. Abh. **5** (1927), 161–183. (35, 36, 48, Заключение к 1-му изд.)
[5] Über den Jordan-Hölderschen Satz. — Hamburg. Abh. **6** (1928), 300–302. (16)
Штейн (Stein K.)
[1] Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. — Math. Ann. **123** (1951), 201–222. (Д.33.3)
Штейниц (Steinitz E.)
[1] Rechteckige Systeme und Moduln in algebraisehen Zahlkorpern. — Math. Ann. **71** (1912), 328–354; **72** (1912), 297–345.
Шунков В. П.
[1] О группах, разложимых в равномерное произведение своих p-групп. — ДАН СССР **154** (1964), 542–544. [64:10, 177] (Д.13.2)
[2] К теории обобщенно разрешимых групп. — ДАН СССР **160** (1965), 1279–1282. [65:7, 170] (Д.16.5)
Шур (Schur I.)
[1] Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen. — S.-B. Preuss. Akad. (1911), 619–627. (Заключение к 1-му изд.)
[2] Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. — J. reine angew. Math. **127** (1904), 20–50. (49, Д.17.7)
Шю (Shü S.)
[1] On the common representative system of residue classes of infinite groups. — J. London Math. Soc. **16** (1941), 101–104.
Шютценбергер (Schützenberger M. P.)
[1] Nouvelle démonstration du théorème de Schreier sur les sous-groupes d'un groupe libre par son extension au cas des demi-groupes libres. — Sém. Dubreil, Dubreil-Jacotin et Pisot. — 1957–1958. — 6.1–6.6. [60:2, 1389] (Д.9.1)

[2] Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre. — C. R. Paris **248** (1959), 2435–2436. [60:10, 11333] (Д.9.1)

Щепин Г. Г.

[1] К вопросу о постулатах Маклейна и Мальцева для одного класса правильных операций на группах. — УМН **20**, № 3 (1965), 219–226. [65:12, 239] (Д.11.7)

Щукин К. К.

[1] Первичные группы. — Уч. зап. Кишиневск. ун-та **39** (1959), 209–218. [61:1, 218] (Д.6.2)

[2] Первичные полумаксимальные нормальные делители. — Уч. зап. Кишиневск. ун-та **54** (1960); 3–7. [62:3, 184] (Д.6.2)

[3] О локально разрешимом радикале одного класса групп. — Уч. зап. Кишиневск. ун-та **54** (1960), 95–100. [62:3, 191] (Д.20.5)

[4] RI^*-разрешимый радикал групп. — Матем. сб. **52** (1960), 1021–1031. [62:7, 165] (Д.20.6)

[5] Замечания о первичных группах. — Уч. зап. Кишиневск. ун-та **50** (1962), 9–11. [63:8, 149] (Д.6.2)

[6] К теории радикалов в группах. — Сиб. матем. ж. **3** (1962), 932–942. [63:8, 151] (Д.20.1, Д.20.2)

Эверетт (Everett C. J.)

[1] The basis theorem for vector spaces over rings. — Bull. Amer. Math. Sog. **51** (1945), 531–532. (22)

Эйдинов М. И.

[1] О группах без П-кручения. — Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 61–68. [58:6, 4506] (Д.19.1, Д.26.2)

[2] П-радикальные группы. — Матем. зап. Уральск. ун-та **3**, № 3 (1962), 60–68. — [64:3, 156] (Д.20.4)

[3] О П-изолированном базисе покрытия ПR-группы. — Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 3 (1963), 69–75. [64:9, 147] (Д.19.1, Д.19.7)

Эйленберг и Маклейн С. (Eilenberg S. and MacLane S.)

[1] Group extensions and homology. — Ann. Math. **43** (1942), 757–831. (52, Д.33.1, Д.33.5)

[2] Natural isomorphisms in group theory. — Proc. Nat. Acad. USA **28** (1942), 537–543.

[3] General theory of natural equivalences. — Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231–294.

[4] Cohomology theory in abstract groups. I. — Ann. Math. **48** (1947), 51–78. (49)

[5] Cohomology theory in abstract groups. II. — Ann. Math. **48** (1947), 326–341. (48, 51)

[6] Algebraic cobomology groups and loops. — Duke J. **14** (1947), 435–463. (48, 49)

Эйюб (Ayoub C. W.)

[1] A theory of normal chains. — Canad. J. Math. **4** (1952), 162–188. (Д.18.1)

[2] On the primary subgroups of a group. — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 450–466. (Д.18.1)

[3] Sylow theory for a certain class of operator groups. — Canad. J. Math. **13** (1961), 192–200. [62:1, 207] (Д.18.1)

Экман (Eckmann B.)
[1] Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe. — Comm. Math. Helv. **18** (1946), 232–282.
Экман и Хилтон (Eckmann B., Hilton P. J.)
[1] Structure maps in group theory. — Fund. Math. **50** (1961), 207–221. [63:12, 180] (Д.7.3, Д.27.1)
Элперин (Alperin J. L.)
[1] Groups with finitely many automorphisms. — Pacif. J. Math. **12** (1962), 1–5. [63:4, 147] (Д.3.1, Д.15.1)
Эне (Ene D.)
[1] Asupra K-grupurilor infinite. — Studii şi cert. mat., Acad. RPR **15** (1964), 455–458. [65:2, 259] (Д.14.2)
Энокс (Enochs E.)
[1] Isomorphic refinements of decompositions of a primary group into closed groups. — Bull. Soc. math. France **91** (1963), 63–75. [64:8, 161] (Д.30.2)
[2] Extending isomorphisms between basic subgroups. — Arch. Math. **15** (1964), 175–178. [66:1, 218] (Д.30.2)
Эппл и Джоруп (Appel K.I., Djorup F.M.)
[1] On the group generated by a free semigroup. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 838–840. [65:3, 195] (Д.9.6)
Эпстейн (Epstein D.B.A.)
[1] A result on free products with amalgamation. — J. London Math. Soc. **37** (1962), 130–132. [63:4, 152] (Д.8.1)
Эрдеи (Erdélyi M.)
[1] On n-algebraically closed groups. — Publ. Math. **7** (1960), 310–315. [61:10.198] (Д.3.2, Д.19.5)
[2] Abel-féle csoportok korlàfos elemrendü direkt összeadandóiról. — Acta Univ. Debrecen **7** (1961), 39–44. [63:5, 190] (Д.29.1)
Эрдёш (Erdös J.)
[1] The theory of groups with finite classes of conjugate elements. — Acta Math. Hung. **5** (1954), 45–58. [56:2, 1080] (Д.17.6, Д.17.7)
[2] On direct decompositions of torsion free abelian groups. — Publ. Math. **3** (1954), 281–288. [58:2, 1019] (Д.31.4)
[3] Torsion-free factor groups of free abelian groups and a classification of torsion-free abelian groups. — Publ. Math. **5** (1957), 172–184. [59:4, 3537] (Д.31.1)
[4] On the splitting problem of mixed abelian groups. — Publ. Math. **5** (1958), 364–377. (Д.32.1)
Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)
[1] О проблеме И. Г. Ц. Уайтхеда из теории абелевых групп. — Бюлл. Польской АН **3** (1955), 127–129. [56:6, 4346] (Д.31.7)
Эренфойхт и Лось (Ehrenfeucht A., Loś J.)
[1] О декартовых произведениях бесконечных циклических групп. — Бюлл. Польской АН **2** (1954), 265–267. [56:2, 1085] (Д.33.5)
Яковлев Б. В.
[1] Структурные изоморфизмы метабелевых групп степени p. — Матем. зап., Красноярск. пед. ин-т, кафедра алгебры. — Вып. 1. — 1965. — 59–68. (Д.14.4)

Ямабе (Yamabe H.)
[1] A condition for an abelian group to be a free abelian group with a finite basis. — Proc. Jap. Acad. **27** (1951), 205–207. (Д.28.3)
Янко (Janko Z.)
[1] Über das Redeische schiefe Produkt vom Typ $G \odot \Gamma$. — Acta Sci. Math. **21** (1960), 4–6. [61:7, 216] (Д.13.3)
[2] Über das nicht ausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G \odot \Gamma$. — Acta Sci. Math. **21** (1960), 144–153. [62:2, 209] (Д.13.3)
[3] Szépsche Erweiterung von Gruppen mit Operatoren. — Glasnik mat.-fiz. i astr. **15** (1960), 3–8. [61:8, 200] (Д.13.3)
Яхья (Yahya S. M.)
[1] P-pure exact sequences and the group of P-pure extensions. — Ann. Univ. Budapest **5** (1962), 179–191. [63:12, 179] (Д.33.2)

Именной указатель

Абель, 29
Абиян, 667, 702
Абрамовский И. Н., 703
Абхьянкар, 683
Адо И. Д., 414, 447, 537
Адян С. И., 603
Альтман, 697
Амицур, 626
Андреев К. К., 702
Армстронг, 683, 697
Артамонов В. А., 702
Асано, 584
Асатиани Р. В., 704
Атия, 549
Ауслендер, 566
Ашманов С. А., 703

Бальцержик, 633, 673, 676, 686
Баранович Т. М., 582
Барнес, 597
Баумслаг, 537, 555, 562, 565, 573–575, 580, 587, 588, 599–602, 615, 620–624, 645, 649, 653, 655, 702, 703
Баур, 642
Бауэр, 73
Бауэрс, 647
Бахмут, 648
Бачурин Г. Ф., 653, 654, 662
Беккер И. Х., 536, 698
Белов Ю. А., 704
Бенадо, 578, 581
Берлинков М. Л., 595
Берман С. Д., 533
Бернсайд, 13, 17, 303, 409, 439, 453, 467, 519, 523, 525, 604–606
Бетти, 514
Биркгоф, 97, 330, 430, 555, 569
Блекберн, 538, 555, 654, 661, 662, 704
Бойер, 673, 674, 699, 700
Бокуть Л. А., 703
Боньяр, 683
Боревич З. И., 584
Брайент, 702
Брак, 606
Браконье, 668
Брамере, 687, 702
Бриттон, 602
Бровкин, 703
Бронштейн М. А., 702
Брумберг Н. Р., 587
Бун, 602
Бургин М. С., 702
Бусаркин В. М., 625
Бьюмонт, 596, 673, 680, 682, 687, 701
Бэр, 35, 70, 159, 174, 204, 211, 218, 223–225, 227, 257, 266, 268, 287, 289, 326, 328, 373–376, 378, 382, 391, 399, 411, 414, 421, 424, 428, 448, 458, 474, 478, 483, 485, 488, 489, 518, 524, 535, 538, 550, 556, 563, 584, 596, 597, 601, 602, 606–613, 615, 618, 627, 629, 632–637, 639, 642–646, 654, 658–660, 670, 672, 688, 692, 696, 698
Бючи, 541
Бялыницкий-Бируля, 686, 703

Вагнер, 527
Валуцэ И. И., 568
Ван-дер-Варден, 163, 250, 303, 519, 523, 524, 605
Ванг, 685
Вейхзель, 574
Вендт, 484
Виланд, 474, 534, 618
Виленкин Н. Я., 128, 688

Вильоен, 692
Виляцер В. Г., 638–640, 652, 657
Винберг Э. Б., 604
Виноградов А. А., 576, 702
Витт, 279, 282, 558
Вольф, 584
Вуссинг, 530

Галуа, 17, 71, 513, 570
Гаусс, 150
Гашюц, 600
Гёльдер, 17, 100, 118, 121, 513, 514
Генов, 703
Гечег, 585
Гика, 622
Гилберт, 556
Гирш, 451, 488, 576, 615, 631, 646, 647, 653, 664, 665
Гладкий А. В., 603
Глауберман, 639
Глушков В. М., 414, 504, 508, 512, 652, 654, 655
Голди, 549
Голема, 677
Головин О. Н., 110, 269, 328, 361, 366, 471, 549, 552, 576–583, 663, 703
Голод Е. С., 604, 619, 652, 657
Гольберг П. А., 428, 454, 458, 461, 466, 616–619, 631, 633
Гольдина Н. П., 581, 663
Гольфанд Ю. А., 102, 382
Горчаков Ю. М., 592, 608, 625, 642, 651
Горчинский Ю. Н., 614
Гохин, 452
Гочаи, 671, 673
Граев М. И., 128, 328, 552, 554
Грецер, 673, 700
Грин, 535, 605
Гриндлингер М. Д., 603, 703
Гриффитс, 560
Гротендик, 695
Грушко И. А., 304, 603
Грюн, 483, 538, 600, 618
Грюнберг, 559, 566, 579, 614, 649, 655–659
Гуревич В., 274
Гуревич Ю. Ш., 625

Данвуди, 539
Де Брейн, 529
Де Врис, 535, 616, 683
Де Грот, 549, 683, 701
Де Миранда, 535
Джекобсон, 604
Дженингс, 414
Джонс, 339
Джонсон, 538
Джоруп, 569
Дик, 134
Диксмье, 537
Диксон Л., 35, 523
Диксон С., 631
Дицман А. П., 410, 416, 421–423, 467, 609, 616, 617, 661
Длаб, 529, 664, 669–671, 675, 697, 702
Домбек, 538
Дуингер, 549
Дьёдонне, 668, 694
Дьюгид, 613
Дэй, 558, 559, 600
Дэн, 321, 522
Дэрри, 159, 235, 242, 681
Дюбюк П. Е., 467

Еремин И. И., 614
Ешманович, 683

Житомирский В. Г., 640
Жордан, 17, 118, 121, 513
Журавский В. С., 688, 691

Завало С. Т., 560, 702
Зайцев Д. И., 611
Залесский А. Е., 616
Зельманзон М. Е., 530
Зельмер, 680
Зиман, 694

Иванова О. А., 553
Иванюта И. Д., 616
Ивасава, 282, 339, 594
Ивахори, 528
Ирвин, 669, 675–678, 689
Ито, 589, 664, 665

Йонсон, 228, 274, 529, 549, 552, 558, 564, 683, 701, 704

Казачков Б. В., 458, 592, 617
Калашников В. А., 517
Калужнин Л. А., 193, 235, 584, 587, 638, 639, 703
Камм, 533, 561
Кантор, 228
Капланский, 667, 677, 680, 681, 696
Каппе, 538, 659
Карасев Г. А., 618, 703
Каргаполов М. И., 592, 606, 607, 616–619, 622, 623, 630, 641, 643, 652, 656, 703, 704
Каролинская Л. Н., 554
Каррас, 533, 556, 558, 565, 601
Картан, 584
Картер, 643
Касселс, 687
Кегель, 625
Кемпбелл, 682
Кемхадзе Ш. С., 590, 619, 631, 640, 653, 659, 660
Кертес, 668, 670–673, 699
Кёлер, 682
Кикодзе Э. Б., 651, 661, 704
Кишкина З. М., 157, 159, 517
Клэпхем, 602
Кнезер, 529
Ковач, 536, 548, 616, 671, 678, 684, 689
Когаловский С. Р., 570
Коксетер, 522, 600
Колеттис, 680
Кон, 548, 589, 625
Конрад, 540, 623, 661
Конторович П. Г., 475, 498, 537, 594, 596, 620, 624, 631
Коржинек, 328, 341, 515, 549, 664
Корнер, 684, 686, 696, 697
Кострикин А. И., 525, 606
Кохендёрфер, 591
Коши, 17, 416
Коэн, 559, 562, 566
Краснер, 584, 586, 652
Краузе, 606
Крауч, 530
Кросс, 574
Кроули, 549, 552, 680
Круль В., 326
Круль М., 566
Кубота, 564
Кулаков А., 467
Кулатилака, 606, 644, 653
Куликов Л. Я., 173, 177, 185, 186, 188, 193, 205, 208, 212, 221, 223, 296, 517, 549, 552, 671, 672, 675, 677, 679, 680, 684, 688, 691
Кун, 555, 556, 561
Курата, 612
Курош А. Г., 187, 235, 246, 257, 266, 267, 289, 294, 326, 328, 341, 347, 350, 358, 370, 416, 419–421, 423–426, 430, 437, 440, 441, 475, 485, 517, 532, 544, 548, 549, 552, 556, 561, 570, 576, 604, 616, 617, 626–630, 641, 651, 654, 656, 672, 681
Курцио, 536, 595, 598, 609
Кутыев К. М., 598
Кхаббаз, 669, 671, 675, 678, 681
Кэли, 48, 137

Лагранж, 65
Лазар, 620, 622, 655
Ларин С. В., 531
Леви, 35, 106, 235, 246, 257, 266, 268, 274, 282, 286, 289, 303, 519, 556, 564, 579, 605, 657, 661
Левин Н., 538
Левин Ф., 599, 624, 651
Левин Я., 648
Левич Е. М., 660
Ледерман, 535
Лептин, 679, 698
Лернер, 646
Либек, 536, 587, 698
Ливчак Я. Б., 641, 643
Лившиц А. Х., 328, 341, 549, 628, 702
Линдон, 556, 565, 568, 574, 601, 605, 662
Липшуц, 603
Лифшиц В. Н., 703
Лихтман А. И., 655
Лишак М. Г., 653, 667
Лози, 606
Лойко Н. В., 531, 598
Лонстра, 530, 556, 584, 585

Лоренц А. А., 568
Лоренцен, 41, 527
Лось, 672, 675, 676, 685, 686, 694
Лохер, 274
Лю Шао-сюэ, 547
Любимов В. В., 533
Ляпин Е. С., 97, 211, 218, 471, 583
Ляховицкий В. Н., 580

Магнус, 279, 306, 322, 520, 522, 556, 558, 601, 605, 606
Макбет, 614
Макгенри, 566, 581
Макдональд, 538, 613, 648, 651, 654
Макки, 680
Маклейн Д., 537, 610, 613, 642, 652, 655, 664, 665
Маклейн С., 382, 391, 393, 398, 556, 578, 584, 670, 690–693
Маланьина Г. А., 588
Мальцев А. И., 109, 235, 279, 282, 289, 415, 426, 441, 451, 471, 475, 479, 486, 488, 502, 503, 509, 510, 523, 567, 578, 614, 622, 623, 641, 645, 646, 649, 651, 655, 662, 681
Маркьонна-Тибилетти, 590, 591
Маурер, 538
Мацедонская О. Н., 583, 703
Мегиббен, 674–677
Мейер-Вундерли, 605
Мерзляков Ю. И., 622, 623, 641, 642, 652, 656
Мерзляков Ю. И., 442
Миллер, 17
Милс, 536
Митра, 657
Михайлова К. А., 603, 703
Мишина А. П., 211, 224, 685, 688, 697
Мозер, 600
Молдованский Д. И., 703
Моран, 539, 560, 579, 580, 583, 663
Моримото, 528
Мостовский, 663, 664, 668
Мохамед, 639
Мочульский Е. Н., 549
Мур, 35
Мурасуги, 601
Мурата, 631
Мухаммеджан Х. Х., 488, 491, 644, 653, 654
Мышкин В. И., 686, 690, 704
Мягкова Н. Н., 488, 652

Нагао, 584
Нагата, 535
Нейман Б., 269, 286, 289, 297, 300, 301, 303, 305, 414, 473, 508, 519, 528, 535, 538, 539, 555, 561–564, 566, 572–575, 583, 585, 589, 593, 599, 604, 612, 613, 616, 622–625, 645, 648, 664, 665, 670
Нейман П., 572–576, 585, 587, 702
Нейман Х., 274, 300, 301, 414, 539, 561, 563, 565, 567, 572, 575, 585, 593, 599, 670
Нефедьев Г. Н., 584
Нётер Э., 18, 611
Нильсен, 268, 269, 274, 306, 564
Нисневич В. Л., 523
Нишигори, 591, 612
Новиков П. С., 322, 602, 605
Нунке, 681, 686, 691, 693, 696
Ньюмэн, 548, 555, 648, 661, 677
Ньюуайрт, 566

Ольшанский А. Ю., 702
Орсатти, 697
Орэ, 328, 335, 341, 452, 532, 538
Оутс, 574
Охара, 590

Папп, 679
Пауэлл, 574
Пекелис А. С., 594, 596, 598, 624
Переманс, 536, 547
Пермутти, 648
Петерсен И., 589
Петреску, 538, 556, 564
Петропавловская Р. В., 381, 598
Пик, 538, 613
Пикар, 567, 568
Пирс, 673, 675, 680, 682, 687, 697, 701
Пирси, 675–677, 689
Плоткин Б. И., 480, 498, 504, 507, 533, 594, 596, 608, 617, 630–641, 643, 646, 651–653, 656–660, 704
Половицкий Я. Д., 527, 610, 612

Понтрягин Л. С., 246, 668, 694
Попп, 590, 637
Прохазка, 681–689, 701
Прюфер, 179, 183–186
Пуанкаре, 65

Рабин, 603
Радо, 558
Райнхарт, 702
Райт, 541, 605
Рангасвами, 671, 675, 676, 693
Рапапорт, 567, 601
Редеи, 536, 584, 589, 591
Рейд, 669, 675, 687, 701
Рейдемейстер, 274, 323, 522, 557
Ремак, 328, 366, 516
Ремесленников В. Н., 622, 623, 662, 664, 703, 704
Ри, 536, 558, 649
Робинсон Д. А., 542
Робинсон Д. С., 534, 610, 648
Рогов В. В., 592
Розати, 537
Розенфельд Х. М., 608
Розенфилд, 625
Ромалис Г. М., 704
Ротлендер, 373, 596
Ротман, 682, 689, 692, 695
Роузблед, 534, 537, 643
Рохлина В. С., 704
Рудык Б. М., 689, 703
Рухте, 540
Рюкс, 591
Рябухин Ю. М., 704

Садовский Л. Е., 269, 376, 381, 524, 595, 596
Санов И. Н., 303, 519, 604–606
Сас, 530, 607
Сато, 594, 597
Сверчковский, 528, 529
Секанина, 593
Секереш, 681
Секи, 584
Сексенбаев К., 538, 646
Селе, 529, 668–673, 677, 681, 697–701
Селпал, 697, 700
Сендреи, 697
Сеп, 589, 591
Сергеев М. И., 593
Сесекин Н. Ф., 502, 590, 616, 647, 651, 653, 661, 704
Силов, 17, 415, 422
Симон, 611
Синков, 522
Скорца, 625
Скотт, 531, 589, 614, 624, 700
Сломиньский, 672
Слэтер, 527
Смирнов Д. М., 452, 504, 576, 615, 642, 646, 651–653, 655
Соколовская Т. В., 528
Солдатова В. В., 703
Солиан, 622
Солитэр, 533, 556, 558, 565, 599, 601
Сонсяда, 668, 672, 683–688, 697, 699
Старостин А. И., 594, 616, 619, 624, 625
Стейнберг, 565, 601
Стендер П. В., 567, 603
Стонехевер, 643
Стоун, 532
Стрёйк, 580, 581, 606
Строуд, 613
Струнков С. П., 607, 703
Судзуки, 594, 597
Сю, 536
Сюзева В. И., 589

Тайцлин М. А., 615
Такахаси, 257, 556, 565, 569, 584
Тамашке, 535
Тартаковский В. А., 322, 603
Тейхмюллер, 163
Тернер-Смит, 539
Тимошенко Е. И., 704
Тице, 321, 602
Тобин, 605
Томпсон, 525
Туркин В К., 467
Тышкевич Р. И., 616, 618
Тэйлор, 584
Тэллман, 691

Уагнер, 556

Уайголд, 547, 558, 564, 574, 583, 593, 613, 622, 623, 662
Уайтхед, 269, 323, 567
Узков А. И., 341, 416, 421, 617
Уитмэн, 597
Уитни, 694
Улам, 102
Ульм, 187, 193, 200, 517
Уокер Е., 547, 673–678, 689, 692, 699, 701
Уокер К., 691, 701
Уолл, 597
Уос, 538
Ушаков В. И., 598, 631
Уэйд, 541
Уэйр, 556
Уэстон, 657

Фаддеев Д. К., 382, 584
Фаермарк Д. С., 604
Федерер, 274, 558, 564
Федоров Ю. Г., 488, 503, 511, 614
Фейт, 525
Ферстенберг, 528
Фиттинг, 328, 350, 370, 460, 461, 466, 514, 549, 665
Фокс, 564, 602
Фомин С. В., 672, 688
Фраттини, 664, 665
Фредерик, 601
Фридман А. А., 603
Фридман М. А., 583
Фридман Х., 698
Фробениус, 17, 150, 422, 467, 518, 625
Фукс, 533, 556, 591, 593, 667, 668, 671–688, 692–695, 698–701
Фукс-Рабинович Д. И., 269, 279, 289, 523

Хаймо, 613, 622, 637–639, 662
Хайош, 593
Хакен, 603
Хактон, 587
Хантингтон, 35
Харви, 536
Харрисон, 675, 677, 680, 691–695, 697
Хартли, 655
Хасимото, 553
Хаттори, 528
Хаусдорф, 19
Хаусон, 565
Хейбер, 625
Хейнекен, 534, 648, 656, 659, 661
Хеллер, 695
Хельд, 608, 654
Херема, 542
Херстейн, 540
Хиггинс, 543, 551, 556, 564, 667
Хигмэн Г., 300, 301, 303, 414, 528, 532, 533, 535, 560, 564, 569, 573, 599, 602, 606, 662, 665
Хигмэн Д., 597
Хилл, 532, 538, 670, 674
Хилтон, 559, 622, 661, 671, 675
Хлебутина В. И., 589
Хобби, 664
Холенвег, 605
Холл М., 278, 279, 283, 303, 556, 605
Холл Ф., 97, 110, 452, 453, 457, 518, 520, 533, 537–539, 566, 575, 591, 601, 606–608, 617, 619, 631, 632, 638, 639, 641, 643, 647, 651, 665
Хонда, 548, 674, 679, 681
Хониг, 682
Хопф, 303, 520, 523, 600
Хостинский, 549
Хуляницкий, 528, 555, 677, 683
Хэд, 547, 556, 674, 678

Цакер, 595, 597
Цаленко М. С., 533, 580, 581, 622, 627, 664
Цаппа, 339, 451, 589, 597, 618, 647
Цасенхауз, 79, 117, 452, 458, 460, 473
Цзе Бан-чжен, 612
Цзян У-и, 669
Цзян У-чжун, 669
Цишанг, 567
Цубои, 647
Цыпин, 196, 200

Чабан И. А., 583
Чан Ван Хао, 626, 629, 660
Чанг, 567

Чарин В. С., 451, 497, 642, 644, 646, 651–653, 662
Чейз, 692
Чен, 602, 649
Черников С. Н., 483–490, 641, 642, 651–656, 673
Черников С. Н., 411, 414, 425, 430, 440, 441, 448, 449, 451, 475, 491, 497, 502, 519, 588, 592, 606, 608, 610, 612, 614, 616, 617, 620
Черникова Н. В., 592
Чехата, 540
Чунихин С. А., 452
Чунихин С. А., 453, 467, 525

Шаар, 591
Шайн Б. М., 570
Шарль, 671, 674, 679, 680, 696
Шафаревич И. Р., 604
Шеврин Л. Н., 598
Шевцов Г. С., 588, 644
Шеницер, 601
Шенкман, 538, 541, 565, 589, 605, 611, 617, 655, 657, 667
Шериев В. А., 703
Шик, 603, 624
Широковская О. С., 647
Ширшов А. И., 657, 660
Шифман, 159
Шмелькин А. Л., 566, 573–575, 578–582, 586, 622, 626, 649–650, 663, 703, 704
Шмидт Е., 673, 700
Шмидт О. Ю., 13, 18, 60, 328, 363, 410, 424, 440, 447, 449, 451, 480, 483, 488, 515, 519, 607, 625, 641, 647, 662
Шода, 159, 516, 584
Шолендер, 527
Шпекер, 670, 686, 694
Шпехт, 536, 548, 550, 556, 607, 630, 632, 633, 665
Шрейер И., 102
Шрейер О., 117, 267, 274, 277, 382, 516, 557, 584
Штёр, 591
Штейн, 692
Штейнфельд, 584
Штикельбергер, 150
Шунков В. П., 590, 607, 652, 703
Шур, 17, 391, 458, 523, 613
Шютценбергер, 564, 565

Щепин Г. Г., 583, 703
Щукин К. К., 556, 626, 628, 631, 704

Эверетт, 162
Эйделькинд Д. И., 704
Эйдинов М. И., 619, 626, 630, 657
Эйленберг, 382, 391, 398, 584, 690, 693
Эйюб, 617
Экман, 559, 661
Элперин, 535, 600
Эне, 595
Энокс, 679
Эппл, 569
Эпстейн, 561
Эрдёш, 612, 614, 682–685, 688
Эрдеи, 537, 624, 672
Эренфойхт, 687, 694

Якоби, 648
Яковлев Б. В., 597
Ямабе, 670
Янко, 591
Яхья, 622, 671, 675

Предметный указатель

Абелева A_i-группа, 645
— (= коммутативная) группа, 29, 527, 528
— — без кручения, 213
— — — — ранга 1 (= рациональная группа), 215, 588
— — бесконечного ранга, 142
— — конечного ранга, 142
— — с кольцом операторов (= модуль), 159
— — — конечным числом образующих, 147
— Ω-группа, 546
Абелево расширение, 406
Абсолютное прямое слагаемое, 672
Абстрактный класс групп, 632
Автоморфизм, 94
— внешний, 95
— внутренний, 95
— локально внутренний, 428
— нормальный, 369
— операторный, 114
— почти внутренний, 536
— тождественный, 94
— центральный, 369
— частичный, 540
Аддитивная группа кольца, 91
— — Ω-группы, 543
— запись, 35
Аддитивные группы чисел, 41
Аксиоматика Бэра и Леви, 35
Алгебраическая группа (по Плоткину), 660
— операция, 20, 515
Алгебраически компактная абелева группа, 676
Алгебраический элемент, 660
Алгоритмические проблемы (= проблемы Дэна), 321, 322, 522, 602
Амальгама, 562
Антигомоморфизм, 531
Антицентр, 538
Аппроксимируемость, 532
Артинова группа (= группа с условием минимальности), 412, 609
Ассоциативность, 22, 577
A-норма, 538
α-сервантная подгруппа, 675

База (конечнопорожденной абелевой группы), 150
— (свободной абелевой группы), 144
— единственности, 620
Базисная подгруппа, 188, 677, 679, 687
Бернсайдов класс групп, 634
Бернсайдова группа, 605
Бинарная алгебраическая операция, 20
Бинарное отношение, 541
B-группа, 692

Вербальная подгруппа, 538
Вербально полная группа, 607
Вербальное произведение, 579, 580
— — с объединенной подгруппой, 583
— сплетение, 586
Верхне-нижняя центральная система, 655
Верхний гиперцентр, 537
— центральный ряд, 470
Верхняя центральная цепь, 470
Взаимный коммутант, 109, 545
Внешне локально нильпотентная группа автоморфизмов, 640
— — нильпотентный радикал, 640
Внешний автоморфизм, 95

Внутренний автоморфизм, 95
Внутренняя пара (групп), 636
Возрастающая нормальная цепь, 119
— последовательность групп, 57
— — подгрупп, 55
Возрастающий главный ряд, 432
— инвариантный ряд, 432
— композиционный ряд, 432
— нормальный ряд, 432
— ряд коммутантов, 645
— ряд Фраттини, 664
— центральный ряд, 475
Вполне дедекиндова структура, 341
— допустимая подгруппа, 560
— инвариантная (= вполне характеристическая) подгруппа, 104
— нормальный структурный изоморфизм, 373
— П-расщепляемая группа, 626
— приводимая группа, 461
— разложимая абелева группа, 218, 671, 684
— расщепляемая группа, 624
— факторизуемая группа, 592
— характеристическая (= вполне инвариантная) подгруппа, 104
— характеристический ряд, 122
Вторая теорема Прюфера, 179, 620, 668
— — Силова, 421, 422, 617
Высокая подгруппа, 675
Высота элемента (примарной группы), 176
V-характеристическая подгруппа, 110
w-автоморфизм, 540
W-группа, 692

Гамильтонова группа, 70
Гиперхарактеристическая подгруппа, 539
Гиперцентр, 537
Гипотеза расщепления, 550
Главная система, 432
Главный гомоморфизм, 391
— идеал, 93
— ряд (группы), 122
— ряд (структуры), 340, 354
Голоморф, 98, 536
— (групповой пары), 637
Гомоморфизм (группоида, группы), 26
— (Ω-группы), 544
—, сопровождающий расширение, 387
Гомоморфный образ, 26
Гротендика группа, 695
Группа, 29, 35, 527
— абелева (= коммутативная), 29, 527, 528
— — алгебраически компактная, 676
— — без кручения, 213, 681
— — — — ранга 1 (= рациональная группа), 215, 588
— — вполне разложимая, 218, 671, 684
— — конечного ранга, 142
— — полная, 169, 670
— — редуцированная, 170
— — с кольцом операторов (= модуль), 159
— — свободная, 144
— — сильно неразложимая, 701
— — смешанная, 208, 688
— абелевых расширений, 406, 690
— автоморфизмов, 96
— —, внешне локально нильпотентная, 640
— —, локально стабильная, 638
— —, неприводимая, 698
— —, периодическая, 639
— —, скалярная (треугольная), 640
— алгебраическая (по Плоткину), 660
— артинова (= группа с условием минимальности), 412, 609
— без кручения, 34
— — П-кручения, 620
— — центра, 83
— бернсайдова, 605
— вербально полная, 607
— внутренних автоморфизмов, 96
— — П-расщепляемая, 626
— вполне приводимая, 461
— — расщепляемая, 624

— — факторизуемая, 592
— вращений окружности, 43
— всех взаимно однозначных отображений множества на себя, 44
— — корней из единицы, 43
— w-автоморфизмов, 540
— гамильтонова, 70
— гомологий, 390
— гомоморфизмов (одной абелевой группы в другую) (= $\mathrm{Hom}(A, B)$), 157, 693
— Гротендика, 695
— движений, 45
— двуступенно разрешимая (= метабелева), 647
— дисперсивная, 608
— Ext, 690
— замкнутая примарная, 679
— знакопеременная, 44
— инъективная, 670
— квазинильпотентная, 659
— квазисвободная, 568
— квазициклическая (= типа p^∞), 59
— кватернионов, 70
— кольца, присоединенная, 280
— коммутативная (= абелева), 29, 527, 528
— конечная, 30, 525
— — нильпотентная (= специальная), 472
— конечноопределенная, 316, 600
— конечнопорожденная, 53, 297, 599
— копериодическая, 692
— левокоммутаторно замкнутая, 648
— линейная, 523
— локально конечная, 409, 606
— — нётерова, 611
— — нильпотентная, 479, 651
— — нормальная, 410, 607
— — разрешимая, 447, 569
— — свободная, 290, 522
— матриц, 523
— метабелева (= двуступенно разрешимая), 647
— — (= нильпотентная, класса 2), 106, 108, 110, 647
— метанильпотентная, 485
— модулярная, 254
— мультиоператорная (= Ω-группа), 528, 543
— невырожденных матриц, 45
— нехопфова, 599
— нётерова (= с условием максимальности), 413, 611
— — разрешимая (= полициклическая), 646
— нильпотентная, 468, 470, 661
— — класса 2 (= метабелева), 106, 108, 110, 647
— — — n, 471
— нильпотентно аппроксимируемая, 655
— n-абелева, 618
— n-нильпотентная (разрешимая), 618
— n-ступенно разрешимая, 648
— N-высокая, 675
— обобщенно нильпотентная, 475
— — разрешимая, 439
— операторных автоморфизмов, 115
— операторов, 543
— остаточно конечная (= финитно аппроксимируемая), 566, 614
— отщепляемая, 575
— первичная, 556
— периодическая, 34, 409
— подпрямо неразложимая, 555
— подстановок, 86, 523
— — импримитивная, 88
— — интранзитивная, 87
— — k раз транзитивная, 87
— — примитивная, 88
— — регулярная, 49
— — транзитивная, 87
— полинильпотентная, 649
— полициклическая (= нётерова разрешимая), 646
— полная, 489
— — в смысле Черникова, 490
— полупростая, 460, 627
— почти локально сервантная, 674
— — разрешимая, 642
— правокоммутаторно замкнутая, 648

— предельная (возрастающей последовательности групп), 58
— — (спектра), 532
— преобразований, 44
— приведенная свободная (= свободная группа многообразия), 286, 570
— примарная, 140
— примарно факторизуемая, 592
— примитивно факторизуемая, 592
— простая, 71
— псевдосвободная, 569
— p-приведенная, 687
— П-отделимая, 453, 618
— П-полная, 620
— радикальная, 627
— — в смысле Плоткина, 630, 643
— разрешимая, 438
— — ступени n, 648
— расширений (абелевой группы), 388
— рациональная (= абелева группа без кручения ранга 1), 215, 588
— резидуально конечная (= финитно аппроксимируемая), 566, 614
— рекурсивно определимая, 602
— с группой операторов, 542, 560
— — конечным числом классов сопряженных элементов, 414, 613
— — — — образующих (= конечнопорожденная группа), 53, 297, 599
— — конечными классами сопряженных подгрупп, 613
— — — — — элементов (= FC-группа), 410, 612
— — мультиоператорами (= Ω-группа), 543
— — нормализаторным условием (= N-группа), 472, 477, 653
— — одним определяющим соотношением, 322, 522, 601
— — однозначным извлечением корня (= R-группа), 498
— — операторами, 110
— — полугруппой операторов, 543
— — условием максимальности для нормальных делителей, 414
— — — — — подгрупп (= нётерова группа), 413, 611
— — — минимальности для нормальных делителей, 414, 609
— — — — — подгрупп (= артинова группа), 412, 609
— — — П-минимальности, 610
— — финитно отделимыми подгруппами, 615
— самодуальная, 699
— сверхразрешимая, 644
— свободная, 130, 560, 570
— — абелева, 144
— — в себе, 570
— — многообразия (класса групп), 570
— — нильпотентная класса n, 471, 663
— — полинильпотентная, 650
— — разрешимая ступени n, 649
— сепарабельная, 225
— сервантно полная примарная, 674
— симметрическая, 43, 44
— слойно конечная, 411, 614
— — экстремальная, 610
— смешанная, 34
— со свойством Z (= Z-группа), 475
— совершенная, 100, 326, 536
— специальная (= конечная нильпотентная), 472
— Σ-свободная, 560
— Σ^n-циклическая, 669
— типа p^∞ (= квазициклическая), 59
— — R (= аддитивная группа рациональных чисел), 170
— Tor (= периодическое произведение), 695
— узкая, 686
— универсальная Холла (= универсальная счетная локально конечная группа), 607
— урегулированная, 692
— устойчивости ряда, 638
— факторно-делимая, 687
— факторно-расщепляемая, 687
— финитно аппроксимируемая, 566, 614

— фундаментальная (по Пикар), 568
— характеристически простая (= элементарная), 104, 536
— характеров, 693
— хопфова, 539, 546, 600
— Hom, 693
— центральных расширений, 405
— циклическая, 50, 529
— экстремальная, 609
— элементарная (= характеристически простая), 104, 536
— энгелева, 656
— — конечного класса, 656
— эндоморфизмов, 698
Групповая пара (= пара групп), 636
Группоид, 20
Γ-коммутант (центр), 639
Γ-расширение, 587
Γ-центральная цепь, 638

Двусторонний идеал, 92
Двуступенно разрешимая (= метабелева) группа, 647
Дедекиндова (= модулярная) структура, 337, 338, 340, 593, 594
Декартова подгруппа, 559
Делитель нуля, 91
Дискретное сплетение, 586
Дисперсивная группа, 608
Дистрибутивная Ω-группа, 544
— структура, 334, 594
Дистрибутивность, 90, 544
— примарной группы, 680
Длина ряда, 116
— слова, 130
Дополняемая подгруппа, 547, 589
Допустимая подгруппа, 111
Допустимый нормальный делитель, 113
— центр, 350
Достижимая (= субнормальная) подгруппа, 119, 534
Достижимый элемент, 658
Доступная подгруппа, 535
Дуальные группы (по Бэру), 597
— — (по Фуксу), 699
— структуры, 597
D-группа, 622

Единица (группоида, группы), 23, 31
— (кольца), 91
— (структуры), 332
Единичная подгруппа, 46
Естественный гомоморфизм, 28
Ext, 690

Замещение прямого множителя, 329
Замкнутая примарная группа, 679
Замыкание примарной группы, разложимой в прямую сумму циклических групп, 190
Знакопеременная группа, 44
Z-группа (= группа со свойством Z), 475
ZA-группа, 475, 653
ZD-группа, 654
$\overline{Z}$-группа, 656

Идеал, 92, 545, 568
Идеализаторное условие, 653
Идемпотентный эндоморфизм, 370, 549
Изолированная подгруппа, 498
Изолятор, 498
— групповой пары, 637
Изоморфизм группоидов, групп, 25
— колец, 91
— нильпотентных разложений, 581, 703
— нормальных систем, 433
— Ω-групп, 544
— прямых разложений, 129, 204, 326, 328, 358, 363, 683, 700
— рядов, 117, 118
— свободных разложений, 266
— — — с объединенными подгруппами, 517
— структур, 332
— структурный (= проектирование), 372, 595
Импримитивная группа подстановок, 88
Инвариантная подгруппа (= нормальный делитель), 67, 68, 75, 534

— система, 432
— цепь, 122
Инвариантное множество, 82
Инвариантный элемент, 83
Инварианты абелевой группы, 153
Индекс подгруппы, 64
Интранзитивная группа подстановок, 87
Инфраинвариантная подгруппа, 652
Инъективная группа, 670
Истинная подгруппа, 46
ID-, IP-группа, 673

Квазиизоморфные группы, 701
Квазимногообразие, 576
Квазинильпотентная группа, 659
Квазисвободная группа, 568
Квазицентр, 538
Квазициклическая группа (= группа типа p^∞), 59
Класс автоморфизмов, 387
— групп, 632
— конгруенции, 28
— нильпотентной группы, 471
— подобных надгрупп (расширений), 585
— равнотипных подгрупп (элементов), 103
— сопряженных подгрупп (элементов), (82), 84
Коалиционный класс, 534
Кольцо, 90
— ассоциативное, 90
— коммутативное, 90
— матриц, 91
— операторов, 159
— с делителями нуля, 91
— целых p-адических чисел, 156
— эндоморфизмов, 154, 156, 696
Коммутант, 107, 545
Коммутативная (= абелева) группа, 29, 527, 528
Коммутативность, 22
Коммутатор (двух элементов), 106
— элемента и автоморфизма, 638
Коммутаторные тождества, 106
Коммутирование многообразий, 572
Компактная структура подгрупп, 595
Композиционная длина группы, 118
— система, 431
Композиционный ряд (фактор), 118
Компонента подгруппы (элемента), 125
Конгруенция (= правильное разбиение), 28
Конечная группа, 30, 525
— нильпотентная (= специальная) группа, 472
Конечноопределенная группа (= группа с конечным числом образующих и определяющих соотношений), 316, 600
Конечнопорожденная группа (= группа с конечным числом образующих), 53, 297, 599
Копериодическая группа, 692
Косое произведение, 591
Коэффициент кручения, 153
Критерии непростоты, 467, 525
Критерий Куликова, 177, 668
k раз транзитивная группа подстановок, 87
KM-группа, 689

Левокоммутаторно замкнутая группа, 648
Левостороннее разложение группы, 63
Левосторонний идеал (кольца), 92
— смежный класс, 62
Лемма Грюна, 483
— Дицмана, 410
— Цасенхауза, 79, 80, 114, 545
Линейная группа, 523
— зависимость элементов, 140, 142, 668
Локальная система подгрупп, 425
— теорема, 426
— — Бэра, 478
— — Мальцева, 441, 475
Локально внутренний автоморфизм, 428
— достижимая подгруппа, 660
— достижимый элемент, 660

— конечная группа, 409, 606
— нётерова группа, 611
— нильпотентная группа, 479, 651
— нильпотентный радикал (= радикал Плоткина), 630, 631
— нормальная группа, 410, 607
— периодический радикал, 639
— разрешимая группа, 447, 642
— свободная группа, 290, 522, 569
— сопряженные подгруппы, 428
— стабильная группа автоморфизмов, 638
— — пара, 638
— стабильный радикал, 639
— субинвариантная подгруппа, 660
— субинвариантный элемент, 660
Локальное свойство, 426

Маргинальная подгруппа, 539
Межпрямая сумма групп, 686
Метабелева (= двуступенно разрешимая) группа, 647
— (= нильпотентная класса 2) группа, 106, 108, 110, 647
Метабелево произведение, 579
Метанильпотентная группа, 485
Метапроблема тождества, 603
Многообразие (= примитивный класс) групп, 569
Модуль, 159
— (= дедекиндова) структура, 337, 338, 340, 593, 594
Модулярная группа, 254
Мономорфизм, 530
Мультиоператорная группа (= Ω-группа), 528, 543
Мультипликативная группа невырожденных матриц, 45
— — поля, 92
Мультипликативные группы чисел, 42
$\mathfrak{m}$-сервантная подгруппа, 675

Нётерова группа (= группа с условием максимальности), 413, 611
— разрешимая (= полициклическая) группа, 646
Надгруппа, 585
Направленное множество, 531
Наследственная система образующих, 672
Наследственно приводимая система образующих, 671
— сильно приводимая система образующих, 671
Неприводимая группа автоморфизмов, 698
— система образующих, 52, 529
Неприводимое покрытие, 624
Неразложимое многообразие, 573
Нехопфова группа, 599
Нижний слой (примарной группы), 176
— центральный ряд, 470
Нижняя центральная цепь, 109
Нильавтоморфизм, 640
Нильгруппа (по Бэру), 660
— (по Плоткину) (= энгелева группа), 656
Нильпотентная группа, 468, 470, 661
— — класса 2 (= метабелева группа), 106, 108, 110, 647
Нильпотентно аппроксимируемая группа, 655
Нильпотентное произведение групп, 471, 579
Нить, 57, 531
Норма (группы), 538
Нормализатор, 81
Нормализаторное условие, 472
Нормальная подгруппа (= нормальный делитель), 67, 68, 75, 534
— разрешимая система, 439
— система, 431
Нормальный автоморфизм, 369
— делитель, 67, 68, 75, 534
— —, порожденный данным подмножеством, 69
— — степени k, 581
— ряд, 116
— — структуры, 339
— структурный изоморфизм, 373
— эндоморфизм, 369
Нулевая подгруппа, 139

Нулевой идеал, 92
— эндоморфизм, 94
Нуль (группоида, группы), 23
— (кольца), 91
— (структуры), 332
n-абелева группа, 618
n-арная операция, 543
n-коммутатор (центр), 618
n-нильпотентная (разрешимая) группа, 618
n-перестановочные элементы, 618
n-право-энгелев элемент, 656
n-энгелев элемент, 656
$1/n$-группа, 603
N-высокая группа, 675
N-группа (= группа с нормализаторным условием), 472, 477, 653
N-произведение, 583
$\widetilde{N}$-группа, 478

Обобщенная теорема Жордана–Гёльдера, 433
— — Шрейера, 433
Обобщенно нильпотентная группа, 475
— разрешимая группа, 439
Образующие элементы, 52
Образующий элемент циклической группы, 50
Обратная операция, 24
Обратный спектр, 531
— элемент, 31, 92
Общее произведение, 589
Общий ранг, 415
Ограниченная проблема Бернсайда, 604
Ограниченный право-энгелев элемент, 656
— энгелев элемент, 656
Оператор, 110
Операторный автоморфизм, 114
— гомоморфизм, 113
— изоморфизм, 110
— эндоморфизм, 114
Операция алгебраическая, 20, 515
— на классе групп, 576
Определяющие соотношения, 134
Ослабленная проблема Бернсайда, 605
Основная теорема об абелевых группах с конечным числом образующих, 149
Остаточно конечная (= финитно аппроксимируемая) группа, 566, 614
Отщепляемая группа, 575
Ω-группа (= группа с мультиоператорами), 528, 543
Ω-подгруппа (фактор-группа), 544, (545)

Пара групп (= групповая пара), 636
Первая теорема Прюфера, 179, 620, 668
— — Силова, 415
Первичная группа, 556
Первичный нормальный делитель, 611, 631
Перестановочные подмножества, 61
— элементы, 30
Периодическая группа, 34, 409
— часть (группы), 140, 485
Периодический S-радикал (= S-радикал), 631
Периодическое произведение (= Tor), 695
Подгруппа, 46
— α-сервантная, 675
— базисная (примарной группы), 188, 677, 687
— вербальная, 538
— вполне допустимая, 560
— — характеристическая (= вполне инвариантная), 104
— высокая, 675
— V-характеристическая, 110
— гиперхарактеристическая, 539
— декартова, 559
— дополняемая, 547, 589
— допустимая, 111
— достижимая (= субнормальная), 119, 534
— доступная, 535
— единичная, 46
— изолированная, 498

— инвариантная (= нормальный делитель), 67, 68, 75, 534
— инфраинвариантная, 652
— истинная, 46
— конечного индекса, 64
— локально достижимая, 660
— — субинвариантная, 660
— маргинальная, 539
— $\mathfrak{m}$-сервантная, 675
— нормальная (= нормальный делитель), 67, 68, 75, 534
— нулевая, 139
— N-высокая, 675
— поливербальная, 582
—, порожденная данным подмножеством, 50
— p-изотипная, 675
— p-(П-)сервантная, 675
— p^{α}-сервантная, 675
— регулярная (по Вангу), 685
— сервантная (= чистая), 181, 673
— силовская, 416, 615
— слабо сервантная, 674
— субинвариантная, 534
— субнормальная (= достижимая), 119, 534
— ультрахарактеристическая, 539
— универсальная, 700
— Фраттини (= Ф-подгруппа), 473, 664
— характеристическая, 103
— холловская, 617
— циклическая, 50
— честная, 702
— чистая (= сервантная), 181, 673
Подкольцо, 92
Подобные надгруппы (расширения), 585
Подпара, 637
Подпроизведение, 590
Подпрямо неразложимая группа, 555
Подпрямое произведение, 555
Подстановка, 21, 86
Подструктура, 332
Покрытие группы, 624
Поле, 92
— p-адических чисел, 230
Поливербальная операция, 582
— подгруппа, 582
Поливербальное произведение, 582
Полинильпотентная группа, 649
Полислово, 581
Полициклическая (= нётерова разрешимая) группа, 646
Полная абелева группа, 169, 670
— группа, 489
— — в смысле Черникова, 490
— силовская база, 453, 619
— система инвариантов (абелевой группы с конечным числом образующих), 153
— структура, 333
— упорядоченная система подгрупп, 431
Полное ассоциативное правильное произведение, 583
— вербальное произведение, 584
— прямое произведение, 127, 553, 554
— — — с объединенной подгруппой, 555
— свободное произведение, 560
— сплетение, 586
Полный прообраз подгруппы, 75
Полугомоморфизм, 531
Полугруппа, 22, 542
— многообразий, 572
— операторов, 543
Полуизоморфизм, 531
Полукоммутативное T-произведение, 583
Полумодулярная сверху структура, 594
Полупростая группа, 460, 627
Полупростой класс, 626
— —, минимальный над данным классом групп, 629
Полупрямое произведение (= расщепляемое расширение), 408, 588
Полупрямой множитель, 537
Пополнение абелевой группы, 172, 174
— группы, 508, 622

— локально нильпотентной группы, 510, 622
Порядок группы, 30
— элемента (группы), 33
— — (модуля), 160
Последовательность коммутантов (центров) пары прямых разложений, 552
— ульмовских факторов, 194
Постулат блокируемости, 577
— локализуемости, 577
— Маклейна, 578
— Мальцева, 578
— транзитивности, 577
— функторности, 577
Почти внутренний автоморфизм, 536
— изоморфные группы, 700
— -кольцо, 542, 567
— локально сервантная группа, 674
Правильная операция, 578
— произведение, 579
Правильное разбиение (= конгруенция), 28
Право-энгелев элемент, 656
Правокоммутаторно замкнутая группа, 648
Правостороннее разложение группы по подгруппе, 63
Правосторонний идеал кольца, 92
— смежный класс, 63
Предел (= предельная группа) спектра, 532
Предельная группа возрастающей последовательности групп, 58
Представление группы автоморфизмами, 636
— — линейное, 523
Преобразования определяющих соотношений, 318
Приведенная свободная группа (= свободная группа многообразия), 286, 570
Приводимая система образующих, 671
Примарная группа, 140
Примарно факторизуемая группа, 592
Пример конечнопорожденной группы с неизоморфными прямыми разложениями, 326
— неизоморфных несчетных примарных групп с изоморфными ульмовскими факторами, 205
— несчетной примарной группы без элементов бесконечной высоты, не разлагающейся в прямую сумму циклических групп, 187
— p-группы без центра, 423
— R-группы с неизолированным коммутантом, 501
— сопряженных подгрупп, одна из которых содержится в другой, 85
Примитивная группа подстановок, 88
Примитивно факторизуемая группа, 592
Примитивный класс (= многообразие) групп, 569
— элемент, 565, 567
Присоединенная группа кольца, 280
Проблема Бернсайда (о периодических группах), 13, 303, 409, 448, 519, 523, 604, 606
— — (о простых конечных группах), 439, 467, 525
— — ограниченная, 604
— — ослабленная, 605
— вхождения, 603
— изоморфизма, 322
— Мальцева, 521, 529
— сопряженности, 322
— тождества, 321, 522
— Хопфа, 303, 520, 521, 523
— Черникова, 519
— Шмидта, 519, 607
Проблемы алгоритмические (Дэна), 321, 322, 522, 602
— свободного разложения, 253
Продолжение прямого разложения, 125
Проектирование (= структурный изоморфизм), 372, 595
Проекционное множество, 426
Произведение вербальное, 579, 580

— — с объединенной подгруппой, 583
— гомоморфизмов, 157
— классов, 28
— косое, 591
— метабелево, 579
— многообразий, 572
— нильпотентное, 471, 579
— общее, 589
— отображений, 21, 22
— периодическое (= группа Tor), 695
— подмножеств группы, 61
— подпрямое, 555
— поливербальное, 582
— полное ассоциативное правильное, 583
— — вербальное, 584
— — прямое, 127, 553, 554
— — — с объединенной подгруппой, 555
— — свободное, 560
— полукоммутативное, 583
— полупрямое (= расщепляемое расширение), 408, 588
— правильное, 579
— прямое, 123, 124, 126, 324, 514, 547
— — с объединенной подгруппой, 555
— — — отмеченными подгруппами, 128
— — степени k, 581
— равномерное, 590
— разрешимое, 579
— свободное, 248, 249, 251, 253, 514, 557
— — конечного типа, 558
— — с объединенной подгруппой, 271, 516
— тензорное, 581, 694
— упорядоченное, 590
— цепное, 593
— элементов (группоида, группы), 21
— — (структуры), 330, 333
— эндоморфизмов, 95
Производная операция, 528
Простая группа, 71
— Ω-группа, 545
Противоположный элемент, 35
Прямая сумма (в структуре), 342
— — групп, 140
Прямое произведение, 123, 124, 126, 324, 514, 547
— — полное, 127, 553, 554
— — с объединенной подгруппой, 555
— — — отмеченными подгруппами, 128
— — степени k, 581
Прямой множитель, 124
— спектр, 531
Псевдосвободная группа, 569
p-адическая норма, 228
p-адическое число, 230
p-высота элемента, 682
p-группа (подгруппа), 416
p-группа Черникова, 487, 488
p-изотипная подгруппа, 675
p-приведенная группа, 687
p-(П-)сервантная подгруппа, 675
p^α-сервантная подгруппа, 675
(p, ∞)-группа, 617
П-группа (подгруппа), 416
П-отделимая группа, 453, 618
П-полная группа, 620
П-элемент, 611
ПD-группа, 620
ПFS-группа, 619
ПP-группа, 621
ПR-группа, 620
$\widetilde{\Pi}'$-группа, 623

Равномерное произведение, 590
Равнотипные подгруппы (элементы), 103
Радикал, 611, 626, 630
— (группы автоморфизмов) внешне локально нильпотентный, 640
— (— —) локально периодический, 639
— (— —)— стабильный, 639
— Плоткина (= локально нильпотентный радикал), 630, 631
— строгий, 627

— Фиттинга, 665
Радикальная группа, 627
— — в смысле Плоткина, 630, 643
Радикальный класс, 626
— —, минимальный над данным классом групп, 628
— нормальный делитель, 611
Разбиение множества на классы, 28
Разложение группы по двойному модулю, 66
— — — нормальному делителю, 73
— — — подгруппе, 63
Разрешимая A_i-группа, 645
— группа, 438
— — ступени n, 648
— инвариантная (нормальная) система, 439, 635
Разрешимое произведение, 579
Разрешимый ряд, 438
Ранг абелевой группы, 142
— группы общий, 415
— — специальный, 415
— локально свободной группы, 290
— свободной группы, 132
— — — многообразия, 571
— — нильпотентной группы, 471
Расширение, 78, 382
— абелевой группы, 387
Расщепление, 625
Расщепляемая смешанная абелева группа, 208
Расщепляемое расширение (= полупрямое произведение), 408, 588
Рациональная группа (= абелева группа без кручения ранга 1), 215, 588
— система, 652
Рациональный ряд, 652
Регулярная группа подстановок, 49
— подгруппа (по Вангу), 685
— p-группа, 619
Редуцированная абелева группа, 170
Резидуально конечная (= финитно аппроксимируемая) группа, 566, 614
Рекурсивно определимая группа, 602
Ряд верхний центральный, 470
— возрастающий главный, 432
— — инвариантный (нормальный), 432
— — композиционный, 432
— — центральный, 475
— вполне характеристический, 122
— главный (группы), 122
— — (структуры), 340
— Г-центральный, 639
— коммутантов, 438
— — возрастающий, 645
— композиционный, 118
— нижний центральный, 470
— нормальный (группы), 116
— — (структуры), 339
— подгрупп, 116
— разрешимый, 438
— рациональный, 652
— убывающий нормальный, 432
— Фраттини возрастающий, 664
— $\mathfrak{F}$-центральный, 635
— характеристический, 122
— центральный, 468
— — верхний (нижний), 470
R-группа (= группа с однозначным извлечением корня), 498
R-модуль, 159
$\mathfrak{R}$-радикал группы, 626
RI-, RK-, RN-группа, 440
RI^*-, RN^*-, $\overline{RI}$-, $\overline{RN}$-группа, 440
RI^*-радикал, 631
RJ^*-группа, 644
R^*-группа, 631

Самодуальная группа, 699
Сверхразрешимая группа, 644
Свободная абелева группа, 144
— в себе группа, 570
— группа, 130, 560, 570
— — многообразия (класса групп), 570
— D-группа, 622
— нильпотентная группа класса n, 466
— полинильпотентная группа, 650
— полугруппа, 543
— ΠD-группа, 621

— разрешимая группа ступени n, 649
Свободное Ω_{Π}-замыкание, 622
— произведение, 248, 249, 251, 253, 514, 558
— — конечного типа, 558
— — полное, 560
— — с объединенной подгруппой, 271, 516
— ΠD-произведение, 622
Свободные образующие, 133, 570
Свободный множитель, 249
— модуль, 162
Связка бинарных отношений, 541
— соответствий, 541
Сепарабельная абелева группа, 225
— (= чистая) подгруппа, 181, 673
Сервантная оболочка, 674
Сервантно полная примарная группа, 674
Сердцевина (группы), 555
Силовская K-подгруппа, 633
— p-подгруппа, 416, 615
— П-база, 453, 618
— П-подгруппа, 416
Силовский класс групп, 633
Сильно неразложимая абелева группа, 701
— приводимая система образующих, 670
— простая Ω-группа, 545
Симметрическая группа, 43, 44
Система верхне-нижняя центральная, 655
— главная, 432
— импримитивности, 88
— инвариантная, 432
— инвариантов абелевой группы с конечным числом образующих, 153
— композиционная, 431
— нормальная, 431
— образующих, 52
— — наследственная, 672
— — наследственно приводимая, 671
— — — сильно приводимая, 671
— — неприводимая, 52, 529
— — приводимая, 671
— определяющих соотношений, 134
— подгрупп локальная, 426
— — полная, 431
— разрешимая, 439
— рациональная, 652
— свободных образующих, 133, 570
— транзитивности, 87
— факторов (расширения), 383
— $\mathfrak{F}$-центральная, 635
— центральная, 475, 635
Скалярная группа автоморфизмов, 640
Скачок (системы), 430
Скрещенный гомоморфизм, 391
Слабо сервантная подгруппа, 674
Слово, 130
Сложение, 21
Слойно конечная группа, 411, 614
— экстремальная группа, 610
Смежный класс, 62, 63
Смешанная абелева группа, 208, 688
— группа, 34
Совершенная группа, 100, 326, 536
Соответствие (в группе), 541
Соотношение, 134
Сопряженные подгруппы, 68
— силовские П-базы, 453
— элементы, 67
Спектр обратный, 531
— прямой, 531
Специальная (= конечная нильпотентная) группа, 472
Специальный ранг, 415
Сплетение, 585
Стабильная группа автоморфизмов, 638
— пара (групп), 638
Стандартное сплетение, 586
Степень группы, 284
— элемента, 33
Строгий радикал, 627
Структура, 330
— многообразий, 571
— подгрупп, компактная, 595
— с дополнениями, 595
Структурный изоморфизм (= проектирование) групп, 373, 595

Ступень разрешимой группы, 648
Субинвариантная подгруппа, 534
Субинвариантный элемент, 658
Субнормальная (= достижимая) подгруппа, 119, 534
Сумма возрастающей последовательности групп, 58
— гомоморфизмов, 157
— подмножеств (группы), 139
— преобразований, 542
— элементов (группы), 21
— — (структуры), 330, 333
— эндоморфизмов, 153, 367
Суммируемые эндоморфизмы, 367, 542
Счетно распознаваемый класс групп, 633
S-группа, 485
S-радикал, 631
ST-группа, 648
Σ-группа, 676
Σ-свободная группа, 560
Σ^n-циклическая группа, 669

Таблица Кэли, 137
Тензорное произведение, 581, 694
Теорема Бэра (о приведенных свободных группах), 287
— — (о силовских p-подгруппах локально нормальных групп), 428
— — (о структурных изоморфизмах абелевой группы), 378
— Бэра–Куликова (о пополнениях абелевых групп), 173, 174
— Бэра–Леви, 268, 562, 580, 583, 621
— Бэра–Садовского, 376
— Вендта–Черникова, 484, 644
— Витта, 282
— Гёльдера, 100
— Гирша (о разрешимых нётеровых группах), 451
— Гольберга, 454
— Грушко, 304, 305, 557
— Дика, 134, 319
— Дэна–Магнуса (теорема о свободе), 322, 522, 601
— Жордана–Гёльдера, 118, 121, 341, 433, 534, 545, 590
— Коржинека, 328, 515
— Коши, 416
— Крулля–Шмидта см. Теорема Шмидта,
— Кэли, 48, 523
— Лагранжа, 65
— Магнуса, 279
— Маклейна, 393
— Мальцева (о пополнении), 510
— — (о ZA-группах), 479
— Мальцева–Ивасавы (о финитной аппроксимируемости), 282, 565
— Неймана (о вложимости группы в полную), 508, 622
— Нильсена–Шрейера, 268, 274
— о гомоморфизмах, 33, 114, 545
— — замене, 141
— — подгруппах абелевой группы с конечным числом образующих, 151
— — — свободного произведения, 257, 556, 561
— — — свободной абелевой группы, 147
— — соответствии между подгруппами при гомоморфизме, 75, 545
— — сопряженности силовских подгрупп, 421
— — частично упорядоченных системах конечных множеств, 427
— об изоморфизме, 78, 114, 545
— — — свободных разложений, 266
— — изоморфных продолжениях прямых разложений, 358
— Орэ, 335
— основная об абелевых группах с конечным числом образующих, 149
— Плоткина (об N-группах), 480
— Прюфера вторая, 179, 620, 668
— — первая, 179, 620, 668
— Прюфера–Куликова (о сервантных подгруппах), 185
— Пуанкаре, 65
— Ремака–Шмидта см. Теорема Шмидта,

— Силова вторая, 421, 422, 617
— — первая, 415
— Тице, 321
— Ульма, 200, 680
— Фейта–Томпсона, 525
— Фиттинга, 460, 466
— Фробениуса, 518
— Хигмэна–Нейманов, 301
— Холла, 452, 617
— — (о полных силовских базах), 453
— Цыпина, 196, 680
— Черникова (о полных ZA-группах), 495
— — (о разрешимых артиновых группах), 449
— Чунихина, 454
— Шмидта, 328, 363, 515, 549
— Шрейера, 117, 118, 121, 433, 534, 545, 590
— Шура, 458, 525, 617
— Эйленберга–Маклейна, 407
Теоретико-групповые функции, 635
Теория Бэра, 550
— Куликова, 188
— Тейхмюллера, 163
— Шрейера, 382
Тип рациональной группы, 217
— редуцированной группы, 194
— элемента (абелевой группы без кручения), 217
Тождества коммутаторные, 106
Тождественное соотношение, 284
Тождественный автоморфизм, 94
Тождество условное, 576
— Якоби, 648
Точная операция, 577
— пара (групп), 636
Транзитивная группа подстановок, 87
Транзитивность (операции), 577
Трансформа, 258
Трансформирование, 67, 68
Треугольная группа авторморфизмов, 640
T-группа, 648
T-произведение (= полукоммутативное произведение), 583
Tor (= периодическое произведение), 695

Убывающая нормальная цепь, 119
Убывающий нормальный ряд, 432
Узкая группа, 686
Ульмовская функция, 680
Ульмовские факторы, 194, 680
Ультрахарактеристическая подгруппа, 539
Умножение классов, 634
— многообразий, 572
— отображений, 22
— подстановок, 21
— элементов, 21
Универсальная алгебра, 545
— группа Холла, 607
— подгруппа (по Фуксу), 700
— счетная локально конечная группа (= универсальная группа Холла), 607
— фактор-группа, 700
Уплотнение нормального ряда, 116, 339
— нормальной системы, 431
Упорядоченное произведение, 590
Уравнения в группах, 568, 623, 624, 671
Урегулированная группа, 692
Условие максимальности, 413
— — для нормальных делителей, 414
— минимальности, 412
— — для нормальных делителей, 414
— слойной конечности, 411
Условия конечности, 409
— — ранга, 415

Фактор нормального ряда, 116
— нормальной системы, 432
Фактор-группа, 33, 75
Факторизация, 591
— в смысле Хайоша, 593
Фактор-кольцо, 93
Фактор-множество, 28
Факторно-делимая группа, 687

Факторно-расщепляемая группа, 687
Финитная аппроксимируемость, 566, 615
Фундаментальная группа (по Пикар), 568
Функционал, 634
F-группа, 692
FC-группа (ряд, элемент), 612
FC-нильпотентная (разрешимая) группа, 613
Ф-подгруппа (= подгруппа Фраттини), 473, 664
$\mathfrak{F}$-центральная система, 635
$\mathfrak{F}$-центральный ряд, 635

Характеристическая подгруппа, 103
Характеристически простая (= элементарная) группа, 104, 536
Характеристический ряд, 122
Холловская П-подгруппа, 617
— Θ-база, 619
— — полная, 619
Хопфова группа, 539, 558, 600
Hom, 693

Центр (группы), 83, 545
— пары прямых разложений, 548
— сервантности, 675
Централизатор, 86
Центральная верхняя цепь, 470
— нижняя цепь, 109
— система, 475, 635
Центральное Г-расширение, 587
— расширение, 405
Центральный автоморфизм, 369
— изоморфизм, 328
Центральный ряд, 468
Цепное произведение, 593
Цепь коммутантов, 108
— n-мерная, 389
Цикл n-мерный, 390
Циклическая группа (подгруппа), 50, 529
Циклически несократимое соотношение, 601

Частично упорядоченное множество, 330
Частичный автоморфизм, 540
— эндоморфизм, 540
Честная подгруппа, 702
Чистая (= сервантная) подгруппа, 181, 673
Член нижней центральной цепи, 109

Шрейерово многообразие, 574

Эквивалентные расширения, 382
— системы элементов (абелевой группы), 141
Экспонента группы, 605
— многообразия, 573
Экстремальная группа, 609
Элемент алгебраический, 660
— бесконечного порядка, 34
— бесконечной (конечной) высоты, 176
— достижимый, 658
— инвариантный, 83
— конечного порядка, 34
— локально достижимый, 660
— — субинвариантный, 660
— n-право-энгелев, 656
— n-энгелев, 656
— обратный, 31, 92
— ограниченный право-энгелев, 656
— — энгелев, 656
— право-энгелев, 656
— примитивный, 565, 567
— противоположный, 35
— субинвариантный, 658
— энгелев, 656
Элементарная (= характеристически простая) группа, 104, 536
Энгелев элемент, 656
Энгелева группа, 656
— — конечного класса, 656
Эндоморфизм, 94
Эндоморфизмы прямого разложения, 345
Эпиморфизм, 530

Ядерное условие, 578
Ядро гомоморфизма, 75
Якоби тождество, 648

Готический алфавит

𝔄 𝔞	—	A a	𝔑 𝔫	—	N n
𝔅 𝔟	—	B b	𝔒 𝔬	—	O o
ℭ 𝔠	—	C c	𝔓 𝔭	—	P p
𝔇 𝔡	—	D d	𝔔 𝔮	—	Q q
𝔈 𝔢	—	E e	ℜ 𝔯	—	R r
𝔉 𝔣	—	F f	𝔖 𝔰	—	S s
𝔊 𝔤	—	G g	𝔗 𝔱	—	T t
ℌ 𝔥	—	H h	𝔘 𝔲	—	U u
ℑ 𝔦	—	I i	𝔙 𝔳	—	V v
𝔍 𝔧	—	J j	𝔚 𝔴	—	W w
𝔎 𝔨	—	K k	𝔛 𝔵	—	X x
𝔏 𝔩	—	L l	𝔜 𝔶	—	Y y
𝔐 𝔪	—	M m	ℨ 𝔷	—	Z z

Учебное издание

КУРОШ Александр Геннадиевич

ТЕОРИЯ ГРУПП

Редактор *Н.В. Головин*
Технический редактор: *К.Ф. Брудно*
Корректоры *Ю.И. Зварич, О.А. Сигал, В.Р. Игнатова*
Оригинал-макет: *Д.А. Воробьев*
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 22.08.11. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 50,5. Уч.-изд. л. 55. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных файлов издательства
в ГУП «ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13