КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под редакцией
А.Н. ТИХОНОВА, В.А. ИЛЬИНА,
А.Г. СВЕШНИКОВА

ВЫПУСК 2

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2022

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических специальностей и специальности “Прикладная математика”

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2022

УДК 517
ББК 22.16
И 46

УЧЕБНИК УДОСТОЕН
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР ЗА 1980 ГОД

Ильин В.А., Позняк Э.Г. **Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II:** Учеб.: Для вузов. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — 464 с. — (**Курс высшей математики и математической физики**). — ISBN 978-5-9221-0537-8.

Один из выпусков «Курса высшей математики и математической физики» под редакцией А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова. Учебник создан на базе лекций, читавшихся авторами в течение ряда лет на физическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга включает теорию функциональных последовательностей и рядов, кратных (в том числе несобственных), криволинейных и поверхностных интегралов, интегралов, зависящих от параметров, теорию рядов и интегралов Фурье.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика».

Ил. 48.

Учебное издание

ИЛЬИН Владимир Александрович
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

Серия «Курс высшей математики и математической физики»

Редактор *Д.А. Миртова*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*

Подписано в печать 06.12.2021. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,0. Уч.-изд. л. 31,9. Тираж 900 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17 Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: http://www.fml.ru
Интернет-магазин: http://www.fmllib.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в АО «ИПК «Чувашия»
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-0537-8
9 785922 105378

ISBN 978-5-9221-0537-8
© ФИЗМАТЛИТ, 2006, 2009, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Вторая часть «Основ математического анализа» была издана тиражом, меньшим, чем первая часть, и превратилась в еще большую библиографическую редкость.

Несмотря на сравнительно небольшой объем, книга полностью охватывает материал, входящий в программу второго года обучения студентов специальностей «физика» и «прикладная математика», и, кроме того, содержит легко отделяемые от основного материала главы, посвященные теории меры и интеграла Лебега, теории гильбертовых пространств и входящие в программу так называемого «анализа-3» университетских курсов.

Книга переиздается стереотипно с текста второго издания, учитывающего опыт чтения лекций не только на физическом факультете, но и на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Июнь 1998 г. *В. А. Ильин*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В основу этой книги положены лекции, читавшиеся авторами в течение ряда лет в Московском государственном университете.

Как и в первой части, авторы стремились к систематичности изложения и к выделению важнейших понятий и теорем.

Кроме основного программного материала, книга содержит ряд дополнительных вопросов, играющих важную роль в различных разделах современной математики и физики: теорию меры и интеграл Лебега, теорию гильбертовых пространств и линейных самосопряженных операторов в этих пространствах, вопросы регуляризации рядов Фурье, теорию дифференциальных форм в евклидовых пространствах и др. Ряд разделов курса изложен с большей общностью и при меньших, чем обычно, ограничениях. Сюда относятся, например, условия почленного дифференцирования и почленного интегрирования функциональных последовательностей и рядов, теорема о замене переменных в кратном интеграле, формулы Грина и Стокса, необходимые условия интегрируемости ограниченной функции по Риману и по Лебегу.

Как и в первой части, в книге рассмотрен ряд вопросов, связанных с вычислительной математикой. В первую очередь сюда относятся дополнение к главе 2 о приближенном вычислении кратных интегралов и специальное приложение о вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье (метод регуляризации А. Н. Тихонова).

Материал данной книги вместе с первой частью полностью охватывает университетский курс математического анализа.

Отметим, что всюду в тексте при обращении к первой части мы называем ее «выпуском 1». Подчеркнем также, что при чтении этой книги глава 8 «Мера и интеграл Лебега», глава 11 «Гильбертово пространство» и все дополнения могут быть опущены без ущерба для понимания остального текста книги.

Авторы книги приносят глубокую благодарность А. Н. Тихонову и А. Г. Свешникову за множество ценных советов и глубоких замечаний, Ш. А. Алимову, труд которого над этой книгой вышел за рамки редактирования, Л. Д. Кудрявцеву и С. А. Ломову за большое количество ценных замечаний, П. С. Моденову и Я. М. Жилейкину, предоставившим материалы по теории поля и приближенным методам вычисления кратных интегралов.

Декабрь 1972 г. *В. Ильин, Э. Позняк*

ГЛАВА 1

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

В этой главе будут изучены последовательности и ряды, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором фиксированном множестве. Такие последовательности и ряды широко используются для представления и приближенного вычисления функций.

§ 1. Равномерная сходимость

1. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. *Если фиксировано некоторое множество* $\{x\}$ [1] *и если каждому числу* n *из натурального ряда чисел* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция* $f_n(x)$, *заданная на множестве* $\{x\}$, *то множество занумерованных функций* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ $\ldots, f_n(x), \ldots$ *мы и будем называть функциональной последовательностью.*

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть членами или элементами рассматриваемой последовательности, а множество $\{x\}$ — областью определения этой последовательности.

Для обозначения функциональной последовательности будем использовать символ $f_n(x)$.

Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1.1}$$

бесконечного числа членов функциональной последовательности $u_n(x)$ будем называть функциональным рядом.

Члены $u_n(x)$ этого ряда представляют собой функции, определенные на некотором множестве $\{x\}$.

Указанное множество $\{x\}$ называется при этом областью определения функционального ряда (1.1).

[1] Под $\{x\}$ можно понимать, в частности, как множество точек прямой, так и множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ евклидова пространства E^m.

Как и для случая числового ряда, сумму первых n членов ряда (1.1) называют n-й частичной суммой этого ряда.

Подчеркнем, что *изучение функциональных рядов совершенно эквивалентно изучению функциональных последовательностей*, ибо каждому функциональному ряду (1.1) однозначно соответствует функциональная последовательность

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \tag{1.2}$$

его частичных сумм и, наоборот, каждой функциональной последовательности (1.2) однозначно соответствует функциональный ряд (1.1) с членами

$$u_1(x) = S_1(x),\ u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

для которого последовательность (1.2) является последовательностью частичных сумм.

Приведем примеры функциональных последовательностей и рядов.

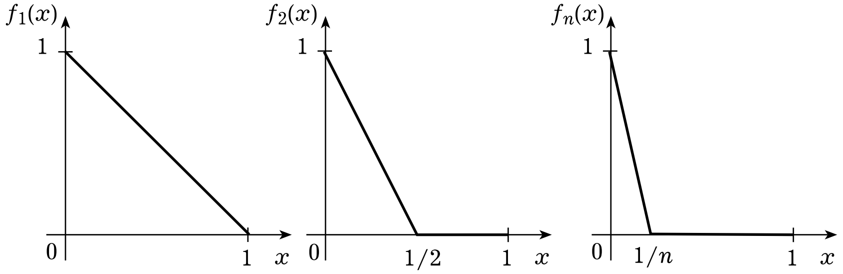


Рис. 1.1

Пример 1. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет вид

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 0 & \text{при} \quad 1/n < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

На рис. 1.1 изображены графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$.

Пример 2. В качестве примера функционального ряда рассмотрим следующий ряд по степеням x:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1.4}$$

Заметим, что $(n+1)$-я частичная сумма ряда (1.4) отличается от разложения e^x по формуле Маклорена только на величину остаточного члена $R_{n+1}(x)$.

2. Сходимость функциональной последовательности в точке и на множестве. Предположим, что функциональная последовательность (или ряд) определены на множестве $\{x\}$. Фиксируем произвольную точку x_0 из множества $\{x\}$ и рассмотрим все члены последовательности (или ряда) в точке x_0. При этом получим числовую последовательность (или ряд).

Если указанная числовая последовательность (или ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (или ряд) сходится в точке x_0.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (или ряд), называется областью сходимости этой последовательности (или ряда).

В различных конкретных случаях область сходимости может либо совпадать с областью определения, либо составлять часть области определения, либо вообще являться пустым множеством.

Соответствующие примеры читатель найдет ниже.

Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех значений x из множества $\{x\}$, образует вполне определенную функцию $f(x)$, также заданную на множестве $\{x\}$.

Эту функцию называют предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}$.

Совершенно аналогично, если функциональный ряд (1.1) сходится на некотором множестве $\{x\}$, то на этом множестве определена функция $S(x)$, являющаяся предельной функцией последовательности его частичных сумм и называемая суммой этого ряда.

Последовательность (1.3) из рассмотренного выше примера 1 *сходится на всем сегменте* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

В самом деле, $f_n(0) = 1$ для всех номеров n, т. е. в точке $x = 0$ последовательность (1.3) сходится к единице.

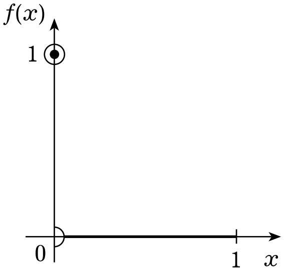


Рис. 1.2

Если же фиксировать любое x из полусегмента $0 < x \leqslant 1$, то все $f_n(x)$, начиная с некоторого номера (зависящего, конечно, от x), будут равны нулю. Стало быть, в любой точке x полусегмента $0 < x \leqslant 1$ последовательность (1.3) сходится к нулю.

Итак, последовательность (1.3) сходится на всем сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ к предельной функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

График этой предельной функции изображен на рис. 1.2

Подчеркнем, что эта функция не является непрерывной на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ (она разрывна в точке $x = 0$).

Обратимся теперь к функциональному ряду (1.4) из примера 2.

Этот ряд сходится в любой точке x бесконечной прямой и его сумма равна e^x. Доказательство можно найти в гл. 13 вып. 1 (см. пример 3 из п. 1 § 1 гл. 13) [1].

3. Понятие равномерной сходимости на множестве. Предположим, что последовательность

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1.5}$$

сходится на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* (1.5) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* $\{x\}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой номер* $N(\varepsilon)$, *что при* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *для всех* x *из множества* $\{x\}$ *справедливо неравенство* [2]

$$|f_n x - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Замечание 1. В этом определении весьма существенно то, что номер N зависит только от ε и не зависит от x. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (1.6) справедливо сразу для всех x из множества $\{x\}$.

Замечание 2. *Из сходимости последовательности* $\{f_n(x)\}$ *на множестве* $\{x\}$ *вовсе не вытекает равномерная сходимость ее на этом множестве.* Так, последовательность (1.3) из рассмотренного выше примера 1 сходится на всем сегменте $[0, 1]$ (это установлено выше).

Докажем, что эта последовательность *не сходится равномерно на сегменте* $[0, 1]$. Рассмотрим последовательность точек $x_n = 1/(2n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих сегменту $[0, 1]$. В каждой из этих точек (т. е. для каждого номера n) справедливы соотношения $f_n(x_n) = 1/2$, $f(x_n) = 0$. Таким образом, для любого номера n

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1/2,$$

т. е. при $\varepsilon \leqslant 1/2$ неравенству (1.6) нельзя удовлетворить сразу для всех точек x из сегмента $[0, 1]$ ни при каком номере n.

---

[1] Впрочем, это доказательство сразу вытекает из формулы Маклорена для e^x и из того, что остаточный член в этой формуле стремится к нулю для всех x.

[2] Если под $\{x\}$ понимать множество точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$ пространства E^m, то мы получим определение равномерной сходимости последовательности $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функций m переменных.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что равномерная на множестве $\{x\}$ сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ эквивалентна сходимости числовой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, члены ε_n которой представляют собой точные верхние грани функции $|f_n(x) - f(x)|$ на множестве $\{x\}$.

З а м е ч а н и е 4. Из определения 1 непосредственно вытекает, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ и на любой части множества $\{x\}$.

Приведем теперь пример функциональной последовательности, равномерно сходящейся на некотором множестве $\{x\}$. Рассмотрим все ту же последовательность (1.3), но не на всем сегменте $[0, 1]$, а на сегменте $[\delta, 1]$, где δ — фиксированное число из интервала $0 < \delta < 1$. Для любого такого δ найдется номер, начиная с которого все элементы $f_n(x)$ равны нулю на сегменте $[\delta, 1]$. Так как предельная функция $f(x)$ также равна нулю на сегменте $[\delta, 1]$, то на всем этом сегменте неравенство (1.6) будет справедливо для любого $\varepsilon > 0$, начиная с указанного номера. Это доказывает равномерную сходимость последовательности (1.3) на сегменте $[\delta, 1]$.

Определение 2. *Функциональный ряд называется р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я н а м н о ж е с т в е $\{x\}$ к своей сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.*

Докажите сами, что функциональный ряд (1.4) из рассмотренного выше примера 2 сходится к своей сумме e^x равномерно на каждом сегменте $-r \leqslant x \leqslant r$, где r — любое фиксированное положительное число [1].

4. Критерий Коши. Справедливы следующие две *основные* теоремы.

Теорема 1.1. *Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$ такой, что*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{1.7}$$

[1] Для доказательства достаточно оценить остаточный член $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции e^x. Этот остаточный член, представляющий собой разность e^x и $(n+1)$-й частичной суммы ряда (1.4), сразу для всех x из сегмента $-r \leqslant x \leqslant r$ удовлетворяет неравенству

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$$

(см. вып. 1, формулу (8.62)).

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p ($p = 1, 2, \ldots$) и всех x из множества $\{x\}$.

Теорема 1.2. *Для того чтобы функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.8}$$

равномерно на множестве $\{x\}$ сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{1.9}$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$.

Теорема 1.2 является следствием теоремы 1.1: достаточно заметить, что в левой части неравенства (1.9) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм ряда (1.8).

Доказательство теоремы 1.1. 1) Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой предельной функции $f(x)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер N такой, что для всех $n \geqslant N$ и сразу для всех x из множества $\{x\}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1.10}$$

Если p — любое натуральное число, то для $n \geqslant N$ и для всех x из множества $\{x\}$ тем более справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1.11}$$

Поскольку модуль суммы не превосходит суммы модулей, то в силу (1.10) и (1.11) получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \equiv |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant \\ \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$). Необходимость доказана.

2) Достаточность. Из неравенства (1.7) и из критерия Коши для числовой последовательности вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ при любом фиксированном x из множества $\{x\}$ и существование предельной функции $f(x)$.

Так как неравенство (1.7) справедливо *для любого натурального p*, то, осуществив в этом неравенстве предельный переход при $p \to \infty$ (см. вып. 1, теорему 3.13), получим, что для всех $n \geqslant N$ и всех x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ достаточность доказана.

5. Достаточные признаки равномерной сходимости. В зависимости от удобства будем формулировать признаки равномерной сходимости либо в терминах последовательностей, либо в терминах рядов [1].

Для формулировки первого признака введем новое понятие.

Определение. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$, если существует такое вещественное число A, что для всех x из множества $\{x\}$ и для всех номеров n справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant A$.*

Теорема 1.3 (признак Дирихле–Абеля). *Пусть дан функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x).$$

Этот ряд сходится равномерно на множестве $\{x\}$, если выполнены следующие два условия:

1) *последовательность $v_k(x)$ является невозрастающей на множестве $\{x\}$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю;*

2) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет равномерно ограниченную на множестве $\{x\}$ последовательность частичных сумм.*

Доказательство почти текстуально совпадает с доказательством соответствующего признака сходимости числовых рядов (см. вып. 1, гл. 13, § 5, п. 2). Мы предлагаем читателю провести его самому.

Пример 1. В качестве примера изучим вопрос о равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}. \tag{1.12}$$

Так как последовательность $\{1/k\}$ (для всех x) не возрастает и равномерно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле–Абеля ряд (1.12) равномерно сходится на любом множестве, на

[1] В силу сказанного в п. 1 обе эти формулировки эквивалентны.

котором ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \tag{1.13}$$

обладает равномерно ограниченной последовательностью частичных сумм. Вычислим и оценим n-ю частичную сумму $S_n(x)$ ряда (1.13).

Суммируя тождество

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx = \cos\Bigl(k-\frac{1}{2}\Bigr)x - \cos\Bigl(k+\frac{1}{2}\Bigr)x$$

по всем k от 1 до n, получим

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot S_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)x.$$

Отсюда

$$S_n(x) = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\Bigl(n+\dfrac{1}{2}\Bigr)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Стало быть, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}. \tag{1.14}$$

Из неравенства (1.14) очевидно, что последовательность $\{S_r(x)\}$ частичных сумм ряда (1.13) равномерно ограничена на любом фиксированном сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), ибо на любом таком сегменте $|\sin(x/2)|$ имеет *положительную* точную нижнюю грань.

Итак, мы доказали, что ряд (1.12) сходится равномерно на любом сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

***Теорема 1.4* (признак Вейерштрасса).** *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.15}$$

определен на множестве $\{x\}$ *и если существует сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *такой, что для всех* x *из множества* $\{x\}$ *и для любого номера* k *справедливо неравенство*

$$|u_k(x)| \leqslant c_k, \tag{1.16}$$

то функциональный ряд (1.15) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$.

Краткая формулировка: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Доказательство. Согласно критерию Коши для числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и для любого натурального p справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Из неравенств (1.16) и (1.17) и из того, что модуль суммы не превосходит суммы модулей, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$).

Согласно критерию Коши функциональный ряд (1.15) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

Пример 2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{1+\delta}}, \quad \text{где} \quad \delta > 0,$$

сходится равномерно на всей бесконечной прямой, ибо на всей прямой

$$\left|\frac{\sin kx}{k^{1+\delta}}\right| \leqslant \frac{1}{k^{1+\delta}},$$

а числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{1+\delta}}$ при $\delta > 0$ сходится (см. вып. 1, гл. 13).

Замечание 1. *Признак Вейерштрасса не является необходимым.*

В самом деле, выше установлено, что ряд (1.12) сходится равномерно на любом сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). В частности, ряд (1.12) сходится равномерно на сегменте $[\pi/2, 3\pi/2]$. Однако на указанном сегменте модуль k-го члена ряда (1.12) $\dfrac{|\sin kx|}{k}$ имеет точную верхнюю грань, равную $\dfrac{1}{k}$, т. е. мажорирующий числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ представляет собой заведомо расходящийся гармонический ряд.

***Теорема 1.5* (признак Дини [1])**. *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке сегмента $[a, b]$ и сходится на этом сегменте к предельной функции $f(x)$. Тогда, если все элементы последовательности $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ является равномерной на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Ради определенности предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает на сегменте $[a, b]$ (случай невозрастающей последовательности сводится к этому случаю помножением всех элементов последовательности на -1).

Положим

$$r_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

Последовательность $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

1) все $r_n(x)$ неотрицательны и непрерывны на сегменте $[a, b]$;

2) $\{r_n(x)\}$ является невозрастающей на сегменте $[a, b]$;

3) в каждой точке x сегмента $[a, b]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Требуется доказать, что последовательность $\{r_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $[a, b]$. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется *хоть один* номер n такой, что $r_n(x) < \varepsilon$ *сразу для всех x из* $[a, b]$ (тогда в силу невозрастания $\{r_n(x)\}$ неравенство $r_n(x) < \varepsilon$ будет справедливо и для всех последующих номеров).

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ не найдется ни одного номера n такого, что $r_n(x) < \varepsilon$ сразу для всех x из $[a, b]$. Тогда для любого номера n найдется точка x_n из $[a, b]$ такая, что

$$r_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{1.18}$$

Из последовательности $\{x_n\}$ в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x_0 сегмента $[a, b]$ (см. вып. 1, гл. 3, § 4).

Все функции $r_m(x)$ (при любом номере m) непрерывны в точке x_0. Стало быть, для любого номера m

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{1.19}$$

С другой стороны, выбрав для любого фиксированного номера m превосходящий его номер n_k, мы получим (в силу невозрастания последовательности)

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant r_{n_k}(x_{n_k}).$$

[1] Улисс Дини — итальянский математик (1845—1918).

Сопоставляя последнее неравенство с (1.18), будем иметь

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon \tag{1.20}$$

(для любого фиксированного m и превосходящего его номера n_k). Наконец, из сопоставления (1.19) и (1.20) получим

$$r_m(x_0) \geqslant \varepsilon$$

(для любого номера m).

Последнее неравенство противоречит сходимости последовательности $\{r_n(x)\}$ к нулю в точке x_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 2. В теореме Дини существенно условие монотонности последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$, ибо немонотонная на $[a, b]$ последовательность непрерывных на этом сегменте функций может сходиться в каждой точке сегмента $[a, b]$ к непрерывной на этом сегменте функции $f(x)$, но не сходиться к ней равномерно на $[a, b]$.

Примером может служить последовательность функций $f_n(x)$, равных $\sin nx$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/n$ и равных нулю при $\pi/n < x \leqslant \pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эта последовательность сходится к $f(x) \equiv 0$ в каждой точке $[0, \pi]$, но не сходится равномерно на $[0, \pi]$, ибо $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$ при $x_n = \pi/(2n)$ для *всех* номеров n.

Замечание 3. Сформулируем теорему Дини в терминах рядов: *если все члены ряда непрерывны и неотрицательны на сегменте* $[a, b]$ *и сумма этого ряда также непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то указанный ряд сходится к своей сумме равномерно на сегменте* $[a, b]$.

Замечание 4. Теорема Дини и ее доказательство сохраняют силу, если в этой теореме вместо сегмента $[a, b]$ взять любое ограниченное замкнутое множество $\{x\}$. Такое множество принято называть компактным.

Пример 1. Последовательность $\{x^n\}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

В самом деле, 1) для любого x из $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ эта последовательность сходится к нулю; 2) все функции x^n и предельная функция нуль непрерывны на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; 3) последовательность $\{x^n\}$ не возрастает на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Все условия теоремы Дини выполнены.

6. Почленный переход к пределу. Непрерывность суммы ряда и предельной функции последовательности. Рассмотрим произвольную точку a бесконечной прямой, и пусть $\{x\}$ — произвольное множество, быть может, и не содержащее точку a, но обладающее тем свойством, что в любой ε-окрестности точки a содержатся точки этого множества [1].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.15}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$. Пусть далее у всех членов этого ряда существует в точке a предельное значение

$$\lim_{x\to a} u_k(x) = b_k.$$

Тогда и функция $S\{x\}$ имеет в точке a предельное значение, причем

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1.21}$$

т. е. символ предела (lim) *и символ суммирования* (Σ) *можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу можно переходить п о ч л е н н о).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего докажем, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (1.15), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{1.22}$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$.

Переходя в неравенстве (1.22) к пределу $x \to a$ [2], получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех натуральных p).

Стало быть, для числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ выполнен критерий Коши и этот ряд сходится.

Оценим теперь разность $S(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ для значений x из малой окрестности точки a. Так как $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ для всех

[1]) Иными словами, точка a является предельной точкой $\{x\}$.

[2]) Такой предельный переход можно осуществить по какой-либо последовательности точек $\{x_m\}$, сходящейся к a.

точек множества $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Из этого тождества для всех x из $\{x\}$ получаем неравенство

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|. \tag{1.23}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд (1.15) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для фиксированного нами ε найдется номер n такой, что для всех точек x из множества $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.24}$$

Поскольку предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ и выбранного номера n можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.25}$$

для всех точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$.

Вставляя (1.24) и (1.25) в правую часть (1.23), мы окончательно получим, что

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

для точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$. Тем самым доказано, что функция $S(x)$ имеет в точке $x = a$ предельное значение и справедливо равенство (1.21). Теорема доказана.

Сформулируем теорему 1.6 в терминах функциональных последовательностей.

Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$ *к предельной функции* $f(x)$ *и* *если все элементы этой последовательности имеют в точке a предельное значение, то и предельная функция $f(x)$ имеет в точке a предельное значение, причем*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big),$$

т. е. символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ предела последовательности и символ $\lim\limits_{x\to a}$ предельного значения функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при $x \to a$ можно переходить почленно).

Замечание к теореме 1.6. Если в условиях теоремы 1.6 дополнительно потребовать, чтобы точка a принадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ ряда (1.15) были непрерывны в точке a (или соответственно непрерывны в этой точке справа или слева), то и сумма $S(x)$ ряда (1.15) будет непрерывна в точке a (или соответственно непрерывна в точке a справа или слева).

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(a)$ и равенство (1.21) принимает вид

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a),$$

что и означает непрерывность функции $S(x)$ в точке a (или, если стремление x к a одностороннее, то непрерывность $S(x)$ в этой точке соответственно справа или слева).

Применяя указанное замечание к каждой точке некоторого сегмента $[a, b]$, мы придем к следующей *основной* теореме.

Теорема 1.7. *Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на сегменте $[a, b]$ и если указанный ряд (указанная последовательность) сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, то и сумма этого ряда (предельная функция этой последовательности) непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

Замечания к теореме 1.7. 1) В теореме 1.7 вместо сегмента $[a, b]$ можно взять интервал, полусегмент, полупрямую, бесконечную прямую и вообще любое плотное в себе множество $\{x\}$. 2) В теореме 1.7 существенно требование равномерной сходимости, ибо неравномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции (см. пример (1) из пп. 1–3 настоящего параграфа).

Заключительное замечание. Все теоремы этого параграфа справедливы для последовательностей функций, заданных на множестве $\{x\}$ пространства E^m.

§ 2. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

1. Почленное интегрирование. Имеет место следующая *основная* теорема.

Теорема 1.8. *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причем указанную последовательность можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и при всех x из сегмента $[a, b]$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1.26}$$

Если будет доказано, что предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то, используя известные оценки интегралов [1]) и неравенство (1.26), мы получим

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$).

---

[1]) Имеются в виду следующие оценки интегралов, установленные в § 6 гл. 10 вып. 1: 1) если функция $F(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и функция $|F(x)|$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\left|\int_a^b F(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,dx$; 2) если $f(x)$ и $g(x)$ обе интегрируемы на $[a, b]$ и всюду на этом сегменте $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Тем самым будет доказано, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и нам остается доказать интегрируемость функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Подвергнув сегмент $[a, b]$ разбиению при помощи произвольных точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ на m частичных сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, договоримся обозначать символом $\omega_k(f)$ (соответственно $\omega_k(f_n)$) колебание на k-м частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f(x)$ (соответственно $f_n(x)$) [1].

Убедимся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $k = 1, 2, \ldots, m$ найдется достаточно большой номер n, для которого справедливо неравенство

$$\omega_k(f) \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1.27}$$

В самом деле, каковы бы ни были x' и x'' из сегмента $[x_{k-1}, x_k]$, справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + \\ + |f_n(x'') - f(x'')|. \tag{1.28}$$

В силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех x из $[a, b]$ будет справедливо неравенство (1.26). Таким образом, для этого номера n

$$|f(x') - f_n(x')| + |f_n(x'') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и, стало быть, в силу (1.28)

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f_n(x) - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Из последнего неравенства и из произвольности точек x' и x'' сразу же вытекает справедливость для выбранного номера n неравенства (1.27).

Обозначим теперь для взятого нами произвольного разбиения сегмента $[a, b]$ символами S и s верхнюю и нижнюю суммы функции $f(x)$, а символами S_n и s_n верхнюю и нижнюю суммы функции $f_n(x)$.

Умножая неравенство (1.27) на длину k-го частичного сегмента Δx_k и после этого суммируя его по всем $k = 1, 2, \ldots, m$, мы получим неравенство

$$S - s \leqslant S_n - s_n + \varepsilon. \tag{1.29}$$

[1] Напомним, что колебанием функции на данном сегменте называется разность между точной верхней и точной нижней гранями этой функции на данном сегменте.

Неравенство (1.29) установлено нами для произвольного разбиения сегмента $[a, b]$. В силу интегрируемости функции $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$ найдется разбиение этого сегмента, для которого $S_n - s_n < \varepsilon$ [1] и, стало быть, на основании (1.29) $S - s < 2\varepsilon$.

Так как ε — произвольное положительное число, то последнее неравенство доказывает интегрируемость $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ [2]. Теорема доказана.

Сформулируем теорему 1.8 в терминах функциональных рядов:

Если функциональный ряд (1.15) *сходится к своей сумме* $S(x)$ *равномерно на сегменте* $[a, b]$ *и если каждый член этого ряда* $u_k(x)$ *представляет собой функцию, интегрируемую на сегменте* $[a, b]$, *то и сумма* $S(x)$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$, *причем указанный ряд можно интегрировать на сегменте* $[a, b]$ *почленно, т. е. ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

сходится и имеет своей суммой $\int_a^b S(x)\,dx$.

Замечание. В учебниках по математическому анализу теорема 1.8, как правило, доказывается при более жестком предположении о том, что каждая функция $f_n(x)$ не только интегрируема, но и непрерывна на сегменте $[a, b]$. При этом дополнительном предположении приведенное выше доказательство упрощается, ибо для доказательства интегрируемости предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ достаточно сослаться на теорему 1.7.

2. Почленное дифференцирование. Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 1.9. *Пусть каждая функция* $f_n(x)$ *имеет на сегменте* $[a, b]$ *производную* $f'_n(x)$ [3], *причем последовательность производных* $\{f'_n(x)\}$ *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$,

[1] В силу теоремы 10.1 из гл. 10 вып. 1.

[2] В силу теоремы 10.1 из вып. 1 существование для произвольного $\varepsilon > 0$ разбиения сегмента, для которого $S - s < 2\varepsilon$ является необходимым и достаточным условием интегрируемости всякой ограниченной на данном сегменте функции. Ограниченность $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ сразу вытекает из неравенства (1.26) и из ограниченности интегрируемой на сегменте $[a, b]$ функции $f_n(x)$.

[3] Под термином «функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$» здесь и ниже подразумевается существование производной $f'(x)$ в любой внутренней точке $[a, b]$, правой производной $f'(a+0)$ в точке a и левой производной $f'(b-0)$ в точке b.

а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится хотя бы в одной точке* x_0 *сегмента* $[a, b]$. *Тогда последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к некоторой предельной функции* $f(x)$ *равномерно на всем сегменте* $[a, b]$, *причем эту последовательность можно дифференцировать на сегменте* $[a, b]$ *почленно, т. е. всюду на сегменте* $[a, b]$ *предельная функция* $f(x)$ *имеет производную* $f'(x)$, *являющуюся предельной функцией последовательности* $\{f'_n(x)\}$.

Доказательство. Сначала докажем, что *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$. Из сходимости числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной на $[a, b]$ сходимости $\{f'_n(x)\}$ заключаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (1.30)$$

для всех $n \leqslant N(\varepsilon)$ всех натуральных p и (это относится ко второму неравенству (1.30)) всех x из $[a, b]$.

Пусть x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Для функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ при любых фиксированных n и p выполнены на сегменте $[x_0, x]$ все условия теоремы Лагранжа (см. теорему 8.12 из вып. 1). По этой теореме между x и x_0 найдется точка ξ такая, что

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)](x - x_0).$$

Из последнего равенства и из неравенств (1.30) с учетом того, что $|x - x_0| \leqslant b - a$, получим, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для любого x из $[a, b]$, любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p).

Но это и означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на сегменте $[a, b]$ сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ [1].

Остается доказать, что *в любой точке* x_0 *сегмента* $[a, b]$ *предельная функция* $f(x)$ *имеет производную и что эта производная является предельной функцией последовательности* $\{f'_n(x)\}$.

Фиксируем на сегменте $[a, b]$ произвольную точку x_0 и по ней положительное число δ такое, чтобы δ-окрестность точки x_0 целиком содержалась в $[a, b]$ (в случае, если x_0 является

[1] В силу критерия Коши, т. е. теоремы 1.1.

граничной точкой сегмента $[a, b]$ под δ-окрестностью точки x_0 мы будем подразумевать правую полуокрестность $[a, a+\delta)$ точки a или соответственно левую полуокрестность $(b-\delta, b]$ точки b).

Обозначим символом $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx, удовлетворяющих условию $0 < |\Delta x| < \delta$ при $a < x_0 < b$, условию $0 < \Delta x < \delta$ при $x_0 = a$ и условию $-\delta < \Delta x < 0$ при $x_0 = b$, и докажем, что последовательность функций аргумента Δx

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x}$$

сходится равномерно на указанном множестве $\{\Delta x\}$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу равномерной сходимости $\{f_n'(x)\}$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon \tag{1.31}$$

для всех x из $[a, b]$, всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех натуральных p.

Заметив это, фиксируем произвольное Δx из множества $\{\Delta x\}$ и применим к функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ (при любых фиксированных n и p) на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$ теорему Лагранжа. По этой теореме найдется число θ из интервала $0 < \theta < 1$ такое, что

$$\begin{aligned}\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) &= \\ &= \frac{[f_{n+p}(x_0+\Delta x) - f_n(x_0+\Delta x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)]}{\Delta x} = \\ &= f_{n+p}'(x_0 + \theta\Delta x) - f_n'(x_0 + \theta\Delta x).\end{aligned}$$

Из последнего равенства и из неравенства (1.31), справедливого для всех точек x сегмента $[a, b]$, получим, что

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon$$

для любого Δx из $\{\Delta x\}$, любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$ (в силу критерия Коши). Но это позволяет применить к указанной последовательности в точке $\Delta x = 0$ теорему 1.6 о почленном предельном переходе. Согласно теореме 1.6 [1]) функция

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

являющаяся предельной функцией последовательности $\{\varphi_n(\Delta x)\}$,

[1]) Используется формулировка теоремы 1.6 в терминах функциональных последовательностей.

имеет при $\Delta x \to 0$ предельное значение, причем

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\Big[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)\Big] = \lim_{n\to\infty}\Big[\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)\Big] = \\ = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}\right] = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0).$$

Это и доказывает, что производная функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равна $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. Теорема доказана.

Приведем формулировку теоремы 1.9 в терминах функциональных рядов.

Если каждая функция $u_k(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$ и если ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке сегмента $[a, b]$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на всем сегменте $[a, b]$ к некоторой сумме $S(x)$, причем этот ряд можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. его сумма $S(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ производную, являющуюся суммой ряда из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.

Замечание 1. Подчеркнем, что в теореме 1.9 предполагается лишь существование на сегменте $[a, b]$ производной у каждой функции $f_n(x)$. Ни ограниченность, ни тем более интегрируемость или непрерывность этой производной не требуется. Обычно в курсах математического анализа теорема 1.9 доказывается при дополнительном предположении о непрерывности каждой производной $f_n'(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Замечание 2. Если в теореме 1.9 дополнительно потребовать непрерывности на сегменте $[a, b]$ каждой производной $f_n'(x)$, то в силу теоремы 1.7 производная предельной функции $f(x)$ будет также непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Замечание 3. Для случая функций m переменных теорема 1.9 принимает следующий вид: если каждая функция $f_n(x) = f_n(x_1, \ldots, x_m)$ имеет на ограниченном множестве $\{x\}$ точек E^m частную производную $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}$ и если последовательность $\left\{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ сходится равномерно на $\{x\}$, а сама последовательность

$\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке множества $\{x\}$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ можно дифференцировать по переменной x_k на множестве $\{x\}$ почленно.

Из теоремы 1.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.10. *Если каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$ и если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то и предельная функция $f(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$. Более того, если x_0 — любая точка $[a, b]$, то последовательность первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$, сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к первообразной $\Phi(x)$ предельной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для последовательности первообразных $\Phi_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$ выполнены все условия теоремы 1.9. Это обеспечивает равномерную на $[a, b]$ сходимость последовательности $\{\Phi_n(x)\}$ к предельной функции $\Phi(x)$, у которой в каждой точке $[a, b]$ существует производная, равная предельной функции $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$.

Замечание 4. Подчеркнем, что в теореме 1.10 не требуется ни ограниченности, ни тем более интегрируемости функций $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Материал последних трех пунктов позволяет сделать следующий важный вывод: *равномерная сходимость не выводит из класса функций, имеющих предельное значение* (теорема 1.6) *из класса непрерывных функций* (теорема 1.7), *из класса интегрируемых функций* (теорема 1.8), *из класса функций, имеющих первообразную* (теорема 1.10) и (*в случае равномерной сходимости производных*) *из класса дифференцируемых функций* (теорема 1.9).

В заключение этого пункта приведем основанный на теореме 1.9 пример функции $f(x)$, производная $f'(x)$ которой существует всюду на сегменте $[0, 1]$, но является разрывной в каждой рациональной точке этого сегмента.

Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

так что функция

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} + 2x \cdot \cos \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

является разрывной при $x = 0$ и непрерывной во всех остальных точках. Занумеруем все рациональные точки сегмента $[0, 1]$ в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ (возможность этого доказана в п. 3 § 4 гл. 3 вып. 1) и положим $u_k(x) = \dfrac{1}{k^2}\varphi(x - x_k)$. Тогда каждая производная $u'_k(x) = \dfrac{1}{k^2}\varphi'(x - - x_k)$ разрывна в одной точке x_k и непрерывна во всех остальных точках. Так как для всех x из сегмента $[0, 1]$

$$|u_k(x)| \leqslant \frac{|x - x_k|^2}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2}, \quad |u'_k(x)| \leqslant \frac{1 + 2|x - x_k|}{k^2} \leqslant \frac{3}{k^2},$$

то оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ мажорируются сходящимся числовым рядом $3 \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ и потому сходятся на сегменте $[0, 1]$ равномерно. По теореме 1.9 сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет на сегменте $[0, 1]$ производную $f'(x)$, равную сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ и имеющую разрыв в каждой точке x_k $(k = = 1, 2, \ldots)$.

3. Сходимость в среднем. Предположим, что каждая функция $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а также функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$. Тогда (как известно из гл. 10 вып. 1) и функция

$$[f_n(x) - f(x)]^2 = f_n^2(x) + f^2(x) - 2f_n(x)f(x)$$

также является интегрируемой на сегменте $[a, b]$.

Введем фундаментальное понятие сходимости в среднем.

Определение 1. *Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ если*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx = 0.$$

Определение 2. *Говорят, что функциональный ряд сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем к $S(x)$ на этом сегменте.*

Замечание. Из этих определений вытекает, что если последовательность (или ряд) сходится в среднем к $f(x)$ на всем сегменте $[a, b]$, то эта последовательность (или ряд) сходится в среднем к $f(x)$ и на любом сегменте $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

Выясним вопрос о связи между сходимостью в среднем и равномерной сходимостью последовательности.

Докажем сначала, что *если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и в среднем на $[a, b]$.*

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ в силу равномерной сходимости найдется номер N

такой, что
$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{1.32}$$
при всех x из $[a, b]$ и всех $n \geqslant N$.

В силу (1.32) для всех $n \geqslant N$
$$\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$
т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем.

Убедимся теперь в том, что *сходимость последовательности на некотором сегменте в среднем не влечет за собой не только равномерной на этом сегменте сходимости, но и сходимости хотя бы в одной точке указанного сегмента.*

Рассмотрим последовательность сегментов $I_1, I_2, \ldots,$ принадлежащих $[0, 1]$ и имеющих следующий вид:
$$\begin{aligned}
&I_1 = [0,\, 1],\\
&I_2 = \left[0,\, \frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2},\, 1\right],\\
&I_4 = \left[0,\, \frac{1}{4}\right], \quad I_5 = \left[\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\right], \quad I_6 = \left[\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right], \quad I_7 = \left[\frac{3}{4},\, 1\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&I_{2^n} = \left[0,\, \frac{1}{2^n}\right], \quad I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n},\, \frac{2}{2^n}\right], \ldots, \quad I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n},\, 1\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Определим n-й член последовательности следующим образом:
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{на сегменте } I_n,\\ 0 & \text{в остальных точках } [0,\, 1]. \end{cases}$$

Построенная нами последовательность *сходится в среднем к функции* $f(x) \equiv 0$ *на сегменте* $[0, 1]$.

В самом деле,
$$\int\limits_0^1 [f_n(x) - 0]^2\,dx = \int\limits_{I_n} f_n^2(x)\,dx = \int\limits_{I_n} dx =$$
$$= \text{длине сегмента } I_n \to 0 \ (\text{при } n \to \infty).$$

Вместе с тем построенная нами последовательность *не сходится ни в одной точке сегмента* $[0, 1]$.

В самом деле, какую бы точку x_0 из сегмента $[0, 1]$ мы ни фиксировали, среди *как угодно больших* номеров n найдутся как такие, для которых сегмент I_n содержит точку x_0 (для этих номеров $f_n(x_0) = 1$), так и такие, для которых сегмент I_n не содержит точку x_0 (для этих номеров $f_n(x_0) = 0$). Таким образом, последовательность $\{f_n(x_0\}$ содержит бесконечно много членов, как равных единице, так и равных нулю, т. е. эта последовательность расходится.

Оказывается, сходимость последовательности $\{f_n(x_0\}$ к предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем обеспечивает возможность почленного интегрирования этой последовательности на указанном сегменте.

Теорема 1.11. *Если последовательность $\{f_n(x_0\}$ сходится в среднем на сегменте $[a, b]$ к функции $f(x)$, то эту последовательность можно почленно интегрировать на сегменте $[a, b]$, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любых интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx}, \tag{1.33}$$

называемое *неравенством Коши–Буняковского.*

Доказательство леммы 1. Рассмотрим следующий квадратный трехчлен относительно λ:

$$\int_a^b[f(x)-\lambda g(x)]^2\,dx = \\ = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

Так как этот трехчлен *неотрицателен*, то он *не имеет различных вещественных корней*. Но тогда его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.11. Используя неравенство (1.33) при $g(x) \equiv 1$, будем иметь

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx \int\limits_a^b dx} = \sqrt{(b-a)\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx} \to 0$$

(при $n \to \infty$). Теорема доказана.

§ 3. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела

Пусть каждая из функций $f_n(x)$ определена на некотором сегменте $[a, b]$.

Определение. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывной на сегменте $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство*

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

справедливо для всех номеров n и для всех точек x' и x'' из сегмента $[a, b]$, связанных неравенством

$$|x' - x''| < \delta.$$

Замечание 1. Непосредственно из этого определения вытекает, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a, b]$, то и любая ее подпоследовательность равностепенно непрерывна на $[a, b]$.

Докажем следующее замечательное утверждение.

Теорема 1.12 (теорема Арцела). *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ следующую последовательность точек $\{x_n\}$: в качестве x_1 возьмем ту точку, которая делит сегмент $[a, b]$ на две равные части, в качестве x_2 и x_3 возьмем те две точки, которые вместе с x_1 делят сегмент $[a, b]$ на четыре равные части (рис. 1.3), в качестве x_4, x_5, x_6 и x_7 , возьмем те четыре точки, которые вместе с x_1, x_2 и x_3 делят сегмент $[a, b]$ на восемь равных частей (рис. 1.3) и т. д.

Построенная нами последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: какое бы $\delta > 0$ мы ни взяли, для этого δ найдется номер n_0 такой, что на любом принадлежащем $[a,\, b]$ сегменте длины δ лежит хотя бы один из элементов $x_1,\, x_2, \ldots, x_{n_0}$ [1].

Приступим теперь к выделению из последовательности $\{f_n(x)\}$ равномерно на сегменте $[a,\, b]$ сходящейся подпоследовательности.

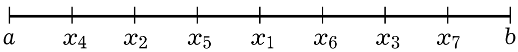


Рис. 1.3

Сначала рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_1. Получим *ограниченную* числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$, из которой на основании теоремы Больцано–Вейерштрасса (см. вып. 1, гл. 3, § 4) можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим так:

$$f_{11}(x_1), \quad f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$$

Далее рассмотрим функциональную последовательность

$$f_{11}(x), \quad f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots$$

в точке x_2. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим так:

$$f_{21}(x_2), \quad f_{22}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots$$

Таким образом, функциональная последовательность

$$f_{21}(x), \quad f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \tag{1.34}$$

является сходящейся и в точке x_1, и в точке x_2.

Далее рассматриваем функциональную последовательность (1.34) в точке x_3 и выделяем из нее сходящуюся подпоследовательность

$$f_{31}(x_3), \quad f_{32}(x_3), \ldots, f_{3n}(x_3), \ldots$$

Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим бесконечное множество подпоследовательностей

$$\begin{array}{llllll}
f_{11}(x), & f_{12}(x), & f_{13}(x), & \ldots, & f_{1n}(x), & \ldots \\
f_{21}(x), & f_{22}(x), & f_{23}(x), & \ldots, & f_{2n}(x), & \ldots \\
f_{31}(x), & f_{32}(x), & f_{33}(x), & \ldots, & f_{3n}(x), & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & f_{n3}(x), & \ldots, & f_{nn}(x), & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

[1] Про последовательность, обладающую таким свойством, говорят, что она является *всюду плотной* на сегменте $[a,\, b]$.

причем подпоследовательность, стоящая в n-й строке, является сходящейся в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь так называемую «диагональную» последовательность

$$f_{11}(x), \quad f_{22}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots$$

Докажем, что *эта последовательность равномерно сходится на сегменте* $[a, b]$.

Ради сокращения записи будем в дальнейшем обозначать эту диагональную последовательность (как и исходную последовательность) символом

$$f_1(x), \quad f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

(т. е. вместо сдвоенного индекса будем писать одинарный). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Так как диагональная последовательность является равностепенно непрерывной на сегменте $[a, b]$, то для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что, каковы бы ни были две точки x и x_m из сегмента $[a, b]$, связанные неравенством $|x - x_m| < \delta$, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.35}$$

Заметив это, разобьем сегмент $[a, b]$ на конечное число отрезков длины, меньшей δ. Из последовательности $\{x_n\}$ выберем конечное число n_0 первых членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ настолько большое, чтобы *в каждом из упомянутых отрезков содержалась хотя бы одна из точек* $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Очевидно, диагональная последовательность сходится в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Поэтому для фиксированного выше $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.36}$$

для всех $n \geqslant N$, всех натуральных p и всех $m = 1, 2, \ldots, n_0$.

Пусть теперь x — п р о и з в о л ь н а я точка сегмента $[a, b]$. Эта точка обязательно лежит в одном из упомянутых выше отрезков длины, меньшей δ. Поэтому для этой точки x найдется хоть одна точка x_m (m — один из номеров, равных $1, 2, \ldots, n_0$), удовлетворяющая условию $|x - x_m| < \delta$.

В силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит суммы их модулей, можем записать

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_m)| + \\ + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x)|. \tag{1.37}$$

Второй член в правой части (1.37) оценим с помощью неравенства (1.36), а для оценки первого и третьего членов в правой части (1.37) учтем, что $|x - x_m| < \delta$, и привлечем неравенство (1.35), справедливое для любого номера n (а стало быть, и для любого $n + p$).

Окончательно получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$, всех натуральных p и любой точки x из $[a, b]$. Равномерная сходимость диагональной последовательности доказана. Теорема 1.12 доказана.

Замечание 2. В теореме Арцела вместо равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ достаточно потребовать ограниченности этой последовательности хотя бы в одной точке этого сегмента. В самом деле, справедливо следующее утверждение: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ограничена хотя бы в одной точке x этого сегмента, то эта последовательность равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$.* Для доказательства этого утверждения заметим что по определению равностепенной непрерывности для $\varepsilon = 1$ найдется $\delta > 0$ такое, что колебание любой функции $f_n(x)$ на любом сегменте длины, не превышающей δ, не превосходит числа $\varepsilon = 1$. Так как весь сегмент $[a, b]$ можно покрыть конечным числом n_0 сегментов длины, не превышающей δ, то колебание любой функции $f_n(x)$ на всем сегменте $[a, b]$ не превосходит числа n_0. Но тогда из неравенства $|f_n(x_0)| \leqslant A$, выражающего ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ в точке x_0, вытекает неравенство $|f_n(x)| \leqslant A + n_0$, справедливое для любой точки x из сегмента $[a, b]$ и выражающее равномерную ограниченность рассматриваемой последовательности на этом сегменте.

Замечание 3. Установим достаточный признак равностепенной непрерывности: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций и если последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на этом сегменте, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

Для доказательства возьмем на сегменте $[a, b]$ две произвольные точки x' и x'' и запишем для функции $f_n(x)$ на сегменте $[x', x'']$ формулу Лагранжа (см. вып. 1, гл. 8, § 9).

Согласно теореме Лагранжа на сегменте $[x', x'']$ найдется точка ξ_n такая, что

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = f_n'(\xi_n) \cdot |x' - x''|. \qquad (1.38)$$

Поскольку последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, найдется постоянная A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f'_n(\xi_n)| \leqslant A. \tag{1.39}$$

Вставляя (1.39) в (1.38), получим

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant A|x' - x''|. \tag{1.40}$$

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда, если взять $\delta = \varepsilon/A$ и привлечь (1.40), то мы получим, что для всех номеров n и для всех x' и x'' из $[a,\, b]$, связанных условием $|x' - x''| < \delta$, будет справедливо неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность последовательности $\{f_n(x)\}$ доказана.

В качестве примера рассмотрим последовательность $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}$. Эта последовательность равностепенно непрерывна на любом сегменте $[a,\, b]$, ибо на любом сегменте $[a,\, b]$ последовательность из производных $\{\cos nx\}$ равномерно ограничена.

Замечание 4. Понятие равностепенной непрерывности можно формулировать не только по отношению к сегменту $[a,\, b]$, но и по отношению к интервалу, полусегменту, полупрямой, бесконечной прямой и вообще по отношению к любому плотному в себе множеству [1]. Кроме того, это понятие можно вводить не но отношению к последовательности функций, а по отношению к любому бесконечному множеству функций.

§ 4. Степенные ряды

1. Степенной ряд и область его сходимости. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\,, \tag{1.41}$$

где $a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots\,,\, a_n,\, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые коэффициентами ряда (1.41). Постараемся выяснить, как устроена *область сходимости* любого степенного ряда.

Заметим, что *всякий степенной ряд сходится в точке* $x = 0$, причем существуют степенные ряды, сходящиеся только в этой точке $\left(\text{например, ряд } \sum\limits_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k\right)$.

[1] При этом теорема Арцела остается справедливой, если в ее формулировке заменить сегмент $[a,\, b]$ любым ограниченным замкнутым множеством.

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда (1.41) следующую числовую последовательность:

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{1.42}$$

Могут представиться два случая: 1) последовательность (1.42) является *неограниченной*; 2) последовательность (1.42) является *ограниченной*.

В случае 2) у последовательности (1.42) *существует конечный верхний предел* (см. вып. 1, гл. 3, § 4, п. 3), который мы обозначим через L. Подчеркнем, что указанный верхний предел L заведомо *неотрицателен* (ибо все элементы последовательности (1.42) неотрицательны, а стало быть, и любая предельная точка этой последовательности неотрицательна).

Подводя итог, мы приходим к выводу, что могут представиться следующие три случая: I) последовательность (1.42) является неограниченной; II) последовательность (1.42) является ограниченной и имеет конечный верхний предел $L > 0$; III) последовательность (1.42) является ограниченной и имеет верхний предел $L = 0$.

Докажем теперь следующее замечательное утверждение.

Теорема 1.13 (Коши–Адамара).

I. *Если последовательность* (1.42) *не ограничена, то степенной ряд* (1.41) *сходится лишь при* $x = 0$.

II. *Если последовательность* (1.42) *ограничена и имеет верхний предел* $L > 0$, *то ряд* (1.41) *абсолютно сходится для значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| < 1/L$, *и расходится для значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $x > 1/L$.

III. *Если последовательность* (1.42) *ограничена и ее верхний предел* $L = 0$, *то ряд* (1.41) *абсолютно сходится для всех значений* x.

Доказательство.

I. Пусть последовательность (1.42) не ограничена. Тогда при $x \neq 0$ последовательность

$$|x|\, \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

также не ограничена, т. е. у этой последовательности имеются члены *со сколь угодно большими номерами* n, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \quad \text{или} \quad |a_n x^n| > 1.$$

Но это означает, что для ряда (1.41) (при $x \neq 0$) нарушено необходимое условие сходимости (см. вып. 1, гл. 13, § 1, п. 2), т. е ряд (1.41) расходится при $x \neq 0$.

II. Пусть последовательность (1.42) ограничена и ее верхний предел $L > 0$. Докажем, что ряд (1.41) абсолютно сходится при $|x| < 1/L$ и расходится при $|x| > 1/L$.

а) Фиксируем сначала любое x, удовлетворяющее неравенству $|x| < 1/L$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| < 1/(L+\varepsilon)$. В силу свойств верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n, удовлетворяют неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, начиная с указанного номера n, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\,\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \dfrac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon} < 1,$$

т. е. ряд (1.41) абсолютно сходится по признаку Коши (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 3).

б) Фиксируем теперь любое x, удовлетворяющее неравенству $|x| > 1/L$.

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| > 1/(L-\varepsilon)$. По определению верхнего предела из последовательности (1.42) можно выделить подпоследовательность $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к L.

Но это означает, что, начиная с некоторого номера k, справедливо неравенство

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon.$$

Таким образом, начиная с указанного номера k, справедливо неравенство

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x|\,\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1.$$

или

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1,$$

т. е. нарушено необходимое условие сходимости ряда (1.41), и этот ряд расходится.

III. Пусть последовательность (1.42) ограничена и ее верхний предел $L = 0$. Докажем, что ряд (1.41) абсолютно сходится при любом x.

Фиксируем произвольное $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд (1.41) заведомо абсолютно сходится). Поскольку верхний предел $L = 0$ и последовательность (1.42) не может иметь отрицательных предельных точек, число $L = 0$ является *единственной* предельной точкой, а стало быть, является пределом этой последовательности, т. е. последовательность (1.42) является бесконечно малой.

Но тогда для положительного числа $1/(2|x|)$ найдется номер, начиная с которого

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}.$$

Стало быть, начиная с указанного номера,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\,\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. ряд (1.41) абсолютно сходится по признаку Коши (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 3). Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема непосредственно приводит к следующему фундаментальному утверждению.

Теорема 1.14. *Для каждого степенного ряда* (1.41), *если он не является рядом, сходящимся лишь в точке* $x = 0$, *существует положительное число* R *(возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при* $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$.

Это число R называется радиусом сходимости рассматриваемого степенного ряда, а интервал $(-R,\, R)$ называется промежутком сходимости этого ряда. Для вычисления радиуса сходимости справедлива формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.43}$$

$\left(\text{в случае, когда } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 0,\ R = \infty\right)$.

Замечание 1. На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x = -R$ и $x = R$, степенной ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся [1].

Так для ряда $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ радиус сходимости R равен единице, промежуток сходимости имеет вид $(-1,\, 1)$ и этот ряд расходится на концах указанного промежутка.

Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k^2}$ промежуток сходимости тот же $(-1,\, 1)$, но этот последний ряд сходится на обоих концах указанного промежутка.

---

[1] Отметим следующую теорему Абеля: *если степенной ряд* (1.41) *сходится при* $x = R$, *то сумма его* $S(x)$ *является непрерывной в точке* R *слева.* Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$, но в таком виде теорема Абеля (фактически утверждающая регулярность метода суммирования Пуассона–Абеля) доказана в дополнении 3 к гл. 13 вып. 1.

З а м е ч а н и е 2. Все результаты настоящего пункта справедливы для ряда (1.41), в котором вещественная переменная x заменена комплексной переменной z.

Для такого ряда устанавливается существование положительного числа R такого, что ряд абсолютно сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Для вычисления R справедлива формула (1.43). Число R называется р а д и у с о м с х о д и м о с т и, а область $|z| < R$ — к р у г о м с х о д и м о с т и указанного степенного ряда.

2. Непрерывность суммы степенного ряда. Пусть степенной ряд (1.41) имеет радиус сходимости $R > 0$.

Лемма 2. *Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее условию $r < R$, ряд* (1.41) *равномерно сходится на сегменте $[-r, r]$, т. е. при $|x| \leqslant r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1.14 ряд (1.41) абсолютно сходится при $x = r$, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Но последний числовой ряд служит мажорантным для ряда (1.41) при всех x из сегмента $[-r, r]$. На основании признака Вейерштрасса ряд (1.41) сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$. Лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы 2 сумма ряда* (1.41) *является функцией, непрерывной на сегменте* $[-r, r]$ (в силу теоремы 1.7).

Теорема 1.15. *Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S(x)$ — сумма степенного ряда (1.41), а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x внутри промежутка сходимости, т. е. такое, что $|x| < R$. Всегда найдется число r такое, что $|x| < r < R$. В силу следствия из леммы 2 функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r, r]$. Стало быть, $S(x)$ непрерывна и в точке x. Теорема доказана.

3. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда.

Теорема 1.16. *Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда* (1.41), *а x удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд* (1.41) *можно почленно интегрировать на сегменте* $[0, x]$. *Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого x, удовлетворяющего условию $|x| < R$, найдется r такое, что $|x| < r < R$. Согласно лемме 2 ряд (1.41) сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$, а стало быть, и на сегменте $[0, x]$. Но тогда в силу теоремы 1.8 этот ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$.

В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots ,$$

радиус сходимости которого, согласно теореме 1.14, является величиной, обратной верхнему пределу последовательности,

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \tag{1.44}$$

Так как верхний предел последовательности (1.44) тот же, что и у (1.42) [1]), то теорема доказана.

Теорема 1.17. *Степенной ряд* (1.41) *внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 1.9 и леммы 2) доказать лишь второе утверждение теоремы.

В результате почленного дифференцирования (1.41) получим ряд

$$a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + \ldots ,$$

радиус сходимости R которого (согласно теореме 1.14) обратен верхнему пределу последовательности

$$\left\{ \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \right\}. \tag{1.45}$$

Так как последовательность (1.45) имеет тот же верхний предел, что и (1.42) [2]), то теорема доказана.

Следствие. *Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.*

Ряд, полученный n-кратным почленным дифференцированием исходного степенного ряда, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

[1]) Ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} =$
$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right]^{\frac{n}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right].$$

[2]) Ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} =$
$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right]^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right].$$

§ 5. Разложение функций в степенные ряды

1. Разложение функции в степенной ряд.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ (на множестве $\{x\}$) может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном интервале (указанном множестве).*

Справедливы следующие утверждения.

1°. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка* [1].

В самом деле, степенной ряд внутри его промежутка сходимости, который во всяком случае содержит интервал $(-R, R)$, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, причем все полученные при этом ряды сходятся внутри того же промежутка сходимости (теорема 1.17).

Но тогда суммы рядов, полученных сколь угодно кратным дифференцированием (в силу теоремы 1.15), представляют собой функции, непрерывные внутри указанного промежутка сходимости, а стало быть, непрерывные на интервале $(-R, R)$.

2°. *Если функция $f(x)$ может быть на интервале $(-R, R)$ разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.*

В самом деле, пусть функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, R)$ в степенной ряд (1.41).

Дифференцируя указанный ряд почленно n раз (что заведомо можно делать внутри интервала $(-R, R)$), получим

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + a_{n+1} \cdot (n+1)!x + \ldots$$

Отсюда при $x = 0$ найдем

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

или

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{1.46}$$

Таким образом, коэффициенты степенного ряда (1.41), в который может быть разложена функция $f(x)$, *однозначно определяется формулой* (1.46).

---

[1] Отметим, что существуют функции, имеющие на интервале $(-R, R)$ непрерывные производные любого порядка, но не разложимые на этом интервале в степенной ряд. Примером такой функции может служить

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ имеет на интервале $(-R, R)$ непрерывные производные любого порядка.

Определение 2. *Степенной ряд* (1.41), *коэффициенты которого определяются формулой* (1.46), *называется рядом Тейлора функции* $f(x)$.

Утверждение 2° приводит нас к следующему утверждению.

3°. *Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, R)$ в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.*

В заключение сформулируем следующее утверждение, непосредственно вытекающее из § 14 гл. 8 вып. 1.

4°. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(-R, R)$ (на множестве $\{x\}$), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале (указанном множестве).*

2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора. В вып. 1 (см. п. 2 § 15 гл.8) доказано, что остаточные члены в формуле Маклорена для функций e^x , $\cos x$ и $\sin x$ стремятся к нулю на всей бесконечной прямой, а остаточный член в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$ стремится к нулю на полусегменте $-1 < x \leqslant +1$.

В силу утверждения 4° из предыдущего пункта это приводит нас к следующим разложениям:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Первые три из этих разложений сходятся для всех значений x, а последнее — для значений x из полусегмента $-1 < x \leqslant 1$.

Остановимся теперь на разложении в степенной ряд функции $(1+x)^\alpha$ или на так называемом б и н о м и а л ь н о м р я д е.

Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \,\ldots\, (\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}.$$

Поэтому формула Маклорена с остаточным членом в форме Коши имеет вид (см. вып. 1, гл. 8, § 14)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-k+1)}{k!}x^k + R_{n+1}(x), \tag{1.47}$$

где

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(\theta x) = \\ &= \frac{(1-\theta)^n}{n!}\cdot x^{n+1}\cdot\alpha(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} = \\ &= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-n)}{n!}\cdot\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}\cdot x^{n+1} \end{aligned} \tag{1.48}$$

(θ — некоторое число из интервала $0<\theta<1$).

Сначала убедимся в том, что при $\alpha>0$ всюду на интервале $-1<x<1$ остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю (при $n\to\infty$).

В самом деле, все члены последовательности $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right\}$ всюду на указанном интервале не превосходят единицы; последовательность $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-n)}{n!}\right\}$ при любом фиксированном $\alpha>0$ ограничена [1]; число $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ определено при любом фиксированном $\alpha>0$ и при любом x из интервала $-1<x<+1$; наконец, последовательность $\{x^{n+1}\}$ является бесконечно малой для любого x из интервала $-1<x<1$.

Таким образом, в силу (1.48) остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю для любого фиксированного $\alpha>0$ и любого x из интервала $-1<x<1$.

Стало быть, в силу (1.47), *при* $\alpha>0$ *всюду на интервале* $-1<x<1$ *справедливо разложение*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \tag{1.49}$$

Докажем теперь, что *при* $\alpha>0$ *ряд, стоящий в правой части* (1.49), *равномерно сходится к функции* $(1+x)^\alpha$ *на замкнутом сегменте* $-1\leqslant x\leqslant 1$.

---

[1] Все элементы этой последовательности по модулю ограничены числом $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-[\alpha])}{[\alpha]!}$, где $[\alpha]$ — целая часть α.

Всюду на указанном сегменте этот ряд мажорируется следующим числовым рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha| \cdot |1-\alpha| \, \ldots \, |k-1-\alpha|}{k!}. \tag{1.50}$$

В силу признака Вейерштрасса для установления равномерной на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сходимости ряда, стоящего в правой части (1.49), достаточно доказать сходимость мажорирующего ряда (1.50).

Обозначим k-й член ряда (1.50) символом p_k. Тогда для всех достаточно больших k получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k-\alpha}{k+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{k+1}. \tag{1.51}$$

Из формулы (1.51) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} k\Big(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\Big) = (1+\alpha) \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 + \alpha > 1,$$

т. е. ряд (1.50) сходится в силу признака Раабе (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 5).

Тем самым доказано, что при $\alpha > 0$ ряд, стоящий в правой части (1.49), сходится равномерно на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Остается доказать, что указанный ряд сходится на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ к функции $(1+x)^\alpha$.

В силу доказанного выше сумма указанного ряда $S(x)$ и функция $(1 + {}$ ${}+x)^\alpha$ *совпадают всюду на интервале* $-1 < x < 1$. Кроме того, обе функции $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ *непрерывны на сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (функция $S(x)$ как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций; непрерывность функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$ очевидна).

Но тогда значения функций $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ в точках $x = -1$ и $x = 1$ обязаны совпадать, т. е. ряд, стоящий в правой части (1.49), равномерно сходится к $(1+x)^\alpha$ на замкнутом сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Элементарные представления о функциях комплексной переменной. Выше уже отмечалось, что на случай степенного ряда относительно комплексной переменной z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

переносятся теоремы 1 и 1.14 (о существовании и величине радиуса сходимости). Ряды такого типа используются для определения функций комплексной переменной z.

Функции e^z , $\cos z$ и $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.52}$$

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \tag{1.53}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.54}$$

Легко проверить, что указанные три ряда абсолютно сходятся для всех значений z (их радиус сходимости $R = \infty$).

Установим теперь связь между функциями e^z , $\cos z$ и $\sin z$.

Заменяя и формуле (1.52) z на iz, получим

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{(z)^2}{2!} + \frac{(z)^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{(z)^3}{3!} + \frac{(z)^5}{5!} - \ldots\right). \quad (1.55)$$

Сопоставляя правую часть равенства (1.55) с разложениями (1.53) и (1.54), придем к следующей замечательной формуле:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (1.56)$$

Формула (1.56) играет фундаментальную роль в теории функций комплексной переменной и называется ф о р м у л о й Э й л е р а.

Полагая в формуле Эйлера переменную z равной сначала вещественному числу x, а затем вещественному числу $-x$, получим следующие две формулы:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Складывая и вычитая эти две формулы, мы получим формулы, выражающие $\cos x$ и $\sin x$ через показательную функцию:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.57)$$

В заключение остановимся на определении логарифмической функции $\omega = \ln z$ комплексной переменной z. Эту функцию естественно определить как функцию, обратную показательной, т. е. из соотношения $z = e^w$. Полагая $w = u + iv$, $z = x + iy$, поставим перед собой цель — выразить u и v через $z = x + iy$.

Из соотношения

$$z = x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$

получим, используя понятия модуля и аргумента комплексного числа (см. формулу (7.6) из вып. 1),

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^u, \quad \arg z = v - 2\pi k,$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Из последних равенств находим, что

$$u = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$v = \arg z + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или окончательно

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad \text{где} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.58}$$

Формула (1.58) показывает, что логарифмическая функция в комплексной области *не является однозначной*: ее мнимая часть для одного и того же значения z имеет бесчисленное множество значений, отвечающих различным $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Легко понять, что аналогичная ситуация будет иметь место и при определении в комплексной области обратных тригонометрических функций.

4. Равномерное приближение непрерывной функции многочленами (теорема Вейерштрасса). В этом пункте мы докажем фундаментальную теорему, принадлежащую Вейерштрассу и установленную им в 1895 г.

***Теорема 1.18* (*теорема Вейерштрасса*).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, равномерно на сегменте $[a, b]$ сходящаяся к $f(x)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P_n(x)$ с номером n, зависящим от ε такой, что*

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех x из сегмента $[a, b]$.

Иными словами, *непрерывную на сегменте $[a, b]$ функцию $f(x)$ можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью ε.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем вместо сегмента $[a, b]$ рассматривать сегмент $[0, 1]$ [1]. Кроме того, достаточно доказать теорему для непрерывной функции $f(x)$, обращающейся в нуль на концах сегмента $[0, 1]$, т. е. удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $f(1) = 0$. В самом деле, если бы $f(x)$ не удовлетворяла этим условиям, то, положив

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)],$$

мы получили бы непрерывную на сегменте $[0, 1]$ функцию $g(x)$, удовлетворяющую условиям $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$, и из возможности представления $g(x)$ в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов вытекало бы, что и $f(x)$ представима в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов (ибо разность $f(x) - g(x)$ является многочленом первой степени).

Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Такую функцию

[1] Поскольку один из этих сегментов преобразуется в другой линейной заменой $x = (b - a)t + a$.

$f(x)$ мы можем продолжить на всю бесконечную прямую, положив ее равной нулю за пределами сегмента $[0, 1]$, и утверждать, что так продолженная функция *является равномерно непрерывной на всей бесконечной прямой.*

Рассмотрим следующую конкретную последовательность неотрицательных многочленов степени $2n$:

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.59}$$

у каждого из которых постоянная c_n выбрана так, что выполняется равенство

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.60}$$

Не вычисляя точного значения постоянной c_n, оценим ее сверху.

Для этого заметим, что для любого номера $n = 1, 2, \ldots$ и для всех x из сегмента $[0, 1]$ справедливо неравенство [1])

$$(1 - x^2)^n \geqslant 1 - nx^2. \tag{1.61}$$

Применяя неравенство (1.61) и учитывая, что $1/\sqrt{n} \leqslant 1$ при любом $n \geqslant 1$, будем иметь

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx = 2\int_{0}^{1}(1 - x^2)^n\,dx \geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant$$
$$\geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\,dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1.62}$$

Из (1.59), (1.60) и (1.62) заключаем, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ справедлива следующая оценка сверху для постоянной c_n:

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{1.63}$$

Из (1.63) и (1.59) вытекает, что при любом $\delta > 0$ для всех x из сегмента $\delta \leqslant x \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n. \tag{1.64}$$

[1]) Это неравенство вытекает из того, что при любом $n \geqslant 1$ функция $\varphi(x) = (1 - x^2)^n - (1 - nx^2)$ *неотрицательна всюду на сегменте* $0 \leqslant x \leqslant 1$, ибо эта функция обращается в нуль при $x = 0$ и имеет всюду на указанном сегменте неотрицательную производную $\varphi'(x) = 2nx[1 - (1 - x^2)^{n-1}]$.

Из (1.64) следует, что *при любом фиксированном* $\delta > 0$ *последовательность неотрицательных многочленов* $\{Q_n(x)\}$ *сходится к нулю равномерно на сегменте* $\delta \leqslant x \leqslant 1$ [1]).

Положим теперь для любого x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt \tag{1.65}$$

и убедимся в том, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ функция $P_n(x)$ есть многочлен степени $2n$, причем $\{P_n(x)\}$ и является искомой последовательностью многочленов, равномерно сходящейся на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ к функции $f(x)$.

Так как изучаемая функция $f(x)$ равна нулю за пределами сегмента $[0, 1]$, то для любого x из сегмента $[0, 1]$ интеграл (1.65) можно записать в виде

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt.$$

Заменяя в последнем интеграле переменную t на $t - x$, мы придадим ему вид

$$P_n(x) = \int_{0}^{1} f(t)Q_n(t-x)\,dt. \tag{1.66}$$

Из (1.66) и (1.59) ясно, что функция $P_n(x)$ представляет собой многочлен степени $2n$.

Остается доказать, что последовательность $\{P_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для фиксированного ε, в силу равномерной непрерывности $f(x)$ на всей бесконечной прямой, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x - y| < \delta. \tag{1.67}$$

Заметим еще, что так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то она и ограничена на этом сегменте, а стало быть, и всюду на бесконечной прямой. Это означает, что существует постоянная A такая, что для всех x

$$|f(x)| \leqslant A. \tag{1.68}$$

---

[1]) В самом деле, достаточно доказать, что последовательность $a_n = (1-\delta^2)^n \cdot \sqrt{n}$ сходится к нулю, а это вытекает, например, из того, что поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = (1-\delta^2) \lim_{n\to\infty} n^{1/(2n)} = (1-\delta^2) < 1,$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Коши (см. теорему 13.6 из вып. 1).

Используя (1.60), (1.64), (1.67) и (1.68) и учитывая неотрицательность $Q(x)$, оценим разность $P_n(x) - f(x)$.

Для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ будем иметь

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t)\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \leqslant 2A \int\limits_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2A \int\limits_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \leqslant 4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что для всех достаточно больших номеров n справедливо неравенство

$$4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствие. *Если не только сама функция $f(x)$, но и ее производные до некоторого порядка k включительно непрерывны на сегменте $[0, 1]$* [1]*, то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ такая, что каждая из последовательностей $\{P_n(x)\}$, $\{P_n'(x)\}$, ..., $\{P_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[0, 1]$ соответственно к $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$.*

В самом деле, не ограничивая общности, мы можем считать, что каждая из функций $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$ обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = 1$ [2], а при таких условиях функцию $f(x)$ можно продолжить на всю бесконечную прямую, полагая ее равной нулю вне $[0, 1]$, так что продолженная функция и все ее производные до порядка k включительно окажутся *равномерно непрерывными на всей бесконечной прямой.*

Но тогда, обозначая через $P_n(x)$ тот же многочлен (1.65), что и выше, и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.18, мы докажем, что каждая из разностей

$$P_n(x) - f(x), \quad P_n'(x) - f'(x), \ \ldots, \ P_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$$

является бесконечно малой, равномерной относительно x на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

З а м е ч а н и е 1. Изложенное нами доказательство легко обобщается на случай функции m переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, непрерывной в m-мерном кубе $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

---

[1] Конечно, вместо $[0, 1]$ можно взять $[a, b]$.

[2] Если бы $f(x)$ не удовлетворяла этим условиям, то мы нашли бы многочлен $\overline{P_k}(x)$ степени $2k$ такой, что для функции $g(x) = f(x) - \overline{P_k}(x)$ эти условия были бы выполнены.

В полной аналогии с теоремой 1.18 доказывается, что для такой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ существует равномерно сходящаяся к ней в m-мерном кубе последовательность многочленов от m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Замечание 2. Заметим, что фигурирующие в теореме 1.18 многочлены можно заменить функциями более общей природы, сохраняя при этом утверждение о возможности равномерного приближения такими функциями любой непрерывной функции f.

Договоримся называть произвольную совокупность A функций, определенных на некотором множестве E, алгеброй, если [1] 1) $f + g \in A$; 2) $f \cdot g \in A$, 3) $\alpha \cdot f \in A$ при произвольных $f \in A$ и $g \in A$ и при любом вещественном α.

Иными словами, алгебра есть совокупность функций, замкнутая относительно сложения и умножения функций и умножения функций на вещественные числа.

Если для каждой точки x множества E найдется некоторая функция $g \in A$ такая, что $g(x) \neq 0$, то говорят, что алгебра A не исчезает ни в одной точке x множества E.

Говорят, что совокупность A функций, определенных на множестве E, разделяет точки множества E, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 этого множества найдется функция f из A такая, что $f(x_1) \neq \neq f(x_2)$.

Имеет место следующее замечательное утверждение, называемое теоремой Вейерштрасса–Стоуна [2].

Пусть A — алгебра непрерывных на компактном [3] множестве E функций, которая разделяет точки множества E и не исчезает ни в одной точке этого множества. Тогда каждая непрерывная на множестве E функция $f(x)$ может быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности функций алгебры A.

[1] Напомним, что символ $f \in A$ означает принадлежность f к A.

[2] М. Стоун — американский математик.

[3] Напомним, что компактным называется замкнутое ограниченное множество.

Г Л А В А 2

ДВОЙНЫЕ И n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В выпуске 1 были рассмотрены физические и геометрические задачи, приводящие к понятию однократного определенного интеграла.

Типичными задачами такого рода являются задача о вычислении массы неоднородного стержня по известной линейной плотности этого стержня и задача о вычислении площади криволинейной трапеции (т. е. площади, лежащей под графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$).

Легко указать аналогичные «многомерные» задачи, приводящие к понятию двойного или тройного интеграла.

Так, задача о вычислении массы неоднородного тела T по известной объемной плотности $\rho(M)$ этого тела естественным образом приводит нас к понятию тройного интеграла.

Для вычисления массы указанного тела T разобьем его на достаточно малые участки $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Приближенно можно считать объемную плотность $\rho(M)$ каждого участка T_k постоянной и равной $\rho(M_k)$, где M_k — некоторая точка участка T_k. В таком случае масса каждого участка T_k будет приближенно равна $\rho(M_k) \cdot v_k$, где v_k — объем участка T_k.

Приближенное значение массы всего тела T будет равно сумме

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(M_k) \cdot v_k.$$

Точное значение массы естественно определить как предел указанной суммы при неограниченном уменьшении [1] каждого участка T_k. Этот предел и может быть взят за определение тройного интеграла от функции $\rho(M_k)$ по трехмерной области T.

Совершенно аналогично может быть рассмотрена геометрическая задача о вычислении объема так называемого криводон-

[1] Конечно, следует уточнить термин «неограниченное уменьшение».

ного цилиндра (т. е. объема изображенного на рис. 2.1 тела, лежащего под графиком неотрицательной функции $z = f(x, y)$ в некоторой двумерной области D). Эта задача приводит к понятию двойного интеграла от функции $f(x, y)$ по двумерной области D.

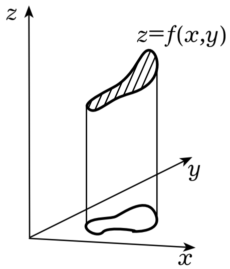


Рис. 2.1

В настоящей главе излагается теория двойных, тройных и вообще n-кратных интегралов.

Для более эффективного использования аналогии с однократным интегралом мы сначала введем понятие двойного интеграла для прямоугольника, а лишь затем введем двойной интеграл по произвольной области как с помощью прямолинейного, так и с помощью совершенно произвольного разбиения этой области.

§ 1. Определение и существование двойного интеграла

1. Определение двойного интеграла для прямоугольника. Пусть произвольная функция $f(x,y)$ определена всюду на прямоугольнике $R = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ (рис. 2.2).

Разобьем сегмент $a \leqslant x \leqslant b$ на n частичных сегментов при помощи точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, а сегмент $c \leqslant y \leqslant d$ на p частичных сегментов при помощи точек $c = y_0 < < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$.

Этому разбиению при помощи прямых, параллельных осям Ox и Oy (рис. 2.2), соответствует разбиение прямоугольника R на $n \cdot p$ частичных прямоугольников $R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, p$). Указанное разбиение прямоугольника R обозначим символом T.

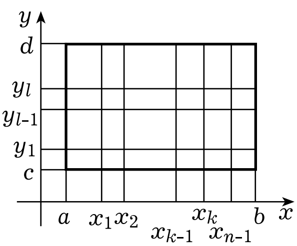


Рис. 2.2

Всюду в дальнейшем в этой главе под термином «прямоугольник» мы будем понимать прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

На каждом частичном прямоугольнике R_{kl} выберем произвольную точку (ξ_k, η_l). Положив $\Delta x_k = = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, обозначим через ΔR_{kl} площадь прямоугольника R_{kl}. Очевидно, $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \Delta y_l$.

Определение 1. *Число*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \cdot \Delta R_{kl} \tag{2.1}$$

называется *интегральной суммой* *функции* $f(x, y)$, *соответствующей данному разбиению T прямоугольника R и данному выбору промежуточных точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках разбиения T.*

Диагональ $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ будем называть диаметром прямоугольника R_{kl}. Символом Δ обозначим наибольший из диаметров всех частичных прямоугольников R_{kl}.

Определение 2. *Число I называется пределом интегральных сумм (2.1) при $\Delta \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\Delta < \delta$ независимо от выбора точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках R выполняется неравенство*

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Определение 3. *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) на прямоугольнике R, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\Delta \to 0$.*

Указанный предел I называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_R f(M) d\sigma$$

Замечание. Точно так же, как и для однократного определенного интеграла (см. вып. 1, гл. 10, § 1), устанавливается, что *любая интегрируемая на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ является ограниченной на этом прямоугольнике.*

Это дает нам основание рассматривать в дальнейшем лишь ограниченные функции $f(x, y)$.

2. Существование двойного интеграла для прямоугольника. Теория Дарбу, развитая в гл. 10 вып. 1 для однократного определенного интеграла, полностью переносится на случай двойного интеграла в прямоугольнике R. Ввиду полной аналогии мы ограничимся указанием общей схемы рассуждений.

Пусть M_{kl} и m_{kl} — точная верхняя и точная нижняя грани функции $f(x, y)$ на частичном прямоугольнике R_{kl} . Составим для данного разбиения T прямоугольника R две суммы:

верхнюю

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta R_{kl}$$

и нижнюю

$$s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta R_{kl}.$$

Справедливы следующие утверждения (доказательства их полностью аналогичны доказательствам, приведенным в п. 2 § 2 гл. 10 вып. 1).

1°. *Для любого фиксированного разбиения T и любого $\varepsilon > 0$ промежуточные точки (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках R_{kl} можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant S - \sigma \leqslant \varepsilon$.*

Точки (ξ_k, η_l) можно выбрать и таким образом, что интегральная сумма будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant \leqslant \sigma - s < \varepsilon$.

2°. *Если разбиение T' прямоугольника R получено путем добавления новых прямых к прямым, производящим разбиение T, то верхняя сумма S' разбиения T' не больше верхней суммы S разбиения T, а нижняя сумма s' разбиения T' не меньше нижней суммы s разбиения T, т. е.*

$$s \leqslant s', \quad S' \leqslant S.$$

3°. *Пусть T' и T'' — любые два разбиения прямоугольника R. Тогда нижняя сумма одного из этих разбиений не превосходит верхнюю сумму другого. Именно, если s', S' и s'', S'' — соответственно нижние и верхние суммы разбиений T' и T'', то*

$$s' \leqslant S'', \quad s'' \leqslant S'.$$

4°. *Множество $\{S\}$ верхних сумм данной функции $f(x, y)$ для всевозможных разбиений прямоугольника R ограничено снизу. Множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху.*

Таким образом, существуют числа

$$\overline{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\},$$

называемые соответственно в е р х н и м *и* н и ж н и м и н т е г р а л а м и Д а р б у *(от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R).*

Легко убедиться, что $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

5°. *Пусть разбиение T' прямоугольника R получено из разбиения T добавлением к последнему p новых прямых, и пусть s', S' и s, S — соответственно нижние и верхние суммы разбиений T' и T.*

Тогда для разностей $S - S'$ и $s' - s$ может быть получена оценка, зависящая от максимального диаметра Δ частичного прямоугольника разбиения T, числа p добавленных прямых, точных граней M и m функции $f(x, y)$ на прямоугольнике R и от диаметра d прямоугольника R.

Именно

$$S - S' \leqslant (M - m) \cdot p \cdot \Delta \cdot d,$$
$$s' - s \leqslant (M - m) \cdot p \cdot \Delta \cdot d.$$

6°. *Верхний и нижний интегралы Дарбу* $\overline{I}$ *и* $\underline{I}$ *от функции* $f(x, y)$ *по прямоугольнику* R *являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при* $\Delta \to 0$ [1].

Из свойств 1°–6° вытекает следующая основная теорема.

Теорема 2.1. *Для того чтобы ограниченная на прямоугольнике* R *функция* $f(x, y)$ *была интегрируема на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое разбиение* T *прямоугольника* R, *для которого* $S - s < \varepsilon$.

Как и в гл. 10 вып. 1, теорема 2.1 в соединении с теоремой о равномерной непрерывности функции позволяет выделить важнейшие классы интегрируемых функций.

Теорема 2.2. *Любая непрерывная в прямоугольнике* R *функция* $f(x, y)$ *интегрируема на этом прямоугольнике.*

Определение 1. *Назовем элементарной фигурой множество точек, представляющих собой сумму конечного числа прямоугольников (со сторонами, параллельными осям* Ox *и* Oy*)* [2].

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f(x, y)$ *обладает в прямоугольнике* R *(в произвольной замкнутой области* D*)* I*-свойством, если:* 1) $f(x, y)$ *ограничена в прямоугольнике* R *(в области* D*);* 2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется элементарная фигура, содержащая все точки и линии разрыва функции* $f(x, y)$ *и имеющая площадь, меньшую* ε.

Теорема 2.3. *Если функция* $f(x, y)$ *обладает в прямоугольнике* R I*-свойством, то она интегрируема на этом прямоугольнике.*

Доказательство теорем 2.2 и 2.3 полностью аналогично доказательству теорем 10.3 и 10.4 из вып. 1.

3. Определение и существование двойного интеграла для произвольной области. В п. 1 § 2 гл. 11 вып. 1 были введены понятия квадрируемости и площади плоской фигуры Q. Эти понятия без каких-либо изменений переносятся на случай произвольного ограниченного множества Q точек плоскости.

---

[1] Понятие предела верхних или нижних сумм определяется в полной аналогии с понятием предела интегральных сумм. Именно, число $\overline{I}$ называется *пределом верхних сумм* S при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $|S - \overline{I}| < \varepsilon$ при $\Delta < \delta$.

[2] Заметим, что сумма конечного числа совершенно произвольных прямоугольников (со сторонами, параллельными осям Ox и Oy) представима в виде суммы также конечного числа *не имеющих общих внутренних точек* прямоугольников (со сторонами, параллельными указанным осям). Поэтому в определении 1 можно брать прямоугольники, как имеющие общие внутренние точки, так и не имеющие их.

Во всех определениях и утверждениях указанного пункта вместо фигуры Q можно брать произвольное ограниченное множество Q.

В том же пункте было дано определение кривой (или границы фигуры) площади нуль: Γ называется кривой площади нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется многоугольник, содержащий все точки Γ и имеющий площадь, меньшую ε.

Отметим, что в этом определении термин «многоугольник» можно заменить термином «элементарная фигура». Это следует из того, что любая элементарная фигура является многоугольником, а любой многоугольник с площадью, меньшей числа ε, содержится в элементарной фигуре, имеющей площадь, меньшую числа 8ε [1].

Легко доказать следующее утверждение.

Если Γ имеет площадь нуль и если плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h > 0$ такое, что сумма площадей всех имеющих общие точки с Γ квадратов меньше ε.

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ можно фиксировать некоторую элементарную фигуру Q, содержащую внутри себя Γ и имеющую площадь, меньшую $\varepsilon/4$. После этого остается заметить, что при достаточно малом шаге квадратной сетки h все квадраты, имеющие общие с Γ точки, содержатся в элементарной фигуре, получающейся заменой каждого прямоугольника Q вдвое большим прямоугольником с тем же центром.

Подчеркнем, что класс кривых площади нуль весьма широк. Этому классу принадлежит, например, любая спрямляемая кривая (см. теорему 11.3 вып. 1).

Перейдем теперь к определению двойного интеграла для произвольной двумерной области D.

Пусть D — замкнутая ограниченная область, граница Γ которой имеет площадь нуль, а $f(x, y)$ — произвольная функция, определенная и ограниченная в области D.

Обозначим через R любой прямоугольник (со сторонами, параллельными координатным осям), содержащий область D (рис. 2.3).

---

[1] В самом деле: 1) многоугольник равен конечной сумме треугольников; 2) каждый треугольник равен сумме (или разности) двух прямоугольных треугольников; 3) прямоугольный треугольник содержится в прямоугольнике, вдвое большем по площади; 4) любой прямоугольник равен сумме конечного числа квадратов и одного прямоугольника, отношение сторон которого заключено между 1 и 2; 5) любой квадрат содержится во вдвое большем по площади квадрате со сторонами, параллельными осям Ox и Oy; 6) любой прямоугольник с отношением сторон, заключенным между 1 и 2, может быть дополнен до квадрата и потому содержится во вчетверо большем по площади квадрате со сторонами, параллельными осям Ox и Oy.

Определим в прямоугольнике R следующую функцию:

$$F(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y) & \text{в точках области } D, \\ 0 & \text{в остальных точках } R. \end{cases} \tag{2.2}$$

Определение. *Функцию $f(x,\, y)$ будем называть интегрируемой в области D, если функция $F(x,\, y)$ интегрируема в прямоугольнике R.*

При этом число $I = \iint\limits_R F(x,\, y)\, dx$ назовем двойным интегралом от функции $f(x,\, y)$ по области D и обозначим символом

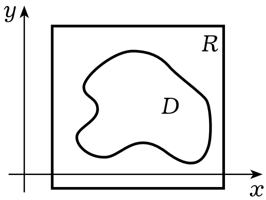


Рис. 2.3

$$I = \iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(M) d\sigma.$$

Замечание 1. Из этого определения сразу же вытекает, что интеграл $\iint\limits_D 1 \cdot dx\, dy$ *равен площади области D*. В самом деле, подвергая соответствующий прямоугольник R все более мелким разбиениям, мы получим, что верхние суммы этих разбиений будут равны площадям элементарных фигур, содержащих D, а нижние суммы — площадям элементарных фигур, содержащихся в D.

Замечание 2. *Пусть функция $f(x,\, y)$ интегрируема в ограниченной квадрируемой области D, плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h, C_1, C_2, … , $C_{n(h)}$ — квадраты указанной сетки, целиком содержащиеся в области D, $(\xi_k,\, \eta_k)$ — произвольная точка квадрата C_k, $m_k = \inf\limits_{C_k} f(x,\, y)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots\,, n(h))$. Тогда каждая из сумм*

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k,\, \eta_k) \cdot h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^2$$

имеет предел при $h \to 0$, равный $\iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy$.

Для доказательства достаточно заметить, что указанные суммы отличаются от обычной интегральной суммы (соответственно от нижней суммы) функции $f(x,\, y)$ в области D только отсутствием слагаемых по квадратам, имеющим общие точки с границей Γ области D, причем сумма всех отсутствующих слагаемых по модулю меньше произведения точной верхней грани M функции $|f(x,\, y)|$ в области D на площадь S элементарной фигуры, состоящей из квадратов, имеющих общие точки с Γ. Согласно доказанному выше утверждению $S \to 0$ при $h \to 0$.

В отношении данного нами определения естественно возникает вопрос, зависит ли факт существования двойного интеграла и его величина I от 1) выбора на плоскости координатных осей Ox и Oy; 2) выбора прямоугольника R, на котором мы определяем функцию $F(x, y)$.

В следующем пункте мы дадим другое определение интегрируемости функции $f(x, y)$ и двойного интеграла, не зависящее ни от выбора координатных осей, ни от выбора прямоугольника R, и докажем эквивалентность этого определения приведенному выше.

Пока же мы укажем следующую *основную* теорему, почти непосредственно вытекающую из теоремы 2.3 и из данного выше определения.

Теорема 2.4. *Если функция $f(x, y)$ обладает в области D I-свойством, то она интегрируема в области D.*

Доказательство. Для такой функции $f(x, y)$ функция $F(x, y)$, определенная формулой (2.2), будет обладать I-свойством в прямоугольнике R.

В самом деле, функция $F(x, y)$ ограничена в прямоугольнике R и все точки и линии разрыва этой функции либо совпадают с соответствующими разрывами $f(x, y)$, либо лежат на границе Γ области D. Поскольку Γ имеет площадь нуль, теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция $f(x, y)$ ограничена в области D и имеет в этой области разрывы лишь на конечном числе спрямляемых линий, то $f(x, y)$ интегрируема в области D.*

Следствие 2. *Если $f(x, y)$ интегрируема в области D, а $g(x, y)$ ограничена и совпадает с $f(x, y)$ всюду в D, за исключением множества точек площади нуль, то и $g(x, y)$ интегрируема в области D.*

4. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Выше мы определили двойной интеграл, исходя из разбиения области прямыми линиями на конечное число частичных прямоугольников. В этом пункте мы сформулируем другое определение двойного интеграла, основанное на разбиении области D любыми кривыми площади нуль на конечное число частичных областей произвольного вида, и докажем, что это определение эквивалентно данному выше.

Пусть D — замкнутая ограниченная область, имеющая границу Γ площади нуль. Разобьем область D при помощи конечного числа произвольных кривых площади нуль на конечное число r (не обязательно связных!) замкнутых частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Заметим, что каждая область D_i квадрируема, ибо граница ее имеет площадь нуль (см. вып. 1, гл. 11, § 2) и обозначим символом ΔD_i площадь области D_i.

В каждой частичной области D_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 1. *Число*

$$\widetilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i) \cdot \Delta D_i \tag{2.3}$$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные области D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в частичных областях.

Назовем диаметром области D_i точную верхнюю грань расстояний между двумя любыми точками этой области. Символом $\widetilde{\Delta}$ обозначим наибольший из диаметров частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Определение 2. *Число I называется пределом интегральных сумм* (2.3) *при $\widetilde{\Delta} \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\widetilde{\Delta} < \delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство*

$$|\widetilde{\sigma} - I| < \varepsilon.$$

Определение 3 **(*общее определение интегрируемости*).** *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) в области D, если существует конечный предел I интегральных сумм $\widetilde{\sigma}$ этой функции при $\widetilde{\Delta} \to 0$. Указанный предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D.*

Докажем следующую фундаментальную теорему.

Теорема 2.5. *Сформулированное общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в п.* 3.

Доказательство. Очевидно, что если функция $f(x, y)$ интегрируема, согласно общему определению интегрируемости, и ее двойной интеграл, согласно этому определению, равен I, то эта функция интегрируема и, согласно определению п. 3, имеет, согласно этому определению, тот же самый двойной интеграл I.

Остается доказать, что если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, согласно определению п. 3, и I — двойной интеграл от $f(x, y)$ по области D, согласно этому определению, то для функции $f(x, y)$ существует равный I предел интегральных сумм $\widetilde{\sigma}$ при $\widetilde{\Delta} \to 0$.

Обозначим через $\widetilde{M_i}$ и $\widetilde{m}_i$ точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x, y)$ в частичной области D и введем в рассмотрение верхнюю и нижнюю суммы

$$\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i \quad \text{и} \quad \widetilde{s} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{m}_i \cdot \Delta D_i.$$

Так как для любого разбиения

$$\widetilde{s} \leqslant \widetilde{\sigma} \leqslant \widetilde{S},$$

то достаточно доказать, что обе суммы $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ стремятся к I при $\widetilde{\Delta} \to 0$.

Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каждая из сумм $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ отклоняется от I меньше чем на ε как только $\widetilde{\Delta} < \delta$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для этого ε найдется разбиение T содержащего область D прямоугольника R на частичные прямоугольники R_k такое, что для него

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Обозначим через M_0 точную верхнюю грань $|f(x, y)|$ в области D и заключим все отрезки прямых, производящих разбиение T, и границу Γ области D внутрь элементарной фигуры, площадь которой меньше числа $\varepsilon/(4M_0)$.

Тогда заведомо существует положительная точная нижняя грань δ расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит границе указанной элементарной фигуры, а другая — отрезкам прямых, производящих разбиение T, или границе Γ области D [1].

Докажем, что для сумм $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ любого разбиения области D, удовлетворяющего условию $\Delta < \delta$, справедливы неравенства

$$\widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s}. \tag{2.6}$$

---

[1]) В самом деле, рассмотрим два множества: 1) множество $\{P\}$ всех точек границы указанной элементарной фигуры и 2) множество $\{Q\}$ всех точек отрезков разбиения T и границы Γ области D. Оба множества $\{P\}$ и $\{Q\}$ ограничены и *замкнуты*. Предположим, что точная нижняя грань δ расстояния $\rho(P, Q)$ равна нулю. Тогда найдутся две последовательности точек $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ такие, что $\rho(P_n, Q_n) \to 0$. Из указанных последовательностей в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящиеся подпоследовательности $\{P_{k_n}\}$ и $\{Q_{k_n}\}$, пределы P и Q которых (в силу замкнутости) принадлежат соответственно $\{P\}$ и $\{Q\}$. Но тогда $\rho(P, Q) = 0$, т. е. точки P и Q совпадают, что невозможно, ибо множество $\{Q\}$ лежит строго внутри элементарной фигуры и не имеет общих точек с $\{P\}$. Полученное противоречие доказывает положительность δ.

Ограничимся доказательством неравенства (2.5), ибо неравенство (2.6) доказывается аналогично.

Удалим из суммы $\widetilde{S}$ все слагаемые $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$, соответствующие областям D_i, каждая из которых *не лежит целиком в одном частичном прямоугольнике разбиения* T. Все такие области D_i принадлежат указанной выше элементарной фигуре, а поэтому общая сумма площадей таких областей меньше числа $\varepsilon/(4M_0)$.

Стало быть, сумма всех удаленных слагаемых $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$, меньше числа $\varepsilon/4$.

Таким образом, с ошибкой, не превышающей $\varepsilon/4$, справедливо равенство

$$\widetilde{S} = \sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i, \tag{2.7}$$

где штрих обозначает, что сумма распространена лишь на области D_i, *целиком лежащие в соответствующих прямоугольниках разбиения* T.

Заменим теперь в правой части (2.7) точные грани $\widetilde{M}_i$ в областях D_i, содержащихся в частичном прямоугольнике R_k, точной верхней гранью M_k в прямоугольнике R_k. Тогда получим

$$\sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i \leqslant \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k, \tag{2.8}$$

где $\Delta\widetilde{R}_k$ обозначает площадь области $\widetilde{R}_k$, равной сумме всех областей D_i, целиком содержащихся в прямоугольнике R_k.

Все области $R_k - \widetilde{R}_k$ принадлежат выбранной выше элементарной фигуре. Поэтому

$$\sum_k (\Delta R_k - \Delta\widetilde{R}_k) < \frac{\varepsilon}{4M_0},$$

и, стало быть,

$$\left| S - \sum_k M_k \cdot \Delta\widetilde{R}_k \right| = \left| \sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta\widetilde{R}_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, с ошибкой, не превышающей $\varepsilon/4$, справедливо равенство

$$\sum_k M_k \cdot \Delta\widetilde{R}_k = S. \tag{2.9}$$

Сопоставляя справедливые с ошибкой, не превышающей $\varepsilon/4$, равенства (2.7) и (2.9) с неравенством (2.8), мы получим неравенство (2.5).

Аналогично доказывается неравенство (2.6).

Из (2.5) и (2.6) получим

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s} \leqslant \widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Так как в силу (2.4) каждая из сумм s и S отклоняется от I меньше чем на $\varepsilon/2$, то каждая из сумм $\widetilde{s}$ и $\widetilde{S}$ в силу (2.10) отклоняется от I меньше чем на ε. Теорема доказана.

§ 2. Основные свойства двойного интеграла

Свойства двойного интеграла (и их вывод) вполне аналогичны соответствующим свойствам однократного определенного интеграла. Поэтому мы ограничимся формулировкой этих свойств.

1°. Аддитивность. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и если область D при помощи кривой Γ площади нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, причем

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

2°. Линейное свойство. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, а α и β — любые вещественные числа, то функция $[\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]$ также интегрируема в области D, причем

$$\iint\limits_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]\, dx\, dy = \\ = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy + \beta \iint\limits_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

3°. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, то и произведение этих функций интегрируемо в D.

4°. Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ обе интегрируемы в области D и всюду в этой области $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

5°. Если $f(x, y)$ интегрируема в области D, то и функция $|f(x, y)|$ интегрируема в области D, причем

$$\left| \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

(Конечно, из интегрируемости $|f(x, y)|$ в D не вытекает интегрируемость $f(x, y)$ в D.)

6°. Теорема о среднем значении. Если обе функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, функция $g(x, y)$ неотрицательна (неположительна) всюду в этой области, M и m — точная верхняя и точная нижняя грани функции $f(x, y)$ в области D, то найдется число μ, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant \mu \leqslant M$ и такое, что справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x, y)g(x, y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy. \tag{2.11}$$

В частности, если функция $f(x, y)$ непрерывна в D, а область D связна, то в этой области найдется [1]) такая точка (ξ, η), что $\mu = f(\xi, \eta)$, и формула (2.11) принимает вид

$$\iint\limits_D f(x, y)g(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta) \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

7°. Важное геометрическое свойство. $\iint\limits_D 1 \cdot dx\,dy$ равен площади области D. (Это свойство, как уже отмечалось выше, непосредственно вытекает из определения интегрируемости, данного в п. 3 § 1.)

§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному

Излагаемое в этом параграфе сведение двойного интеграла к повторному однократному является одним из эффективных способов вычисления двойного интеграла.

1. Случай прямоугольника.

Теорема 2.6. *Пусть для функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $R = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ существует двойной интеграл $\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy$.*

Пусть далее для каждого x из сегмента $a \leqslant x \leqslant b$ существует однократный интеграл

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{2.12}$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$$

[1]) В силу теоремы 14.5 из вып. 1.

и справедливо равенство

$$\iint\limits_R f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,\,y)\,dy. \tag{2.13}$$

Доказательство. Как и в § 1, разобьем прямоугольник R с помощью точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$ на $n \cdot p$ частичных прямоугольников

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]$$
$$(k = 1,\,2,\,\ldots,\,n;\; l = 1,\,2,\,\ldots,\,p).$$

Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$ и обозначим через M_{kl} и m_{kl} точные грани функции $f(x,\,y)$ на частичном прямоугольнике R_{kl}. Тогда всюду на этом прямоугольнике

$$m_{kl} \leqslant f(x,\,y) \leqslant M_{kl}. \tag{2.14}$$

Положим в этом неравенстве $x = \xi_k$, где ξ_k — произвольная точка сегмента $[x_{k-1},\,x_k]$, и после этого проинтегрируем (2.14) по y в пределах от y_{l-1} до y_l. Получим

$$m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k,\,y)\,dy \leqslant M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.15}$$

Суммируя (2.15) по всем l от 1 до p и используя обозначение (2.12), будем иметь

$$\sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant I(\xi_k) \leqslant \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.16}$$

Далее умножим (2.16) на Δx_k и просуммируем по всем k от 1 до n. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta x_k\Delta y_l \leqslant \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\cdot\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\cdot\Delta x_k\cdot\Delta y_l. \tag{2.17}$$

Пусть наибольший диаметр Δ частичных прямоугольников стремится к нулю. Тогда и наибольшая из длин Δx_k стремится к нулю. Обрамляющие члены в (2.17), представляющие собой нижнюю и верхнюю суммы, стремятся при этом к двойному интегралу $\iint\limits_R f(x,\,y)\,dx\,dy$.

Стало быть, существует предел и среднего члена в (2.17), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению однократного интеграла равен

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\,y)\,dy.$$

Тем самым доказано существование повторного интеграла и равенство (2.13). Теорема доказана.

Замечание. В теореме 2.6 можно поменять x и y ролями, т. е. можно предположить существование двойного интеграла и существование для любого y из сегмента $c \leqslant y \leqslant d$ однократного интеграла

$$K(y) = \int_a^b f(x,\,y)\,dx.$$

Тогда теорема будет утверждать существование повторного интеграла

$$\int_c^d K(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\,y)\,dx$$

и равенство

$$\iint_R f(x,\,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\,y)\,dx. \tag{2.18}$$

2. Случай произвольной области.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу этой области не более чем в двух точках, ординаты которых суть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \leqslant y_2(x)$* (рис. 2.4); 2) *функция $f(x,\,y)$ допускает существование двойного интеграла*

$$\iint_D f(x,\,y)\,dx\,dy$$

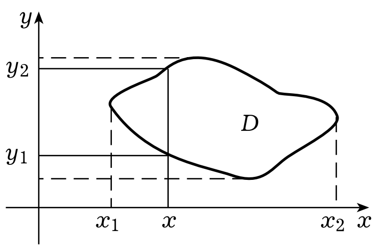


Рис. 2.4

и существование для любого x однократного интеграла

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)\,dx\,dy.$$

При этих условиях существует повторный интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)\,dx\,dy$$

(x_1 и x_2 — наименьшая и наибольшая абсциссы точек области D) и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)\,dy. \tag{2.19}$$

Доказательство. Обозначим через R прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий область D, а через $F(x,\,y)$ — функцию, совпадающую с $f(x,\,y)$ в точках области D и равную нулю в остальных точках R. Для функции $F(x,\,y)$ в прямоугольнике R выполнены все условия теоремы 2.7, и, стало быть, справедлива формула (2.13), которая (с учетом того, что $F(x,\,y)$ равна нулю вне D и совпадает с $f(x,\,y)$ в D) переходит в формулу (2.19). Теорема доказана.

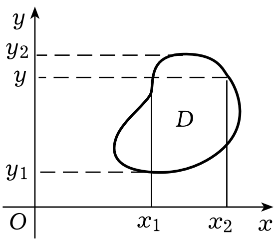


Рис. 2.5

Замечание. В теореме 2.7 можно поменять ролями x и y, т. е. можно предположить, что выполнены следующие два условия: 1) область D такова, что любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает границу этой области не более чем в двух точках, абсциссы которых суть $x_1(y)$ и $x_2(y)$, где $x_1(y) \leqslant x_2(y)$ (рис. 2.5); 2) функция $f(x,\,y)$ допускает существование по области D двойного интеграла и существование для любого y однократного интеграла

$$\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\,y)\,dx.$$

При выполнений этих двух условий существует повторный интеграл

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\,y)\,dx$$

(y_1 и y_2 — наименьшая и наибольшая ординаты точек области D) и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\,y)\,dx. \tag{2.19$'$}$$

Пример. Пусть область D — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$ (рис. 2.6), а $f(x,\,y) = x^2(R^2-y^2)^{3/2}$. Любая прямая, параллельная оси

Ox, пересекает границу D не более чем в двух точках, абсциссы которых суть $x_1 = -\sqrt{R^2 - y^2}$ и $x_2 = \sqrt{R^2 - y^2}$ (см. рис. 2.6). Поэтому применяя формулу (2.19′), получим

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2 (R^2 - y^2)^{3/2}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} (R^2-y^2)^{3/2} \left[\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\,dx\right] dy = \frac{2}{3}\int\limits_{-R}^{R} (R^2-y^2)^3\,dy = \frac{64}{105}R^7.$$

Замечание 2. В случае, если область D не удовлетворяет требованиям теоремы 2.7 или замечания 1 к этой теореме, часто удается разбить эту область на сумму конечного числа областей

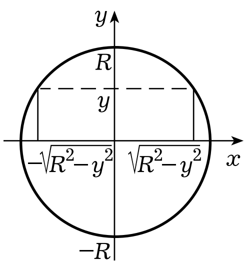


Рис. 2.6

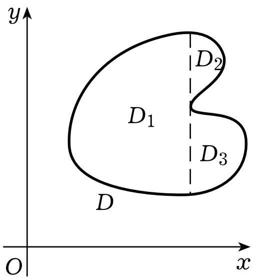


Рис. 2.7

такого типа, не имеющих общих внутренних точек. Тогда интеграл по области D, в силу свойства аддитивности (см. свойство 1° из § 2), равен сумме интегралов по соответствующим областям. Так, область D, изображенную на рис. 2.7, удается разбить на сумму трех областей D_1, D_2 и D_3, к каждой из которых применима или теорема 2.7 или замечание 1.

§ 4. Тройные и n-кратные интегралы

Изложенная нами теория двойного интеграла без каких-либо осложнений и новых идей переносится на случай тройного и вообще n-кратного интеграла. Остановимся на основных моментах теории n-кратного интеграла.

Прежде всего договоримся считать, что объем n-мерного прямоугольного параллелепипеда по определению равен произведению длин всех его ребер, выходящих из одной вершины.

Далее договоримся называть элементарным телом множество точек n-мерного пространства, представляющее собой сумму конечного числа n-мерных прямоугольных параллелепипедов, не имеющих общих внутренних точек и имеющих ребра, параллельные осям координат.

Объем любого элементарного тела нам известен и равен сумме объемов составляющих его параллелепипедов.

Пусть теперь D — произвольная ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве. Назовем нижним объемом области D точную верхнюю грань $\underline{V}$ объемов всех содержащихся в D элементарных тел, а верхним объемом области D — точную нижнюю грань $\overline{V}$ объемов всех элементарных тел, содержащих область D.

Легко убедиться в том, что $\underline{V} \leqslant \overline{V}$ [1].

Область D называется кубируемой, если $\underline{V} = \overline{V}$. При этом число $V = \underline{V} = \overline{V}$ называется n-мерным объемом области D.

В полной аналогии со случаем плоской области доказывается следующее утверждение.

Для того чтобы n-мерная область D была кубируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлись два элементарных тела, одно из которых содержит D, а другое содержится в D, разность объемов которых по модулю меньше числа ε.

Поверхностью (или многообразием) n-мерного объема нуль договоримся называть замкнутое множество, все точки которого принадлежат элементарному телу как угодно малого n-мерного объема.

Очевидно, что n-мерная область D кубируема тогда и только тогда, когда граница этой области представляет собой многообразие n-мерного объема нуль.

Сначала n-кратный интеграл от функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется в n-мерном прямоугольном параллелепипеде R, ребра которого параллельны осям координат.

С этой целью мы производим разбиение каждого из n ребер параллелепипеда R на конечное число частичных сегментов и таким путем получаем разбиение T параллелепипеда R на конечное число частичных n-мерных параллелепипедов [2].

Для указанного разбиения T в полной аналогии со случаем $n = 2$ определяются интегральная, верхняя и нижняя суммы любой ограниченной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

---

[1] Неравенство $\underline{V} \leqslant \overline{V}$ доказывается точно так же, как неравенство $\underline{P} \leqslant \overline{P}$ в п. 1 § 2 гл. 11 вып. 1.

[2] Можно сказать, что разбиение T осуществляется с помощью конечного числа $(n-1)$-мерных гиперплоскостей, параллельных координатным осям.

n-кратный интеграл от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по параллелепипеду R определяется как предел интегральных сумм при стремлении к нулю длины наибольшей из диагоналей частичных n-мерных параллелепипедов.

Как и для случая $n = 2$, теория Дарбу устанавливает необходимое и достаточное условие интегрируемости в следующей форме: *для интегрируемости функции f в параллелепипеде R необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось разбиение T параллелепипеда R, для которого разность верхней и нижней сумм была меньше ε.*

После этого легко определить n-кратный интеграл от функции f по произвольной замкнутой ограниченной n-мерной области D, граница которой имеет n-мерный объем нуль.

Этот интеграл определяется как интеграл по содержащему область D n-мерному прямоугольному параллелепипеду R (с ребрами, параллельными координатным осям) от функции F, совпадающей с f в области D и равной нулю вне D.

Для обозначения n-кратного интеграла от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по области D естественно использовать символ

$$\int\!\!\int_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{2.20}$$

Однако для сокращения записи там, где это не будет вызывать недоразумений, мы будем обозначать интеграл (2.20) кратким символом

$$\int_D f(x)\, dx. \tag{2.20$'$}$$

При краткой записи (2.20$'$) под символом x следует понимать точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства E^n, под символом dx — произведение $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ [1], а под знаком $\int\limits_D$ — n-кратный интеграл по n-мерной области D.

Точно так же, как и для случая $n = 2$, доказывается интегрируемость по n-мерной области D любой функции f, обладающей в области D I-свойством (т. е. ограниченной в области D функции, все точки разрыва которой принадлежат элементарному телу как угодно малого n-мерного объема). Вообще изменение интегрируемой функции f на множестве точек n-мерного объема нуль не изменяет величины интеграла от этой функции.

Для определения n-кратного интеграла можно использовать разбиение области D при помощи конечного числа произвольных многообразий объема нуль на конечное число частичных областей произвольной формы. В полной аналогии с теоремой 2.5 доказывается, что такое общее определение n-кратного интеграла эквивалентно указанному выше определению.

---

[1] Это произведение обычно называют элементом объема в пространстве E^n.

В полной аналогии с теоремами 2.6 и 2.7 устанавливается формула повторного интегрирования для интеграла (2.20).

Пусть n-мерная область D_n обладает тем свойством, что любая прямая, параллельная оси Ox_1, пересекает ее границу не более чем в двух точках, проекции которых на ось Ox_1 суть

$$a(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n) \quad \text{и} \quad b(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n),$$

где $a(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n) \leqslant b(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)$.

Пусть далее функция $f(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,x_n)$ допускает существование n-кратного интеграла

$$\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

и существование для любых $x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n$ однократного интеграла

$$\int\limits_{a(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)}^{b(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)} f(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n)\, dx_1.$$

Тогда существует $(n-1)$-кратный интеграл

$$\iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)}^{b(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)} f(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n)\, dx_1$$

по $(n-1)$-мерной области D_{n-1}, являющейся проекцией D_n на координатную гиперплоскость $Ox_2x_3 \ldots x_n$ и справедлива формула повторного интегрирования

$$\begin{gathered}\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \\ = \iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)}^{b(x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n)} f(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n)\, dx_1. \qquad (2.21)\end{gathered}$$

Конечно, в сформулированном утверждении в роли x_1 может выступать и любая из переменных $x_2,\, x_3,\, \ldots\,,\, x_n$.

Мы договоримся называть область D п р о с т о й, если каждая прямая, параллельная любой координатной оси, либо пересекает ее границу не более чем в двух точках, либо имеет на этой границе целый отрезок.

Для простой области формулу повторного интегрирования можно применять по любой из переменных $x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n$.

Примером простой области может служить n-мерный прямоугольный параллелепипед (ребра которого не обязательно параллельны координатным осям).

В заключение отметим, что для n-кратного интеграла остаются справедливыми свойства 1°–7°, сформулированные в § 2 для случая двойного интеграла.

В частности, $\iint\limits_D \ldots \int 1 \cdot dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ равен n-мерному объему $V(D)$ области D.

Кроме того, как и для случая $n = 2$, справедливо следующее утверждение.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интегрируема в ограниченной кубируемой области D. Пусть далее пространство E^n покрыто сеткой n-мерных кубов с ребром h; $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ — те кубы указанной сетки, которые целиком содержатся в D; $\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$ — произвольная точка куба C_k; m_k — точная нижняя грань функции f в кубе C_k $(k = 1, 2, \ldots, n(h))$. Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right) \cdot h^n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^n$$

имеют предел при $h \to 0$, равный

$$\iint\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

§ 5. Замена переменных в n-кратном интеграле

Целью настоящего параграфа является обоснование формулы замены переменных в n-кратном интеграле.

Устанавливаемая формула является одним из важнейших средств вычисления n-кратного интеграла.

Предположим, что функция $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ допускает существование n-кратного интеграла

$$\int\limits_D f(y)\, dy = \iint\limits_D \ldots \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \tag{2.22}$$

по некоторой ограниченной замкнутой кубируемой области D в пространстве переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Предположим далее, что от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мы переходим к новым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. совершаем преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Кратко преобразование (2.23) будем обозначать символом

$$y = \psi(x),$$

понимая под x и y точки n-мерного пространства $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а под символом ψ — совокупности n функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Обозначим символом D' ту область в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая при преобразовании (2.23) переходит в D, т. е. положим, что $D = \psi(D')$ [1].

Мы докажем, что если функции (2.23) имеют в области D' непрерывные частные производные первого порядка и если якобиан

$$\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2.24}$$

отличен в области D' от нуля, то для интеграла (2.22) справедлива следующая формула замены переменных:

$$\int\limits_D f(y)\,dy = \int\limits_{D'} f[\psi(x)]\left|\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}\right| dx. \tag{2.25}$$

В подробной записи формула (2.25) имеет следующий вид:

$$\iint\limits_D \ldots \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n =$$
$$= \iint\limits_{D'} \ldots \int f[\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \times$$
$$\times \left|\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{2.25$'$}$$

Таким образом, мы докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 2.8. *Если преобразование* (2.23) *переводит область D' в D и является взаимно однозначным и если функции* (2.23) *имеют в области D' непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан* (2.24) [2], *то при условии существования интеграла* (2.22) *справедлива формула замены переменных* (2.25$'$).

---

[1] При этом мы предполагаем, что преобразование (2.23) допускает обратное и что $D' = \psi^{-1}(D)$.

[2] Заметим, что при выполнении условий теоремы 2.8 уравнения (2.23) можно разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем полученное на этом пути обратное преобразование $x = \psi^{-1}(y)$ будет в силу теоремы 14.2 из вып. 1 иметь в области D непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан $\mathcal{D}(x)/\mathcal{D}(y)$.

Доказательство теоремы 2.8 не является элементарным. Основная идея приводимого нами доказательства состоит в том, что мы сначала даем обоснование формулы (2.25) для случая, когда преобразование (2.23) является линейным, а затем сводим к этому случаю общее преобразование (2.23).

Ради удобства, мы будем подразделять доказательство теоремы 2.8 на отдельные пункты.

Доказательство теоремы 2.8.

1°. *Лемма 1.* *Если преобразование $z = \psi(x)$ является суперпозицией (или, как обычно говорят, произведением) двух преобразований $y = \psi_1(x)$ и $z = \psi_2(y)$, то якобиан $\dfrac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(x)}$, взятый в любой точке $\overset{0}{x} = \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n\right)$, равен произведению якобианов $\dfrac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}$ и $\dfrac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(y)}$, взятых соответственно в точках $\overset{0}{x} = \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n\right)$ и $\overset{0}{y} = \left(\overset{0}{y}_1, \overset{0}{y}_2, \ldots, \overset{0}{y}_n\right)$, где $\overset{0}{y} = \psi_1\left(\overset{0}{x}\right)$, т. е.*

$$\frac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(x)} = \frac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(y)} \cdot \frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}. \tag{2.26}$$

В подробной записи формула (2.26) выглядит так:

$$\frac{\mathcal{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\mathcal{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{2.26$'$}$$

Доказательство леммы 1. Элемент, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца якобиана $\dfrac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(x)}$ равен $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}$, причем указанная частная производная берется в точке $\overset{0}{x}$. По правилу дифференцирования сложной функции (см. § 7 гл. 14 вып. 1), этот элемент равен

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_k}, \tag{2.27}$$

причем в правой части (2.27) все частные производные $\dfrac{\partial y_l}{\partial x_k}$ берутся в точке $\overset{0}{x}$, а все частные производные $\dfrac{\partial z_i}{\partial y_l}$ — в соответствующей точке $\overset{0}{y} = \psi_1\left(\overset{0}{x}\right)$.

Из справедливых при любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, n$ равенств (2.27) и из теоремы об определителе произведения двух матриц (см. вып. 4 «Линейная алгебра») непосредственно вытекает формула (2.26).

Лемма 1 доказана.

2°. Прежде чем формулировать следующую лемму, напомним определение линейного преобразования координат.

Линейным преобразованием называется преобразование вида

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{2.28}$$

в котором a_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ суть произвольные постоянные числа.

Кратко линейное преобразование (2.28) мы будем обозначать символом $y = Tx$, понимая под x и y точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пространства E^n, а под T — матрицу $T = \|a_{ik}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

Матрицу T обычно называют матрицей линейного преобразования.

Если определитель матрицы линейного преобразования $\det T$ отличен от нуля, то линейное преобразование $y = Tx$ называется невырожденным. Для такого преобразования в силу теоремы Крамера [1]) уравнения (2.28) можно разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и утверждать существование обратного преобразования $x = T^{-1}y$, которое также является линейным и невырожденным.

Заметим еще, что для линейного преобразования (2.28) якобиан $\dfrac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}$ совпадает с определителем матрицы T указанного преобразования, т. е.

$$\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \det T. \tag{2.29}$$

Основной целью настоящего пункта и следующих двух пунктов является доказательство того, что для произвольного линейного невырожденного преобразования (2.28) справедлива формула замены переменной (2.25). В силу соотношения (2.29), достаточно доказать, что для любого линейного невырожденного преобразования $y = Tx$ справедлива формула

$$\int\limits_D f(y)\,dy = \int\limits_{T^{-1}D} f(Tx)|\det T|\,dx \tag{2.30}$$

(при условии, что существует интеграл в левой части этой формулы).

[1]) Теорему Крамера см. в вып. 4 «Линейная алгебра».

В настоящем пункте мы докажем, что формула (2.30) справедлива для двух специальных типов линейных преобразований: 1) линейного преобразования T_i^λ, заключающегося в том, что i-я координата умножается на вещественное число $\lambda \neq 0$, а все остальные координаты не изменяются [1], и 2) линейного преобразования T_{ij}, заключающегося в том, что к i-й координате добавляется j-я координата, а все координаты, кроме i-й, не изменяются [2].

Лемма 2. *Если функция $f(y)$ интегрируема в области D, то для каждого из преобразований T_i^λ и T_{ij} справедлива формула замены переменных* (2.30).

Доказательство леммы 2. Обозначим через R n-мерный прямоугольный параллелепипед, содержащий область D, а через F — функцию, равную f в области D и равную нулю в $R - D$. Достаточно доказать, что для каждого из преобразований T_i^λ и T_{ij} справедлива формула

$$\int\limits_R F(y)\,dy = \int\limits_{T^{-1}R} f(Tx)|\det T|\,dx, \tag{2.31}$$

в которой символом T обозначено одно из преобразований T_i^λ или T_{ij}.

Элементарный подсчет показывает, что

$$\det T_i^\lambda = \lambda, \quad \det T_{ij} = 1. \tag{2.32}$$

Кроме того, очевидно, что если R — прямоугольный параллелепипед $a_k \leqslant y_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $[T_i^\lambda]^{-1}R$ представляет собой прямоугольный параллелепипед

$$\begin{aligned} &a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \quad \text{при} \quad k \neq i, \\ &\frac{a_i}{\lambda} \leqslant x_i \leqslant \frac{b_i}{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

а $[T_{ij}]^{-1}R$ представляет собой заведомо кубируемую область

$$\begin{aligned} &a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \quad \text{при} \quad k \neq i, \\ &a_i - x_j \leqslant x_i \leqslant b_i - x_j. \end{aligned} \tag{2.34}$$

[1] Символически это преобразование можно записать так:
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

[2] Символически это преобразование можно записать так:
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

На основании формулы повторного интегрирования (2.21)

$$\int\limits_R F(y)\,dy = \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int\limits_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} dy_1 \ldots dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n \times \\ \times \int\limits_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i. \quad (2.35)$$

Применяя к однократному интегралу по переменной y_i формулу замены переменной $y_i = \lambda x_i$ для случая преобразования T_i^λ и $y_i = x_i + x_j$ для случая преобразования T_{ij} (см. § 7 гл. 10 вып. 1) мы получим:

а) для случая преобразования T_i^λ

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i = \\ = \begin{cases} \int\limits_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\lambda\,dx_i & \text{при} \quad \lambda > 0, \\ \int\limits_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(-\lambda)\,dx_i & \text{при} \quad \lambda < 0; \end{cases} \quad (2.36)$$

б) для случая преобразования T_{ij}

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i = \int\limits_{a_i - x_j}^{b_i - x_j} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i + x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dx_i. \quad (2.37)$$

Вставляя (2.36) в (2.35), еще раз применяя формулу повторного интегрирования (2.21) и учитывая равенство $y_k = x_k$ при $k \neq i$, вид (2.33) области $[T_i^\lambda]^{-1}R$ и первое равенство (2.32), мы получим формулу (2.31) для случая преобразования T_i^λ.

Аналогично, вставляя (2.37) в (2.35), применяя формулу повторного интегрирования и учитывая равенства $y_k = x_k$ при $k \neq i$, вид (2.34) области $[T_{ij}]^{-1}R$ и второе равенство (2.32), мы получим формулу (2.31) для случая преобразования T_{ij}. Лемма 2 доказана.

3°. *Лемма 3.* *Всякое невырожденное линейное преобразование T представимо в виде суперпозиции конечного числа линейных преобразований типа T_i^λ и T_{ij}.*

Доказательство леммы 3. Прежде всего проверим, что линейное преобразование T', заключающееся в перестановке каких-либо двух координат, представимо в виде суперпозиции шести преобразований типа T_i^λ и T_{ij}. В самом деле, пусть T' заключается в обмене местами i-й и j-й координат (остальные координаты при этом не изменяются). Тогда легко проверить, что [1])

$$T' = T_i^{-1} T_{ij} T_j^{-1} T_{ji} T_i^{-1} T_{ij}. \tag{2.38}$$

Заметим теперь, что совершенно произвольное линейное невырожденное преобразование T путем конечного числа перестановок двух строк и двух столбцов можно привести к линейному преобразованию (2.28) с матрицей $\|a_{ik}\|$, у которой отличны от нуля все так называемые главные миноры, т. е. все определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n). \tag{2.39}$$

Остается доказать, что последнее линейное преобразование представимо в виде суперпозиции конечного числа преобразований типа T_i^λ и T_{ij}.

Докажем это по индукции.

Так как $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$, то с помощью преобразования $T_1^{a_{11}}$ мы получим $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \to (a_{11}x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$.

Предположим теперь, что путем суперпозиции конечного числа преобразований типа T_i^λ и T_{ij} нам удалось привести исходную последовательность координат $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ к виду

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k,\, \ldots,\, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k,\, x_{k+1},\, \ldots,\, x_n). \tag{2.40}$$

Для завершения индукции достаточно доказать, что путем суперпозиции конечного числа преобразований типа T_i^λ и T_{ij} можно привести последовательность координат (2.40) к виду

$$\begin{aligned}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1},\, \ldots,\, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1},\\ a_{(k+1)1}x_1 + \ldots + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots,\, x_n).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Сначала мы для каждого номера i, для которого отличен от нуля элемент $a_{i(k+1)}$, произведем последовательно пару преобразований $T_{i(k+1)}T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$ (для тех i, для которых $a_{i(k+1)} = 0$,

[1]) В самом деле, сохраняя при записи только i-ю и j-ю координаты, мы получим, произведя цепочку преобразований (2.38): $(x_i,\, x_j) \to (x_i + x_j,\, x_j) \to$ $\to (-x_i - x_j,\, x_j) \to (-x_i - x_j,\, -x_i) \to (-x_i - x_j,\, x_i) \to (-x_j,\, x_i) \to (x_j,\, x_i)$.

соответствующую пару преобразований не производим). Суперпозиция всех указанных пар преобразований приводит последовательность (2.40) к виду

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots , a_{k1}x_1 + \ldots \\ \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots , x_n). \quad (2.42)$$

Далее заметим, что поскольку минор (2.39) отличен от нуля, то отличен от нуля и равный ему определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Но тогда найдутся такие вещественные числа $\lambda_1, \ldots , \lambda_k$, λ_{k+1}, что линейная комбинация строк определителя (2.43) с этими числами равна [1])

$$a_{(k+1)1}, \ldots , a_{(k+1)k}, \quad a_{(k+1)(k+1)}. \quad (2.44)$$

Это означает, что если мы для каждого номера $j = 1, 2, \ldots \ldots , k+1$, для которого $\lambda_j \neq 0$, произведем последовательно пару преобразований $T_{(k+1)j}T_j^{\lambda_j}$ (для тех j, для которых $\lambda_j = 0$, соответствующую пару преобразований не производим), то суперпозиция всех произведенных пар преобразований переведет последовательность (2.42) в (2.41). Тем самым индукция завершена, и лемма 3 доказана.

4°. *Лемма 4.* *Для произвольного линейного невырожденного преобразования* (2.28) *при условии существования интеграла, стоящего в левой части* (2.30), *справедлива формула замены переменных* (2.30).

Для доказательства леммы 4 достаточно заметить, что формула (2.30) справедлива для каждого из преобразований типа T_i^λ и T_{ij} (лемма 2) и что произвольное линейное невырожденное преобразование (2.28) представимо в виде суперпозиции конечного числа преобразований типа T_i^λ и T_{ij} (лемма 3), причем при суперпозиции линейных преобразований происходит перемножение соответствующих якобианов (лемма 1).

Следствие из леммы 4. *Если G — произвольная кубируемая область в пространстве E^n, T — произвольное невырожденное линейное преобразование, то n-мерный объем $V(G)$*

[1]) Для доказательства этого достаточно добавить к матрице определителя (2.43) строку (2.44) и применить теорему о базисном миноре (см. вып. 4 «Линейная алгебра»).

области G и n-мерный объем $V(TG)$ образа TG этой области связаны равенством

$$V(TG) = |\det T| \cdot V(G). \tag{2.45}$$

Для доказательства достаточно положить в равенстве (2.30) $f \equiv 1$, $D = TG$ и учесть, что при этом $T^{-1}D = G$.

5°. Переходим теперь к обоснованию формулы замены переменных (2.25) для совершенно произвольного преобразования $y = \psi(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.8.

Следует подчеркнуть, что при выполнении условий теоремы 2.8 существуют оба интеграла, стоящие в левой и правой частях (2.25), так что нам следует доказать только равенство этих интегралов.

Договоримся обозначать символом $J_{if}(x)$ элементы матрицы Якоби $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, взятые в точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Саму матрицу Якоби $\|J_{ij}(x)\|$ будем обозначать символом $J_\psi(x)$.

Удобно ввести понятия нормы точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и нормы матрицы $A = \|a_{ij}\|$ $(i{=}1, 2, \ldots, n;\ j{=}1, 2, \ldots, n)$.

Нормой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *назовем число, обозначаемое символом* $\|x\|$ *и равное* $\max\limits_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i|$.

Нормой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ *назовем число, обозначаемое символом* $\|A\|$ *и равное* $\max\limits_{i=1, 2, \ldots, n} \left[\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$.

Заметим, что при таком определении норм точки и матрицы из равенства $y = Ax$ вытекает, что

$$\|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|. \tag{2.46}$$

Кроме того, легко проверить, что для единичной матрицы E справедливо равенство $\|E\| = 1$.

В этом пункте мы докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Если выполнены условия теоремы* 2.8 *и если C — n-мерный куб, принадлежащий области D', то n-мерные объемы куба C и его образа $\psi(C)$ связаны неравенством*

$$V(\psi(C)) \leqslant \left[\max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|\right]^n \cdot V(C). \tag{2.47}$$

Доказательство. Пусть C — n-мерный куб с центром в точке $\overset{0}{x} = \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n\right)$ и с ребром $2s$. Тогда куб C можно определить неравенством

$$\left\|x - \overset{0}{x}\right\| \leqslant s. \tag{2.48}$$

В силу формулы Тейлора для функции n переменных $\psi_i(x)$ (см. п. 3 § 5 гл. 14 вып. 1), найдется число θ_i из интервала $0 < < \theta_i < 1$ такое, что

$$\psi_i(x) - \psi_i\big(\overset{0}{x}\big) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij}\big(\overset{0}{x} + \theta\big(x - \overset{0}{x}\big)\big)\big(x_j - \overset{0}{x}_j\big).$$

Из последнего равенства и из соотношения (2.46) заключаем, что

$$\left\|\psi(x) - \psi\big(\overset{0}{x}\big)\right\| \leqslant \max_{x \in C} \|J_\psi(x)\| \cdot \left\|x - \overset{0}{x}\right\|. \tag{2.49}$$

Полагая $y = \psi(x)$, $\overset{0}{y} = \psi\big(\overset{0}{x}\big)$, получим из (2.49) и (2.48)

$$\left\|y - \overset{0}{y}\right\| \leqslant s \cdot \max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|.$$

Таким образом, *при изменении точки x в пределах n-мерного куба C с ребром $2s$ образ y точки x не выходит за пределы n-мерного куба, ребро которого равно $2s \cdot \max\limits_{x \in C} \|J_\psi(x)\|$.*

Отсюда сразу же вытекает кубируемость образа $\psi(G)$ любого кубируемого множества G [1]) (в частности, кубируемость $\psi(C)$) и вытекает неравенство (2.47). Лемма 5 доказана.

6°. *Лемма 6.* *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8 *и пусть G — произвольное кубируемое подмножество D'. Тогда для n-мерного объема образа $\psi(G)$ множества G справедливо неравенство* [2])

$$V(\psi(G)) \leqslant \int_G |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.50}$$

Доказательство леммы 6. Прежде всего докажем, что для любого невырожденного линейного преобразования T и для любого n-мерного куба C, содержащегося в D', справедливо неравенство

$$V(\psi(C)) \leqslant |\det T| \cdot \left[\max_{x \in C} \left\|T^{-1} J_\psi(x)\right\|\right]^n \cdot V(C). \tag{2.51}$$

---

[1]) В самом деле, граница любого кубируемого множества G является множеством n-мерного объема нуль, а такое множество, согласно доказанному утверждению, преобразуется в множество, n-мерный объем которого также равен нулю.

[2]) Сам факт кубируемости образа $\psi(G)$ вытекает из утверждения, доказанного в предыдущей лемме.

В силу следствия из леммы 4 для любого кубируемого множества G и для линейного преобразования T^{-1} справедливо равенство

$$V(T^{-1}G) = |\det T^{-1}| \cdot V(G).$$

Таким образом, если $G = \psi(C)$, то [1]

$$V(\psi(C)) = |\det T| \cdot V(T^{-1}\psi(C)). \tag{2.52}$$

Правую часть (2.52) оценим с помощью неравенства (2.47), взяв (2.47) не для преобразования ψ, а для суперпозиции преобразований $T^{-1}\psi$. Получим

$$V(\psi(C)) \leqslant |\det T| \cdot \left[\max_{x \in C} \left\| J_{T^{-1}\psi}(x) \right\|\right]^n \cdot V(C). \tag{2.53}$$

Учитывая, что матрица Якоби линейного преобразования совпадает с матрицей этого преобразования, мы в силу леммы 1 получим, что

$$J_{T^{-1}\psi}(x) = T^{-1} J_\psi(x).$$

Но это и означает, что неравенство (2.53) может быть переписано в виде (2.51).

Тем самым неравенство (2.51) доказано.

Теперь для доказательства леммы 6 покроем пространство E^n сеткой n-мерных кубов с ребром h, и пусть C_1, C_2, … …, $C_{n(h)}$ — те из этих кубов, которые целиком содержатся в G, а символ G_h обозначает сумму всех указанных кубов.

Выбрав в каждом кубе C_i произвольную точку x_i запишем для него неравенство (2.51), полагая при этом $T = J_\psi(x_i)$. Получим

$$V(\psi(C_i)) \leqslant |\det J_\psi(x_i)| \cdot \left\{\max_{x \in C_i} \left\| [J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x) \right\|\right\}^n \cdot V(C_i).$$

Суммируя последнее неравенство по всем номерам i от 1 до $n(h)$, получим

$$V(\psi(G_h)) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} |\det J_\psi(x_i)| \cdot \left\{\max_{x \in C_i} \left\| [J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x) \right\|\right\}^n \cdot V(C_i). \tag{2.54}$$

Поскольку элементы матрицы Якоби $J_\psi(x)$ являются непрерывными функциями точки x во всей области D' и тем более в G

[1] Мы учитываем при этом, что $T \cdot T^{-1} = E$, так что $\det T \cdot \det T^{-1} = 1$.

и произведение $[J_\psi(x)]^{-1} \cdot J_\psi(x)$ представляет собой единичную матрицу, норма которой равна единице, то

$$\lim_{h\to 0} \max_{x\in C_i} \left\| [J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x) \right\| = 1.$$

Но тогда из утверждения, сформулированного в конце § 4 этой главы, следует, что предел при $h \to 0$ всей правой части (2.54) существует и равен $\int\limits_G |\det J_\psi(x)|\, dx$.

Из того же утверждения следует, что $\lim\limits_{h\to 0} G_h = G$, так что в пределе при $h \to 0$ мы получим из (2.54) неравенство (2.50). Лемма 6 доказана.

7°. *Лемма 7.* *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.8 *и, кроме того, дополнительно предполагается, что функция* $f(y)$ *неотрицательна в области* D. *Тогда справедлива формула замены переменных* (2.25).

Доказательство. Покроем пространство E^n сеткой n-мерных кубов с ребром h, и пусть $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ — те из этих кубов, которые целиком содержатся в области D. Пусть далее $G_i = \psi^{-1}(C_i)$. Записывая для каждой области G_i неравенство (2.50), будем иметь

$$V(C_i) \leqslant \int\limits_{G_i} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.55}$$

Пусть теперь m_i — точная нижняя грань функции $f(y)$ на кубе C_i (или, что то же самое, точная нижняя грань функции $f[\psi(x)]$ в G_i). Умножая обе части (2.55) на m_i и суммируя по всем i от 1 до $n(h)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n(h)} m_i V(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} m_i \int\limits_{G_i} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.56}$$

В силу утверждения, сформулированного в конце § 4 этой главы, левая часть (2.56) имеет предел при $h \to 0$, равный $\int\limits_D f(y)\, dy$. Поскольку сумма всех областей G_i содержится в D' [1]) и функция f неотрицательна, правая часть (2.56) при любом $h > 0$ не превосходит интеграла

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)] \cdot |\det J_\psi(x)|\, dx.$$

---

[1]) В силу того, что $\sum\limits_{i=1}^{n(h)} C_i$ содержится в D, $D' = \psi^{-1}(D)$, $G_i = \psi^{-1}(C_i)$.

Таким образом, в пределе при $h \to 0$ мы получим из (2.56) неравенство

$$\int\limits_{D} f(y)\,dy \leqslant \int\limits_{D'} f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|\,dx. \tag{2.57}$$

В проведенных нами рассуждениях можно поменять ролями области D и D' и вместо функции $f(y)$ в области D рассмотреть функцию $g(x) = f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|$ в области D'. При этом, используя лемму 1 и теорему об определителе произведения двух матриц, мы получим противоположное неравенство

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{D} f(y)\,dy. \tag{2.58}$$

Из (2.57) и (2.58) вытекает формула замены переменных (2.25). Лемма 7 доказана.

8°. Нам остается завершить доказательство теоремы 2.8, т. е. избавиться от наложенного в лемме 7 дополнительного требования неотрицательности функции $f(y)$.

Пусть $f(y)$ — совершенно произвольная интегрируемая по области D функция, число M — точная верхняя грань функции $|f(y)|$ в области D [1]).

В силу леммы 7 для каждой из неотрицательных функций $f_1(y) \equiv M$ и $f_2(y) = M - f(y)$ справедлива формула замены переменных (2.25).

Но тогда из линейного свойства интеграла вытекает справедливость формулы (2.25) и для разности $f_1(y) - f_2(y) = f(y)$. Теорема 2.8 полностью доказана.

Замечание 1. В условиях теоремы 2.8 можно допустить обращение в нуль якобиана (2.24) на некотором принадлежащем D' множестве точек S, имеющем n-мерный объем нуль. В самом деле, множество S лежит внутри элементарной фигуры C как угодно малой площади, причем, согласно доказанному выше, справедлива формула

$$\int\limits_{\psi(D'-C)} f(y)\,dy = \int\limits_{D'-C} f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|\,dx. \tag{2.59}$$

Осуществляя в формуле (2.59) предельный переход по последовательности элементарных фигур $\{C_k\}$, n-мерный объем $V(C_k)$ которых стремится к нулю, мы убедимся в справедливости формулы (2.25) и для рассматриваемого случая.

[1]) Напомним, что из интегрируемости $f(y)$ в области D вытекает ограниченность $f(y)$ в D и существование точных граней.

Замечание 2. Поскольку интеграл

$$I = \underset{D}{\int\int} \ldots \int 1 \, dy_1 \, dy_2 \ldots \, dy_n \tag{2.60}$$

равен n-мерному объему $V(D)$ области D, то величину $dy_1 dy_2 \ldots \ldots dy_n$ естественно назвать элементом объема в рассматриваемой декартовой системе координат $Oy_1 y_2 \ldots y_n$.

С помощью преобразования (2.23) мы переходим от декартовых координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ к новым, вообще говоря, криволинейным координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поскольку при таком переходе (согласно формуле замены переменных (2.25)) интеграл (2.60) преобразуется в

$$I = \underset{D}{\int\int} \ldots \int \left| \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

то величину

$$\left| \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

естественно назвать элементом объема в криволинейной системе координат $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Стало быть, модуль якобиана характеризует «растяжение» (или «сжатие») объема при переходе от декартовых координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ к криволинейным координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Подсчитаем элемент объема в сферических и цилиндрических координатах.

1°. Для сферических координат (в трехмерном пространстве)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Якобиан имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Стало быть, элемент объема равен $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

2°. Для цилиндрических координат (в трехмерном пространстве)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad (r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Якобиан имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x,\, y,\, z)}{\mathcal{D}(r,\, \varphi,\, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Стало быть, элемент объема равен $r\,dr\,d\varphi\,dz$.

В частности, для полярных координат на плоскости элемент площади равен $r\,dr\,d\varphi$.

3°. В n-мерном пространстве сферические координаты определяются равенствами [1])

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}, \\ x_m = r\cos\theta_{m-1} \prod\limits_{k=m}^{n-1} \sin\theta_k \quad \text{при} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1, \\ x_n = r\cos\theta_{n-1}, \end{cases}$$

в которых сферический радиус r и сферические углы $\theta_1,\, \theta_2,\, \ldots$ $\ldots,\, \theta_{n-1}$ изменяются в пределах $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_m \leqslant \pi$ при $m = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1$.

Можно убедиться, что в этом случае якобиан имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)}{\mathcal{D}(r,\, \theta_1,\, \ldots,\, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k.$$

Таким образом, элемент объема в n-мерных сферических координатах равен $r^{n-1}dr \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k\, d\theta_k$.

П р и м е р ы. 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z, \tag{2.61}$$

где $a > 0$.

Тело симметрично относительно координатных плоскостей Oyz и Oxz и расположено вверх от плоскости Oxy. Стало быть, достаточно вычислить объем четверти тела, лежащей в первом октанте.

Переходя к сферическим координатам, приведем уравнение (2.61) к виду

$$r = a\sqrt[3]{\cos\theta}.$$

---

[1]) Обратные формулы, выражающие n-мерные сферические координаты через декартовы, имеют вид

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad \sin\theta_m = \frac{r_m}{r_{m+1}}, \quad \cos\theta_m = \frac{x_{m+1}}{r_{m+1}},$$

где $r_m = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ $(m = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$.

Так как первый октант характеризуется неравенствами

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то учитывая выражение для элемента объема в сферических координатах, получим, что искомый объем V равен

$$V = 4 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta \, dr.$$

Таким образом,

$$V = \frac{2\pi}{3} a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi a^3}{3}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \tag{2.62}$$

(где $h > 0$, $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

Для вычисления этой площади удобно перейти к так называемым *обобщенным полярным координатам*

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi \end{cases} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Уравнение (2.62) принимает вид

$$r = \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi, \tag{2.63}$$

причем, поскольку левая часть (2.63) неотрицательна, следует брать лишь такие значения φ, для которых правая часть (2.63) является неотрицательной.

Умножив и разделив правую часть (2.63) на $\sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}$ и определив φ_0 из соотношений

$$\sin\varphi_0 = \frac{a/h}{\sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{b/k}{\sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}},$$

мы приведем (2.63) к виду

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}} \sin(\varphi + \varphi_0). \tag{2.63$'$}$$

Из условия неотрицательности правой части (2.63$'$) находим, что $0 \leqslant \varphi + \varphi_0 \leqslant \pi$, т. е. $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_0$.

Учитывая, что якобиан $\frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(r,\, \varphi)}$ равен abr, мы получим для искомой площади S следующее выражение:

$$S = \int\limits_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\sin(\varphi+\varphi_0)} abr\, dr =$$
$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int\limits_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}\sin^2(\varphi+\varphi_0)\, d\varphi = \frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

Заметим в заключение, что для вычисления ряда площадей удобен несколько более общий вид обобщенных полярных координат

$$x = ar\cos^\alpha\varphi,$$
$$y = br\sin^\alpha\varphi.$$

Легко убедиться, что для этих координат

$$\frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(r,\, \varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

ДОПОЛНЕНИЕ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ n-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Займемся вопросом о приближенном вычислении n-кратного интеграла

$$\iint\limits_{G_n}\ldots\int f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\, dx_1\, dx_2\ldots dx_n \tag{2.64}$$

по некоторой области G_n в пространстве E^n, причем сначала будем считать, что эта область представляет собой n-мерный куб.

Предполагая существование интеграла (2.64), будем рассматривать вопрос об оптимальных способах численного интегрирования.

Этот вопрос имеет два аспекта: 1) построение формул численного интегрирования, оптимальных *на заданных классах функций*; 2) построение формул численного интегрирования, оптимальных *для каждой конкретной функции из заданного класса.*

Рассмотрим каждый из этих аспектов в отдельности.

1. Формулы численного интегрирования, оптимальные для классов функций. Пусть G_n — единичный n-мерный куб $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Будем говорить, что функция $f(x_1,\, \ldots,\, x_n)$ принадлежит в кубе G_n классу $D_n^\alpha(M)$ (соответственно классу $H_n^\alpha(M)$), если при условии существования всех фигурирующих ниже производных справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^\beta f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right| \leqslant M,$$

в которых

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha n, \quad \alpha_k \leqslant \alpha n$$

(соответственно $\alpha_k \leqslant \alpha$).

Будем называть *кубатурной формулой* выражение вида

$$\iint\limits_{G_n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = l_N(f) + R_N(f, l_N), \qquad (2.65)$$

в котором

$$l_N(f) = \sum_{k=1}^{N} C_k f(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

При этом точки $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ называются *узлами*, а числа C_k — *весами* данной кубатурной формулы, а величина $R_N(f, l_N)$ — ее *погрешностью*.

Нашей целью является построение кубатурных формул с оценкой погрешности, точной по порядку относительно малой величины $1/N$, где N — число узлов кубатурной формулы.

Н. С. Бахваловым было показано [1]), что как на классах $D_n^\alpha(M)$, так и на классах $H_n^\alpha(M)$ нельзя построить кубатурную формулу (2.65) с оценкой погрешности $R_N(f, l_N)$ лучшей, чем $C(\alpha, n) \cdot M \cdot N^{-\alpha}$, где $C(\alpha, n)$ — некоторая постоянная, зависящая от α и n.

На классах $H_n^\alpha(M)$ указанная оценка достигается (по порядку относительно $1/N$), если в качестве l_N взять произведение одномерных квадратурных формул, точных для алгебраических многочленов степени $\alpha n - 1$.

Предполагая, что число узлов N равно $N = m^n$, где m — целое, мы можем положить

$$l_N = \sum_{k_1=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} C_{k_1} \ldots C_{k_n} f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}), \qquad (2.66)$$

где $\{x_{k_\nu}, C_{k_\nu}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n,$ — узлы и веса одномерной квадратурной формулы, точной на алгебраических многочленах [2]).

Для погрешности кубатурной формулы с l_N, определяемым равенством (2.66), справедлива *асимптотическая* (т. е. справедливая для достаточно больших значений N) оценка

$$R_N(f, l_N) \approx \frac{C_1(\alpha, n) M}{N^\alpha}, \qquad (2.67)$$

в которой $C_1(\alpha, n)$ — некоторая постоянная, зависящая от α и n.

На классах $H_n^\alpha(M)$ также существует кубатурная формула, близкая по порядку величины погрешности к оптимальной. Таковой формулой

[1]) Н. С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов// Вестник МГУ: Серия математики, физики, астрономии. 1959. № 4. С. 3–18.

[2]) Таковыми являются, например, так называемая формула Гаусса или формула Ньютона–Котеса (см., например, курс И. С. Березина и Н. П. Жидкова «Методы вычислений»).

является теоретико-числовая формула Н. М. Коробова [1])

$$l_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left[\tau_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right), \ldots, \tau_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right)\right]\tau'_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right) \ldots \tau'_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right), \qquad (2.68)$$

в которой $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа — так называемые *оптимальные коэффициенты по модулю* N, а $\tau_\alpha(x)$ — некоторые специальные многочлены степени $\alpha + 1$. Для погрешности кубатурной формулы с l_N, определяемым равенством (2.68), справедлива оценка

$$|R_N(f, l_N)| \leqslant \frac{C_2(\alpha, n)M}{N^\alpha}\ln^\beta N \qquad (2.69)$$

($C_2(\alpha, n)$ и β — постоянные, зависящие только от α и n). Оценка (2.69) отличается от неулучшаемой по порядку оценки только множителем $\ln^\beta N$.

Таким образом, на каждом из классов $D_n^\alpha(M)$ и $H_n^\alpha(M)$ существуют достаточно хорошие кубатурные формулы.

Разумеется, при практическом использовании этих формул следует учитывать их достоинства и недостатки, выявляющиеся в конкретных ситуациях. Так, следует помнить, что при вычислении интегралов с помощью формулы (2.66) число узлов N не произвольно, а равно m^n. Например, для $n = 10$ и функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, примерно «одинаково» ведущей себя по всем направлениям, минимальным разумным числом узлов будет $N = 2^{10} = 1024$. При желании увеличить точность можно взять число узлов равным $N_1 = 3^{10} = 59049$, но это приведет к увеличению вычислительной работы почти в 60 раз.

Следует также учитывать, что при «малом» и «среднем» числе узлов N погрешность кубатурной формулы, полученной с помощью (2.66), может сильно отличаться от правой части (2.67) [2]).

С другой стороны, использование формулы (2.66) более выгодно при вычислении больших серий интегралов, а также при вычислении интегралов от функций, содержащих выражения, зависящие от меньшего числа переменных чем n.

Кубатурные формулы, полученные с помощью (2.68), свободны от недостатка, связанного с выбором числа узлов N. Эти формулы целесообразно использовать для недостаточно гладких функций f и при большом значении числа переменных n (начиная с $n = 10$). Однако следует заметить, что для погрешности кубатурной формулы, полученной с помощью (2.68), нельзя выделить главного члена, подобного тому, который стоит в правой части (2.67). Это обстоятельство затрудняет как оценку погрешности при проведении вычислений, так и прогнозирование числа узлов N, требуемого для достижения заданной точности.

2. О формулах численного интегрирования, оптимальных для каждой конкретной функции. Сразу же отметим, что вопрос о таких формулах является сложным и мало разработанным.

---

[1]) Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — М.: Физматгиз. 1963.

[2]) Так при использовании для (2.66) квадратурной формулы Ньютона–Котеса правая часть (2.67) близка к левой, начиная с $N = (\alpha n)^n$ (например, при $\alpha = 1$ и $n = 10$, начиная с $N = 10^{10}$, а при использовании для (2.66) формулы Гаусса правая часть (2.67) близка к левой, начиная с $N = (\alpha n/2)^n$ (т. е. при $\alpha = 1$ и $n = 10$, начиная с $N \approx 10^7$). Таким образом, при построении кубатурных формул с l_N, определяемых равенством (2.66), формула Гаусса предпочтительнее формулы Ньютона–Котеса.

Начнем с уточнения постановки изучаемого вопроса. Предположим, что данная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит некоторому классу A_n и что задано множество способов численного интегрирования $\{p_N\}$ этой функции f.

Будем искать в этом множестве такой способ численного интегрирования p_N^*, погрешность $R_N(f, p_N^*)$ которого представляет собой точную нижнюю грань погрешностей $R_N(f, p_N)$ на множестве $\{p_N\}$ всех способов численного интегрирования данной функции f.

Иными словами, мы ищем наилучшую кубатурную формулу для данной конкретной функции f, а не для всего класса A_n, которому принадлежит эта функция [1].

Возьмем в качестве класса A_n множество функций, бесконечно дифференцируемых всюду в основном кубе G_n, за исключением, быть может, некоторой поверхности S размерности $k < n$, на которой эти функции могут обращаться в бесконечность как $1/r_{xy}^{\gamma}$, где r_{xy} — расстояние между точкой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и точкой на поверхности $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а $\gamma < n - k - 1$.

Множество способов численного интегрирования $\{p_N\}$ определим следующим образом.

Для каждой кубатурной формулы σ_m, точной на алгебраических многочленах степени $m - 1$, определим элемент p_N множества $\{p_N\}$ как кубатурную формулу, получающуюся разбиением основного куба G_n на прямоугольные параллелепипеды и применением на каждом таком параллелепипеде формулы σ_m, с условием, чтобы общее число узлов во всем кубе G_n было равно N.

Естественно ожидать, что узлы полученной таким способом кубатурной формулы будут распределены оптимально при условии, что погрешность на каждом параллелепипеде постоянна.

В вычислительном центре МГУ были составлены стандартные программы вычисления двойных и тройных интегралов, реализующие автоматическое дробление областей интегрирования. В основу этих программ была положена пара кубатурных формул σ_m и σ_{m_1} при $m_1 > m$.

В качестве оценки погрешности формулы σ_m бралась величина $\rho = |\sigma_m - \sigma_{m_1}|$.

Если ε — заданная точность вычислений, то при $\rho \leqslant \varepsilon$ (для всего основного куба G_n) в качестве приближенного значения интеграла берется то, которое определяется формулой σ_{m_1}, а при $\rho > \varepsilon$ куб дробится на 2^n частей и для каждой из этих частей процесс повторяется сначала.

Указанный метод дает хорошие результаты для вычисления двойных и тройных интегралов. Однако при увеличении числа измерений n применение указанного метода наталкивается на существенные трудности, связанные с тем, что при фиксированных m и m_1 с увеличением n сильно возрастает сложность σ_m и σ_{m_1}, а при уменьшении m и m_1 с ростом n сильно возрастает число дроблений.

В заключение отметим, что при вычислении n-кратного интеграла не по n-мерному кубу G_n, а по произвольной области в пространстве E^n следует сначала сделать преобразование, переводящее эту область в n-мерный куб. Кроме того, существуют кубатурные формулы для некоторых областей специального вида (шар, сфера и т. д.) [2].

---

[1] Формула, наилучшая для класса функций, грубо говоря, является наилучшей для самой «плохой» функции из этого класса.

[2] Так кубатурные формулы на сфере изучались в работах советского математика С. Л. Соболева и его учеников.

3. Пример приближенного вычисления кратного интеграла. Рассмотрим вопрос о вычислении четырехкратного интеграла

$$F(R,\,L,\,H)=\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_0^L \rho d\rho\int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^{2\pi}[H+\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\psi)]^{-3/2}\,d\psi$$

с некоторой точностью ε для значений параметров

$$R=1;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2;\ 2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75;\ 3;\ L=0{,}8;\ H=1.$$

Сделав замену переменных, отображающую область интегрирования в единичный куб, мы приведем этот интеграл к виду

$$F(R,\,L,\,H)=(2\pi)^2\cdot R^2\cdot L^2\int\limits_0^1\!\int\limits_0^1\!\int\limits_0^1\!\int\limits_0^1\{H^2+L^2\rho^2+R^2r^2-\\ -2LR\rho r\cos[2\pi(\varphi-\psi)]\}^{-3/2}r\rho\,d\rho\,dr\,d\psi\,d\varphi.$$

Подынтегральная функция является гладкой. Поэтому естественно применить для вычислений этого интеграла кубатурную формулу, основанную на (2.66). При этом по каждой из переменных r и ρ естественно взять формулу Гаусса (одномерную формулу, точную на алгебраических многочленах), а по переменным φ и ψ лучше взять формулу трапеций (см. вып. 1, гл. 12), ибо подынтегральная функция периодична по каждой их этих переменных, а для периодических функций формула трапеций дает наилучшие результаты. Таким образом, мы получим

$$F(R,\,L,\,H)=\\ =\Big(\frac{2\pi RL}{m}\Big)^2\sum_{k_1=1}^{m_1}\sum_{k_2=1}^{m_2}\sum_{k_3=1}^{m_3}\sum_{k_4=1}^{m_4}C_{k_1}C_{k_2}x_{k_1}x_{k_2}\Big[H^2+L^2x_{k_2}^2+R^2x_{k_1}^2-\\ -2RLx_{k_1}x_{k_2}\cos\Big(2\pi\frac{k_3-k_4}{m}\Big)\Big]^{-3/2}$$

(здесь $(x_{k_\nu},\,C_{k_\nu})$ — узлы и веса соответствующей одномерной квадратурной формулы).

Для выбора значений m, m_1 и m_2, обеспечивающих требуемую точность, проводят отладочные расчеты, последовательно увеличивая число узлов и сравнивая полученные результаты.

ГЛАВА 3

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Введенные ранее понятия определенного интеграла (простого и кратного) не пригодны для неограниченной области интегрирования и при неограниченности подынтегральной функции.

В этой главе будет указано, каким образом можно обобщить понятие интеграла на эти два случая.

§ 1. Несобственные интегралы первого рода (одномерный случай)

В этом параграфе будет дано обобщение понятия определенного интеграла для одномерной неограниченной связной области интегрирования.

1. Понятие несобственного интеграла первого рода. Одномерными связными неограниченными областями являются полупрямые $a \leqslant x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant b$ и бесконечная прямая $-\infty < x < +\infty$. Ради определенности рассмотрим полупрямую $a \leqslant x < +\infty$.

Всюду в этой главе, не оговаривая этого в дальнейшем особо, мы будем предполагать, что функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ и для любого $R \geqslant a$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^R f(x)\,dx$, который мы обозначим символом $F(R)$:

$$F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Итак, при наших предположениях на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ задана функция $F(R)$, определенная соотношением (3.1). Исследуем вопрос о предельном значении функции $F(R)$ при $R \to +\infty$, т. е. вопрос о существовании предела

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Для выражения (3.2) мы будем использовать обозначение

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

В дальнейшем символ (3.3) мы будем называть *несобственным интегралом* первого рода от функции $f(x)$ по полупрямой $a \leqslant x < +\infty$.

Если существует предел (3.2), то несобственный интеграл (3.3) называется *сходящимся*. Если же этот предел не существует, то несобственный интеграл (3.3) называется *расходящимся*.

Замечание 1. Рассмотрим несобственный интеграл (3.3). Если $b > a$, то наряду с этим интегралом можно рассматривать интеграл $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$. Очевидно, из сходимости одного из указанных интегралов вытекает сходимость другого. При этом имеет место следующее равенство:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Отметим, что расходимость одного из указанных несобственных интегралов влечет расходимость другого.

Замечание 2. Если несобственный интеграл (3.3) сходится, то значение предела (3.2) обозначается тем же символом (3.3). Таким образом, в случае сходимости интеграла (3.3) используется равенство

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx.$$

Замечание 3. Аналогично несобственному интегралу (3.3) определяются несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Первый из них символизирует операцию предельного перехода $\lim\limits_{R\to-\infty} \int\limits_R^b f(x)\,dx$, а второй — $\lim\limits_{\substack{R'\to-\infty \\ R''\to+\infty}} \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx$.

Пример. Рассмотрим на полупрямой $a \leqslant x < \infty\,(a > 0)$ функцию $f(x) = 1/x^p$, $p = \mathrm{const}$. Эта функция интегрируема на любом сегменте $a \leqslant x \leqslant R$, причем

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^R = \dfrac{R^{1-p} - a^{1-p}}{1-p} & \text{при} \quad p \neq 1, \\ \left.\ln x\right|_a^R = \ln \dfrac{R}{a} & \text{при} \quad p = 1. \end{cases}$$

Очевидно, при $p > 1$ предел $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R \dfrac{dx}{x^p}$ существует и равен $\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$, а при $p \leqslant 1$ этот предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Отметим, что при $p > 1$

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

2. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода. Достаточные признаки сходимости. Вопрос о сходимости несобственного интеграла первого рода эквивалентен вопросу о существовании предельного значения функции $F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx$ при $R \to +\infty$. Как известно [1], для существования предельного значения функции $F(R)$ при $R \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему *условию Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $A > 0$, что для любых R' и R'', превосходящих A, выполняется неравенство

$$|F(R'') - F(R')| = \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, справедливо следующее *утверждение*.

***Теорема 3.1* (критерий Коши сходимости несобственного интеграла).** *Для сходимости несобственного интеграла* (3.3) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать такое* $A > 0$, *что для любых* R' *и* R'', *превосходящих* A,

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что из сходимости несобственного интеграла не вытекает даже ограниченность подынтегральной функции. Например, интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$, где функция равна нулю для нецелых x и равна n при $x = n$ (целое число), очевидно, сходится, хотя подынтегральная функция не ограничена.

Поскольку критерий Коши мало удобен для практических применений, целесообразно указать различные достаточные признаки сходимости несобственных интегралов.

В дальнейшем мы будем считать, что функция $f(x)$ задана на полупрямой $a \leqslant x < \infty$ и для любого $R \geqslant a$ существует обычный интеграл $\int\limits_a^R f(x)\,dx$.

---

[1] См. вып. 1, гл. 8, § 1.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2 (общий признак сравнения). *Пусть на полупрямой* $a \leqslant x < \infty$
$$|f(x)| \leqslant g(x). \tag{3.4}$$
Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *вытекает сходимость интеграла* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится. Тогда, согласно критерию Коши (см. теорему 3.1), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A > 0$, что для любых $R' > A$ и $R'' > A$, выполняется неравенство
$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{3.5}$$
Согласно известным неравенствам для интегралов и неравенству (3.4) имеем
$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx.$$
Отсюда и из неравенства (3.5) вытекает, что для любых R' и R'', больших A, справедливо неравенство
$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$
Следовательно, интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.

Теорема 3.3 (частный празнак сравнения). *Пусть на полупрямой* $0 < a \leqslant x < \infty$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет соотношению*
$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^p},$$
где c *и* p — *постоянные*, $p > 1$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *сходится. Если же существует такая постоянная* $c > 0$, *что на полупрямой* $0 < a \leqslant x < \infty$ *справедливо соотношение* $f(x) \geqslant \geqslant \dfrac{c}{x^p}$, *в котором* $p \leqslant 1$, *то интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *расходится.*

Утверждение этой теоремы вытекает из теоремы 3.2 и примера, рассмотренного в предыдущем пункте (достаточно положить $g(x) = c/x^p$).

***Следствие* (*частный признак сравнения в предельной форме*).** *Если при $p > 1$ существует конечное предельное значение $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|x^p = c$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Если же при $p \leqslant 1$ существует положительное предельное значение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)x^p = c > 0$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится.*

Убедимся в справедливости первой части следствия. Для этого заметим, что из существования предела при $x \to +\infty$ вытекает ограниченность функции $x^p|f(x)|$, т. е. с некоторой постоянной $c_0 > 0$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c_0/x^p.$$

После этого применяется первая часть теоремы 3.3. Справедливость второй части следствия вытекает из следующих рассуждений. Так как $c > 0$, то можно указать столь малое $\varepsilon > 0$, что $c - \varepsilon > 0$. Этому ε отвечает такое $A > 0$, что при $x \geqslant A$ выполняется неравенство $c - \varepsilon < f(x)x^p$ (это неравенство следует из определения предела). Поэтому $f(x) > \dfrac{c-\varepsilon}{x^p}$ и в этом случае действует вторая часть теоремы 3.3.

3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Введем понятия *абсолютной* и *условной* сходимости несобственных интегралов. Пусть $f(x)$ интегрируема по любому сегменту $[a, R]$ [1]).

***Определение* 1.** *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется* а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, *если сходится $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$.*

***Определение* 2.** *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется* у с л о в н о с х о д я щ и м с я, *если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится.*

З а м е ч а н и е. Положив в теореме 3.2 $g(x) = |f(x)|$, мы получим, что из абсолютной сходимости несобственного интеграла вытекает его сходимость.

Отметим, что теоремы 3.2 и 3.3 позволяют установить лишь абсолютную сходимость исследуемых несобственных интегралов.

[1]) Тогда и функция $|f(x)|$ интегрируема по любому сегменту $[a, R]$.

Приведем еще один достаточный признак сходимости несобственных интегралов, пригодный и в случае условной сходимости.

Теорема 3.4 (признак Дирихле–Абеля). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полупрямой $a \leqslant x < \infty$. Пусть далее функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $a \leqslant x < \infty$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$* [1].

Предположим еще, что функция $g(x)$, монотонно не возрастая на полупрямой $a \leqslant x < \infty$, стремится к нулю при $x \to \to +\infty$ и имеет производную $g'(x)$, непрерывную на полупрямой $a \leqslant x < \infty$. При этих условиях сходится несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости несобственных интегралов. Предварительно проведем интегрирование по частям интеграла $\int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx$ на произвольном сегменте $[R', R'']$, $R'' > R'$, полупрямой $a \leqslant x < \infty$. Получим

$$\int_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_{R'}^{R''} - \int_{R'}^{R''} F(x)g'(x)\,dx. \tag{3.7}$$

По условию теоремы $F(x)$ ограничена: $|F(x)| \leqslant K$. Так как $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то $g(x) \geqslant 0$, а $g'(x) \leqslant 0$. Таким образом, оценивая соотношение (3.7), мы получим следующее неравенство:

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant K[g(R') + g(R'')] + K\int_{R'}^{R''} (-g'(x))\,dx.$$

Так как интеграл в правой части этого неравенства равен $g(R') - g(R'')$, то, очевидно,%

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant 2Kg(R'). \tag{3.8}$$

Используя это неравенство, нетрудно завершить доказательство теоремы. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то по данному ε можно выбрать A так, что при $R' \geqslant A$ выполняется неравенство $g(R') < \varepsilon/(2K)$.

[1] Это означает, что первообразная $F(x)$, которую можно определить как $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, удовлетворяет для всех $x \geqslant a$ неравенству $|F(x)| \leqslant K$, где K — постоянная.

Отсюда и из неравенства (3.8) следует, что для любых R' и R'', больших A, выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

которое, согласно критерию Коши, гарантирует сходимость интеграла (3.6). Теорема доказана.

Замечание. Требование дифференцируемости функции $g(x)$ в теореме 3.4 является излишним. Теорема 3.4 может быть доказана в предположении одной лишь монотонности $g(x)$ и стремления $g(x)$ к нулю при $x \to +\infty$, для чего следует воспользоваться второй формулой среднего значения (формулой Бонне).

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad (\alpha > 0). \tag{3.9}$$

Полагая $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x^\alpha$, легко убедиться, что для этого интеграла выполнены все условия теоремы 3.4. Поэтому интеграл (3.9) сходится.

Пример 2. Рассмотрим интеграл Френеля [1] $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$.

Согласно замечанию 1 п. 1 этого параграфа из сходимости одного из интегралов $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$ и $\int\limits_1^\infty \sin x^2\,dx$ вытекает сходимость другого. Поэтому мы обратимся ко второму из этих интегралов. Имеем

$$\int\limits_1^\infty \sin x^2\,dx = \int\limits_1^\infty x\sin x^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Полагая $f(x) = x\sin x^2$ и $g(x) = 1/x$, мы легко убедимся, что выполнены все условия теоремы 3.4 и поэтому интеграл Френеля сходится.

4. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. В этом пункте мы сформулируем условия, при которых действуют формулы замены переменных и интегрирования по частям для несобственных интегралов первого рода. Рассмотрим сначала вопрос о замене переменной под знаком несобственного интеграла.

[1] О. Ж. Френель — выдающийся французский физик (1788–1827).

Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на полуоси* $a \leqslant x < \infty$;

2) *полуось* $a \leqslant x < \infty$ *является множеством значений некоторой строго монотонной функции* $x = g(t)$, *заданной на полуоси* $\alpha \leqslant t < \infty$ (*или* $-\infty < t \leqslant \alpha$) *и имеющей на этой полуоси непрерывную производную*;

3) $g(\alpha) = a$.

При этих условиях из сходимости одного из следующих несобственных интегралов:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\infty f(g(t))g'(t)\,dt \left(\text{или} -\int_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))g'(t)\,dt \right) \tag{3.10}$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Сформулированное утверждение устанавливается с помощью следующих рассуждений.

Рассмотрим произвольный сегмент $[a, R]$. Этому сегменту отвечает, согласно строгой монотонности функции $g(t)$, сегмент $[\alpha, \rho]$ (или $[\rho, \alpha]$) оси t такой, что при изменении t на сегменте $[\alpha, \rho]$ значения функции $x = g(t)$ заполняют сегмент $[a, R]$, причем $g(\rho) = R$. Таким образом, для указанных сегментов выполнены все условия п. 3 § 7 гл. 10 вып. 1 этого курса, при которых действует формула замены переменной под знаком определенного интеграла. Поэтому имеет место равенство

$$\int_a^R f(x)\,dx = \int_\alpha^\rho f(g(t))g'(t)\,dt \left(\text{или} = -\int_\rho^\alpha f(g(t))g'(t)\,dt \right). \tag{3.11}$$

В силу строгой монотонности функции $x = g(t)$, $R \to \infty$ при $\rho \to \infty$, и обратно, $\rho \to \infty$ при $R \to \infty$ (или $R \to \infty$ при $\rho \to -\infty$ и $\rho \to -\infty$ при $R \to \infty$). Поэтому из формулы (3.11) вытекает справедливость сформулированного выше утверждения.

Перейдем теперь к вопросу об интегрировании по частям несобственных интегралов первого рода.

Докажем следующее утверждение.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные на полупрямой* $a \leqslant x < \infty$ *и, кроме того, существует предельное значение*

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = A.$$

При этих условиях из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty v(x)u'(x)\,dx \tag{3.12}$$

вытекает сходимость другого. Справедлива также формула

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)\,dx = A - u(a)v(a) - \int_a^\infty v(x)u'(x)\,dx. \tag{3.13}$$

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим произвольный сегмент $[a, R]$. На этом сегменте действует обычная формула интегрирования по частям. Поэтому

$$\int_a^R u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^R - \int_a^R v(x)u'(x)\,dx.$$

Так как при $R \to \infty$ выражение $[u(x)v(x)]_a^R$ стремится к $A - u(a)v(a)$, то из последнего равенства следует одновременная сходимость или расходимость интегралов (3.12) и справедливость формулы (3.13) в случае сходимости одного из интегралов (3.12).

§ 2. Несобственные интегралы второго рода (одномерный случай)

В этом параграфе будет дано обобщение понятия определенного интеграла на случай неограниченных функций.

1. Понятие несобственного интеграла второго рода. Критерий Коши. Пусть на полусегменте $[a, b)$ задана функция $f(x)$. Точку b мы будем называть *особой*, если функция не ограничена на полусегменте $[a, b)$, но ограничена на любом сегменте $[a, b-\alpha]$, заключенном в полусегменте $[a, b)$. Будем также предполагать, что на любом таком сегменте функция $f(x)$ интегрируема.

При наших предположениях на полусегменте $(0, b - a]$ задана функция аргумента α, определенная соотношением

$$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Исследуем вопрос о правом предельном значении функции $F(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$, т. е. вопрос о существовании предела

$$\lim_{\alpha\to+0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{3.14}$$

При этом для выражения (3.14) будем использовать обозначение

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.15}$$

В дальнейшем символ (3.15) будем называть *несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ по полусегменту $[a, b)$. Если существует предел (3.14), то несобственный интеграл (3.15) называется *сходящимся*. Если же этот предел не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*. Если несобственный интеграл (3.15) сходится, то величина предела (3.14) обозначается тем же символом (3.15). Таким образом, в случае сходимости интеграла (3.15) используется равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Замечание. Понятие несобственного интеграла второго рода легко переносится на случай, когда функция $f(x)$ имеет конечное число особых точек.

Пример. Рассмотрим на полусегменте $[a,\,b)$ функцию $1/(b-x)^p$, $p>0$. Ясно, что точка b является особой точкой для этой функции. Кроме того, очевидно, что эта функция интегрируема на любом сегменте $[a,\,b-\alpha]$, причем

$$\int\limits_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\alpha} = \dfrac{(b-a)^{1-p}-\alpha^{1-p}}{1-p} & \text{при} \quad p\neq 1, \\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha} = \ln\dfrac{b-a}{\alpha} & \text{при} \quad p=1. \end{cases}$$

Очевидно, предел $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha}\dfrac{dx}{(b-x)^p}$ существует и равен $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ при $p<1$ и не существует при $p\geqslant 1$. Следовательно, рассматриваемый несобственный интеграл сходится при $p<1$ и расходится при $p\geqslant 1$.

Сформулируем критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода. При этом мы будем предполагать, что функция $f(x)$ задана на полусегменте $[a,\,b)$ и b — особая точка этой функции.

Теорема 3.5 (критерий Коши). *Для сходимости несобственного интеграла второго рода* (3.15) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *можно было указать такое* $\delta>0$, *что для любых* α' *и* α'', *удовлетворяющих условию* $0<\alpha''<\alpha'<\delta$, *выполнялось неравенство*

$$\left|\int\limits_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Справедливость этой теоремы вытекает из того, что понятие сходимости интеграла по определению эквивалентно понятию существования предельного значения функции $F(\alpha)$, введенной в начале этого пункта.

2. Заключительные замечания. Мы не будем подробно развивать теорию несобственных интегралов второго рода. Это объясняется тем, что основные выводы и теоремы предыдущего параграфа без труда могут быть перенесены на случай интегралов второго рода. Поэтому мы ограничимся некоторыми замечаниями.

1°. При некоторых ограничениях на подынтегральные функции интегралы второго рода сводятся к интегралам первого рода. Именно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a, b)$ и b — особая точка этой функции. При этих условиях в интеграле $\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ мы можем произвести следующую замену переменных:

$$x = b - \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{b-a} \leqslant t \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

В результате этой замены переменных мы получим равенство

$$\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx = \int\limits_{1/(b-a)}^{1/\alpha} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt. \tag{3.16}$$

Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Это означает, что существует предел $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$. Обращаясь к равенству (3.16), мы видим, что существует также и предел при $1/\alpha \to +\infty$ выражения в правой части (3.16). Тем самым доказана сходимость несобственного интеграла первого рода

$$\int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

и равенство этого интеграла интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Очевидно, сходимость только что указанного несобственного интеграла первого рода влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и равенство этих интегралов. Итак, *из сходимости одного из интегралов*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует сходимость другого и равенство этих интегралов.

2°. Для несобственных интегралов второго рода легко доказываются утверждения, аналогичные утверждениям п. 2 предыдущего параграфа, которые можно объединить общим наименованием «признаки сравнения». Отметим, что во всех формулировках функция $f(x)$ рассматривается на полусегменте $[a, b)$, где b — особая точка функции.

Частный признак сравнения будет иметь следующий вид.

Если $|f(x)| \leqslant c(b-x)^{-p}$, где $p < 1$, то несобственный интеграл (3.15) сходится. Если же $f(x) \geqslant c(b-x)^{-p}$, где $c > 0$ и $p \geqslant 1$, то несобственный интеграл (3.15) расходится. Доказательство вытекает из общего признака сравнения и примера, рассмотренного в предыдущем пункте.

В полной аналогии с п. 3 предыдущего параграфа для несобственных интегралов второго рода формулируются правила интегрирования путем замены переменной и интегрирования по частям.

§ 3. Главное значение несобственного интеграла

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на прямой $-\infty < x < \infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащем этой прямой. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши, если существует предел*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Этот предел мы будем называть главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать символом [1]

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\nolimits_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найдем главное значение интеграла от $\sin x$. Поскольку, в силу нечетности $\sin x$,

$$\int_{-R}^{R} \sin x\,dx = 0, \quad \text{то} \quad \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0.$$

Справедливо следующее *утверждение.*

Если функция $f(x)$ нечетна, то она интегрируема по Коши и главное значение интеграла от нее равняется нулю.

Если функция $f(x)$ четна, то она интегрируема по Коши тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3.17}$$

Первая часть этого утверждения является очевидной. Для доказательства второй части достаточно воспользоваться равенством

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{R} f(x)\,dx,$$

[1] V. p. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», обозначающих «главное значение».

справедливым для любой четной функции, и определением сходимости несобственного интеграла (3.17).

Понятие интегрируемости по Коши можно ввести и для несобственных интегралов второго рода в случае, когда особая точка является внутренней точкой сегмента, по которому производится интегрирование.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, кроме, быть может, точки c, $a < c < b$, и интегрируема на любом сегменте, не содержащем c. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши, если существует предел*

$$\lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx\right) = \mathrm{V.\,p.}\int_a^b f(x)\,dx,$$

называемый главным значением интеграла в смысле Коши.

Пример 2. Функция $\dfrac{1}{x-c}$ не интегрируема на сегменте $[a, b]$, $a < c < b$ в несобственном смысле, однако она интегрируема по Коши. При этом

$$\mathrm{V.\,p.}\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^{b}\frac{dx}{x-c}\right) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

§ 4. Кратные несобственные интегралы

Этот параграф посвящен обобщению понятия кратного интеграла на случаи неограниченной области интегрирования и неограниченности подынтегральной функции. Напомним, что именно эти случаи исключались нами из рассмотрения при построении теории кратных интегралов.

Отметим, что мы сформулируем понятие несобственного кратного интеграла так, что будут охвачены как случай неограниченной области интегрирования, так и случай неограниченной функции.

1. Понятие кратных несобственных интегралов. Пусть D — открытое множество [1]) m-мерного евклидова пространства E^m. Символом $\overline{D}$ мы будем обозначать замыкание D, которое получается путем присоединения к D его границы. Нам понадобится понятие последовательности $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающих множество D.

Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых множеств монотонно исчерпывает множество D, если: 1) *для*

[1]) Множество называется открытым, если оно состоит лишь из внутренних точек. Открытое множество называют также областью.

любого n множество $\overline{D}_n$ содержится в D_{n+1}; 2) *объединение всех множеств D_n совпадает с множеством D* [1]).

Отметим, что каждое множество D_n последовательности $\{D_n\}$ содержится в D.

Пусть на открытом множестве D задана функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, интегрируемая по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве множества D. Будем рассматривать всевозможные последовательности $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающих D и обладающих тем свойством, что замыкание $\overline{D}_n$ каждого множества D_n кубируемо (отсюда, в частности, вытекает, что каждое из множеств D_n ограничено).

Если для любой такой последовательности $\{D_n\}$ существует предел числовой последовательности $\Big\{\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx\Big\}$ и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по множеству D и обозначается одним из следующих символов:

$$\int\limits_D f(x)\,dx, \quad \iint\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_m. \tag{3.18}$$

При этом несобственный интеграл (3.18) *называется сходящимся.*

Отметим, что символ (3.18) используется и в случае, когда пределы указанных выше последовательностей не существуют. В этом случае интеграл (3.18) называется *расходящимся.*

2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.6. *Для сходимости несобственного интеграла* (3.18) *от неотрицательной в области D функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности кубируемых областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область D, была ограниченной числовая последовательность*

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx. \tag{3.19}$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна: последовательность (3.19) — неубывающая ($\overline{D}_n$ содержится в $\overline{D}_{n+1}$ и $f(x) \geqslant 0$), и поэтому необходимым условием ее

[1]) Объединением всех множеств D_n называется множество $\widetilde{D}$, содержащее все точки каждого из множеств D_n и такое, что каждая точка $\widetilde{D}$ принадлежит по крайней мере одному из множеств D_n.

сходимости является ограниченность. Перейдем к доказательству достаточности условий теоремы. Так как последовательность (3.19) ограничена и не убывает, она сходится к некоторому числу I. Остается доказать, что к этому же числу I сходится последовательность

$$a'_n = \int\limits_{\overline{D}'_n} f(x)\,dx,$$

где $\{D'_n\}$ — произвольная другая последовательность областей, монотонно исчерпывающих область D. Фиксируем любой номер n и рассмотрим область D'_n. Найдется номер n_1 такой, что $\overline{D}'_n$ содержится в D_{n_1} [1]). Поэтому

$$a'_n \leqslant a_{n_1} \leqslant I.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a'_n\}$ сходится к некоторому числу $I' \leqslant I$. Меняя в наших рассуждениях последовательности a'_n и a_n, мы придем к неравенству $I \leqslant I'$. Следовательно, $I' = I$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}dx\,dy, \tag{3.20}$$

взятый по всей плоскости. В качестве системы областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область D, возьмем следующую систему концентрических кругов D_n:

$$x^2 + y^2 < n^2, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

В каждом таком круге D_n перейдем к полярной системе координат r, φ. Получим

$$a_n = \iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{n} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$. Согласно только что доказанной теореме интеграл (3.20) сходится и равен π. Отметим, что

---

[1]) Допустим, что это не так. Тогда для любого целого k можно указать такую точку M_k области $\overline{D}'_n$, которая не принадлежит области D_k. Из последовательности $\{M_k\}$ можно (в силу замкнутости и ограниченности $\overline{D}'_n$) выделить сходящуюся к некоторой точке $M \in \overline{D}'_n$ подпоследовательность. Точка M вместе с некоторой окрестностью принадлежит одному из множеств D_{k_1}. Но тогда этому же множеству D_{k_1} и всем множествам D_k с большими номерами принадлежат точки M_k с как угодно большими номерами. Но это противоречит выбору точек M_k.

интеграл (3.20) может быть представлен в следующей форме [1]:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Из этого представления мы получаем значение интеграла, называемого интегралом Пуассона: [2]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.7 (общий признак сравнения). *Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду в открытом множестве D удовлетворяют условию*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_D g(x)\,dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\{D_n\}$ — последовательность областей, монотонно исчерпывающих область D. Из очевидных неравенств

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = b_n$$

следует, что ограниченность последовательности b_n влечет ограниченность последовательности a_n. Отсюда и из теоремы 3.6 вытекает справедливость сформулированной теоремы.

Обычно при исследовании несобственных интегралов на сходимость используются стандартные (эталонные) функции сравнения, наиболее употребительной из которых является функция $g(x) = |x|^{-p}$, $p > 0$ [3].

Пример 1. Пусть $a > 0$, D — шар радиуса a с центром в начале координат, $g(x) = |x|^{-p}$. В качестве последовательности $\{D_n\}$ областей, монотонно исчерпывающих D, возьмем систему концентрических слоев D_n, образованных удалением из шара D шаров радиуса $1/n$ с центром в начале координат. Вводя

[1] В возможности такого представления легко убедиться, если в качестве исчерпывающей системы областей взять систему увеличивающихся квадратов с центрами в начале координат и со сторонами, параллельными осям, а затем применить формулу повторного интегрирования по каждому такому квадрату.

[2] С. Пуассон — француаский математик и физик (1781–1840).

[3] При этом считают $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

сферическую систему координат (см. п. 3° § 5 гл. 2), получим

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = \int\limits_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\theta_k \right) d\theta_{m-1}.$$

Обозначая символом ω_m положительную величину

$$\omega_m = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\theta_k \right) d\theta_{m-1},$$

мы можем записать

$$a_n = \omega_m \int\limits_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\,dr.$$

Отсюда вытекает, что последовательность a_n ограничена и, следовательно, сходится тогда и только тогда, когда $p < m$. В силу теоремы 3.6 несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ в области D сходится при $p < m$ и расходится при $p \geqslant m$.

Пример 2. Пусть $a > 0$, D — внешность шара радиуса a с центром в начале координат, $g(x) = |x|^{-p}$. В качестве последовательности $\{D_n\}$ областей, монотонно исчерпывающих D, возьмем систему концентрических слоев D_n, состоящих из всех точек $x \in E^m$, удовлетворяющих условию

$$a < |x| < n.$$

Вводя сферическую систему координат, получим

$$a_n \int\limits_{D_n} g(x)\,dx = \omega_m \int\limits_a^n r^{-p+m-1}\,dr.$$

Из этого равенства и теоремы 3.6 вытекает, что несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ в указанной области D сходится при $p > m$ и расходится при $p \leqslant m$.

3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. В этом пункте мы выясним связь между сходимостью и абсолютной сходимостью кратных несобственных интегралов. При этом, как и в одномерном случае, несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ мы будем называть абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_D |f(x)|\,dx$. Мы докажем, что из абсолютной сходимости интеграла вытекает обычная сходимость. Наиболее удивительным является другое свойство кратных несобственных интегралов, не имеющее аналога в одномерном случае и заключающееся в том, что из сходимости несобственного кратного интеграла вытекает его абсолютная сходимость. Иными словами, мы докажем, что *для несобственных кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.*

Прежде чем перейти к доказательствам этих свойств, сделаем несколько предварительных замечаний.

Из определения несобственного интеграла следует, что если сходится несобственный интеграл по области D от каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, то сходятся интегралы от суммы или разности этих функций.

Рассмотрим следующие две неотрицательные функции:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}. \tag{3.21}$$

Указанные функции могут быть, очевидно, определены соотношениями

$$\begin{gathered} f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) < 0, \end{cases} \\ f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если} \quad f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) > 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.22}$$

Отметим также следующие очевидные соотношения, вытекающие из определения функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$:

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \tag{3.23}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x). \tag{3.24}$$

Перейдем теперь к доказательству указанных в начале этого пункта утверждений.

***Теорема* 3.8.** *Из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *следует его обычная сходимость.*

Доказательство. Обратимся к только что введенным функциям $f_+(x)$ и $f_-(x)$. Из интегрируемости в собственном смысле функции $f(x)$ по любой кубируемой подобласти области D вытекает интегрируемость по D функции $|f(x)|$, а отсюда и из формул (3.21) следует, что функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ также интегрируемы по любой такой подобласти. Используя сходимость интеграла $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, только что указанное свойство функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, неравенства (3.23) и теорему 3.7, легко убедиться в сходимости несобственных интегралов $\int\limits_D f_+(x)\,dx$ и $\int\limits_D f_-(x)\,dx$. Отсюда и из соотношения (3.24) следует сходимость интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$. Теорема доказана.

Докажем теперь обратную теорему.

***Теорема* 3.9.** *Если кратный несобственный интеграл* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *сходится, то он сходится абсолютно.*

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда из теоремы 3.6 вытекает, что последовательность интегралов от $|f(x)|$ по любой монотонно исчерпывающей область последовательности областей $\{D_n\}$ будет монотонно возрастающей бесконечно большой последовательностью. Отсюда следует, что последовательность $\{D_n\}$ можно выбрать так, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\overline{D}_{n+1}} |f(x)|\, dx > 3 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + 2n. \qquad (3.25)$$

Обозначим через P_n множество $D_{n+1} - D_n$. Тогда из (3.25) получим для любого n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\, dx > 2 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + 2n. \qquad (3.26)$$

Так как $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, то

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\, dx = \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\, dx + \int\limits_{\overline{P}_n} f_-(x)\, dx. \qquad (3.27)$$

Пусть из двух интегралов в правой части (3.27) большим будет первый. Тогда из соотношений (3.26) и (3.27) получим для любого n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\, dx > 2 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.28)$$

Разобьем область P_n на конечное число областей P_{n_i} так, чтобы нижняя сумма $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$, функции $f_+(x)$ для этого разбиения столь мало отличалась от интеграла по $\overline{P}_n$ от этой функции, что при замене в левой части (3.28) интеграла указанной нижней суммой мы получим следующее неравенство:

$$\sum_i m_i \Delta\sigma_i > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.29)$$

Так как $m_i \geqslant 0$, то в сумме $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$ можно оставить лишь те слагаемые, для которых $m_i > 0$. Объединение соответствующих областей P_{n_i} обозначим через $\widetilde{P}_n$.

В области $\widetilde{P}_n$ функция $f(x)$ положительна, и поэтому в этой области $f(x) = f_+(x)$. Следовательно, согласно (3.29), получаем неравенство

$$\int\limits_{\widetilde{P}_n} f(x)\, dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.30)$$

Обозначим через D_n^* объединение D_n и $\widetilde{P}_n$. Тогда, складывая неравенство (3.30) с очевидным неравенством

$$\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\, dx > -\int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx,$$

получим
$$\int\limits_{\overline{D}_n^*} f(x)\,dx > n. \qquad (3.31)$$

Очевидно, последовательность областей $\{D_n^*\}$ монотонно исчерпывает область D. Но тогда, согласно неравенству (3.31), интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ расходится. Так как по условию этот интеграл сходится, то предположение, что утверждение теоремы неверно, не имеет места. Теорема доказана.

4. Главное значение кратных несобственных интегралов.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in \in E^m$ и интегрируема в каждом шаре K_R радиуса R с центром в начале координат. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши в E^m, если существует предел*
$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{K_R} f(x)\,dx.$$

Этот предел мы будем называть главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать
$$\text{V.p.} \int\limits_{E^m} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{K_R} f(x)\,dx.$$

Пример. Пусть $f(x)$ в сферических координатах имеет вид $f(x) = h(r)g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1})$, где функции h и g непрерывны, причем
$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}) \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1} = 0.$$

Тогда, очевидно, $f(x)$ интегрируема по Коши и
$$\text{V.p.} \int\limits_{E^m} f(x)\,dx = 0.$$

В частности, при $m = 2$ функция двух переменных $f(x, y) = = h(r)\cos\varphi$ интегрируема по Коши, и интеграл от нее в смысле главного значения равен нулю.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет особенность в некоторой точке x_0 области D, интеграл в смысле Коши вводится как предел
$$\text{V.p.} \int\limits_D f(x)\,dx = \lim\nolimits_{R\to\infty} \int\limits_{D_R} f(x)\,dx,$$

где D_R — множество, получаемое удалением из области D шара радиуса R с центром в точке x_0.

ГЛАВА 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе мы перенесем понятие одномерного определенного интеграла, взятого по прямолинейному отрезку, на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой плоской или пространственной кривой.

Такого рода интегралы называются *криволинейными*. В приложениях принято рассматривать криволинейные интегралы двух родов (от выражений, имеющих скалярный и векторный смысл). В этой главе криволинейные интегралы первого и второго родов рассматриваются параллельно.

§ 1. Определения криволинейных интегралов и их физический смысл

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую спрямляемую кривую L, не имеющую точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что кривая определяется параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{4.1}$$

и сначала будем считать ее не замкнутой и ограниченной точками A и B.

Предположим далее, что

функция $f(x, y)$ | две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$

определены и непрерывны вдоль кривой $L = AB$ [1].

Разобьем сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ при помощи точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

[1]) Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной вдоль кривой* L, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) кривой L, удовлетворяющих условию $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$. Фактически мы определили не непрерывность, а равномерную непрерывность функции $f(x, y)$ вдоль кривой L, но так как множество всех точек кривой L ограничено и замкнуто, то эти понятия совпадают.

Так как каждому значению t_k соответствует на кривой L определенная точка $M_k(x_k, y_k)$ с координатами $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, то при указанном разбиении сегмента $a \leqslant t \leqslant b$ вся кривая $L = AB$ распадается на n частичных дуг M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ (рис. 4.1).

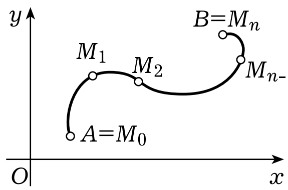


Рис. 4.1

Выберем на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координаты ξ_k, η_k которой отвечают некоторому значению τ_k параметра t, так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, причем $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. Договоримся обозначать символом Δl_k длину k-й частичной дуги $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Составим интегральную сумму

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k. \qquad (4.2)$$

Составим две интегральные суммы

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}), \qquad (4.2')$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}). \qquad (4.2'')$$

Назовем число I **пределом** интегральной суммы σ_s $(s = 1, 2, 3)$ при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\sigma_s - I| < \varepsilon$, как только наибольшая из длин Δl_k меньше δ.

Определения

*Если существует предел интегральной суммы σ_1 при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k, то этот предел называется **криволинейным интегралом первого рода** от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается символом*

$$\int_L f(x, y)\, dl$$

или

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl. \qquad (4.3)$$

*Если существует предел интегральной суммы $\sigma_2[\sigma_3]$ при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k, то этот предел называется **криволинейным интегралом второго рода** и обозначается символом*

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx \left[\int_{AB} Q(x, y)\, dy\right].$$

Сумму

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + \int_{AB} Q(x, y)\, dy$$

принято называть **общим криволинейным интегралом второго рода** и обозначать символом

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x,\,y)\,dy. \tag{4.3$'$}$$

Выясним **физический смысл** введенных нами криволинейных интегралов.

Пусть вдоль кривой L распределена масса с линейной плотностью $f(x,\,y)$. Для вычисления массы всей кривой естественно разбить эту кривую на малые участки и, считая, что на каждом участке плотность меняется мало, положить массу каждого участка приближенно равной произведению некоторого промежуточного значения плотности на длину этого участка.

В таком случае масса всей кривой приближенно будет равна интегральной сумме (4.2). Точное значение массы естественно определить как предел суммы (4.2) при стремлении к нулю длины наибольшего участка.

Таким образом, *криволинейный интеграл первого рода* (4.3) *дает массу кривой, линейная плотность вдоль которой равна* $f(x,\,y)$.

Пусть материальная точка движется из A в B вдоль кривой L под действием силы $\boldsymbol{F}(x,\,y)$, имеющей компоненты $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$. Для вычисления работы по такому перемещению естественно разбить кривую L на малые участки и, считая, что на каждом участке сила меняется мало, положить работу на каждом участке приближенно равной сумме произведений компонент силы, взятых в некоторых промежуточных точках, на компоненты вектора смещения. В таком случае полная работа по перемещению из A в B будет приближенно равна сумме (4.2$'$) и (4.2$''$). Точное значение этой работы естественно определить как предел указанной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего участка.

Таким образом, *общий криволинейный интеграл второго рода* (4.3$'$) *дает работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы, имеющей компоненты* $P(x,\,y)$ *и* $Q(x,\,y)$.

Замечание 1. Из вида сумм (4.2), (4.2$'$) и (4.2$''$) очевидно, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегается кривая L, а для криволинейного интеграла второго рода изменение направления на кривой ведет к изменению знака, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y)\,dx = -\int\limits_{BA} P(x,\,y)\,dx, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,\,y)\,dy = -\int\limits_{BA} Q(x,\,y)\,dy.$$

Замечание 2. Для пространственной кривой совершенно аналогично вводится криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{AB} f(x,\,y,\,z)\,dl$ и три криволинейных интеграла второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y,\,z)\,dx, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,\,y,\,z)\,dy, \qquad \int\limits_{AB} R(x,\,y,\,z)\,dz.$$

Сумму трех последних интегралов принято называть общим криволинейным интегралом второго рода и обозначать символом

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y,\,z)\,dx + Q(x,\,y,\,z)\,dy + R(x,\,y,\,z)\,dz.$$

§ 2. Существование криволинейных интегралов и сведение их к определенным интегралам

Договоримся называть кривую L гладкой, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из определяющих ее параметрических уравнений (4.1) обладают на сегменте $[a,\,b]$ непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ [1].

Кривую L мы будем называть кусочно-гладкой, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую.

В соответствии с договоренностью принятой еще в главах 15 и 16 вып. 1, мы будем называть особыми точками кривой L точки, соответствующие тому значению параметра t, для которого обе производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ обращаются в нуль.

Докажем, что *если кривая $L = AB$ является гладкой и не содержит особых точек и если функции $f(x,\,y)$, $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ непрерывны вдоль этой кривой, то справедливы следующие формулы, сводящие криволинейные интегралы к обычным определенным интегралам*:

$$\int\limits_{AB} f(x,\,y)\,dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t),\,\psi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \quad (4.4)$$

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y)\,dx = \int\limits_a^b P\,[\varphi(t),\,\psi(t)] \times \varphi'(t)\,dt, \quad (4.4')$$

[1] Под этим подразумевается, что производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны в любой внутренней точке сегмента $[a,\,b]$ и обладают конечными предельными значениями в точке a справа и в точке b слева.

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy = \int\limits_a^b Q[\varphi(t),\, \psi(t)] \times \psi'(t)\, dt, \qquad (4.4'')$$

Одновременно будет доказано существование всех фигурирующих в этих формулах криволинейных интегралов.

Прежде всего заметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (4.4), (4.4′) и (4.4″), заведомо существуют (ибо при сделанных нами предположениях подынтегральные функции в каждом из этих интегралов непрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$).

Для криволинейного интеграла второго рода мы будем выводить только формулу (4.4′) (ибо вывод формулы (4.4″) совершенно аналогичен).

Как и в § 1, разобьем сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ при помощи точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n частичных сегментов и составим интегральные суммы (4.2) и (4.2′).

Учтем теперь, что

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

$$x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt.$$

Это позволяет нам следующим образом переписать выражения для интегральных сумм (4.2) и (4.2′):

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f[\varphi(\tau_k),\, \psi(\tau_k)] \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \right\}. \qquad (4.5)$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ P[\varphi(\tau_k),\, \psi(\tau_k)] \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt \right\}. \qquad (4.5')$$

(Мы учли также, что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, где τ_k — некоторое значение параметра t, удовлетворяющее условию $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$.)

Обозначим теперь определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (4.4) и (4.4′), соответственно через K_1 и K_2. Разбивая сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ на сумму n частичных сегментов $[t_{k-1},\, t_k]$, мы можем следующим образом записать определенные интегралы K_1 и K_2:

$$K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f[\varphi(t),\, \psi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P[\varphi(t),\, \psi(t)] \varphi'(t)\, dt.$$

Рассмотрим и оценим разности

$$\sigma_1 - K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{f[\varphi(\tau_k),\, \psi(\tau_k)] - f[\varphi(t),\, \psi(t)]\} \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \quad (4.6)$$

$$\sigma_2 - K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[\varphi(\tau_k),\, \psi(\tau_k)] - P[\varphi(t),\, \psi(t)]\}\varphi'(t)\, dt. \quad (4.6')$$

Так как функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$, а функции $f(x,\, y)$ и $P(x,\, y)$ непрерывны вдоль кривой L, то по теореме о непрерывности сложной функции (см. § 3 гл. 14 вып. 1) *функции* $f[\varphi(t),\, \psi(t)]$ *и* $P[\varphi(t),\, \psi(t)]$ *непрерывны на сегменте* $a \leqslant t \leqslant b$.

Заметим теперь, что при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг Δl_k стремится к нулю и наибольшая из разностей $(t_k - t_{k-1})$ [1]. Но отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при условии, что наибольшая из длин Δl_k меньше δ, каждая из фигурных скобок в формулах (4.6) и (4.6′) меньше ε. Стало быть, при условии, что наибольшая из длин Δl_k меньше δ, мы получим для разностей (4.6) и (4.6′) следующие оценки:

$$|\sigma_1 - K_1| \leqslant \varepsilon \times \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt = \varepsilon \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt = \varepsilon l,$$

где l — длина кривой AB.

$$|\sigma_2 - K_2| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)|\, dt \leqslant \varepsilon M \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon M(b-a),$$

где M — максимальное значение $|\varphi'(t)|$ на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$. Подчеркнем, что при выводе формулы (4.4′) нам требуется лишь непрерывность $\varphi'(t)$ и спрямляемость кривой $L = AB$ (непрерывность $\psi'(t)$ при этом не требуется).

---

[1]) В самом деле, $\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt$. Так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$ и не обращаются в нуль одновременно, то функция $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ непрерывна и строго положительна на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$. Поэтому и минимальное значение m последней функции на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$ положительно. Но тогда $\Delta l_k \geqslant m \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m(t_k - t_{k-1})$, т. е. $t_k - t_{k-1} \leqslant (1/m)\Delta l_k$.

В силу произвольности ε мы можем утверждать, что интегральные суммы σ_1 и σ_2 имеют (при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k) пределы, соответственно равные K_1 и K_2. Тем самым одновременно доказано существование криволинейных интегралов, стоящих в левых частях формул (4.4) и (4.4$'$), и справедливость указанных формул.

Замечание 1. В случае кусочно-гладкой кривой L криволинейные интегралы по этой кривой естественно определить как суммы соответствующих криволинейных интегралов по всем гладким кускам, составляющим кривую L. Таким образом, равенства (4.4), (4.4$'$) и (4.4$''$) оказываются справедливыми и для кусочно-гладкой кривой L. Эти равенства справедливы и в случае, когда функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются не строго непрерывными, а лишь кусочно-непрерывными вдоль кривой L (т. е. когда кривая L распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, вдоль каждого из которых указанные функции непрерывны).

Замечание 2. Совершенно аналогичные результаты и формулы справедливы и для криволинейных интегралов, взятых по пространственной кривой $L = AB$, определяемой параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Мы ограничимся лишь написанием формул

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\; dt.$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx = \int\limits_a^b P[\varphi(t), \psi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y, z)\, dx = \int\limits_a^b Q[\varphi(t), \psi(t), \psi(t)]\psi'(t)\, dt,$$

$$\int\limits_{AB} R(x, y, z)\, dz = \int\limits_a^b R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\chi'(t)\, dt.$$

Замечание 3. Выше мы установили, что криволинейный интеграл второго рода зависит от направления обхода кривой $L = AB$. Поэтому следует принять особую договоренность о том, что мы понимаем под символом

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{4.7}$$

в случае, когда L — замкнутая кривая (т. е. в случае, когда точка B совпадает с точкой A).

Из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L мы назовем положительным то направление обхода, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход [1]. На рис. 4.2 положительное направление обхода изображено стрелками.

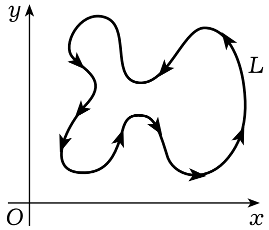


Рис. 4.2

Будем считать, что в интеграле (4.7) *по замкнутому контуру L этот контур всегда обходится в положительном направлении.*

Замечание 4. Легко показать, что *криволинейные интегралы обладают теми же свойствами, что и обычные определенные интегралы* (доказательства аналогичны изложенным в § 5 и 6 гл. 10 вып. 1). Впрочем, при более жестких предположениях указанные свойства сразу вытекают из формул (4.4), (4.4′) и (4.4″).

Перечислим эти свойства применительно к криволинейным интегралам первого рода.

1°. Линейное свойство. Если для каждой из функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ существует криволинейный интеграл по кривой AB и если α и β — любые постоянные, то для функции $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ также существует криволинейный интеграл по кривой AB, причем

$$\int\limits_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\, dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl + \beta \int\limits_{AB} g(x, y)\, dl.$$

2°. Аддитивность. Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB и если для функции $f(x, y)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB, то для этой функции существует криволинейный интеграл по каждой из дуг AC и CB, причем

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{AC} f(x, y)\, dl + \int\limits_{CB} f(x, y)\, dl.$$

3°. Оценка модуля интеграла. Если существует криволинейный интеграл по кривой AB от функции $f(x, y)$, то существует и криволинейный интеграл по кривой AB от функции $|f(x, y)|$, причем

$$\left|\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl\right| \leqslant \int\limits_{AB} |f(x, y)|\, dl.$$

[1]) Такое направление движения условно можно назвать «движением против часовой стрелки».

4°. Формула среднего значения. Если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой AB, то на этой кривой найдется точка M^* такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = l \cdot f(M^*),$$

где l — длина кривой AB.

Примеры. 1°. Вычислить массу эллипса L, определяемого параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

при условии, что $a > b > 0$ и что линейная плотность распределения массы равна $\rho = |y|$.

Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода $\int\limits_L |y|\, dl$.

С помощью формулы (4.4) получим

$$\int\limits_L |y|\, dl = b\int\limits_0^{2\pi} |\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\; dt =$$

$$= b\int\limits_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\; dt - b\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\; dt =$$

$$= -b\int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\; d(\cos t) +$$

$$+ b\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\; d(\cos t) = 2b\Big(b + a\frac{\arcsin e}{e}\Big),$$

где $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ [1]).

2°. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$$

в котором L — парабола $y = x^2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Указанную параболу можно рассматривать как кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Поэтому с помощью формул (4.4′) и (4.4″) мы получим, что

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3)\, dt + \int\limits_{-1}^{1} (t^4 - 2t^3)2t\, dt = -(14/15).$$

[1]) Напомним, что величину e в аналитической геометрии называют эксцентриситетом.

ГЛАВА 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе будет рассмотрен вопрос об интегрировании функций, заданных на поверхностях. В связи с этим предварительно исследуется вопрос о понятии поверхности и понятии площади поверхности.

§ 1. Понятие поверхности

1. Понятие поверхности. Отображение f области [1] G на плоскости на множество G^* трехмерного евклидова пространства называется гомеоморфным, если это отображение представляет собой взаимно однозначное соответствие между точками G и G^*, при котором любой сходящейся последовательности $\{M_n\}$ точек из G соответствует сходящаяся последовательность $\{M_n^*\}$ точек из G^* и каждой сходящейся последовательности точек $\{M_n^*\}$ из G^* отвечает сходящаяся последовательность $\{M_n\}$ точек из G. Иными словами, гомеоморфное отображение области G на множество G^* — это взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение указанных множеств. Мы будем говорить, что G^* является образом G при гомеоморфном отображении f.

Рассмотрим следующий пример. Пусть G — область на плоскости Oxy, (u, v) — координаты точек M этой области, $z = z(M)$ — непрерывная в G функция, G^* — график этой функции. Очевидно, отображение f области G на G^*, задаваемое соотношениями

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v)$$

является гомеоморфным отображением этой области на множество G^*.

Введем понятие элементарной поверхности.

Множество Φ *точек трехмерного пространства называется элементарной поверхностью, если это множество*

[1] Напомним, что областью называется множество, каждая точка которого является внутренней.

является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении G в пространство [1]*.*

С помощью понятия элементарной поверхности вводится понятие так называемой простой поверхности.

Предварительно введем понятие окрестности точки множества Φ евклидова пространства E^3.

Окрестностью точки M множества Φ называется общая часть множества Φ и пространственной окрестности точки M.

Множество Φ точек пространства называется простой поверхностью, если это множество связно [2] *и любая точка этого множества имеет окрестность, которая является элементарной поверхностью.*

Отметим, что, элементарная поверхность является простой поверхностью, но простая поверхность, вообще говоря, не является элементарной. Например, сфера — простая, но неэлементарная поверхность.

Сформулируем понятие общей поверхности.

Отображение f простой поверхности G назовем локально-гомеоморфным, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Множество Φ точек пространства называется общей поверхностью, если оно является образом простой поверхности при локально-гомеоморфном ее отображении в пространство.

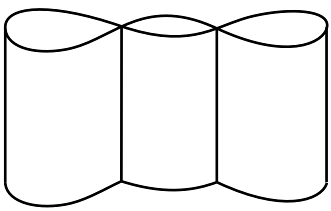


Рис. 5.1

Замечание 1. Отметим, что окрестности точек на общей поверхности вводятся как образы окрестностей точек той простой поверхности, образом которой является данная общая поверхность.

Замечание 2. Простая поверхность, очевидно, является поверхностью без самопересечений и без самоналеганий. Общая поверхность может иметь самопересечения и самоналегания. Например, изображенная на рис. 5.1 поверхность имеет самопересечения, но является локально-гомеоморфным образом цилиндрического пояса и поэтому является общей поверхностью.

2. Регулярная поверхность. Введем понятие регулярной (k раз дифференцируемой) поверхности.

---

[1] Мы рассматриваем трехмерное евклидово пространство, хотя можно рассматривать евклидово пространство любого числа измерений и говорить о двумерной поверхности в этом пространстве.

[2] Напомним, что множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого множества.

Поверхность Φ, *точки которой имеют координаты* z, y, z, *называется регулярной* (k *раз дифференцируемой*), *если при некотором* $k \geqslant 1$ *у каждой точки* Φ *есть окрестность, допускающая* k *раз дифференцируемую параметризацию.* Это означает, что каждая указанная выше окрестность представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной области G [1] в плоскости uv при помощи соотношений

$$x = x(u,\, v), \quad y = y(u,\, v), \quad z = z(u,\, v), \tag{5.1}$$

в которых функции $x(u,\, v)$, $y(u,\, v)$, $z(u,\, v)$ являются k раз дифференцируемыми в области G.

Если $k = 1$, то поверхность обычно называется *гладкой.*

Мы будем также говорить, что с помощью соотношений (5.1) в окрестности точки на поверхности вводится *регулярная параметризация* с помощью параметров u и v.

Замечание 1. Если вся поверхность Φ представляет отображение области G при помощи соотношений (5.1), то мы будем говорить, что на Φ введена единая параметризация.

Точка регулярной поверхности называется обыкновенной, если существует такая регулярная параметризация некоторой ее окрестности, что в этой точке ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

равен двум. В противном случае точка поверхности называется особой.

Область G на плоскости будем называть простой, если эта область представляет собой простую плоскую поверхность. Например, кольцо без границы является простой областью.

Будем говорить, что функция $f(u,\, v)$ принадлежит в G классу C^k, если она k раз дифференцируема и все ее частные производные порядка k непрерывны в G.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть в простой области* G *на плоскости* uv *заданы функции* $x(u,\, v)$, $y(u,\, v)$, $z(u,\, v)$ *класса* C^k, $k \geqslant 1$, *причем ранг матрицы* (5.2) *равен двум во всех точках* G. *Тогда соотношения* (5.1) *определяют в пространстве множество* Φ, *которое представляет собой регулярную,* k *раз дифференцируемую общую поверхность без особых точек.*

Доказательство. Очевидно, достаточно убедиться в том, что с помощью соотношений (5.1) осуществляется локально-гомеоморфное отображение области G на множество Φ.

[1] Область G на плоскости называется элементарной, если она является образом открытого круга при гомеоморфном отображении этого круга на плоскость.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — любая фиксированная точка множества Φ, отвечающая значениям (u_0, v_0) параметров (u, v) (рис. 5.2). По условию ранг матрицы A равен двум в точке (u_0, v_0). Пусть, ради определенности, в этой точке отличен от нуля определитель $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ матрицы A. Поскольку указанный определитель является якобианом $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ и отличен от нуля в точке (u_0, v_0), а функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области G, то по теореме о разрешимости системы функ-

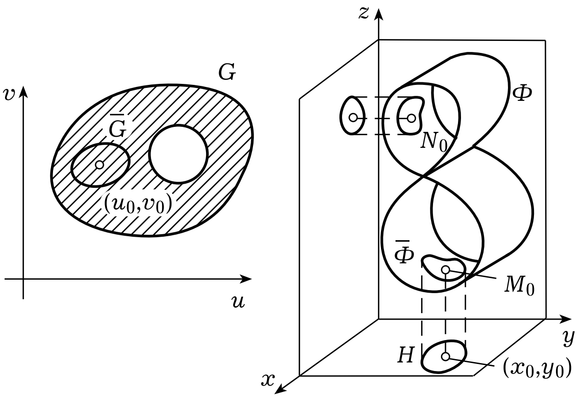


Рис. 5.2

циональных уравнений (см. теорему 15.2 вып. 1) найдется такая окрестность H точки (x_0, y_0) на плоскости Oxy, что в пределах этой окрестности существует единственное и k раз дифференцируемое решение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{5.3}$$

системы

$$x(u, v) - x = 0, \quad y(u,v) - y = 0.$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что некоторая окрестность H точки (x_0, y_0) представляет собой гомеоморфное отображение некоторой окрестности $\overline{G}$ точки (u_0, v_0) с помощью соотношений $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (обратное отображение H на $\overline{G}$ осуществляется с помощью соотношений (5.3)).

Подставляя выражения (5.3) для u и v в соотношение $z = z(u, v)$, мы убедимся, что некоторая окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0 на множестве Φ является графиком k раз дифференцируемой функции $z = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y)$. Но это означает, что с помощью функции $z(x, y)$ осуществляется гомеоморфное отображение окрестности H точки (x_0, y_0) плоскости Oxy на указанную окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0 множества Φ. Очевидно, что окрестность G точки (u_0, v_0) гомеоморфно отображается на окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0 на множестве Φ [1]. Иными словами, Φ представляет собой образ G при локально-гомеоморфном отображении в пространство и является поэтому общей поверхностью. Теорема доказана.

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы мы установили, что *у каждой точки* M_0 *поверхности* Φ *без особых точек имеется окрестность* $\overline{\Phi}$, *однозначно проецирующаяся на одну из координатных плоскостей и являющаяся поэтому графиком* k *раз дифференцируемой функции* (в доказательстве теоремы этой функцией была функция $z(x, y)$).

На рис. 5.2 указаны точки M_0 и N_0, окрестности которых однозначно проецируются на плоскости Oxy и Oxz соответственно.

3. Задание поверхности с помощью векторных функций. Рассмотрим регулярную поверхность Φ. Эта поверхность представляет собой некоторое множество точек M пространства

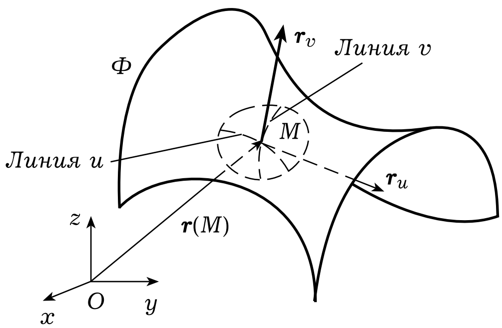


Рис. 5.3

с координатами (x, y, z) (рис. 5.3). Обозначим через $\boldsymbol{r}(M)$ вектор, идущий из начала координат в точку M поверхности. Очевидно, $\boldsymbol{r}(M)$ представляет векторную функцию переменной точки M поверхности [2]. Эта функция обычно называется радиусом-вектором поверхности Φ.

Обратимся к той окрестности точки M, которая представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной

[1] Мы воспользовались здесь очевидным утверждением о том, что последовательное проведение гомеоморфных отображений дает в результате также гомеоморфное отображение.

[2] Векторную функцию можно рассматривать как совокупность трех скалярных функций. Подробные сведения о векторных функциях даются в § 1 гл. 12. По мере надобности мы будем использовать эти сведения.

области G [1]) при помощи соотношений (5.1) (на рис. 5.3 эта окрестность обведена штриховой линией). Тогда, очевидно, координаты $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ точки M являются координатами вектора $\boldsymbol{r}(M)$. Ясно, что в этой окрестности функция $\boldsymbol{r}(M)$ будет функцией переменных u и v: $\boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{r}(u, v)$. При фиксированном значении переменной v конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ описывает в рассматриваемой окрестности кривую, называемую *линией* u (или *линией* $v = \text{const}$). При фиксированном значении переменной u конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ описывает *линию* v (*линию* $u = \text{const}$). Эти линии u и v называются *координатными линиями* на поверхности Φ в рассматриваемой окрестности.

Таким образом, в некоторой окрестности каждой точки поверхности Φ может быть введена система координатных линий u и v. Эта система координатных линий называется также

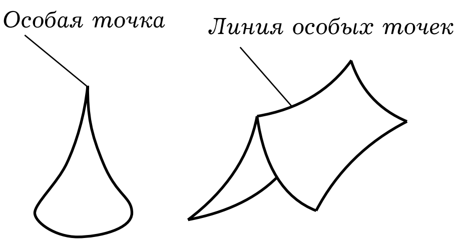


Рис. 5.4

системой криволинейных координат на поверхности (точнее — в рассматриваемой окрестности).

В § 1 гл. 12 указан геометрический смысл производных $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$. Эти векторы представляют собой векторы касательных к координатным линиям (см. рис. 5.3).

С помощью векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ можно уяснить геометрический смысл обыкновенной и особой точек регулярной поверхности.

Напомним, что точка M поверхности называется обыкновенной, если в окрестности этой точки можно ввести такую параметризацию с помощью уравнений (5.1), что ранг матрицы A (см. соотношение (5.2)) в этой точке равен 2. Так как строки матрицы A состоят из координат векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ и ранг A равен двум, указанные векторы линейно независимы. Итак, обыкновенная точка характеризуется тем, что в окрестности этой точки можно ввести такую параметризацию, что векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ в точке M линейно независимы.

[1]) Область G на плоскости называется элементарной, если, она представляет собой гомеоморфный образ открытого круга.

На рис. 5.3 точка M является обыкновенной точкой поверхности Φ. На рис. 5.4 изображены поверхности с особыми точками.

4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности. Мы уже ввели понятие касательной плоскости к поверхности, представляющей собой график дифференцируемой функции $z = z(x,\, y)$ (см. п. 2 § 4 гл. 14 вып. 1). Напомним, что касательная плоскость в точке M_0 определялась как плоскость, обладающая тем свойством, что угол между этой плоскостью и секущей M_0M (M — произвольная точка поверхности) стремится к нулю при стремлении M к M_0. Мы доказали, что если $z(x,\, y)$ — дифференцируемая в точке $(x_0,\, y_0)$ функция, то в точке $M_0(x_0,\, y_0, z(x_0,\, y_0))$ поверхности существует касательная плоскость.

Убедимся, что в любой обыкновенной точке гладкой поверхности существует касательная плоскость. Для этого, очевидно, достаточно установить, что некоторая окрестность обыкновенной точки поверхности представляет собой график дифференцируемой функции. Но в п. 2 этого параграфа (см. замечание указанного пункта) было доказано это свойство для любой обыкновенной точки гладкой поверхности. Следовательно, *в любой обыкновенной точке гладкой поверхности существует касательная плоскость.*

Замечание 1. Из определения касательной плоскости к поверхности Φ следует, что касательная прямая в точке M_0 к любой гладкой линии [1]), расположенной на поверхности и проходящей через M_0, лежит в касательной плоскости к Φ в точке M_0. Так как векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ являются касательными к линиям u и v, проходящим через M_0, то эти векторы располагаются к касательной плоскости в точке M_0.

Введем понятие нормали к поверхности Φ в точке M_0.

Нормалью к поверхности Φ в точке M_0 называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная к касательной плоскости в M_0. Вектором нормали к поверхности в точке M_0 будем называть любой ненулевой вектор, коллинеарный нормали в M_0.

Пусть M_0 — обыкновенная точка гладкой поверхности Φ и некоторая окрестность $\overline{\Phi}$ этой точки определена с помощью такой векторной функции $\boldsymbol{r}(u,\, v)$, что векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ в точке M_0 не коллинеарны. Тогда, очевидно, вектор

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \tag{5.4}$$

[1]) Линия L называется гладкой, если она может быть задана с помощью векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$ класса C^1, для которой $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ (более подробно см. § 2 гл. 12).

является вектором нормали к поверхности, а вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} \tag{5.5}$$

— единичным вектором нормали к поверхности.

Замечание 2. Так как по условию поверхность является гладкой, то векторная функция $\boldsymbol{N}(u, v)$ и векторная функция $\boldsymbol{n}(u, v)$, определенные соответственно с помощью соотношений (5.4) и (5.5), будут непрерывными. Таким образом, *в некоторой окрестности каждой точки гладкой поверхности существует непрерывное векторное поле нормалей.*

Естественно возникает вопрос — на всякой ли гладкой поверхности в целом существует непрерывное векторное поле нормалей? Оказывается, есть поверхности, на которых не существует в целом непрерывного векторного поля нормалей. Примером такой поверхности может служить так называемый лист Мёбиуса [1]), изображенный на рис. 5.5. (Эта поверхность получается из прямоугольника $ABB'A'$ путем склеивания сторон AB и $A'B'$ таким образом, что при этом совпадают точки A и B', и точки A' и B, см. рис. 5.5).

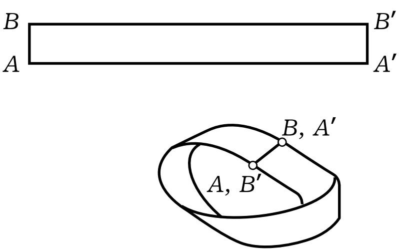


Рис. 5.5

Поверхности, на которых в целом существует непрерывное векторное поле нормалей, будем называть двусторонними. Поверхности, на которых в целом такого поля не существует, будем называть односторонними.

Плоскость, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид — двусторонние поверхности, лист Мёбиуса — односторонняя поверхность.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь двусторонние поверхности.

5. Вспомогательные леммы. В этом пункте мы докажем некоторые нужные для дальнейшего утверждения.

Лемма 1. *Пусть M_0 — обыкновенная точка гладкой поверхности Φ. Тогда некоторая окрестность точки M_0 однозначно проецируется на касательную плоскость, проведенную в любой точке этой окрестности.*

Доказательство. Убедимся, что указанным в лемме свойством обладает, например, та окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0, в пределах которой нормаль в любой точке составляет с нормалью

[1]) А. Мёбиус — немецкий математик (1790–1868).

в M_0 угол, меньший $\pi/4$, и которая однозначно проецируется на некоторый круг в одной из координатных плоскостей (например, Oxy) [1]. Отметим, во-первых, что нормали в любых двух точках $\overline{\Phi}$ образуют угол, меньший $\pi/2$. Далее, пусть $\overline{\Phi}$ не обладает указанным свойством. Тогда для некоторой точки M из $\overline{\Phi}$ можно найти такие точки P и Q из $\overline{\Phi}$, что хорда PQ параллельна нормали $\boldsymbol{n}_M$ в M (рис. 5.6). Рассмотрим линию пересечения $\overline{\Phi}$ с плоскостью, параллельной Oz и проходящей через PQ. В силу выбора окрестности $\overline{\Phi}$ часть PNQ этой линии лежит в $\overline{\Phi}$ и представляет собой график дифференцируемой функции, заданной на отрезке, являющемся проекцией PQ на плоскость Oxy. По теореме Лагранжа касательная в некоторой точке N этой части параллельна хорде PQ и, следовательно, параллельна нормали $\boldsymbol{n}_M$ в M. Но тогда нормаль в N, перпендикулярная упомянутой касательной, образует угол $\pi/2$ с нормалью в M. Но этого не может быть, так как нормали в любых двух точках $\overline{\Phi}$ (в том числе и в точках M и N) образуют угол, меньший $\pi/2$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости леммы. Лемма доказана.

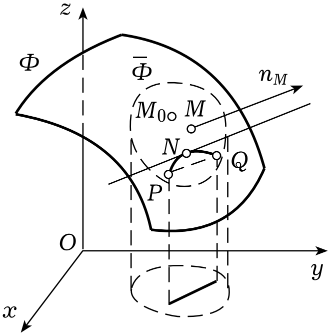


Рис. 5.6

Введем понятие п о л н о й поверхности. *Поверхность* Φ *называется полной, если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к некоторой точке поверхности* Φ.

Плоскость, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид — примеры полных поверхностей. Круг без границы, любое открытое связное множество на сфере — неполные поверхности. Ограниченные полные поверхности и ограниченные замкнутые части полных поверхностей мы будем в дальнейшем называть ограниченными п о л н ы м и п о в е р х н о с т я м и.

Будем говорить, что часть Φ имеет размеры меньше δ, если эта часть помещается внутри некоторой сферы, диаметр которой меньше δ.

[1] Возможность выбора такой окрестности $\overline{\Phi}$ вытекает из следующих соображений. В предыдущем пункте мы отметили (см. замечание 2), что в некоторой окрестности обыкновенной точки на поверхности существует непрерывное векторное поле нормалей. Поэтому в достаточно малой окрестности M_0 нормали составляют с нормалью в M_0 угол, меньший $\pi/4$. Мы также установили, что некоторая окрестность M_0 однозначно проецируется на координатную плоскость. Очевидно, в этой окрестности есть часть, проецирующаяся на некоторый круг в координатной плоскости.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* Φ — *гладкая, ограниченная полная поверхность без особых точек. Существует такое* $\delta > 0$, *что любая часть* Φ, *размеры которой меньше* δ, *однозначно проецируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой части.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда для любого $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ можно указать часть Φ_n поверхности Φ, размеры которой меньше δ_n и которая не проецируется однозначно на касательную плоскость в некоторой своей точке. Выберем в каждой части Φ_n точку M_n и выделим из последовательности $\{M_n\}$ подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке M_0 поверхности Φ [1]. Рассмотрим окрестность точки M_0, удовлетворяющую условиям леммы 1. При достаточно большом n эта окрестность будет содержать каждую часть Φ_n. Но тогда эта часть должна проецироваться на касательную плоскость (в любой своей точке), а это противоречит выбору частей Φ_n. Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* Φ — *гладкая, ограниченная полная поверхность без особых точек. Существует такое* $\delta > 0$, *что любая часть* Φ, *размеры которой меньше* δ, *однозначно проецируется на одну из координатных плоскостей.*

Доказательство этой леммы проводится в полной аналогии с доказательством леммы 2.

Лемма 4. *Пусть* Φ — *гладкая, ограниченная, полная двусторонняя поверхность без особых точек. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что для косинуса угла* γ *между единичными векторами нормалей в любых двух точках произвольной части* $\overline{\Phi}$ *поверхности, размеры которой меньше* δ, *справедливо представление*

$$\cos\gamma = 1 - \alpha_\Phi, \tag{5.6}$$

где $|\alpha_\Phi| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное на Φ векторное поле единичных нормалей $\boldsymbol{n}(M)$ (такое поле существует, так как Φ двусторонняя поверхность). Векторная функция $\boldsymbol{n}$ является равномерно непрерывной, поскольку Φ — ограниченная полная поверхность и поэтому представляет собой ограниченное замкнутое множество. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для произвольных двух точек M_1 и M_2 поверхности Φ, расстояние между которыми меньше δ,

[1] Так как Φ — ограниченная полная поверхность, то такую подпоследовательность выбрать можно.

выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1)| < \sqrt{2\varepsilon}. \tag{5.7}$$

Так как

$$\cos\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2 \text{ [1]},$$

то, полагая

$$\alpha_\Phi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2$$

и используя неравенство (5.7), мы убедимся в справедливости соотношения (5.6). Лемма доказана.

§ 2. Площадь поверхности

1. Понятие площади поверхности. Пусть Φ — ограниченная полная двусторонняя поверхность. Разобьем Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, каждая из которых однозначно проецируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой части [2]. Обозначим через Δ максимальный из размеров частей Φ_i, а через σ_i — площадь проекции Φ_i на касательную плоскость в некоторой точке M_i части Φ_i. Составим далее сумму $\sum\limits_i \sigma_i$ всех указанных площадей.

Сформулируем следующие определения.

Определение 1. *Число σ называется пределом сумм $\sum\limits_i \sigma_i$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, для которых $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i выполняется неравенство*:

$$\left|\sum_i \sigma_i - \sigma\right| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Определение 2. *Если для поверхности Φ существует предел σ сумм $\sum\limits_i \sigma_i$ при $\Delta \to 0$, то поверхность называется квадрируемой, а число σ называется площадью поверхности.*

---

[1] Мы использовали следующие соотношения:

$$\boldsymbol{n}^2(M_1) = 1, \quad \boldsymbol{n}^2(M_2) = 1, \quad \boldsymbol{n}(M_2)\boldsymbol{n}(M_1) = \cos\gamma,$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2(M_2) - 2\boldsymbol{n}(M_2)\boldsymbol{n}(M_1) + \boldsymbol{n}^2(M_1)).$$

[2] Возможность такого разбиения гарантируется леммой 2 предыдущего пункта.

Наша ближайшая задача состоит в выяснении достаточных условий квадрируемости поверхности. Мы докажем, что гладкие ограниченные полные двусторонние поверхности квадрируемы. Попутно мы укажем вычислительный аппарат, с помощью которого можно вычислять площади поверхностей.

На первый взгляд было бы естественно подойти к вопросу о площади поверхности, используя аппроксимацию поверхности многогранниками. Однако этот путь не приводит к цели. Мы укажем пример, принадлежащий Шварцу [1]) и показывающий, что площади вписанных в гладкую поверхность многогранников могут неограниченно возрастать при увеличении числа граней и уменьшении их размеров.

Пусть Φ — цилиндрический пояс (рис. 5.7). Разобьем Φ окружностями, параллельными основаниям Φ, на n равных частей. Каждую из таких окружностей разделим на m равных частей так, как это указано на рис. 5.7. На этом же рисунке изображен многогранник Φ_{nm}, вписанный в Φ. При любом фиксированном m площадь указанного многогранника Φ_{nm}, очевидно, превышает увеличенную в n раз площадь проекции этого многогранника на плоскость основания цилиндра. Так как эта проекция не зависит от n, то за счет увеличения n при любом фиксированном m площадь многогранника Φ_{nm} может быть с д е л а н а к а к у г о д н о б о л ь ш о й.

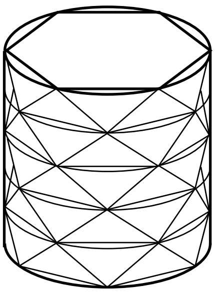


Рис. 5.7

2. Квадрируемость гладких поверхностей. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность без особых точек квадрируема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на поверхности Φ может быть введена единая регулярная параметризация. В этом случае радиус-вектор $\boldsymbol{r}(M)$ переменной точки Φ поверхности представляет собой функцию $\boldsymbol{r}(u,\,v)$ класса C^1 [2]), заданную в некоторой замкнутой ограниченной области Ω плоскости переменных u и v. Частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ функции $\boldsymbol{r}(u,\,v)$ представляют собой непрерывные векторные функции, не зависящие от выбора декартовой прямоугольной системы координат в пространстве. Поэтому значение σ интеграла $\iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u\,\boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv$ не зависит от выбора декартовой системы координат в пространстве. Мы докажем, что поверхность Φ квадрируема и ее площадь равна σ.

Пусть ε — произвольное положительное число, фиксированное в дальнейших рассуждениях. Определим по этому $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$, исходя из следующих требований: 1) любая часть Φ_i

[1]) Г. А. Шварц — немецкий математик (1843–1921).

[2]) Под этим следует понимать, что каждая компонента функции $\boldsymbol{r}(u,\,v)$ принадлежит классу C^1.

поверхности Φ, размеры которой меньше δ, проецируется однозначно на касательную плоскость в любой точке части Φ_i; 2) косинус угла γ между единичными векторами нормалей в любых двух точках части Φ_i может быть представлен в виде

$$\cos\gamma = 1 - \alpha_{\Phi_i}, \tag{5.9}$$

где $|\alpha_{\Phi_i}| < \varepsilon/\sigma$ и $|\alpha_{\Phi_i}| < 1$. Возможность такого выбора $\delta > 0$ гарантируется леммами 2 и 4 п. 3 предыдущего параграфа.

Рассмотрим произвольное разбиение Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, максимальный размер Δ которых не превышает δ. Так как на Φ существует единая параметризация, то указанному разбиению Φ на части Φ_i отвечает разбиение области Ω на части Ω_i,. На каждой части Φ_i выберем произвольную точку M_i и обозначим через σ_i площадь проекции части Φ_i на касательную плоскость в M_i. Для вычисления σ_i поступим следующим образом. Выберем декартову систему координат так, что ее начало совпадает с M_i, ось Oz направлена по вектору нормали к поверхности в M_i, а оси Ox и Oy расположены в упомянутой касательной плоскости. В указанной системе координат поверхность определяется параметрическими уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, а вектор $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]$ имеет координаты $\{A, B, C\}$, где

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \tag{5.10}$$

Отметим, что для точек части Φ_i, ввиду выбора δ и ориентации оси Oz, величина C положительна, $C > 0$. Отметим также, что косинус угла γ_M между нормалью в точке M части Φ_i и осью Oz равен

$$\cos\gamma_M = \frac{C}{|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|}. \tag{5.11}$$

Ясно, что угол γ_M является углом между нормалями в точках M и M_i части Φ_i, и поэтому для него справедливо представление (5.9).

Обратимся к интегралу $\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv$, который, очевидно не зависит от выбора декартовых координат в пространстве. Используя положительность C и третью из формул (5.10), получим

$$\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv = \iint\limits_{\Omega_i} \frac{|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \left|\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right| du\,dv. \tag{5.12}$$

Применяя к интегралу в правой части (5.12) первую формулу среднего значения в обобщенной форме, получим

$$\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \left(\frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M \cdot \iint\limits_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)} \right| du\, dv, \tag{5.13}$$

где M — некоторая точка части Φ_i.

Так как

$$\left(\frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M = \frac{1}{\cos \gamma_M}$$

(см. 5.10) и (5.11)), а $\iint\limits_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)} \right| du\, dv = \sigma_i$ [1], то из формулы (5.13) и представления (5.9) для $\cos \gamma_M$, найдем

$$\sigma_i = \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv - \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv. \tag{5.14}$$

Складывая равенства (5.14) для всех частей Φ_i и учитывая, что $\sum\limits_i \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \sigma$, получим

$$\sum_i \sigma_i = \sigma - \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv. \tag{5.15}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (5.15). Имеем

$$\left| \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv \right| \leqslant \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \left| \alpha_{\Phi_i} \right| \cdot |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \varepsilon.$$

Отсюда и из равенства (5.15) получим

$$\left| \sum_i \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, поверхность Φ квадрируема и ее площадь равна σ.

Мы рассмотрели случай, когда на поверхности Φ может быть введена единая параметризация. В общем случае поверхность Φ

[1] Мы использовали формулу для площади плоской области при переходе от координат $(x,\, y)$ к координатам $(u,\, v)$ с помощью соотношений $x = x(u,\, v)$, $y = y(u,\, v)$.

может быть разбита на конечное число частей, в каждой из которых может быть введена единая параметризация [1]. После этого площадь поверхности можно определить как сумму площадей указанных частей. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть поверхность Φ кусочно-гладкая, т. е. составлена из конечного числа гладких ограниченных полных двусторонних поверхностей. Очевидно, что поверхность Φ квадрируема — ее площадь может быть определена как сумма площадей составляющих ее поверхностей.

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы 5.2 мы установили, что если на поверхности Φ может быть введена единая параметризация и областью задания радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ поверхности Φ является замкнутая ограниченная область Ω плоскости uv, то площадь σ поверхности может быть найдена по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| \, du \, dv. \tag{5.16}$$

Если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ — параметрические уравнения поверхности, то вектор $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]$ имеет координаты $\{A, B, C\}$, определяемые соотношениями (5.10). Поскольку $|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то формула (5.16) может быть записана в следующей форме:

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv. \tag{5.17}$$

Если воспользоваться обозначениями

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G$$

и формулой

$$|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2},$$

то выражение (5.16) для площади поверхности можно записать также в следующей форме:

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \tag{5.18}$$

Замечание 3. Площадь поверхности обладает свойством аддитивности: *если поверхность Φ разбита кусочно-гладкой линией на не имеющие общих внутренних точек части Φ_1 и Φ_2, то площадь σ поверхности Φ равна сумме $\sigma_1 + \sigma_2$ площадей частей Φ_1 и Φ_2.* Это свойство вытекает из представления площади с помощью интеграла и аддитивного свойства интеграла.

---

[1]) Можно воспользоваться, например, леммой 3 п. 3 предыдущего параграфа. Согласно этой лемме Φ можно разбить на конечное число частей, каждая из которых однозначно проецируется на некоторую координатную плоскость и тем самым является графиком дифференцируемой функции.

§ 3. Поверхностные интегралы

1. Понятия поверхностных интегралов первого и второго родов. Пусть Φ — гладкая, ограниченная полная двусторонняя поверхность. Пусть на Φ задана функция $f(M)$ точки M поверхности Φ. Обозначим через $\boldsymbol{n}(M)$ непрерывное векторное поле единичных нормалей к Φ.

Разобьем поверхность Φ кусочно-гладкими кривыми на части Φ_i и на каждой такой части выберем произвольно точку M_i. Введем следующие обозначения: Δ — максимальный размер частей Φ_i; σ_i — площадь Φ_i; X_i, Y_i, Z_i — углы, которые составляет с осями координат вектор $\boldsymbol{n}(M_i)$.

Составим следующие четыре суммы:

$$I\{\Phi_i,\, M_i\} = \sum_i f(M_i)\sigma_i, \tag{5.19}$$

$$I\{\Phi_i,\, M_i,\, Z_i\} = \sum_i f(M_i)\cos Z_i\sigma_i, \tag{5.20}$$

$$I\{\Phi_i,\, M_i,\, Y_i\} = \sum_i f(M_i)\cos Y_i\sigma_i, \tag{5.21}$$

$$I\{\Phi_i,\, M_i,\, X_i\} = \sum_i f(M_i)\cos X_i\sigma_i. \tag{5.22}$$

Для каждой из этих сумм вводится понятие предела при $\Delta \to 0$. Мы сформулируем это понятие для сумм (5.19). Для сумм (5.20), (5.21) и (5.22) понятие предела формулируется аналогичным образом.

Определение. *Число I называется* *пределом сумм* *$I\{\Phi_i,\, M_i\}$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых разбиений поверхности Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, максимальный размер которых Δ меньше δ, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i выполняется неравенство*

$$|I\{\Phi_i,\, M_i\} - I| < \varepsilon.$$

Предел I сумм $I\{\Phi_i, M_i\}$ при $\Delta \to 0$ называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по поверхности Φ и обозначается следующим образом:

$$I = \iint_{\Phi} f(M)\, d\sigma. \tag{5.23}$$

Если $(x,\, y,\, z)$ — координаты точки M на поверхности Φ, то для $f(M)$ можно использовать обозначение $f(x,\, y,\, z)$. В этом случае формулу (5.23) можно записать в виде

$$I = \iint_{\Phi} f(x,\, y,\, z)\, d\sigma. \tag{5.24}$$

Пределы сумм $I\{\Phi_i, M_i, Z_i\}$, $I\{\Phi_i, M_i, Y_i\}$ и $I\{\Phi_i, M_i, X_i\}$ при $\Delta \to 0$ называются поверхностными интегралами второго рода от функции $f(M)$ по поверхности Φ. Для этих интегралов соответственно используются обозначения

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\cos Z\, d\sigma, \quad \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos Y\, d\sigma, \quad \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos X\, d\sigma$$

или обозначения, аналогичные обозначению (5.24).

Замечание 1. Из определения поверхностного интеграла первого рода следует *независимость этого интеграла от выбора ориентации векторного поля единичных нормалей к поверхности* или, как говорят, *от выбора стороны поверхности.*

Замечание 2. *Поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности*: при изменении ориентации векторного поля единичных нормалей на противоположную все три поверхностных интеграла второго рода меняют знак на противоположный. Это объясняется тем, что в каждой из сумм (5.20), (5.21) и (5.22) значения $f(M_i)$ и σ_i не меняются при изменении ориентации, а значения косинусов углов, которые составляет нормаль $\boldsymbol{n}(M_i)$ с осями координат, меняют знак на противоположный.

Замечание 3. После выбора определенной стороны поверхности поверхностные интегралы второго рода могут, очевидно, рассматриваться как поверхностные интегралы первого рода по поверхности Φ соответственно от функций $f(M)\cos Z(M)$, $f(M)\cos Y(M)$, $f(M)\cos X(M)$. Действительно, после выбора определенной стороны поверхности $\cos Z$, $\cos Y$, $\cos X$ представляют собой функции точки M поверхности Φ.

2. Существование поверхностных интегралов первого и второго родов. Пусть поверхность Φ удовлетворяет условиям, сформулированным в начале п. 1 этого параграфа. Выберем на Φ определенную сторону. Согласно замечанию 3 предыдущего пункта после выбора определенной стороны поверхности Φ поверхностные интегралы второго рода могут рассматриваться как интегралы первого рода. Поэтому достаточные условия существования мы будем формулировать лишь для интегралов первого рода.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Пусть на поверхности Φ можно ввести единую параметризацию посредством функций*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{5.25}$$

заданных в ограниченной замкнутой области Ω плоскости uv и принадлежащих классу C^1 в этой области. Если функция

$f(M) = f(x,\, y,\, z)$ непрерывна на поверхности Φ [1]*, то поверхностный интеграл первого рода от этой функции по поверхности Φ существует и может быть вычислен по формуле*

$$I=\iint\limits_{\Phi} f(M)\,d\sigma=\iint\limits_{\Omega} f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \; ^{2)}. \tag{5.26}$$

Доказательство. Нам требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, для которого $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i будет выполняться неравенство

$$\left| I\{\Phi_i,\, M_i\} - \iint\limits_{\Omega} f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \right| < \varepsilon. \tag{5.27}$$

Пусть ε — любое фиксированное положительное число. Выберем по этому $\varepsilon > 0$ число $\delta^* > 0$ так, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) для любых двух точек $(\widetilde{u}_i,\, \widetilde{v}_i)$ и $(u_i,\, v_i)$ области Ω, находящихся на расстоянии, меньшем δ^*, выполнялось неравенство

$$|\sqrt{E(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)G(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)-F^2(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)}-\sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,v_i)}|< \\ < \frac{\varepsilon}{2AP}, \tag{5.28}$$

где A — положительное число, превосходящее максимум функции $|f(M)|$, а P — площадь области Ω;

2) для любого разбиения Ω кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Ω_i, размер которых меньше δ^*, и для любого выбора точек $(u_i,\, v_i)$ в пределах каждой части Ω_i выполнялось неравенство

$$\Bigl|\sum_i f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i))\sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,v_i)}\,\sigma_i^* - \\ - \iint\limits_{\Omega} f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.29}$$

в котором σ_i^* — площади частей Ω_i.

---

[1] Понятие непрерывности функции точки M, заданной на некотором множестве $\{M\}$ в пространстве, сформулировано в п. 1 § 3 гл. 14 части 1. В рассматриваемом случае роль множества $\{M\}$ играет поверхность Φ.

[2] $f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))$ — функция, полученная посредством суперпозиции функций $f(x,\,y,\,z)$ и $x = x(u,\,v)$, $y = y(u,\,v)$, $z = z(u,\,v)$. В силу теоремы о непрерывности сложной функции эта функция непрерывна в области Ω.

Возможность нужного выбора δ^* гарантируется свойством равномерной непрерывности непрерывной в ограниченной замкнутой области Ω функции $\sqrt{EG-F^2}$ и свойством интегрируемости непрерывной в области Ω функции $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\times\times\sqrt{EG-F^2}$.

Определим по $\delta^*>0$ число $\delta>0$ так, чтобы любому разбиению поверхности Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, размеры которых меньше δ, отвечало бы разбиение области Ω на конечное число частей Ω_i, размеры которых меньше δ^*. Возможность выбора такого δ гарантируется тем, что поверхность Φ представляет собой гомеоморфное отображение области Ω, и поэтому каждому разбиению Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i отвечает разбиение Ω кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Ω_i. При этом если максимальный размер частей Φ_i стремится к нулю, то и максимальный размер частей Ω_i также стремится к нулю.

Рассмотрим теперь разбиение Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, максимальный размер которых удовлетворяет неравенству $\Delta<\delta$, где $\delta>0$ выбрано по δ^* указанным выше образом. Составим для этого разбиения сумму $I\{\Phi_i,\,M_i\}$, воспользовавшись ее выражением (5.19). Так как площадь σ_i части Φ_i равна $\iint\limits_{\Omega_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, то, обозначая координаты точки M_i в части Φ_i через $(x(u_i,\,v_i),\,y(u_i,\,v_i),\,z(u_i,\,v_i))$, получим

$$I(\Phi_i,\,M_i)=\sum_i f(x(u_i,\,v_i),y(u_i,\,v_i),z(u_i,\,v_i))\iint\limits_{\Omega_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Используя теорему о среднем для интегралов в правой части последнего соотношения, мы можем, очевидно, следующим образом преобразовать это соотношение:

$$\begin{gathered}I\{\Phi_i,\,M_i\}-\iint\limits_{\Omega}f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\\ =\Big[\sum_i f(x(u_i,\,v_i),y(u_i,\,v_i),z(u_i,\,v_i))\times\\ \times\sqrt{E(u_i,\overline{v}_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,\overline{v}_i)}\sigma_i^*-\iint\limits_{\Omega}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\times\\ \times\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\Big]+\sum_i f(x(u_i,\,v_i),y(u_i,\,v_i),z(u_i,\,v_i))\times\\ \times[\sqrt{E(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)G(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)-F^2(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)}-\sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,v_i)}]\sigma_i^*.\end{gathered}$$

Из последнего равенства с помощью неравенств (5.28) и (5.29) мы легко получим неравенство (5.27). Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_{\Phi} f(x,\,y,\,z)\cos Z\,d\sigma$ после выбора определенной стороны поверхности Φ можно использовать следующую формулу:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,\,y,\,z)\cos Z\,d\sigma = \\ = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \quad (5.30)$$

Аналогичные формулы справедливы для двух других поверхностных интегралов второго рода.

Замечание 2. Пусть поверхность Φ является графиком функции $z = z(x,\,y)$, принадлежащей в области D своего задания классу C^1. Выберем на поверхности Φ ту сторону, для которой единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}(M)$ поверхности составляет с осью Oz острый угол. В этом случае $\cos Z = 1/\sqrt{1+p^2+q^2}$, где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Пусть на поверхности Φ задана непрерывная функция $R(x,\,y,\,z)$. Тогда, учитывая, что в качестве параметров u и v на поверхности берутся x и y (поверхность Φ определяется параметрическими уравнениями $x = x$, $y = y$, $z = z(x,\,y)$, и $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+p^2+q^2}$), мы можем переписать формулу (5.30) следующим образом:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,\,y,\,z)\cos Z\,d\sigma = \iint\limits_{D} R(x,\,y,\,z(x,\,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} R(x,\,y,\,z(x,\,y))\,dx\,dy.$$

Это замечание разъясняет следующее обозначение для поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,\,y,\,z)\cos Z\,d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy. \quad (5.31)$$

Отметим, что обозначение (5.31) используется и в случае, когда Φ не является графиком функции $z = z(x,\,y)$.

Мы будем рассматривать поверхностные интегралы второго рода следующего вида:

$$\iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma.$$

Такие интегралы мы будем обозначать также следующим образом:

$$\iint_{\Phi} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Замечание 3. Понятия поверхностных интегралов первого и второго родов естественно распространяются на случай, когда поверхность Φ является кусочно-гладкой. Для таких поверхностей, очевидно, также справедлива доказанная в этом пункте теорема существования.

3. Поверхностные интегралы второго рода, не зависящие от выбора декартовой системы координат. Из определения поверхностных интегралов первого и второго родов следует, что интеграл первого рода не зависит от выбора декартовой системы координат в пространстве, тогда как интегралы второго рода зависят от ее выбора, ибо при изменении системы координат меняются значения косинусов углов, которые составляет нормаль $\boldsymbol{n}(M)$ с осями координат.

В случае, когда на поверхности задана векторная функция, можно указать более общий подход к понятию поверхностного интеграла второго рода, позволяющий в определенном смысле говорить о независимости значения этого интеграла от выбора декартовой системы координат в пространстве.

Итак, пусть на гладкой ограниченной полной двухсторонней поверхности Φ задана непрерывная векторная функция $\boldsymbol{r}(M)$. Выберем на Φ определенную сторону и обозначим через $\boldsymbol{n}(M)$ векторное поле единичных нормалей к Φ.

Очевидно, скалярное произведение $\boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)$ представляет собой непрерывную скалярную функцию, заданную на поверхности Φ и поэтому не зависящую от выбора декартовой системы координат в пространстве. Следовательно, поверхностный интеграл первого рода от этой функции

$$\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$$

не зависит от выбора декартовой системы координат в пространстве. Обратимся к координатной записи скалярного произведения $\boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)$, считая при этом, что вектор $\boldsymbol{r}(M)$ имеет координаты P, Q, R. Так как координаты вектора $\boldsymbol{n}(M)$ равны $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$, то

$$\boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M) = P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z$$

и поэтому

$$\iint_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma = \iint_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma.$$

Интеграл в правой части последнего равенства представляет собой сумму трех поверхностных интегралов второго рода и обычно называется общим поверхностным интегралом второго рода. Следовательно, интеграл $\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$ также можно называть общим поверхностным интегралом второго рода.

Замечание 1. Если на поверхности Φ заданы три скалярные функции P, Q, R, то интегралу $\iint\limits_{\Phi}(P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma$ можно придать инвариантный (не зависящий) от системы координат вид, считая P, Q, R координатами некоторой векторной функции $\boldsymbol{r}(M)$, заданной на поверхности, и записывая этот интеграл в форме $\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$. Отметим, что тем самым мы навязываем определенный закон преобразования подынтегрального выражения при переходе к новой декартовой системе координат. В этом случае мы получим новые координаты вектора $\boldsymbol{r}(M)$, которые вычисляются по известным из аналитической геометрии правилам. Однако такой инвариантный вид записи поверхностного интеграла очень удобен в различных приложениях.

Замечание 2. Отметим, что общий поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)d\sigma$ численно равен величине, называемой в физике *потоком* вектора $\boldsymbol{r}(M)$ через поверхность Φ.

Г Л А В А 6

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этой главе рассматриваются скалярные и векторные поля. Исследуются основные операции теории поля.

§ 1. Преобразования базисов и координат. Инварианты

1. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные координаты векторов. Пусть $\boldsymbol{r}_i$, i=1, 2, 3, — базис векторов трехмерного пространства [1] (для плоскости индекс i принимает значения 1 и 2). Базис $\boldsymbol{r}^k$, $k = 1,\ 2,\ 3$, называется *взаимным* для базиса $\boldsymbol{r}_i$, если выполняются соотношения [2]

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{6.1}$$

Символ δ_i^k называется символом Кронекера [3].

Возникает вопрос о существовании и единственности взаимного базиса. Ответ на этот вопрос утвердительный: *для данного базиса $\boldsymbol{r}_i$ существует единственный взаимный базис $\boldsymbol{r}^k$.*

Убедимся, например, что вектор $\boldsymbol{r}^1$ определяется единственным образом. Согласно (6.1) этот вектор ортогонален векторам $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$. Этим однозначно определяется линия действия вектора $\boldsymbol{r}_1$. Затем из условия $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^1 = 1$ единственным образом определяется сам вектор $\boldsymbol{r}^1$. Аналогично однозначно строятся векторы $\boldsymbol{r}^2$ и $\boldsymbol{r}^3$. Чтобы убедиться, что векторы $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ образуют базис, достаточно доказать, что $\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3 \neq 0$. Согласно теореме о произведении определителей

$$(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^3 \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^3 \\ \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{6.2}$$

---

[1] Напомним, что векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ образуют базис, если они некомпланарны, т. е. если их смешанное произведение $\boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_2\,\boldsymbol{r}_3$ не равно нулю.

[2] Всюду в этой главе символом $\boldsymbol{ab}$ обозначается скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, символом $\boldsymbol{abc}$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, символом $[\boldsymbol{ab}]$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

[3] Л. Кронекер — немецкий математик (1823–1891).

Так как $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 \neq 0$ (векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ образуют базис), то из соотношения (6.2) вытекает, что и $\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3 \neq 0$.

З а м е ч а н и е 1. Если базис $\boldsymbol{r}_i$ ортонормированный, то взаимный базис $\boldsymbol{r}^k$ совпадает с данным базисом $\boldsymbol{r}_i$.

Легко убедиться, что векторы $\boldsymbol{r}^k$ взаимного базиса в трехмерном пространстве могут быть найдены с помощью соотношений

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3}, \ \boldsymbol{r}^2 = \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3}, \ \boldsymbol{r}^3 = \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3}.$$

Пусть $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^k$ — взаимные базисы, а $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор. Разлагая вектор $\boldsymbol{x}$ по базисным векторам, получим

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{r}^1 + x_2\boldsymbol{r}^2 + x_3\boldsymbol{r}^3, \ \boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{r}_1 + x^2\boldsymbol{r}_2 + x^3\boldsymbol{r}_3. \tag{6.3}$$

Числа x_1, x_2, x_3 называются *ковариантными* координатами вектора $\boldsymbol{x}$, а x^1, x^2, x^3 — *контравариантными* координатами $\boldsymbol{x}$. Эти наименования будут разъяснены в следующем пункте.

Для сокращения записи формул, в которых фигурируют однотипные слагаемые (примером таких формул могут служить соотношения (6.3)), мы будем пользоваться в дальнейшем соглашением о суммировании, которое заключается в следующем. Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей. Если в этом выражении имеются два одинаковых буквенных индекса, из которых один верхний, а другой нижний, то считают, что по этим индексам производится суммирование: индексам последовательно даются значения 1, 2, 3, а затем складываются полученные слагаемые. Например,

$$x_i\boldsymbol{r}^i = x_1\boldsymbol{r}^1 + x_2\boldsymbol{r}^2 + x_3\boldsymbol{r}^3, \quad \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3,$$

$$\begin{aligned} g_{ik}x^ix^k &= (g_{1k}x^1x^k) + (g_{2k}x^2x^k) + (g_{3k}x^3x^k) = \\ &= (g_{11}x^1x^1 + g_{12}x^1x^2 + g_{13}x^1x^3) + \\ &+ (g_{21}x^2x^1 + g_{22}x^2x^2 + g_{23}x^2x^3) + \\ &+ (g_{31}x^3x^1 + g_{32}x^3x^2 + g_{33}x^3x^3). \end{aligned}$$

С помощью соглашения о суммировании формулы (6.3) записываются следующим компактным образом:

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{r}_i. \tag{6.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Верхние и нижние одинаковые индексы, о которых говорилось в соглашении о суммировании, обычно называются индексами суммирования. Ясно, что индексы суммирования могут обозначаться любыми буквами; при этом выражения, в которых они фигурируют, не изменяются. Например, $x_i\boldsymbol{r}^i$ и $x_k\boldsymbol{r}^k$ представляет собой одно и то же выражение.

Замечание 3. Все рассуждения этого пункта относились к случаю трехмерного пространства. В двумерном случае буквенные индексы принимают значения 1 и 2.

Получим явное выражение ковариантных и контравариантных координат вектора. Для этого умножим скалярно первое из равенств (6.4) на $\boldsymbol{r}_k$, а второе на $\boldsymbol{r}^k$. Учитывая затем соотношения (6.1), найдем

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_k = x_i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_k) = x_i\delta^i_k = x_k,$$
$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^k = x^i(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k) = x^i\delta^k_i = x^k.$$

Итак,

$$x_i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i, \quad x^i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.5}$$

С помощью соотношений (6.5) запишем формулы (6.4) в следующем виде:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^i)\boldsymbol{r}_i. \tag{6.6}$$

Соотношения (6.6) называются формулами Гиббса [1]. Обратимся еще раз к вопросу о построении взаимных базисов.

С помощью формул (6.6) получим

$$\boldsymbol{r}^k = (\boldsymbol{r}^k\boldsymbol{r}^i)\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_k = (\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}^i. \tag{6.7}$$

Введем обозначения

$$g_{ki} = \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i, \quad g^{ki} = \boldsymbol{r}^k\boldsymbol{r}^i. \tag{6.8}$$

С помощью этих обозначений перепишем соотношения (6.7) следующим образом:

$$\boldsymbol{r}^k = g^{ki}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_k = g_{ki}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.9}$$

Итак, для построения базиса $\boldsymbol{r}^k$ по базису $\boldsymbol{r}_i$ достаточно знать матрицу (g^{ki}), а для построения базиса $\boldsymbol{r}_k$ по базису $\boldsymbol{r}^i$ достаточно знать матрицу (g_{ki}). Докажем, что эти матрицы взаимно обратны. Для доказательства умножим первое из равенств (6.9) скалярно на $\boldsymbol{r}_j$. Учитывая соотношения (6.1), получим

$$g^{ki}g_{ij} = \delta^k_j = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Эти соотношения показывают, что матрицы (g^{ki}) и (g_{ki}) взаимно обратны. Так как элементы обратной матрицы могут быть вычислены через элементы данной матрицы, то ясно, что с помощью соотношений (6.9) решается вопрос о построении взаимных базисов.

[1] Д. У. Гиббс — американский физик-теоретик (1839–1903).

2. Преобразования базиса и координат. Пусть $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}^i$, $i = 1, 2, 3,$ — взаимные базисы, а $\boldsymbol{r}_{i'}$ и $\boldsymbol{r}^{i'}$ — новые взаимные базисы.

Используя соглашение о суммировании, запишем формулы преобразования базисных векторов. Имеем:

1) формулы перехода от старого базиса $\boldsymbol{r}_i$ к новому $\boldsymbol{r}_{i'}$ и формулы обратного перехода:

$$\boldsymbol{r}_{i'} = b^i_{i'}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i\boldsymbol{r}_{i'}, \qquad i,\, i' = 1,\, 2,\, 3; \tag{6.10}$$

2) формулы перехода от старого базиса $\boldsymbol{r}^i$ к новому $\boldsymbol{r}^{i'}$ и формулы обратного перехода:

$$\boldsymbol{r}^{i'} = \widetilde{b}^{i'}_i\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{r}^i = \widetilde{b}^i_{i'}\boldsymbol{r}^{i'}, \qquad i,\, i' = 1,\, 2,\, 3. \tag{6.11}$$

Так как преобразования (6.10) взаимно обратны, то матрицы $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ взаимно обратны. По аналогичным соображениям взаимно обратны и матрицы $(\widetilde{b}^{i'}_i)$ и $(\widetilde{b}^i_{i'})$.

Докажем, что матрицы $(b^i_{i'})$ и $(\widetilde{b}^i_{i'})$ совпадают. Тем самым будет доказано совпадение матриц $(b^{i'}_i)$ и $(\widetilde{b}^{i'}_i)$. Для доказательства умножим скалярно первое из равенств (6.10) на $\boldsymbol{r}^k$, а второе из равенств (6.11) на $\boldsymbol{r}_{k'}$. Учитывая затем соотношения (6.1), найдем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{i'}\boldsymbol{r}^k &= b^i_{i'}\left(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k\right) = b^i_{i'}\delta^k_i = b^k_{i'}, \\ \boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_{k'} &= \widetilde{b}^i_{i'}\left(\boldsymbol{r}^{i'}\boldsymbol{r}_{k'}\right) = \widetilde{b}^i_{i'}\delta^{i'}_{k'} = \widetilde{b}^i_{k'}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений получим

$$b^i_{i'} = \boldsymbol{r}_{i'}\boldsymbol{r}^i, \tag{6.12}$$

$$\widetilde{b}^i_{i'} = \boldsymbol{r}_{i'}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.13}$$

Поскольку правые части соотношений (6.12) и (6.13) равны, то равны и левые. Иными словами, $b^i_{i'} = \widetilde{b}^i_{i'}$, а это и означает совпадение матриц $(b^i_{i'})$ и $(\widetilde{b}^i_{i'})$. Отметим, что элементы $b^i_{i'}$ матрицы $(b^i_{i'})$ могут быть вычислены по формулам (6.12).

Мы можем теперь утверждать, что для перехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ достаточно знать лишь матрицу $(b^i_{i'})$ перехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$ (матрица $(b^{i'}_i)$ вычисляется по матрице $(b^i_{i'})$).

Приведем полную сводку формул преобразований базисных векторов:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{i'} &= b^i_{i'}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i\boldsymbol{r}_{i'}, \\ \boldsymbol{r}^{i'} &= b^{i'}_i\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{r}^i = b^i_{i'}\boldsymbol{r}^{i'}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Перейдем к выводу формул преобразования координат вектора при переходе к новому базису.

Пусть $x_{i'}$ — ковариантные координаты $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$. Тогда, согласно (6.5), имеем

$$x_{i'} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_{i'}.$$

Подставляя в правую часть этого соотношения выражение для $\boldsymbol{r}_{i'}$ из формул (6.14), найдем

$$x_{i'} = \boldsymbol{x}\left(b^i_{i'}\boldsymbol{r}_i\right) = b^i_{i'}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i) = b^i_{i'}x_i.$$

Итак, формулы преобразования ковариантных координат вектора при переходе к новому базису имеют вид

$$x_{i'} = b^i_{i'}x_i. \tag{6.14$'$}$$

Мы видим, что при переходе к новому базису ковариантные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ преобразуются с помощью матрицы $(b^i_{i'})$ прямого перехода от старого базиса к новому. Это согласование преобразований и объясняет наименование «ковариантные [1]) координаты вектора». Подставляя в правую часть соотношения $x^{i'} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^{i'}$ выражение для $\boldsymbol{r}^{i'}$ из (6.14), получим после преобразований следующие формулы:

$$x^{i'} = b^{i'}_i x^i. \tag{6.15}$$

Мы видим, что при переходе к новому базису контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ преобразуются с помощью матрицы $(b^{i'}_i)$ обратного перехода от нового базиса к старому. Это несогласование преобразований и объясняет термин «контравариантные [2]) координаты вектора».

3. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор линейного оператора. Мы будем называть *инвариантами* выражения, не зависящие от выбора базиса. Например, значение скалярной функции в данной точке представляет собой инвариант. Инвариантом является вектор-объект, не зависящий от выбора базиса. Скалярное произведение векторов также представляет собой инвариант.

В этом пункте мы познакомимся с некоторыми инвариантами линейного оператора. Пусть A — произвольный линейный оператор, определенный на векторах трехмерного евклидова пространства (т. е. $A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{y}$ для любых векторов

[1]) Ковариантный — согласованно изменяющийся.

[2]) Контравариантный — противоположно изменяющийся.

$\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и любых вещественных чисел α и β). Докажем, что выражение

$$\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i \tag{6.16}$$

[1]) представляет собой инвариант.

Нам нужно доказать, что при переходе к другому базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ будет справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}^{i'} A\boldsymbol{r}_{i'}. \tag{6.17}$$

Пусть $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ — новый базис и $(b^i_{i'})$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i \boldsymbol{r}_{i'}, \qquad \boldsymbol{r}^i = b^i_{k'} \boldsymbol{r}^{k'}.$$

Подставляя эти значения для $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}^i$ в выражение $\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i$ получим

$$\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = \left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right) \boldsymbol{r}^{k'} A\boldsymbol{r}_{i'}. \tag{6.18}$$

Так как $(b^{i'}_i b^i_{k'}) = \delta^{i'}_{k'}$, то из (6.18) получаем

$$\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = \delta^{i'}_{k'} \boldsymbol{r}^{k'} A\boldsymbol{r}_{i'} = \boldsymbol{r}^{i'} A\boldsymbol{r}_{i'}.$$

Итак, равенство (6.17) доказано, а следовательно, доказана и инвариантность выражения $\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i$.

Инвариант $\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i$ линейного оператора A мы будем называть *дивергенцией* этого оператора и будем обозначать символом $\operatorname{div} A$. Таким образом,

$$\operatorname{div} A = \boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i. \tag{6.19}$$

З а м е ч а н и е. В данном базисе $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ линейный оператор может быть задан с помощью матрицы, называемой матрицей линейного оператора. Эта матрица представляет собой матрицу коэффициентов a^k_i разложения векторов $A\boldsymbol{r}_i$ по базису $\boldsymbol{r}_k$ (можно, конечно, рассматривать матрицу коэффициентов разложения векторов $A\boldsymbol{r}^i$ по базису $\boldsymbol{r}^k$):

$$A\boldsymbol{r}_i = a^k_i \boldsymbol{r}_k; \quad a^j_i = \boldsymbol{r}^j A\boldsymbol{r}_i. \tag{6.20}$$

Дивергенция матрицы A может быть выражена через элементы матрицы (a^k_i). Именно

$$\operatorname{div} A = a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3. \tag{6.21}$$

---

[1]) В справедливости равенства $\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i$ можно убедиться следующим образом. Имеем, согласно (6.9), $\boldsymbol{r}^i = g^{ik}\boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{r}_i = g_{il}\boldsymbol{r}^l$. Поэтому, учитывая, что матрицы (g^{ik}) и (g_{il}) взаимно обратны и симметричны, получим

$$\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i = g^{ik} g_{il} \boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^l = \delta^k_l \boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^l = \boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i.$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (6.21), достаточно подставить выражение (6.20) для $A\boldsymbol{r}_i$ в выражение (6.19) для дивергенции и воспользоваться соотношением $\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_k = \delta^i_k$.

Докажем, что выражение

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i] \ ^{1)} \tag{6.22}$$

также представляет собой инвариант. Нам нужно доказать, что при переходе к другому базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ будет справедливо равенство

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{i'}]. \tag{6.23}$$

Пусть $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ — новый базис и $(b^i_{i'})$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i \boldsymbol{r}_{i'}, \qquad \boldsymbol{r}^i = b^i_{k'}\boldsymbol{r}^{k'}.$$

Подставляя эти значения для $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}^i$ в выражение $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i]$, получим

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = \left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right)[\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{k'}]. \tag{6.24}$$

Так как $\left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right) = \delta^{i'}_{k'}$ то из (6.24) получаем

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = \delta^{i'}_{k'}[\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{k'}] = [\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{i'}].$$

Итак, равенство (6.23) доказано, а следовательно, доказана и инвариантность выражения $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i]$.

Инвариант $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i]$ линейного оператора A мы будем называть *ротором* этого оператора и обозначать символом $\operatorname{rot} A$. Таким образом,

$$\operatorname{rot} A = [\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}_1 A\boldsymbol{r}^1] + [\boldsymbol{r}_2 A\boldsymbol{r}^2] + [\boldsymbol{r}_3 A\boldsymbol{r}^3]. \tag{6.25}$$

Укажем выражение для дивергенции и ротора линейного оператора A для случая о р т о н о р м и р о в а н н о г о базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Так как в этом случае взаимный базис совпадает с заданным, то, согласно формулам (6.20), элементы a_{ij} матрицы

---

1) В справедливости равенства $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i]$ можно убедиться следующим образом. Имеем, согласно (6.9), $\boldsymbol{r}^i = g^{ik}\boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{r}_i = g_{il}\boldsymbol{r}^l$. Поэтому, используя взаимную обратность и симметричность матриц (g^{ik}) и (g_{il}), получим

$$[\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i] = g^{ik}g_{il}[\boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^l] = \delta^k_l[\boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^l] = [\boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^k] = [\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i].$$

оператора A могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \boldsymbol{i}A\boldsymbol{i}, \quad a_{12} = \boldsymbol{i}A\boldsymbol{j}, \quad a_{13} = \boldsymbol{i}A\boldsymbol{k},\\ a_{21} &= \boldsymbol{j}A\boldsymbol{i}, \quad a_{22} = \boldsymbol{j}A\boldsymbol{j}, \quad a_{23} = \boldsymbol{j}A\boldsymbol{k},\\ a_{31} &= \boldsymbol{k}A\boldsymbol{i}, \quad a_{32} = \boldsymbol{k}A\boldsymbol{j}, \quad a_{33} = \boldsymbol{k}A\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{6.26}$$

(в отличие от общего случая, мы обозначили элементы матрицы оператора A символами a_{ml} вместо a_l^m).

Для дивергенции оператора A получим следующее выражение:

$$\operatorname{div} A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \boldsymbol{i}A\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}A\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}A\boldsymbol{k}. \tag{6.27}$$

Найдем выражение для ротора оператора A. Так как в случае ортонормированного базиса взаимные базисы совпадают, то из (6.25) для $\operatorname{rot} A$ получаем

$$\operatorname{rot} A = [\boldsymbol{i}A\boldsymbol{i}] + [\boldsymbol{j}A\boldsymbol{j}] + [\boldsymbol{k}A\boldsymbol{k}]. \tag{6.28}$$

Вычислим первое векторное произведение $[\boldsymbol{i}A\boldsymbol{i}]$. Поскольку $A\boldsymbol{i} = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{21}\boldsymbol{j} + a_{31}\boldsymbol{k}$, то

$$[\boldsymbol{i}A\boldsymbol{i}] = a_{11}[\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}] + a_{21}[\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}] + a_{31}[\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}] = -a_{31}\boldsymbol{j} + a_{21}\boldsymbol{k}.$$

Совершенно аналогично получаются формулы

$$[\boldsymbol{j}A\boldsymbol{j}] = a_{32}\boldsymbol{i} - a_{12}\boldsymbol{k}, \ [\boldsymbol{k}A\boldsymbol{k}] = -a_{23}\boldsymbol{i} + a_{13}\boldsymbol{j}.$$

С помощью полученных формул и соотношения (6.28) для $\operatorname{rot} A$ найдем

$$\operatorname{rot} A = (a_{32} - a_{23})\boldsymbol{i} + (a_{13} - a_{31})\boldsymbol{j} + (a_{21} - a_{12})\boldsymbol{k}. \tag{6.29}$$

§ 2. Основные понятия и операции, связанные со скалярным и векторным полем

1. Понятия скалярного и векторного поля. Пусть Ω — область на плоскости или в пространстве.

Говорят, что *в области Ω задано скалярное поле, если каждой точке M из Ω ставится в соответствие по известному закону некоторое число $u(M)$.*

Отметим, что понятия скалярного поля и функции, заданной в области Ω, совпадают. Обычно используется следующая терминология: *скалярное поле задается с помощью функции $u(M)$.*

Понятие векторного поля вводится в полной аналогии с понятием скалярного поля: *если каждой точке M области Ω ставится в соответствие по известному закону некоторый век-*

тор $\boldsymbol{p}(M)$, *то говорят, что в области* Ω *задано векторное поле.* Мы будем использовать терминологию: *векторное поле задается с помощью векторной функции* $\boldsymbol{p}(M)$.

Поле температур внутри нагретого тела, поле плотности массы — примеры скалярных полей. Поле скоростей установившегося потока жидкости, поле магнитной напряженности — примеры векторных полей.

2. Дифференцируемые скалярные поля. Градиент скалярного поля. Производная по направлению. Мы уже отметили, что понятия скалярного поля $u(M)$ в области Ω и функции, заданной в этой области, совпадают. Поэтому мы можем определить дифференцируемость скалярного поля как дифференцируемость функции, задающей это поле. Для удобства мы сформулируем понятие дифференцируемости поля, используя терминологию, несколько отличную от обычной.

Будем называть линейной формой $f(\Delta\boldsymbol{r})$ относительно вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ скалярное произведение этого вектора на некоторый, не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ вектор $\boldsymbol{g}$. Будем также использовать обозначения:

$\rho = \rho(M, M')$ — расстояние между точками M и M',

$\Delta\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ — вектор, соединяющий точки M и M',

$\Delta u = u(M') - u(M)$ — приращение поля в точке M.

Сформулируем следующее *определение.*

Определение 1. *Скалярное поле* $u(M)$ *называется дифференцируемым в точке* M *области* Ω, *если приращение поля* Δu *в точке* M *может быть представлено в следующей форме*:

$$\Delta u = f(\Delta\boldsymbol{r}) + o(\rho), \tag{6.30}$$

где $f(\Delta\boldsymbol{r})$ *представляет собой линейную форму относительно вектора* $\Delta\boldsymbol{r}$.

Соотношение (6.30) мы будем называть *условием дифференцируемости* поля $u(M)$ в точке M.

Замечание 1. Так как линейная форма $f(\Delta\boldsymbol{r})$ представляет собой скалярное произведение $\boldsymbol{g}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{g}$ — не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ вектор, то условие (6.30) дифференцируемости скалярного поля $u(M)$ в точке M может быть записано в следующем виде:

$$\Delta u = \boldsymbol{g}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + o(\rho). \tag{6.31}$$

Докажем, что если скалярное поле $u(M)$ дифференцируемо в точке M, то представление (6.30) (или (6.31)) для приращения Δu этого поля в точке M единственно. Пусть

$$\Delta u = \boldsymbol{g}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + o_1(\rho) \text{ и } \Delta u = \boldsymbol{h}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + o_2(\rho) \tag{6.32}$$

— два представления приращения Δu в точке M. Из формул (6.32) для $\Delta\boldsymbol{r} \neq 0$ получаем соотношение

$$(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h})\boldsymbol{e} = \frac{o(\rho)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \tag{6.33}$$

в котором $\boldsymbol{e} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ — единичный вектор, а $o(\rho) = o_2(\rho) - o_1(\rho)$. Так как $\dfrac{o(\rho)}{|\Delta\boldsymbol{r}|} = \dfrac{o(\rho)}{\rho}$ — бесконечно малая величина при $\rho \to 0$, то из (6.33) следует, что $(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h})\boldsymbol{e} = 0$ для любого $\boldsymbol{e}$, т. е. $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$. Единственность представления (6.30) доказана.

Мы будем говорить, что *скалярное поле $u(M)$, заданное в области Ω, дифференцируемо в этой области, если оно дифференцируемо в каждой точке области Ω.*

Определение 2. *Градиентом в точке M дифференцируемого в этой точке скалярного поля $u(M)$ называется вектор $\boldsymbol{g}$, определенный соотношением* (6.31).

Обозначается градиент скалярного поля символом $\operatorname{grad} u$.

Замечание 2. Сформулированное выше определение дифференцируемости скалярного поля удобно тем, что оно имеет инвариантный, не зависящий от выбора системы координат характер. Поэтому *градиент скалярного поля представляет собой инвариант этого поля.*

Замечание 3. Отметим следующее важное обстоятельство: *если скалярное поле $u(M)$, заданное в области Ω, дифференцируемо в этой области, то градиент* $\operatorname{grad} u$ *этого поля определен в каждой точке Ω и, очевидно, представляет собой векторное поле, заданное в Ω.*

Замечание 4. Для скалярного поля вводится понятие *поверхности уровня* (*линии уровня* для плоского поля), которая представляет собой множество точек, на котором значения поля $u(M)$ одинаковы. Градиент поля в точке M ортогонален поверхности уровня в этой точке. Читатель легко убедится сам в справедливости этого замечания.

Используя обозначение $\operatorname{grad} u$ для градиента скалярного поля, перепишем соотношение (6.31) в следующей форме:

$$\Delta u = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\boldsymbol{r} + o(\rho). \tag{6.34}$$

Отметим, что слагаемое $\operatorname{grad} u \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ обычно называется *дифференциалом du* скалярного поля. Таким образом,

$$du = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\boldsymbol{r}. \tag{6.35}$$

Договоримся называть дифференциалом $d\boldsymbol{r}$ приращение $\Delta\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$, $\Delta\boldsymbol{r} = \overline{OM}' - \overline{OM}$. Тогда формула (6.35) для дифференциала du скалярного поля может быть записана в виде

$$du = \operatorname{grad} u \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{6.36}$$

Пусть в области Ω заданы два дифференцируемых поля $u(M)$ и $v(M)$. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v,\\ \operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u,\\ \operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}\end{gathered} \tag{6.37}$$

(при $v \neq 0$). Если F — дифференцируемая функция, то

$$\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u. \tag{6.38}$$

Вывод формул (6.37) и (6.38) однотипен. Для примера убедимся в справедливости второй из формул (6.37). Имеем, используя формулу (6.34) и непрерывность функции $u(M)$,

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= u(M')v(M') - u(M)v(M) =\\ &= u(M')\Delta v + v(M)\Delta u =\\ &= (u(M) \operatorname{grad} v + v(M) \operatorname{grad} u)\Delta \boldsymbol{r} + o(\rho).\end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает, что приращение $\Delta(uv)$ может быть представлено в форме (6.31). Поэтому uv — дифференцируемая функция и $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$. Вторая из формул (6.37) доказана.

Введем понятие *производной по направлению* для скалярного поля.

Пусть поле $u(M)$ задано в области Ω, M — некоторая точка Ω, $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, указывающий направление в точке M. Пусть далее M' — любая точка из Ω, отличная от M и такая, что вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}$. Расстояние между M и M' обозначим через ρ.

Если существует предел

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}$$

($\Delta u = u(M') - u(M)$), *то этот предел называется производной поля u в точке M по направлению $\boldsymbol{e}$ и обозначается символом* $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}. \tag{6.39}$$

Справедливо следующее утверждение.

Пусть поле $u(M)$ дифференцируемо в точке M. Тогда производная $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$ поля u в этой точке по любому направлению $\boldsymbol{e}$ существует и может быть найдена по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}. \tag{6.40}$$

Докажем это утверждение. Пусть $\boldsymbol{e}$ — любое фиксированное направление и пусть точка M' берется так, что вектор $\Delta\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}$. Ясно, что $\Delta\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}$. Подставляя значение $\Delta\boldsymbol{r}$ в соотношение (6.34), найдем

$$\Delta u = (\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e})\rho + o(\rho).$$

Отсюда получаем формулу

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e} + \frac{o(\rho)}{\rho}. \tag{6.41}$$

Из соотношений (6.39) и (6.41) вытекает формула (6.40). Утверждение доказано.

Найдем выражение градиента дифференцируемого скалярного поля, считая, что в пространстве выбран ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, с которым связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Так как $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{j}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{k})$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{i}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{j}} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{k}} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$, то с помощью соотношения (6.40) получим

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

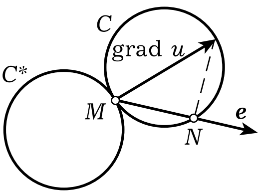


Рис. 6.1

С помощью выражения (6.40) для производной по направлению получаем следующую наглядную картину распределения значений производных по направлению поля $u(M)$ в плоской области Ω в данной точке M. Пусть $\operatorname{grad} u \neq 0$ (если $\operatorname{grad} u = 0$, то из (6.40) вытекает, что $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = 0$ для любого $\boldsymbol{e}$). На векторе $\operatorname{grad} u$ как диаметре (рис. 6.1) построим окружность C. Построим также окружность C^*, равную C и касающуюся ее в точке M. Пусть $\boldsymbol{e}$ — произвольное направление. Проведем через M полупрямую по направлению вектора $\boldsymbol{e}$. Если эта полупрямая касается окружностей C и C^*, то $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = 0$ (вектор $\boldsymbol{e}$ ортогонален $\operatorname{grad} u$). Если же эта полупрямая пересекает C или C^* в точке N, то $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$ равно длине MN, взятой со знаком $+$, когда N лежит на C, и со знаком $-$, когда N лежит на C^*. Для поля в пространстве окружности C и C^* должны быть заменены сферами.

3. Дифференцируемые векторные поля. Дивергенция и ротор векторного поля. Производная векторного поля по направлению. Пусть в области Ω трехмерного евклидона пространства задано векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$. В дальнейшем будем использовать обозначения: $\Delta\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$, $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M') - \boldsymbol{p}(M)$.

Сформулируем следующее определение.

Определение 3. *Векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$ называется д и ф ф е р е н ц и р у е м ы м в т о ч к е M области Ω, если приращение поля $\Delta\boldsymbol{p}$ в точке M может быть представлено в следующей форме*:

$$\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|), \tag{6.42}$$

где A — линейный оператор, не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ (не зависящий от выбора точки M').

Соотношение (6.42) мы будем называть *условием дифференцируемости поля $\boldsymbol{p}(M)$ в точке M.*

Докажем, что если векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$ дифференцируемо в точке M, то представление (6.42) для приращения $\Delta\boldsymbol{p}$ этого поля в точке M единственно.

Пусть

$$\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}_1(|\Delta\boldsymbol{r}|) \text{ и } \Delta\boldsymbol{p} = B\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}_2(|\Delta\boldsymbol{r}|) \tag{6.43}$$

— два представления приращения $\Delta\boldsymbol{p}$ в точке M. Из формул (6.43) при $\Delta\boldsymbol{r} \neq 0$ получаем соотношение

$$(A - B)\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \tag{6.44}$$

в котором $\boldsymbol{e} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ — единичный вектор, $\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|) = \boldsymbol{o}_1(|\Delta\boldsymbol{r}|) - \boldsymbol{o}_2(|\Delta\boldsymbol{r}|)$. Так как $\dfrac{\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ — бесконечно малый вектор при $\Delta\boldsymbol{r} \to 0$, а $\boldsymbol{e}$ — произвольный единичный вектор, то из (6.44) следует, что $(A - B)\boldsymbol{e} = 0$ для любого $\boldsymbol{e}$, т. е. $A = B$. Единственность представления (6.42) доказана.

Будем говорить, что *векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$, заданное в области Ω, дифференцируемо в этой области, если оно дифференцируемо в каждой точке области Ω.*

Введем *понятие производной по направлению для векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$.*

Пусть поле $\boldsymbol{p}(M)$ задано в области Ω, M — некоторая точка Ω, $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, указывающий направление в точке M. Пусть далее M' — любая точка из Ω, отличная от M и такая, что вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}$. Расстояние между точками M и M' обозначим через ρ.

Если существует предел

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\rho}$$

$(\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M') - \boldsymbol{p}(M))$, *то этот предел называется производной поля $\boldsymbol{p}(M)$ в точке M по направлению $\boldsymbol{e}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}}$.*

Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\rho}. \tag{6.45}$$

Справедливо следующее утверждение. *Пусть поле* $\boldsymbol{p}(M)$ *дифференцируемо в точке* M *области* Ω. *Тогда производная* $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$ *поля* $\boldsymbol{p}$ *в этой точке по любому направлению* $\boldsymbol{e}$ *существует и может быть найдена по формуле*

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e}, \tag{6.46}$$

где A — *линейный оператор, определенный соотношением* (6.42).

Докажем это утверждение. Пусть $\boldsymbol{e}$ — любое фиксированное направление и пусть точка M' берется так, что вектор $\Delta \boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}$ и $|\Delta \boldsymbol{r}| = \rho$. Подставляя это значение $\Delta \boldsymbol{r}$ в соотношение (6.42) и используя свойства линейного оператора, найдем

$$\Delta \boldsymbol{p} = \rho A \boldsymbol{e} + \boldsymbol{o}(\rho).$$

Отсюда получаем формулу

$$\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\rho} = A\boldsymbol{e} + \frac{\boldsymbol{o}(\rho)}{\rho}. \tag{6.47}$$

Из соотношений (6.45) и (6.47) вытекает формула (6.46). Утверждение доказано.

Пусть $\boldsymbol{p}(M)$ — дифференцируемое в точке M области Ω поле. Тогда

$$\Delta \boldsymbol{p} = A \Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta \boldsymbol{r}|).$$

Найдем матрицу линейного оператора A для случая ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Мы будем считать, что с этим базисом связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$.

Обозначим через P, Q и R координаты векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Очевидно, согласно формуле (6.46),

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{i}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = A\boldsymbol{i}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{j}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = A\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{k}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = A\boldsymbol{k}.$$

Из этих формул и из соотношений (6.26) для матрицы коэффициентов линейного оператора в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ следует, что матрица $\overset{\circ}{A}$ рассматриваемого оператора A имеет вид

$$\overset{\circ}{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

Введем понятие *дивергенции* и *ротора* дифференцируемого в области Ω векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$, т. е. такого поля, приращение $\Delta\boldsymbol{p}$ которого в каждой точке M области Ω может быть представлено в виде

$$\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|),$$

причем оператор A, вообще говоря, меняется при переходе от одной точки области Ω к другой. Иными словами, оператор зависит от точки M и не зависит, конечно, от $\Delta\boldsymbol{r}$.

Назовем дивергенцией и ротором поля $\boldsymbol{p}(M)$ в точке M области Ω дивергенцию и ротор линейного оператора A. Таким образом, по определению

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \operatorname{div}A, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \operatorname{rot}A. \tag{6.49}$$

Замечание. При наших предположениях о дифференцируемости поля $\boldsymbol{p}(M)$ в области Ω дивергенция $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ и ротор $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ определены в каждой точке Ω. Поскольку эти объекты являются инвариантами (не зависят от выбора базиса), то, очевидно, $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ представляет собой скалярное поле, а $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ — векторное поле в области Ω.

Найдем выражения дивергенции, ротора и производной по направлению для дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$, считая, что в пространстве выбран ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, с которым связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. При этом, как и выше, будем считать, что поле $\boldsymbol{p}(M)$ имеет координаты P, Q, R в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Так как матрица $\overset{\circ}{A}$ линейного оператора A определяется в рассматриваемом случае соотношением (6.48) и по определению $\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \operatorname{div}A$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \operatorname{rot}A$ (см. (6.49)), то, согласно формулам (6.27) и (6.29), получим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{6.50}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{6.51}$$

Для вычисления производной векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$ по направлению $\boldsymbol{e}$ воспользуемся формулой (6.46) и свойствами линейного оператора.

Пусть $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$ [1]. Тогда, согласно (6.46), получим

$$\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} = \cos\alpha\, A\boldsymbol{i} + \cos\beta\, A\boldsymbol{j} + \cos\gamma\, A\boldsymbol{k} =$$
$$= \cos\alpha\,\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{i}} + \cos\beta\,\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{j}} + \cos\gamma\,\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{k}} = \cos\alpha\,\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial z}.$$

[1] Так как $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, то его координаты имеют вид $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β и γ — углы, которые составляет этот вектор с осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Таким образом, производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$ может быть вычислена либо по формуле

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \cos\alpha\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}, \tag{6.52}$$

либо, учитывая, что P, Q, R — координаты $\boldsymbol{p}(M)$, по формуле

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{i} &+ \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{j} &+ \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{k}&. \end{aligned} \tag{6.53}$$

4. Повторные операции теории поля. Будем считать, что в области Ω евклидова пространства E^3 заданы скалярное поле $u(M)$ класса C^2 [1]) и векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$ класса C^2.

При этих предположениях $\operatorname{grad} u$ представляет собой дифференцируемое векторное поле в Ω, $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ — дифференцируемое скалярное поле, а $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ — дифференцируемое векторное поле. Поэтому возможны следующие повторные операции:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} u, \quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{p}, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}.$$

Докажем, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = 0. \tag{6.54}$$

Для доказательства вычислим $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в декартовой прямоугольной системе координат. Так как в этом случае координаты $\operatorname{grad} u$ равны $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, то на основании формулы (6.51) получим

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\boldsymbol{j} &+ \\ + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\boldsymbol{k} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, первое из равенств (6.54) справедливо для декартовой системы координат. В силу инвариантности выражения $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, первое из равенств (6.54) доказано. Перейдем к доказательству второго равенства (6.54). Обратимся опять к декартовой системе координат. В этой системе, согласно (6.51),

[1]) Функция принадлежит классу C^k в области Ω, если все ее частные производные порядка k непрерывны.

векторное поле $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ имеет координаты $\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, где P, Q, R — координаты вектора $\boldsymbol{p}$. Согласно (6.50) дивергенция векторного поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в декартовой прямоугольной системе координат равна сумме производных компонент этого поля по одноименным координатам. Таким образом,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0.$$

Таким образом, второе из равенств (6.54) справедливо для декартовой системы координат. В силу инвариантности выражения $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$, второе из равенств (6.54) справедливо в любой системе координат.

Одной из основных повторных операций теории поля является операция $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$. Кратко эту операцию обозначают Δu, причем символ Δ обычно называют оператором Лапласа [1]. Таким образом,

$$\Delta u=\operatorname{div}\operatorname{grad}u. \tag{6.55}$$

Вычислим оператор Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат. В такой системе векторное поле $\operatorname{grad}u$ имеет координаты $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Обращаясь к выражению (6.50) для дивергенции векторного поля, получим

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{6.56}$$

Повторные операции $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ связаны соотношением

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{p}-\Delta\boldsymbol{p}, \tag{6.57}$$

где $\Delta\boldsymbol{p}$ представляет собой вектор, координаты которого в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ равны ΔP, ΔQ, ΔR (P, Q, R — координаты векторного поля $\boldsymbol{p}$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$). В справедливости соотношения (6.57) читатель легко убедится самостоятельно.

§ 3. Выражение основных операций теории поля в криволинейных координатах

1. Криволинейные координаты. Пусть Ω — область евклидова пространства E^3; x, y, z — декартовы координаты в этом пространстве. Пусть далее, $\widetilde{\Omega}$ — область евклидова пространства $\widetilde{E}^3$; x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты в $\widetilde{E}^3$.

[1] П. С. Лаплас — выдающийся французский астроном, математик и физик (1749–1827).

Рассмотрим взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение области $\widetilde{\Omega}$ на область Ω, которое осуществляется посредством функций

$$x = x(x^1,\, x^2,\, x^3), \quad y = y(x^1,\, x^2,\, x^3), \quad z = z(x^1,\, x^2,\, x^3). \quad (6.58)$$

С помощью указанного отображения в области Ω вводятся криволинейные координаты x^1, x^2, x^3. Смысл этого наименования легко уяснить из следующих рассуждений. Во-первых, каждой точке $M(x,\, y,\, z)$ области Ω сопоставляются три числа x^1, x^2, x^3. Более точно, точка M определяется тройкой чисел x^1, x^2, x^3. Этим объясняется наименование «координаты» точки M для чисел x^1, x^2, x^3. Во-вторых, если в правых частях соотношений (6.58) фиксированы две какие-либо координаты, например x^2 и x^3, то при переменном x^1 эти соотношения определяют в области Ω некоторую линию, отличную, вообще говоря, от прямой. Эту линию естественно называть *координатной линией* x^1, подчеркивая тем самым, что в точках указанной линии меняется лишь координата x^1. В полной аналогии определяются координатные линии x^2 и x^3. Вообще говоря, координатные линии x^1, x^2 и x^3 не будут прямыми. Этим и объясняется термин «криволинейные координаты».

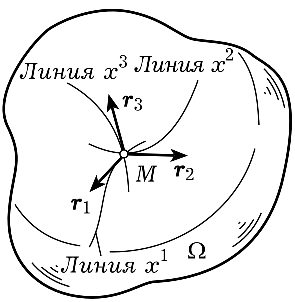


Рис. 6.2

Мы выяснили, что через каждую точку M области Ω проходят три координатные линии x^1, x^2, x^3 (рис. 6.2). Построим в точке M базис $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$, естественным образом связанный с координатными линиями, проходящими через эту точку. При этом мы воспользуемся соотношениями (6.58). Очевидно, производные $\dfrac{\partial x}{\partial x^1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x^1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x^1}$, вычисленные в точке M, представляют собой координаты вектора касательной к линии x^1 в этой точке. Мы обозначим, этот вектор через $\boldsymbol{r}_1$. Аналогичным способом мы строим векторы $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ касательных к линиям x^2 и x^3 соответственно. Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_k = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x^k},\, \frac{\partial y}{\partial x^k},\, \frac{\partial z}{\partial x^k} \right\}, \qquad k = 1,\, 2,\, 3. \qquad (6.59)$$

Для того чтобы векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ образовали базис, нужно потребовать некомпланарности этих векторов. Достаточным условием для выполнения этого требования является, очевидно, условие необращения в нуль якобиана

$$\frac{\mathcal{D}(x,\,y,\,z)}{\mathcal{D}(x^1,\,x^2,\,x^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y}{\partial x^3} & \dfrac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix},$$

ибо этот якобиан равен смешанному произведению векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$. С помощью построенного базиса $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ стандартным образом строится взаимный базис $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$.

Итак, если в области Ω введены криволинейные координаты x^1, x^2, x^3, то с каждой точкой M этой области естественным образом связываются базисные векторы $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$. Рассмотрим примеры.

1°. *Цилиндрическая система координат.* Эта система координат вводится с помощью соотношений

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{6.60}$$

Таким образом, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$. Известно, что указанные координаты ρ, φ, z (или, что то же, x^1, x^2, x^3) изменяются в следующих пределах [1]:

$$0 \leqslant \rho \leqslant +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Эти неравенства определяют в евклидовом пространстве координатами ρ, φ, z (или x^1, x^2, x^3) бесконечную область $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{E}^3$ с изображенную на рис. 6.3. Мы можем, следовательно, рассмат-

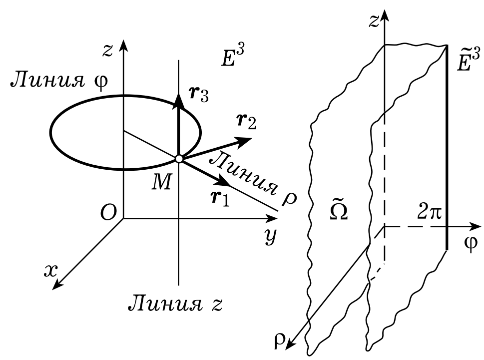


Рис. 6.3

ривать введение цилиндрических координат в евклидовом пространстве E^3 как результат отображения области $\widetilde{\Omega}$ пространства $\widetilde{E}^3$ в пространство E^3 с помощью формул (6.60).

[1]) См. вып. 3 «Аналитическая геометрия» настоящего курса.

Очевидно, координатные линии ρ (или линии x^1) представляют собой прямые, проходящие через ось Oz, перпендикулярно этой оси, координатные линии φ (линии x^2) — окружности с центрами на оси Oz, плоскости которых параллельны плоскости Oxy. Координатные линии z (линии x^3) — прямые, параллельные оси Oz (см. рис. 6.3). Найдем векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1 = \left\{\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right\} = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\},$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \left\{\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\} = \{-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0\},$$
$$\boldsymbol{r}_3 = \left\{\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right\} = \{0, 0, 1\}.$$

Подчеркнем, что выражения в фигурных скобках представляют собой декартовы координаты базисных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$. Непосредственно можно убедиться, что базис $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ортогональный. Для вычисления «взаимного базиса воспользуемся формулами, приведенными в п. 1 § 1 этой главы. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0\},$$
$$[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\},$$
$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = \{0, 0, \rho\}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\},$$
$$\boldsymbol{r}^2 = \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{-\frac{1}{\rho}\sin\varphi, \frac{1}{\rho}\cos\varphi, 0\right\},$$
$$\boldsymbol{r}^3 = \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{0, 0, 1\}.$$

2°. *Сферическая система координат.* Эта система координат вводится с помощью соотношений

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{6.61}$$

Таким образом, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$. Известно, что указанные координаты ρ, φ, θ (или, что то же, x^1, x^2, x^3) изменяются в следующих пределах:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{6.62}$$

Неравенства (6.62) определяют в евклидовом пространстве $\widetilde{E}^3$ с координатами ρ, φ, θ (или x^1, x^2, x^3) бесконечную область $\widetilde{\Omega}$, изображенную на рис. 6.4. Мы можем поэтому рассматривать введение сферических координат в евклидовом пространстве E^3

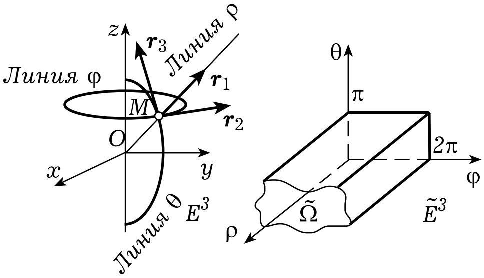


Рис. 6.4

как результат отображения области $\widetilde{\Omega}$ пространства $\widetilde{E}^3$ в пространство E^3 с помощью формул (6.61).

Очевидно, координатные линии ρ (линии x^1) представляют собой лучи, выходящие из начала координат; координатные линии φ (линии x^2) — окружности с центрами на оси Oz, плоскости которых параллельны плоскости Oxy, координатные линии θ (линии x^3) — полуокружности, центры которых находятся в начале координат и плоскости которых проходят через ось Oz (см. рис. 6.4).

Найдем векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$. Имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\},\\
\boldsymbol{r}_2 &= \{-\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi,\ 0\},\\
\boldsymbol{r}_3 &= \{\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ -\rho\sin\theta\}.
\end{aligned}$$

Непосредственно можно убедиться, что базис $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ортогональный. Для вычисления взаимного базиса воспользуемся формулами, приведенными в п. 1 § 1 этой главы. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] &= \{-\rho^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ -\rho^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ -\rho^2\sin\theta\cos\theta\},\\
[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] &= \{\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ 0\},\\
[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] &= \{-\rho\cos\theta\sin\theta\cos\varphi,\ -\rho\cos\theta\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\sin^2\theta\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^1 &= \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{ \sin\theta\cos\varphi, \quad \sin\theta\sin\varphi, \quad \cos\theta \right\},\\
\boldsymbol{r}^2 &= \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{ -\frac{1}{\rho}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}, \quad 0 \right\},\\
\boldsymbol{r}^3 &= \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{ \frac{1}{\rho}\cos\theta\cos\varphi, \ \frac{1}{\rho}\cos\theta\sin\varphi, \ -\frac{1}{\rho}\sin\theta \right\}.
\end{aligned}$$

3°. *Ортогональная криволинейная система координат.* Криволинейную систему координат мы будем называть *ортогональной*, если в каждой точке области Ω базис $\boldsymbol{r}_i$, определяемый равенством (6.59), является ортогональным. Только что рассмотренные цилиндрическая и сферическая системы координат представляют собой примеры ортогональных криволинейных координат.

Получим выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для случая ортогональной системы координат.

Введем следующие обозначения:

$$H_1 = |\boldsymbol{r}_1|, \quad H_2 = |\boldsymbol{r}_2|, \quad H_3 = |\boldsymbol{r}_3|.$$

Величины H_1, H_2, H_3 обычно называются *коэффициентами* или *параметрами Ламе* [1]).

Так как система координат ортогональная и тройка векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ правая, то

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = H_1H_2H_3,$$

$$[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] = \frac{H_2H_3}{H_1}\boldsymbol{r}_1, \quad [\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] = \frac{H_3H_1}{H_2}\boldsymbol{r}_2, \quad [\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = \frac{H_1H_2}{H_3}\boldsymbol{r}_3.$$

Используя эти соотношения и формулы, выражающие векторы взаимного базиса через векторы $\boldsymbol{r}_i$ (см. п. 1 § 1 этой главы), получим

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{1}{H_1^2}\boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{r}^2 = \frac{1}{H_2^2}\boldsymbol{r}_2, \quad \boldsymbol{r}^3 = \frac{1}{H_3^2}\boldsymbol{r}_1.$$

2. Выражение градиента и производной по направлению для скалярного поля в криволинейных координатах. Пусть в области Ω, в которой введены криволинейные координаты x^1, x^2, x^3, задано дифференцируемое скалярное поле $u(M)$. При этих условиях $\operatorname{grad} u$ определен в каждой точке Ω и в каждой точке Ω по любому направлению $\boldsymbol{e}$ может быть вычислена производная $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$. Как градиент $\operatorname{grad} u$, так и производную по направлению в данной точке M мы будем относить к базису $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ в этой точке, построение которого описано в предыдущем пункте.

1°. *Выражение градиента скалярного поля в криволинейных координатах.* После введения в области Ω криволинейных ко-

[1]) Г. Ламе — французский математик (1795–1870).

ординат x^1, x^2, x^3 скалярное поле u будет, очевидно, функцией переменных x^1, x^2, x^3:

$$u = u(x^1,\, x^2,\, x^3).$$

Эта функция может рассматриваться как результат суперпозиции функции $u(x,\, y,\, z)$ переменных x, y, z и функций (6.58). Поэтому для вычисления производных $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ мы можем применить правило дифференцирования сложной функции. Обозначая $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ через u_i, получим

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}. \tag{6.63}$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ — координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, связанном с системой $Oxyz$, а $\dfrac{\partial x}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x^i}$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}_i$, то, очевидно, соотношение (6.63) может быть переписано в следующей форме:

$$u_i = \boldsymbol{r}_i \operatorname{grad} u. \tag{6.64}$$

Используя формулы Гиббса (см. формулы (6.6)) для вектора $\operatorname{grad} u$ и формулы (6.64), получим

$$\operatorname{grad} u = (\boldsymbol{r}_i \operatorname{grad} u)\boldsymbol{r}^i = u_i \boldsymbol{r}^i.$$

Итак, градиент скалярного поля u в криволинейных координатах выражается следующим образом:

$$\operatorname{grad} u = u_i \boldsymbol{r}^i \qquad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\right). \tag{6.65}$$

На практике часто встречается случай ортогональной криволинейной системы координат. В предыдущем пункте мы получили (см. п. 3° предыдущего пункта) выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для ортогональной системы. Используя эти выражения и формулу (6.65), найдем для $\operatorname{grad} u$ в ортогональных координатах следующую формулу:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial x^1}\boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\boldsymbol{r}_2 + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial x^3}\boldsymbol{r}_3. \tag{6.66}$$

Наряду с ортогональным базисом $\boldsymbol{r}_i$ рассматривают ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{r}_i/H_i$. Легко видеть, что в базисе $\boldsymbol{e}_i$ выражение для $\operatorname{grad} u$ имеет вид

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3. \tag{6.67}$$

2°. *Выражение производной скалярного поля $u(M)$ по направлению $\boldsymbol{e}$ в криволинейных координатах.* Пусть e^i — контравариантные координаты единичного вектора $\boldsymbol{e}$ в базисе $\boldsymbol{r}_i$, так что

$$\boldsymbol{e} = e^k \boldsymbol{r}_k.$$

Для производной $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$ мы получили в п. 2 § 2 этой главы следующую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e} \cdot \operatorname{grad} u$$

(см. формулу (6.40)). Подставляя в эту формулу выражение для $\boldsymbol{e}$ в базисе $\boldsymbol{r}_i$ и формулу (6.65) для $\operatorname{grad} u$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = (e^k \boldsymbol{r}_k)(u_i \boldsymbol{r}^i) = e^k u_i (\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{r}^i) = e^k u_i \delta_k^i = u_i e^i.$$

Таким образом, производная скалярного поля u по направлению $\boldsymbol{e}$ выражается в криволинейных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = u_i e^i. \tag{6.68}$$

3. Выражение дивергенции, ротора и производной по направлению для векторного поля в криволинейных координатах. Пусть в области Ω, в которой введены криволинейные координаты, задано дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$. При этих условиях дивергенция и ротор поля $\boldsymbol{p}$ определены в каждой точке области Ω, и в каждой точке Ω по любому направлению $\boldsymbol{e}$ может быть вычислена производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$. Дивергенцию, ротор и производную по направлению в данной точке M мы будем относить к базису $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ в этой точке.

1°. *Выражение дивергенции векторного поля в криволинейных координатах.* После введения в области Ω криволинейных координат x^1, x^2, x^3 векторное поле $\boldsymbol{p}$ будет, очевидно, функцией переменных x^1, x^2, x^3:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(x^1, x^2, x^3).$$

Эта функция может рассматриваться как результат суперпозиции функции $\boldsymbol{p}(x, y, z)$ и функций (6.58). Поэтому для вычисления производных $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$ мы можем применить правило дифференцирования сложной функции. Обозначая $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$ через $\boldsymbol{p}_i$, получим

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}. \tag{6.69}$$

Так как $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = A\boldsymbol{i}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = A\boldsymbol{j}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = A\boldsymbol{k}$, где A — линейный оператор, определенный равенством $\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)$ (см. п. 3 § 2 этой главы), то из соотношений (6.69) и свойств линейного оператора получим

$$\boldsymbol{p}_i = A\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\boldsymbol{k}\right) = A\boldsymbol{r}_i. \tag{6.70}$$

По определению $\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \operatorname{div} A = \boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i$. Поэтому, согласно формуле (6.70), в криволинейной системе координат дивергенция векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$ может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}^i\boldsymbol{p}_i \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.71}$$

Найдем выражение для дивергенции для случая ортогональной криволинейной системы координат. Используя выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для ортогональных криволинейных координат и формулу (6.71), получим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \frac{1}{H_1^2}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{H_2^2}\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2 + \frac{1}{H_3^2}\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{r}_3 \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.72}$$

Формула (6.72) записывается также и другим способом. Обозначим через P^i координаты поля $\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{r}_i}{H_i}$ [1]. Тогда после ряда преобразований выражение (6.72) для $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ примет следующий вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(P^1H_2H_3)}{\partial x^1} + \frac{\partial(P^2H_3H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial(P^3H_1H_2)}{\partial x^3}\right]. \tag{6.73}$$

2°. *Выражение ротора векторного поля в криволинейных координатах.* По определению $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \operatorname{rot} A = [\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i]$. Поэтому, согласно формуле (6.70), получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{p}_i] \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.74}$$

Найдем выражение ротора в ортогональной криволинейной системе координат. Используя выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для ортогональной системы и формулу (6.74), получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \frac{1}{H_1^2}[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1] + \frac{1}{H_2^2}[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2] + \frac{1}{H_3^2}[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{p}_3] \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.75}$$

В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{r}_i}{H_i}$ ротор векторного поля $\boldsymbol{p}$ имеет координаты

$$\left\{\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(P^3H_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(P^2H_2)}{\partial x^3}\right],\quad \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(P^1H_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(P^3H_3)}{\partial x^1}\right],\right.$$
$$\left.\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(P^2H_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(P^1H_1)}{\partial x^2}\right]\right\}. \tag{6.76}$$

3°. *Выражение для производной векторного поля по направлению в криволинейных координатах.* Воспользуемся формулой

$$\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e}, \tag{6.46}$$

[1] В правой части этой формулы суммирование по индексу i не производится.

полученной нами в п. 3 § 2 этой главы. Пусть $\boldsymbol{e} = e^i \boldsymbol{r}_i$. Тогда из формулы (6.46) и свойств линейного оператора получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = e^i A \boldsymbol{r}_i.$$

Так как $A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{p}_i$, где $\boldsymbol{p}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$, то для производной векторного поля $\boldsymbol{p}$ по направлению $\boldsymbol{e}$ получим следующее выражение:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = e^i \boldsymbol{p}_i. \tag{6.77}$$

4. Выражение оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах. Мы определили оператор Лапласа Δu как повторную операцию $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Используя выражения (6.67) и (6.73) для градиента и дивергенции в криволинейных ортогональных координатах, мы получим выражение для оператора Лапласа.

В рассматриваемом случае векторным полем $\boldsymbol{p}$, дивергенцию которого нужно вычислить, является поле $\operatorname{grad} u$. Подставляя (6.67) в (6.73), получим

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\right)\right]. \tag{6.78}$$

5. Выражение основных операций теории поля в цилиндрической и сферической системах координат.

1°. *Цилиндрическая система координат.* В силу результатов в 1° п. 1 § 3 параметры Ламе для цилиндрических координат имеют вид

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

В таком случае из формул (6.67), (6.73), (6.76) и (6.78) вытекают следующие равенства:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho P_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial P_\rho}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2°. *Сферическая система координат.* В этом случае параметры Ламе имеют вид

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho \sin\theta, \quad H_3 = \rho.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 P_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta P_\theta),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta P_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial P_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \\ + \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial P_\rho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P_\varphi)}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

В заключение этой главы приведем сводку формул, связывающих операции взятия градиента, дивергенции и ротора с алгебраическими операциями:

1°. $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$.

2°. $\operatorname{grad}(u \cdot v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$.

3°. $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

4°. $\operatorname{div}(\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q}) = \operatorname{div} \boldsymbol{p} \pm \operatorname{div} \boldsymbol{q}$.

5°. $\operatorname{div}(u\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \boldsymbol{p}$.

6°. $\operatorname{div}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}] = \boldsymbol{q} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \operatorname{rot} \boldsymbol{q}$.

7°. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{p} \pm \operatorname{rot} \boldsymbol{q}$.

8°. $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{p}) = u \operatorname{rot} \boldsymbol{p} - [\boldsymbol{p} \operatorname{grad} u]$.

В справедливости этих формул читатель легко убедится самостоятельно.

Заключительные замечания. В этой главе мы познакомились с основными операциями теории поля. При этом мы не опирались на какие-либо физические представления, поскольку нашей целью являлось построение математического аппарата теории. В следующей главе мы получим ряд важных интегральных соотношений, связывающих некоторые операции теории поля. Эти соотношения позволят нам указать физическую интерпретацию понятий и операций, введенных в настоящей главе.

ГЛАВА 7

ФОРМУЛЫ ГРИНА, СТОКСА И ОСТРОГРАДСКОГО

В этой главе мы получим важные формулы, играющие большую роль в различных приложениях и, в частности, в теории поля. Эти формулы в определенном смысле представляют собой обобщения на многомерный случай формулы Ньютона--Лейбница для одномерных интегралов.

§ 1. Формула Грина [1]

1. Формулировка основной теоремы. Пусть D — конечная, вообще говоря, многосвязная область на плоскости Oxy с кусочно-гладкой границей L [2]. Область D с присоединенной границей L мы будем обозначать $\overline{D}$. Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 7.1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в $\overline{D}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D. Если существуют несобственные интегралы по области D от каждой из частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$* [3]*, то справедливо соотношение*

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_{L} P\, dx + Q\, dy, \tag{7.1}$$

называемое *ф о р м у л о й Г р и н а. При этом стоящий в правой части* (7.1) *интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы L, на которых указано такое направление обхода, при котором область D остается слева.*

---

[1] Дж. Грин — английский математик (1793–1841).

[2] Граница L называется кусочно-гладкой, если она составлена из конечного числа гладких кривых. Если граница L состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых L_i, то связную область D обычно называют *многосвязной*, а кривые L_i называют *связными компонентами* границы.

[3] Так как частные производные функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ существуют лишь в открытой области D, то упомянутые интегралы являются несобственными. При дополнительном предположении о непрерывности указанных частных производных в $\overline{D}$ упомянутые интегралы переходят в собственные.

Мы докажем сначала формулу Грина для специального, но достаточно широкого класса областей. Затем мы установим ряд вспомогательных утверждений, которые понадобятся для доказательства сформулированной теоремы.

2. Доказательство формулы Грина для специального класса областей. Пусть D — односвязная конечная область с кусочно-гладкой границей L. Будем считать, что каждая прямая, параллельная любой координатной оси, пересекает границу L не более чем в двух точках. Такие области будем называть *областями типа K*.

По предположению, существуют несобственные интегралы от частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Это означает, что для любой системы областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область D, справедливо, например, соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\overline{D}_n} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

(аналогичные соотношения справедливы и для других частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$).

Опишем построение специальной системы областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область типа K. Эта система понадобится нам при доказательстве формулы Грина для областей указанного типа.

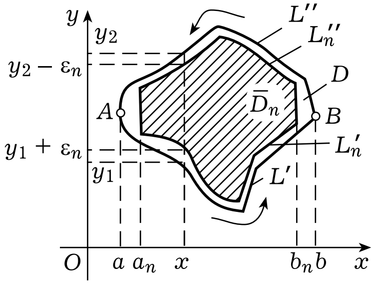


Рис. 7.1

Пусть сегмент $[a, b]$ оси Ox представляет собой проекцию на эту ось области $\overline{D}$ (рис. 7.1). Проведем через точки a и b прямые, параллельные оси Oy. Каждая из этих двух прямых пересекается с границей L лишь в одной точке. Эти две точки A и B пересечения указанных прямых с границей L разделяют L на две кривые L' и L'', которые, очевидно, представляют собой графики непрерывных и кусочно-дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответственно. Отметим (см. рис. 7.1), что $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (равенство имеет место лишь при $x = a$ и $x = b$).

Рассмотрим далее последовательность сегментов $[a_n, b_n]$ таких, что $a < a_n < b_n < b$, $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Пусть, кроме того, при любом n сегмент $[a_n, b_n]$ содержится в сегменте $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Выберем число $\varepsilon_n > 0$ так, чтобы графики L'_n и L''_n функций $y_1(x) + \varepsilon_n$ и $y_2(x) - \varepsilon_n$ были расположены в области D и не пересекались.

Границей области $\overline{D}_n$ является кривая, составленная из линий L'_n и L''_n и отрезков вертикальных прямых, проходящих через точки a_n и b_n (см. рис. 7.1). Область $\overline{D}_{n+1}$ строится аналогичным образом, только вместо сегмента $[a_n,\, b_n]$ берется сегмент $[a_{n+1},\, b_{n+1}]$, а число $\varepsilon_{n+1} > 0$ выбирается меньшим числа ε_n. Очевидно, что если $\varepsilon_n \to 0$, то построенная система областей $\{\overline{D}_n\}$ монотонно исчерпывает область D.

Докажем следующее *утверждение.*

Теорема 7.2. *Пусть в области D типа K функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы* 7.1. *Тогда для этой области и для функций $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ справедлива формула Грина.*

Доказательство. Достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint\limits_L Q\, dy, \quad -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint\limits_L P\, dx. \tag{7.2}$$

Так как указанные равенства доказываются однотипно, мы проведем доказательство второго из них. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{\overline{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{7.3}$$

Для области $\overline{D}_n$ и для подынтегральной функции $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ в интеграле (7.3) выполняются все условия, при которых действует формула повторного интегрирования. По этой формуле имеем

$$\iint\limits_{\overline{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{a_n}^{b_n} dx \int\limits_{y_1(x)+\varepsilon_n}^{y_2(x)-\varepsilon_n} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_{a_n}^{b_n} P(x,\, y_2(x) - \varepsilon_n)\, dx - \int\limits_{a_n}^{b_n} P(x,\, y_1(x) + \varepsilon_n)\, dx \tag{7.4}$$

Левая часть соотношений (7.4) при $n \to \infty$ имеет предел, равный интегралу $\iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$. В силу равномерной непрерывности функции $P(x,\, y)$ в замкнутой области $\overline{D}$, каждое из слагаемых в правой части (7. 4) имеет при $n \to \infty$ предел, равный для первого слагаемого $\int\limits_a^b P(x,\, y_2(x))\, dx$ и для второго $\int\limits_a^b P(x,\, y_1(x))\, dx$.

Первый из этих двух интегралов представляет собой при указанном на рис. 7.1 направлении обхода границы криволинейный интеграл

$$-\int\limits_{L''} P(x,\, y)\, dx,$$

а второй интеграл — криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L'} P(x,\, y)\, dx.$$

Мы видим, что правая часть соотношений (7.4) при $n \to \infty$ имеет предел, равный

$$-\int\limits_{L} P(x,\, y)\, dx.$$

Таким образом, вторая из формул (7.2) доказана. Справедливость первой из формул (7.2) устанавливается аналогично (нужно спроецировать $\overline{D}$ на ось Oy и повторить проведенные рассуждения). Теорема доказана.

3. Инвариантная запись формулы Грина. Пусть функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1 в конечной связной области D с кусочно-гладкой границей L. Определим в области $\overline{D} = D + L$ векторное поле $\boldsymbol{p}$, координаты которого в данной декартовой прямоугольной системе координат равны $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$. Очевидно, при условиях, наложенных на функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$, поле $\boldsymbol{p}$ будет непрерывным в области $\overline{D}$ и непрерывно-дифференцируемым в D. Найдем ротор этого векторного поля. Используя выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Из этого соотношения получим

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \boldsymbol{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}. \tag{7.5}$$

Замечание 1. Перейдем в плоскости Oxy к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ и к новой декартовой системе координат $Ox'y'$, связанной с этим базисом. Пусть векторное поле $\boldsymbol{p}$ имеет в этом новом базисе координаты P' и Q'. Очевидно, в новой системе координат функции P' и Q' удовлетворяют условиям теоремы 7.1. Кроме того, так как в новом базисе $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\dfrac{\partial Q'}{\partial x'} - \dfrac{\partial P'}{\partial y'}\right)\boldsymbol{k}$, то

$$\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} = \boldsymbol{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}. \tag{7.6}$$

Так как скалярное произведение $\boldsymbol{k}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{p}$ представляет собой инвариант, то из (7.5) и (7.6) следует, что выражение $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ не меняет ни значения, ни формы при переходе к новому ортонормированному базису, т. е. также представляет собой инвариант.

С помощью этого замечания мы можем сделать следующий важный вывод: *интеграл, находящийся в левой части формулы Грина* (7.1), *имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.* Действительно, при таком преобразовании координат абсолютная величина якобиана преобразования равна единице. Согласно же замечанию, подынтегральное выражение не меняет ни значения, ни формы. Обратимся теперь к интегралу

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy, \tag{7.7}$$

находящемуся в правой части формулы Грина. Убедимся, что *этот интеграл также имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.*

Пусть $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной в точках границы L, направление которого согласовано с направлением обхода на L, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — координаты вектора $\boldsymbol{t}$. Выберем в качестве параметра на L длину дуги l, причем на каждой связной компоненте границы возрастание параметра l согласовано с направлением обхода на этой компоненте. При условиях, наложенных на L, функция $\boldsymbol{t}(l)$ будет кусочно-непрерывной. При сформулированных выше условиях векторное поле $\boldsymbol{p}$ будет непрерывным на L, а его координаты P и Q представляют собой непрерывные функции от l.

Заметим, что после выбора направления обхода и параметра на кривой L криволинейный интеграл второго рода (7.7) преобразуется в криволинейный интеграл первого рода. При этом P и Q вычисляются в точках L, а $dx = \cos\alpha\,dl$, $dy = \sin\alpha\,dl$. Таким образом,

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \oint_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \oint_L \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.8}$$

Соотношение (7.8) показывает, что интеграл (7.7) действительно имеет инвариантный характер: скалярное произведение $\boldsymbol{pt}$ — инвариант, параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат. Кроме того, в новой декартовой системе координат $Ox'y'$ имеем

$$\boldsymbol{pt}\,dl = (P'\cos\alpha' + Q'\sin\alpha')\,dl = P'\,dx' + Q'\,dy',$$

и поэтому

$$P\,dx + Q\,dy = P'\,dx' + Q'\,dy'.$$

Итак, мы убедились, что интеграл (7.7) имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.

Проведенные выше рассуждения позволяют придать формуле Грина (7.1) следующую *инвариантную форму*:

$$\iint_D \boldsymbol{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}\,d\sigma = \oint_L \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.9}$$

При этом $d\sigma$ означает элемент площади области D.

Замечание 2. Обычно интеграл

$$\oint_L \boldsymbol{pt}\,dl$$

называют *циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *по кривой* L.

Из теоремы 7.2 и выводов этого пункта мы можем извлечь важное следствие.

Следствие. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы* 7.1 *в конечной области D с кусочно-гладкой границей L. Если область D может быть разбита на конечное число областей D_k с кусочно-гладкими границами L_k (рис.* 7.2) *и при этом каждая из D_k представляет собой область типа K по отношению к некоторой декартовой системе координат, то для области D и функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ справедлива формула Грина.*

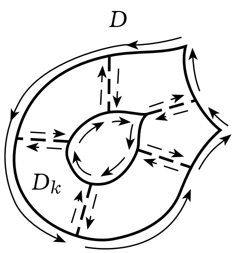


Рис. 7.2

Справедливость следствия вытекает из следующих рассуждений. Ясно, что формула Грина справедлива для каждой из областей D_k. Это следует из инвариантного характера формулы и из теоремы 7.2 (в некоторой системе координат D_k будет областью типа K).

Далее, очевидно, что сумма интегралов $\displaystyle\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ в левых частях формул Грина по областям D_k представляет собой интеграл $\displaystyle\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$. Сумма же криволинейных интегралов $\displaystyle\oint_{L_k} P\,dx + Q\,dy$ в правых частях формул Грина по границам L_k областей D_k даст интеграл $\displaystyle\oint_L P\,dx + Q\,dy$, ибо интегралы по общим участкам границы областей D_k сократятся —

эти участки в соседних областях D_k обходятся в противоположных направлениях (для пояснения можно обратиться к рис. 7.2).

Замечание 3. Произвольную конечную связную область D с кусочно-гладкой границей L нельзя, вообще говоря, разбить на конечное число областей D_k указанного выше вида. Однако из каждой конечной области D с кусочно-гладкой границей можно удалить такую как угодно малую часть, что оставшаяся область может быть разбита нужным образом. При этом вклад в правую и левую части формулы Грина, отвечающий удаленной части области D, будет соответственно как угодно мал. Эта идея лежит в основе доказательства формулы Грина в общем случае.

В следующем пункте мы докажем ряд вспомогательных предложений, с помощью которых указанным способом будет установлена формула Грина в общем случае.

4. Вспомогательные предложения. Пусть L — кусочно-гладкая плоская кривая без самопересечений, на которой в качестве параметра выбрана длина дуги l.

Окрестностью внутренней точки P на кривой L мы будем называть любое, не совпадающее со всей кривой L связное открытое множество точек этой кривой, содержащее точку P. *Для граничной точки* L вводится понятие *полуокрестности* [1]. Длину окрестности (или полуокрестности) будем называть ее размером.

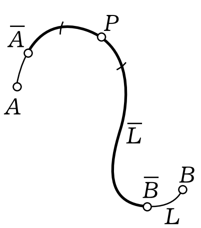


Рис. 7.3

Внутренняя точка P кривой L разбивает каждую свою окрестность на две полуокрестности. Окрестность точки P будем называть λ-окрестностью, если каждая из полуокрестностей имеет длину λ.

Лемма 1. *Пусть L — гладкая конечная кривая без самопересечений, A и B — граничные точки этой кривой, $\overline{L}$ — связная часть кривой L, которая вместе со своими концами $\overline{A}$ и $\overline{B}$ целиком состоит из внутренних точек кривой L* (рис. 7.3) [2]. *Можно указать два таких положительных числа λ и δ, что точная верхняя грань углов, которые составляют касательные в точках λ-окрестности любой точки P кривой $\overline{L}$* [3])

---

[1]) Если P — граничная точка кривой L, а Q — любая ее другая точка, то множество всех точек кривой L, заключенных между P и Q, включающее точку P и не включающее точку Q, мы назовем полуокрестностью точки P.

[2]) Кривая может быть и замкнутой. В этом случае $\overline{L}$ может совпадать с L. Если L — замкнутая кривая с одной угловой точкой, то $\overline{L}$ — любая замкнутая связная часть L, не содержащая эту угловую точку.

[3]) Окрестность точки кривой $\overline{L}$ рассматривается как окрестность этой точки на кривой L.

с касательной в точке P меньше $\pi/8$, а расстояния от точки P до точек кривой L, расположенных вне λ-окрестности, не меньше δ [1]*.*

Доказательство. *Убедимся, что можно указать $\lambda > 0$, удовлетворяющее условиям леммы.* Во-первых, отметим, что для любого $\alpha > 0$ для каждой точки P можно указать такую λ-окрестность ($\lambda > 0$), в пределах которой верхняя грань углов, которые составляют касательные в точках этой λ-окрестности с касательной в точке P меньше α. Это следует из непрерывности касательных к кривой L.

Речь идет об универсальном λ, пригодном для всех точек кривой $\overline{L}$.

Допустим, что нет $\lambda > 0$, удовлетворяющего условиям леммы. Тогда для любого $\lambda_n = 1/n$ на $\overline{L}$ найдутся такие точки P_n и Q_n, что длина дуги P_nQ_n меньше λ_n, а угол между касательными в этих точках не меньше фиксированного $\alpha < \pi/8$. Выделим из последовательности $\{P_n\}$ подпоследовательность $\{P_{n_k}\}$, сходящуюся к точке P кривой $\overline{L}$. Очевидно, подпоследовательность $\{Q_{n_k}\}$ также сходится к P. Рассмотрим ту λ-окрестность точки P, в которой точная верхняя грань углов между касательными в точках окрестности и в точке P меньше $\alpha/2$.

Ясно, что угол между касательными в любых двух точках указанной λ-окрестности точки P меньше α. При достаточно большом n_k, точки P_{n_k} и Q_{n_k} попадут в выбранную λ-окрестность точки P, и поэтому угол между касательными в этих точках должен быть меньше α, тогда как по выбору этих точек этот угол должен быть больше или равен α. Это противоречие опровергает сделанное допущение о несуществовании $\lambda > 0$, удовлетворяющего условиям леммы. Отметим, что требуемое λ меньше каждой из дуг $A\overline{A}$ и $B\overline{B}$.

Докажем теперь, что можно указать $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям леммы.

Допустим, что нет $\delta > 0$, удовлетворяющего условиям леммы. Тогда для любого $\delta_n = 1/n$ можно указать на $\overline{L}$ такую точку P_n и на L такую точку Q_n, что длина дуги P_nQ_n больше или равна λ [2], тогда как хорда P_nQ_n имеет длину меньше δ_n. Выделим из последовательности $\{P_n\}$ подпоследовательность, сходящуюся к точке P кривой $\overline{L}$ и рассмотрим соответствующую подпоследовательность последовательности $\{Q_n\}$. Из этой последней подпоследовательности выделим подпоследовательность $\{Q_{n_k}\}$, сходящуюся к точке Q кривой L. Ясно, что подпоследователь-

[1] Очевидно, $\lambda \geqslant \delta$.

[2] Существование такого λ уже установлено в первой части доказательства леммы.

ность $\{P_{n_k}\}$ сходится к P. Так как по выбору точек P_{n_k} и Q_{n_k} длина дуги $P_{n_k}Q_{n_k}$ больше или равна λ, то и длина дуги PQ больше или равна λ. Поскольку длины хорд $P_{n_k}Q_{n_k}$ стремятся к нулю, то длина хорды PQ равна нулю, т. е. точка P совпадает с точкой Q и является поэтому точкой самопересечения кривой L без самопересечений. Полученное противоречие подтверждает возможность выбора требуемого $\delta > 0$. Доказательство леммы завершено.

Следствие 1. *Пусть кривые L и $\overline{L}$ удовлетворяют условиям леммы* 1. *Тогда можно указать такое число* 2λ, *что любая дуга кривой $\overline{L}$ длины меньше* 2λ *однозначно проецируется на одну из координатных осей фиксированной декартовой прямоугольной системы координат Oxy.*

Действительно, возьмем в качестве λ число, указанное в лемме 1. Любая дуга кривой $\overline{L}$ длины меньше 2λ содержится в λ-окрестности некоторой точки P кривой $\overline{L}$. Касательная в точке P составляет с одной из осей Ox или Oy угол, меньший или равный $\pi/4$. Тогда, очевидно, касательная в любой точке рассматриваемой дуги составляет с этой осью угол, *меньший* $\pi/2$, и поэтому эта дуга однозначно проецируется на указанную ось (при неоднозначном проецировании были бы касательные, составляющие с указанной осью угол, равный $\pi/2$).

Следствие 2. *Пусть кривые L и $\overline{L}$ удовлетворяют условиям леммы* 1. *Тогда можно указать такое число* $2\lambda > 0$, *что любая дуга кривой $\overline{L}$ длины меньше* 2λ *однозначно проецируется на обе координатные оси специально выбранной для этой дуги декартовой прямоугольной системы координат Oxy.*

Возьмем в качестве λ число указанное в лемме. Любая дуга кривой $\overline{L}$ меньше 2λ содержится в λ-окрестности некоторой точки P кривой $\overline{L}$. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы касательная в P с ее осями составляла угол $\pi/4$. Тогда касательная в любой точке указанной дуги будет составлять с каждой из осей Ox и Oy угол, меньший $\pi/2$, и поэтому эта дуга будет однозначно проецироваться на каждую из осей. Отметим, что малые изменения выбранной системы координат не влияют на возможность однозначного проецирования дуги на обе координатные оси.

Лемма 2. *Пусть Q — квадрат, R — угол с вершиной в центре P квадрата Q и с раствором* $2\alpha < \pi/4$. *Обозначим через* Γ *часть границы квадрата Q, заключенную в угле R. Тогда угол между любой хордой линии* Γ (*прямая, соединяющая две точки* Γ) *и биссектрисой угла R не меньше α.*

Ввиду элементарности не будем приводить доказательство этой леммы.

Лемма 3. *Пусть Q — квадрат, L — гладкая кривая без самопересечений, выходящая из центра P квадрата Q. Пусть точная верхняя грань углов, которые составляют касательные к L с полукасательной к L в точке P, равна $\overline{\alpha} < \pi/8$. Тогда L пересекает границу квадрата Q не более чем в одной точке.*

Доказательство. Построим угол R с раствором 2α, $2\overline{\alpha} < 2\alpha < \pi/4$, биссектрисой которого является полукасательная к L в точке P, а вершиной — центр P квадрата. Обозначим через Γ часть границы квадрата Q, заключенную в угле R. Очевидно, кривая L расположена внутри угла R (если бы L пересекала сторону угла R в точке, отличной от P, то нашлась бы касательная, параллельная этой стороне и указанная касательная составляла бы с полукасательной к L в точке P угол, равный $\alpha > \overline{\alpha}$, что противоречит условию). Пусть L пересекает Γ в двух точках M и N. Тогда на L нашлась бы точка, касательная в которой параллельна хорде MN и, согласно лемме 3, эта касательная составляла бы с полукасательной к L в P угол не меньший $\alpha > \overline{\alpha}$, а это противоречит условию. Лемма доказана.

Следствие из лемм 1 и 3. *Пусть кривые L и $\overline{L}$ удовлетворяют условиям леммы 1 и $\delta > 0$ — число, указанное в этой лемме. Тогда кривая $\overline{L}$ пересекает границу любого квадрата Q с центром в произвольной точке P этой кривой и со стороной, меньшей $\sqrt{2}\delta$, не более чем в двух точках.*

Убедимся в справедливости следствия. Пусть P — произвольная точка кривой $\overline{L}$ и $\lambda > 0$ — число, указанное в лемме 1. Обратимся к λ-окрестности точки P. Обе граничные точки этой окрестности и часть $\overline{L}$, расположенная вне λ-окрестности, согласно лемме 1, лежат вне любого квадрата с центром в P и со стороной, меньшей $\sqrt{2}\delta$. Поэтому рассматриваемая λ-окрестность (и только она) пересекается с границей квадрата Q [1]. Так как каждая из полуокрестностей рассматриваемой λ-окрестности точки P удовлетворяет условиям леммы 3, то ясно, что λ-окрестность пересечет границу квадрата Q не более чем в двух точках.

5. Специальное разбиение области D с кусочно-гладкой границей $\boldsymbol{L}$. Пусть D — многосвязная конечная область, граница L которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — угловые точки грани цы L. Будем считать, что на плоскости выбрана декартова прямоугольная система координат Oxy.

[1] Здесь используется теорема Жордана, утверждающая, что если две точки непрерывной кривой L являются внутренней и внешней точками области D, то L пересекает границу D.

Мы укажем способ специального разбиения области D на подобласти. Такие разбиения понадобятся нам при доказательстве теоремы 1.

1°. Убедимся, что для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать квадраты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ с центрами в угловых точках границы L и со сторонами, параллельными осям Ox и Oy (рис. 7.4), что будут выполнены следующие *условия*:

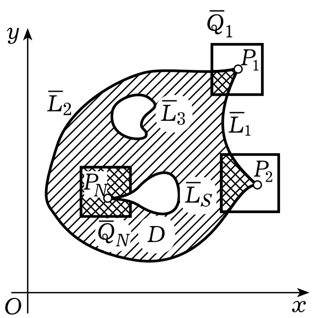


Рис. 7.4

1) Граница любого квадрата $\overline{Q}_i$ с центром в P_i пересекается с каждой из двух ветвей границы L, исходящих из P_i [1]) ровно в одной точке (см. рис. 7.4). Указанные точки являются единственными общими точками границы квадрата Q_i с границей L.

2) Сумма площадей квадратов Q_i будет меньше ε; сумма длин частей границы L, находящихся в квадратах $\overline{Q}_i$, также будет меньше ε. Очевидно, при этом сумма периметров квадратов $\overline{Q}_i$ не превышает $A\varepsilon$, где A — некоторая константа.

Возможность указанного выше выбора квадратов $\overline{Q}_i$ вытекает из следующих рассуждений.

Рассмотрим λ-окрестности угловых точек, подчиненные требованиям:

1. Эти λ-окрестности не пересекаются.
2. Сумма длин всех λ-окрестностей меньше ε.
3. Точная верхняя грань углов, которые составляют касательные каждой из полуокрестностей λ-окрестности с соответствующей полукасательной в угловой точке меньше $\overline{\alpha} < \pi/8$.

Возможность выбора таких λ-окрестностей угловых точек очевидна. Отметим, что каждая из полуокрестностей выбранных λ-окрестностей удовлетворяет условиям леммы 3. Поэтому каждая из этих полуокрестностей пересекается не более чем в одной точке с границей любого квадрата с центром в соответствующей угловой точке.

Для каждой угловой точки P_i определим число $\delta > 0$, равное точной нижней грани расстояний от P_i до части L, полученной удалением из L λ-окрестности точки P_i.

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Ясно, что любой квадрат $\overline{Q}_i$ с центром в P_i, длина стороны которого меньше $\sqrt{2}\delta$, удовлетворяет сформулированному выше *условию* 1), ибо при указанном выборе квадрата $\overline{Q}_i$ для каждой из полуокрестностей

[1]) Достаточно малая λ-окрестность угловой точки P_i состоит из двух гладких ветвей, исходящих из этой точки.

точки P_i выполнены условия леммы 4 и, кроме того, граничные точки полуокрестности лежат вне квадрата $\overline{Q}_i$ (этим обеспечивается единственность точки пересечения полуокрестности с границей квадрата). Ясно также, что за счет уменьшения сторон квадратов можно добиться, чтобы сумма их площадей была меньше ε. Очевидно, сумма длин частей границы L, находящихся в квадратах $\overline{Q}_i$, будет меньше ε за счет специального выбора λ-окрестностей угловых точек. Таким образом, *условие* 2) также выполняется при указанном выборе квадратов Q_i.

2°. Удалим из L те части, которые находятся в квадратах $\overline{Q}$. Оставшаяся после удаления часть L представляет собой набор гладких кривых $\overline{L}_i$ без общих точек; при этом некоторые из $\overline{L}_i$ представляют собой гладкие замкнутые кривые. Отметим, что каждая незамкнутая кривая L_i состоит из внутренних точек гладкой кривой L_i, граничными точками которой будут угловые точки L (см. рис. 7.4).

Для каждой из кривых $\overline{L}_i$ воспользуемся леммой 1 предыдущего пункта. Пусть λ_i и δ_i^* — числа, гарантированные для $\overline{L}_i$ этой леммой. При этом число δ_i^* мы подчиним еще одному требованию — будем считать, что δ_i^* меньше нижней грани расстояний от точек $\overline{L}_i$ до остальных кривых $\overline{L}_k$. Далее обозначим $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ и $0 < \delta^* < \min\{\delta_1^*, \delta_2^*, \ldots, \delta_N^*\}$, $\delta^* < \sqrt{2}\delta$, где δ — число, выбранное в 1°. Очевидно, $\lambda \geqslant \delta^*$.

Разобьем каждую кривую $\overline{L}_i$ на конечное число частей длины меньше δ^*. Построим квадраты Q_i, центры которых находятся в точках разбиения кривой $\overline{L}_i$, со сторонами длины δ^*, параллельными осям Ox и Oy.

3°. С помощью квадратов $\overline{Q}_i$ и Q_i построим требуемое разбиение области D.

1) Удалим из D части, общие D и квадратам $\overline{Q}_i$. Оставшуюся часть D обозначим через $\overline{D}_\varepsilon$, а границу $\overline{D}_\varepsilon$ — через $\overline{L}_\varepsilon$. Граница $\overline{L}_\varepsilon$ состоит из кривых $\overline{L}_i$ и отрезков прямых, параллельных координатным осям.

2) Обозначим через $\widetilde{Q}_i$ общую часть квадрата Q_i и области $\overline{D}_\varepsilon$. Области $\widetilde{Q}_i$ разбивают область $\overline{D}_\varepsilon$ на односвязные части $\overline{D}_i$ [1]), граница каждой из которых состоит из прямолинейных отрезков, параллельных координатным осям и, быть может, одного криволинейного отрезка, содержащегося в одной из кривых $\overline{L}_i$ и имеющего длину меньше δ. Так как указанный криволинейный

[1]) Область D называется односвязной, если любая кусочно-гладкая, несамопересекающаяся замкнутая кривая, расположенная в D, ограничивает область, все точки которой принадлежат D.

отрезок проецируется однозначно на одну из координатных осей (длина каждого такого отрезка меньше $\delta^* < \lambda$, а в этом случае, согласно следствию 1 из леммы 1, этот отрезок однозначно проецируется на одну из координатных осей), то, *очевидно, любая область* $\overline{D}_i$ *может быть разбита прямыми, параллельными одной из координатных осей на конечное число частей* D_k, *каждая из которых представляет собой либо прямоугольник, либо криволинейную трапецию* [1]), быть может, выродившуюся в криволинейный треугольник.

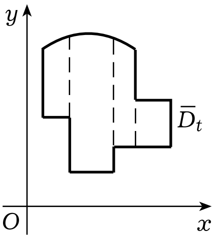


Рис. 7.5

На рис.7.5 показана одна из областей $\overline{D}_i$. Штриховыми линиями показано разбиение $\overline{D}_i$ на части D_k.

6. Доказательство теоремы 7.1. Мы только что убедились, что после удаления из D частей, находящихся в квадратах $\overline{Q}_i$, получается область $\overline{D}_\varepsilon$ [2]) с границей L_ε, которая может быть разбита на конечное число специального вида областей D_k.

Докажем, что для области $\overline{D}_\varepsilon$ справедлива формула Грина. Согласно следствию в п. 3 данного параграфа для этого достаточно убедиться, что каждая из областей D_k по отношению к некоторой специально избранной декартовой системе координат будет областью типа K.

Если D_k — прямоугольник, то требуемой системой является, например, система координат, одна из осей которой параллельна диагонали этого прямоугольника. Пусть D_k является криволинейной трапецией или криволинейным треугольником. Из способа построения областей D_k следует, что кривая сторона границы D_k удовлетворяет условиям леммы 1 п. 4 этого параграфа и поэтому, согласно следствию 2 из этой леммы, однозначно проецируется на обе координатные оси специально выбранной декартовой прямоугольной системы координат. Так как малые изменения выбора этой системы не нарушают указанного свойства, то, очевидно, мы можем выбрать такую систему координат, на обе оси которой однозначно проецируются и прямолинейные части границы D_k. По отношению к этой системе координат D_k будет областью типа K. Итак, для области D_ε справедлива

[1]) Напомним, что криволинейной трапецией называется фигура, основания которой параллельны одной из координатных осей, одна из боковых сторон параллельная другой координатной оси и на эту последнюю ось однозначно проецируется кривая боковая сторона трапеции.

[2]) Напомним, что квадраты $\overline{Q}_i$ выбираются по любому данному положительному ε так, чтобы сумма их площадей была меньше ε и сумма длин частей границы L, расположенных в $\overline{Q}_i$, была также меньше ε. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ области $\overline{D}_\varepsilon$ исчерпывают область D.

формула Грина

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{L_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy. \qquad (7.10)$$

Из способа построения областей D_ε следует, что при $\varepsilon \to 0$ левая и правая части формулы (7.10) имеют соответственно пределы $\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ и $\int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy$. Теорема 7.1 доказана.

§ 2. Формула Стокса [1]

1. Формулировка основной теоремы. Пусть S — ограниченная, полная, кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей Γ [2].

Окрестностью поверхности S будем называть любое открытое множество Ω, содержащее S.

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 7.3. *Пусть в некоторой окрестности поверхности S функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные, производные первого порядка. Тогда имеет место следующее соотношение*:

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (7.11)$$

называемое формулой Стокса. При этом стоящий в правой части интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы Γ, на которых указано такое направление обхода, при котором, с учетом выбора стороны поверхности, поверхность S остается слева.

Используя замечание 2 п. 2 § 3 гл. 4 о форме записи поверхностных интегралов второго рода и обозначения X, Y, Z для углов, которые образуют нормаль к поверхности с осями координат, можно переписать формулу Стокса (7.11) следующим образом:

$$\iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos Z\right] d\sigma = \oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (7.12)$$

[1] Дж. Г. Стокс — известный английский физик и математик (1819–1903).

[2] Отметим, что замкнутая поверхность не имеет границы.

В следующих пунктах мы докажем ряд предложений, которые понадобятся нам для доказательства сформулированной теоремы.

2. Доказательство формулы Стокса для гладкой поверхности, однозначно проецирующейся на три координатные плоскости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.4. *Пусть S — ограниченная, полная, гладкая, двусторонняя, односвязная поверхность с кусочно-гладкой границей Γ. Будем считать, что S однозначно проецируется на каждую из координатных плоскостей системы $Oxyz$. Пусть в некоторой окрестности S заданы функции P, Q и R, непрерывные в этой окрестности и имеющие в ней непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива формула Стокса* (7.11).

Доказательство. Для доказательства обратимся к форме (7.12) записи формулы Стокса. При этом будем считать, что единичные векторы нормали образуют острые углы с осями координат.

Очевидно, теорема будет доказана, если будут доказаны равенства

$$\begin{gathered}\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right)d\sigma = \oint\limits_\Gamma P\,dx,\\ \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos X\right)d\sigma = \oint\limits_\Gamma Q\,dy,\\ \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos X - \frac{\partial R}{\partial x}\cos Y\right)d\sigma = \oint\limits_\Gamma R\,dz.\end{gathered} \tag{7.13}$$

Поскольку соотношения (7.13) доказываются однотипно, остановимся на доказательстве первого из них.

Обозначим через I интеграл в левой части первого из равенств (7.13):

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right)d\sigma. \tag{7.14}$$

По условию поверхность S является гладкой и однозначно проецируется на плоскость Oxy. Поэтому S представляет собой график дифференцируемой функции $z = z(x, y)$. В этом случае с учетом ориентации единичных нормалей к S $\cos Y$ и $\cos Z$ могут быть найдены по формулам

$$\cos Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{7.15}$$

где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

С помощью формул (7.15) соотношение (7.14) может быть переписано следующим образом:

$$I = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cos Z\, d\sigma. \tag{7.16}$$

Так как на поверхности S значения функции $P(x,\, y,\, z)$ равны $P(x,\, y,\, z(x,\, y))$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] = \frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Поэтому соотношение (7.16) примет вид

$$I = -\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] \cos Z\, d\sigma. \tag{7.17}$$

Пусть D — проекция на плоскость Oxy поверхности S, а L — проекция на эту плоскость границы Γ этой поверхности. Очевидно, поверхностный интеграл в правой части (7.17) равен двойному интегралу $\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))]\, dx\, dy$ (см. замечание 2 п. 2 § 3 гл. 5), и поэтому

$$I = -\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))]\, dx\, dy. \tag{7.18}$$

Применяя к интегралу в правой части (7.18) формулу Грина, получим

$$\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))]\, dx\, dy = -\oint\limits_L P(x,\, y,\, z(x,\, y))\, dx. \tag{7.19}$$

Пусть точка $M(x,y,z)$ кривой Γ проецируется в точку $N(x,y)$ кривой L. Тогда, очевидно, значение функции $P(x,y,z)$ в точке M кривой Γ совпадает со значением функции $P(x,\, y,\, z(x,\, y))$ в точке N кривой L. Поэтому справедливо равенство

$$\oint\limits_L P(x,\, y,\, z(x,\, y))\, dx = \oint\limits_\Gamma P(x,\, y,\, z)\, dx. \tag{7.20}$$

Очевидно, из соотношений (7.14), (7.18)–(7.20) вытекает первое из равенств (7.13). Доказательство второго и третьего из этих равенств проводится аналогично, только при этом нужно рассматривать проекции S на плоскости Oyz и Oxz соответственно. Теорема доказана.

3. Инвариантная запись формулы Стокса. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности Ω поверхности S. Определим в Ω векторное поле $\boldsymbol{p}$, координаты которого в данной декартовой прямоугольной системе координат равны P, Q, R. Очевидно, при условиях, наложенных на функции P, Q, R, поле $\boldsymbol{p}$ будет непрерывным и дифференцируемым в Ω. Найдем ротор этого поля. Используя выражение для $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \qquad (7.21)$$

Выберем на поверхности S определенную сторону, т. е. укажем на S непрерывное поле единичных нормалей $\boldsymbol{n}$. Обращаясь к выражению (7.21) для $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ и используя стандартное обозначение $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ для координат единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности S, получим

$$\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z. \qquad (7.22)$$

Из соотношения (7.22) следует, что интеграл, стоящий в левой части формулы Стокса (7.12), может быть записан в виде

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}\,d\sigma. \qquad (7.23)$$

Итак, находящийся в левой части формулы (7.12) интеграл после выбора определенной стороны поверхности можно рассматривать как поверхностный интеграл первого рода (7.23) от функции $\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$, заданной на поверхности S. Так как скалярное произведение $\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ и элемент площади $d\sigma$ поверхности S не зависят от выбора декартовой прямоугольной системы координат в пространстве, то при переходе к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ левая часть формулы (7.12) не изменит своего значения и формы, т. е. эта левая часть *инвариантна* относительно выбора декартовой прямоугольной системы координат в пространстве.

Обратимся теперь к интегралу

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (7.24)$$

находящемуся в правой части формулы Стокса.

Убедимся, что *этот интеграл также имеет инвариантный характер* — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.

Пусть $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной в точках границы Γ поверхности S, направление которого согласовано с направлением обхода на Γ; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты вектора $\boldsymbol{t}$. Выберем за параметр на Γ длину дуги l, причем на каждой связной компоненте границы возрастание параметра согласовано с направлением обхода на этой компоненте. При условиях, наложенных на Γ, функция $\boldsymbol{t}(l)$ будет кусочно-непрерывной. Так как поле $\boldsymbol{p}$ непрерывно на Γ, то его координаты представляют собой на Γ непрерывные функции от l. Заметим, что после выбора направления обхода и параметра на кривой Γ криволинейный интеграл второго рода (7.24) преобразуется в криволинейный интеграл первого рода. При этом P, Q и R вычисляются в точках Γ, а $dx = \cos\alpha\, dl$, $dy = \cos\beta\, dl$, $dz = \cos\gamma\, dl$. Таким образом,

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.25}$$

Соотношения (7.25) показывают, что интеграл (7.24) действительно имеет инвариантный характер: скалярное произведение $\boldsymbol{pt}$ — инвариант, параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат.

В новой декартовой системе координат $Ox'y'z'$ имеем

$$\boldsymbol{pt}\,dl = (P'\cos\alpha' + Q'\cos\beta' + R'\cos\gamma')\,dl = P'\,dx' + Q'\,dy' + R'\,dz'.$$

Поэтому

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = P'\,dx' + Q'\,dy' + R'\,dz'.$$

Отметим, что интеграл

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl$$

обычно называется *циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *по кривой* Γ.

Проведенные рассуждения позволяют придать формуле Стокса (7.11) (или (7.12)) следующую инвариантную форму:

$$\iint_S \boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}\,d\sigma = \oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.26}$$

4. Доказательство теоремы 7.3. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть S — ограниченная, полная, двусторонняя, гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей Γ* [1]*. Существует такое $\delta > 0$, что любая связная часть поверхности S, размеры которой меньше δ* [2]*, однозначно проецируется на*

[1] Отметим, что замкнутая поверхность не имеет границы.

[2] Такая часть поверхности может быть расположена в сфере радиуса δ.

каждую из координатных плоскостей некоторой декартовой системы координат.

Доказательство. Убедимся сначала, что некоторая окрестность каждой точки M такой поверхности однозначно проецируется на каждую из координатных плоскостей некоторой декартовой системы координат.

Пусть $\boldsymbol{n}_M$ — вектор единичной нормали поверхности в точке M. Выберем декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{n}_M$ составлял острые углы с осями Ox, Oy и Oz. Тогда, очевидно, в этой системе координат определители

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

отличны от нуля для значений u и v, определяющих точку M, и в силу гладкости S отличны от нуля в некоторой окрестности точки (u, v) (эти определители пропорциональны координатам единичного вектора нормали к поверхности). Обращаясь к доказательству теоремы 5.1 и к замечанию к этой теореме (см. п. 2 § 1 гл. 5), мы убедимся, что некоторая окрестность точки однозначно проецируется на каждую из координатных плоскостей выбранной системы координат $Oxyz$.

Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда для каждого $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, можно указать часть S_n поверхности S, размеры которой меньше δ и которая не проецируется однозначно на три координатные плоскости любой декартовой системы координат. Выберем в каждой части S_n точку M_n, затем из последовательности $\{M_n\}$ выберем подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке M поверхности S. Рассмотрим ту окрестность точки M, которая однозначно проецируется на каждую из координатных плоскостей некоторой декартовой системы координат $Oxyz$. Эта окрестность содержит одну из частей S_n, которая также будет однозначно проецироваться на три координатные плоскости системы $Oxyz$. А это противоречит выбору частей S_n. Таким образом, предположение о несправедливости утверждения леммы ведет к противоречию. Лемма доказана.

Перейдем теперь к *доказательству теоремы* 7.3. Разобьем S кусочно-гладкими кривыми на конечное число гладких частей S_i, размер каждой из которых меньшие δ, указанного в только что доказанной лемме. При этом к числу кривых, разбивающих S, присоединим и ребра поверхности. Так как часть S_i проецируется однозначно на три координатные плоскости некоторой декартовой системы координат, то в силу инвариантности формулы Стокса (см. п. 3 этого параграфа) и выводов п. 2 этого параграфа формула Стокса верна для части S_i. Просуммируем теперь левые и правые части формул Стокса для частей S_i. Очевидно, сумма левых частей этих формул представляет собой двойной интеграл $\iint\limits_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}\, d\sigma$, а в правой части будет стоять сумма интегралов $\oint\limits_{\Gamma_i} \boldsymbol{pt}\, dl$ по границам Γ_i частей S_i. Ясно, что интегралы по общим участкам границы частей S_i сократятся, ибо эти участки обходятся в противоположных направлениях (для пояснения можно обратиться к рис. 7.6). Поэтому указанная выше сумма криволинейных интегралов равна криволинейному интегралу по границе Γ поверхности S. Из наших рассуждений вытекает справедливость формулы

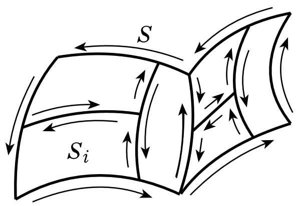


Рис. 7.6

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}\, d\sigma = \oint\limits_\Gamma \boldsymbol{pt}\, dl,$$

которая и является формулой Стокса. Теорема 7.3 доказана.

§ 3. Формула Остроградского

1. Формулировка основной теоремы. Пусть V — конечная, вообще говоря, многосвязная область в пространстве $Oxyz$ с кусочно-гладкой границей S [1]. Область V с присоединенной границей будем обозначать через $\overline{V}$. Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 7.5. *Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны в $\overline{V}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в V. Если существуют несобственные интегралы по области V от каждой из частных производных функций P, Q и R, то справедливо соотношение*

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy, \quad (7.27)$$

*называемое **формулой Остроградского**. При этом стоящий в правой части интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы S, на которых выбрана внешняя по отношению к V сторона.*

[1] Граница S называется кусочно-гладкой, если она составлена из конечного числа гладких поверхностей, примыкающих друг к другу по гладким кривым — ребрам поверхности. Если граница S состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких поверхностей S_i, то S_i называют *связными компонентами* S, а связную область V — *многосвязной*.

Мы ограничимся доказательством формулы Остроградского лишь для специального класса областей.

Отметим, что теорема 7.5 может быть доказана путем обобщения метода, который был использован в § 1 этой главы при доказательстве формулы Грина.

2. Доказательство формулы Остроградского для специального класса областей. Односвязную конечную область V с кусочно-гладкой границей S будем называть *областью типа K*, если каждая прямая, параллельная любой координатной оси, пересекает границу S области V не более чем в двух точках.

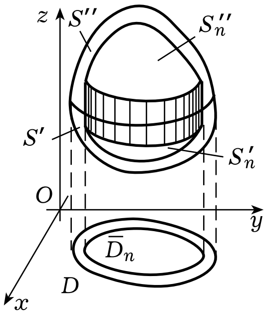


Рис. 7.7

Для области типа К будут использованы специальные системы исчерпывающих областей $\{\overline{V}_n\}$. Опишем построение такого типа систем.

Пусть область D на плоскости Oxy представляет собой проекцию на эту плоскость области V. Через граничные точки области D проведем прямые, параллельные оси Oz. Каждая из этих прямых пересекается с границей S области V лишь в одной точке. Множество этих точек разделяет S на две части S' и S'' (рис. 7.7), которые представляют собой графики непрерывных в $\overline{D}$ и кусочно-дифференцируемых в D функций $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$. Отметим, что $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$ (равенство имеет место лишь в точках границы области D).

Рассмотрим произвольную последовательность областей $\{\overline{D}_n\}$, монотонно исчерпывающих область D. Пусть S'_n и S''_n — графики функций $z_1(x, y) + \varepsilon_n$ и $z_2(x, y) - \varepsilon_n$, заданных на $\overline{D}_n$ (число ε_n выбирается столь малым, чтобы поверхности S'_n и S''_n не пересекались).

Границей области $\overline{V}_n$ является поверхность, составленная из поверхностей S'_n и S''_n и части цилиндрической поверхности, с образующими, параллельными оси Oz. При этом направляющей цилиндрической поверхности служит граница области $\overline{D}_n$. Область $\overline{V}_{n+1}$ строится аналогичным образом, только вместо области $\overline{D}_n$ берется область $\overline{D}_{n+1}$ и ε_{n+1} выбирается меньше ε_n. Очевидно, что при $\varepsilon_n \to 0$ система $\{\overline{V}_n\}$ монотонно исчерпывает область V.

Докажем следующее *утверждение*.

Теорема 7.6. *Пусть в области V типа K функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ удовлетворяют условиям теоремы* 7.5. *Тогда для этой области и для функций P, Q и R справедлива формула Остроградского.*

Доказательство. Очевидно, достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S P\,dy\,dz, \\ \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S Q\,dz\,dx, \\ \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S R\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Так как эти равенства доказываются однотипно, мы проведем доказательство для третьего из них.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\overline{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{7.29}$$

Для области $\overline{V}_n$ и для подынтегральной функции $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ в интеграле (7.29) выполняются все условия, при которых действует формула повторного интегрирования. По этой формуле имеем

$$\begin{gathered} \iiint\limits_{\overline{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\overline{D}_n} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)+\varepsilon_n}^{z_2(x,y)-\varepsilon_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \\ = \iint\limits_{\overline{D}_n} R(x,\,y,\,z_2(x,\,y)-\varepsilon_n)\,dx\,dy - \iint\limits_{\overline{D}_n} R(x,\,y,\,z_1(x,\,y)+\varepsilon_n)\,dx\,dy. \end{gathered} \tag{7.30}$$

Левая часть соотношения (7.30) при $n \to \infty$ имеет предел, равный $\iiint\limits_V \dfrac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$. В силу равномерной непрерывности функции $R(x,\,y,\,z)$ в замкнутой области $\overline{V}$ каждое из слагаемых в правой части (7.30) имеет при $n \to \infty$ предел, равный для первого слагаемого $\iint\limits_D R(x,\,y,\,z_2(x,\,y))\,dx\,dy$ и для второго слагаемого $-\iint\limits_D R(x,\,y,\,z_1(x,\,y))\,dx\,dy$. Первый из только что указанных интегралов представляет собой при выборе внешней стороны поверхности S интеграл $\iint\limits_{S''} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy$, а второй (с учетом стоящего перед ним знака «минус») интеграл $\iint\limits_{S'} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy$.

Итак, правая часть соотношений (7.30) имеет при $n \to \infty$ предел, равный $\iint\limits_S R(x,\, y,\, z)\, dx\, dy$. Следовательно, третья из формул (7.28) доказана.

Доказательство первой и второй из формул (7.28) проводится аналогично (нужно рассмотреть проекции V на плоскости Oyz и Oxz соответственно и повторить проведенные рассуждения). Теорема доказана.

3. Инвариантная запись формулы Остроградского. Пусть функции P, Q и R удовлетворяют условиям теоремы 7.5 в конечной связной области V с кусочно-гладкой границей S. Определим в V векторное поле $\boldsymbol{p}$, координаты которого в данной декартовой системе координат $Oxyz$ равны P, Q, R. Очевидно, при условиях, наложенных на эти функции, поле $\boldsymbol{p}$ будет непрерывным в $\overline{V}$ и дифференцируемым в V.

Найдем дивергенцию поля $\boldsymbol{p}$. Используя выражение для дивергенции поля $\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

З а м е ч а н и е. Перейдем к новой декартовой системе координат в пространстве. Пусть $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ — ортонормированный базис, связанный с этой системой, а P', Q', R' — координаты поля $\boldsymbol{p}$ в этом базисе. Очевидно, функции P', Q', R' непрерывны в $\overline{V}$ и дифференцируемы в V (эти функции представляют собой линейные комбинации функций P, Q, R).

Так как в новой системе координат

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'},$$

то в силу инвариантности дивергенции справедливо равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'}.$$

Таким образом, если P, Q, R рассматривать как координаты векторного поля $\boldsymbol{p}$, то выражение $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ не меняет ни значения, ни формы при переходе к новой декартовой прямоугольной системе координат, т. е. представляет собой инвариант.

Мы можем поэтому сделать следующий важный вывод: *интеграл, находящийся в левой части формулы Остроградского* (7.27), *имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.* Действительно, при таком преобразовании координат абсолютное знамение якобиана преобразования равно единице. Согласно же замечанию подынтегральное выражение не меняет ни значения, ни формы при таком преобразовании координат.

Обратимся теперь к интегралу

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{7.31}$$

находящемуся в правой части формулы Остроградского (7.27). Убедимся, что *этот интеграл также имеет инвариантный характер — его значение и форма подынтегрального выражения не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.*

Используя замечание 2 п. 2 § 3 гл. 5 о форме записи поверхностного интеграла второго рода и обозначения X, Y, Z для углов, которые образует нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности с осями координат, можно переписать интеграл (7.31) следующим образом:

$$\iint\limits_S (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma. \tag{7.32}$$

Подынтегральное выражение в интеграле (7.32) представляет собой скалярное произведение $\boldsymbol{np}$, и поэтому интеграл (7.32) (или, что то же, интеграл (7.31)) может быть записан в следующем *инвариантном виде*:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{np}\,d\sigma.$$

Отметим, что этот последний интеграл обычно называется *потоком векторного поля* $\boldsymbol{p}$ через поверхность S.

Обращаясь к инвариантной форме записи интеграла (7.31), мы видим, что в новой системе декартовых координат этот интеграл имеет вид

$$\iint\limits_S P'\,dy'\,dz' + Q'\,dz'\,dx' + R'\,dx'\,dy'.$$

Проведенные в этом пункте рассуждения позволяют записать формулу Остроградского (7.27) в следующем инвариантном виде:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{p}dv = \iint\limits_S \boldsymbol{np}\,d\sigma. \tag{7.33}$$

В этой форме через dv обозначен элемент объема области V.

Из теоремы 7.6 и выводов этого пункта мы можем извлечь важное следствие.

Следствие. *Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ удовлетворяют условиям теоремы* 7.5 *в конечной области V с кусочно-гладкой границей S. Если область V может быть разбита на конечное число областей V_k с кусочно-гладкими границами S_k и при этом каждая из V_k представляет собой область типа K по отношению к некоторой декартовой системе координат, то для области V и функций P, Q и R справедлива формула Остроградского.*

Справедливость следствия вытекает из следующих рассуждений. Ясно, что формула Остроградского справедлива для каждой из областей V_k. Это следует из инвариантного характера формулы и из теоремы 7.6 (в некоторой системе координат V_k будет областью типа K). Далее очевидно, что сумма интегралов $\iiint\limits_{V_k}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$ из левых частей формул Остроградского для областей V_k представляет собой интеграл $\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$. Сумма же поверхностных интегралов $\iint\limits_{S_k} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$ в правых частях формул Остроградского по границам S_k областей V_k даст интеграл $\iint\limits_{S} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$, ибо интегралы по общим участкам границы областей V_k сократятся — эти участки в соседних областях V_k ориентированы противоположным образом.

§ 4. Некоторые приложения формул Грина, Стокса и Остроградского

1. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл. Пусть D — конечная плоская связная область с кусочно-гладкой границей L. Справедливо следующее *утверждение.*

Площадь σ области D может быть вычислена по формуле

$$\sigma=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy-y\,dx, \tag{7.34}$$

в которой криволинейный интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы L, причем на каждой из этих компонент указано такое направление обхода, при котором область D остается слева.

Для доказательства утверждения рассмотрим в D функции

$$P(x,\,y)=-y,\quad Q(x,\,y)=x.$$

Очевидно, эти функции удовлетворяют в D всем условиям, при которых справедлива формула Грина (7.1). По этой формуле имеем

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_{L}(-y)\,dx+(x)\,dy.$$

Двойной интеграл в последней формуле равен 2σ, а криволинейный интеграл равен $\oint\limits_L x\,dy - y\,dx$. Таким образом, формула (7.34) доказана.

2. Выражение объема через поверхностный интеграл. Пусть V — конечная связная область в пространстве с кусочно-гладкой границей S.

Справедливо следующее *утверждение.*

Объем v области V может быть вычислен по формуле

$$v = \frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy, \tag{7.35}$$

в которой поверхностный интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы S, причем на каждой из этих компонент выбрана внешняя по отношению к V сторона.

Для доказательства утверждения рассмотрим в V функции

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = y, \quad R(x, y, z) = z.$$

Очевидно, эти функции удовлетворяют условиям, при которых справедлива формула Остроградского. По этой формуле имеем

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

Тройной интеграл в последней формуле равен 3σ. Поэтому из последней формулы вытекает соотношение (7.35). Утверждение доказано.

3. Условия, при которых дифференциальная форма $\boldsymbol{P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy}$ представляет собой полный дифференциал. В этом пункте мы укажем ряд условий, при выполнении которых дифференциальная форма $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, заданная в связной области D представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 7.7. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

1. *Для любой замкнутой (возможно самопересекающейся) кусочно-гладкой кривой L, расположенной в D,*

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

2. *Для любых двух точек A и B области D значение интеграла*

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

не зависит от кусочно-гладкой кривой $\overset{\smile}{AB}$, *соединяющей точки* A *и* B *и расположенной в* D.

3. *Дифференциальная форма* $P(x,\,y)\,dx+Q(x,\,y)\,dy$ *представляет собой полный дифференциал. Иными словами, в* D *задана такая функция* $u(M)=u(x,\,y)$, *что*

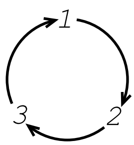
$$du = P\,dx + Q\,dy. \tag{7.36}$$

В этом случае для любых точек A *и* B *из области* D *и для произвольной кусочно-гладкой кривой* AB, *соединяющей эти точки и расположенной в* D,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{7.37}$$

Таким образом, выполнение каждого из условий 1, 2, 3 *необходимо и достаточно для выполнения каждого из двух остальных.*

Доказательство. Проведем доказательство по схеме:



т. е. докажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, из третьего — первое. Очевидно, что при этом будет доказана эквивалентность условий 1, 2, 3.

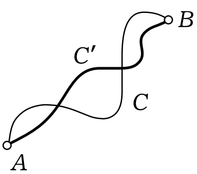


Рис. 7.8

Первый шаг: $1 \to 2$. Пусть A и B — произвольные фиксированные точки области D, $\overset{\smile}{ACB}$ и $\overset{\smile}{AC'B}$ — любые две кусочно-гладкие кривые, соединяющие указанные точки и расположенные в D (рис. 7.8). Объединение этих кривых представляет собой кусочно-гладкую (возможно самопересекающуюся) замкнутую кривую $L = \overset{\smile}{ACB} + \overset{\smile}{BC'A}$, расположенную в D. Так как условие 1 предполагается выполненным, то

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Из этого равенства, учитывая, что $L = \overset{\smile}{ACB} + \overset{\smile}{BC'A}$ и что при изменении направления обхода криволинейный интеграл меняет знак, получим соотношение

$$\int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AC'B}} P\,dx + Q\,dy.$$

Следовательно, условие 2 выполняется.

В т о р о й   ш а г: $2 \to 3$. Пусть M_0 — фиксированная точка, а $M(x, y)$ — произвольная точка области D, $\overset{\smile}{M_0M}$ — любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки M_0 и M и расположенная в D.

В силу условия 2 выражение

$$u(M) = \int\limits_{\overset{\smile}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy \tag{7.38}$$

не зависит от кривой $\overset{\smile}{M_0M}$ и поэтому представляет собой функцию, заданную в D. Докажем, что в каждой точке M области D существуют частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{7.39}$$

Так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в D, то из последних соотношений следует дифференцируемость функции u и равенство (7.36). Тем самым будет доказан второй шаг $2 \to 3$.

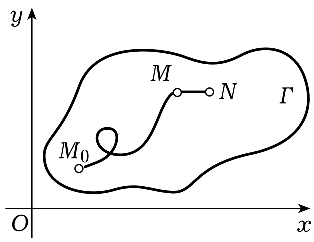


Рис. 7.9

Доказательство существования частных производных функции $u(x, y)$ и равенств (7.39) проводится одновременно. Докажем, например, существование $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и первое из равенств (7.39). Фиксируем точку $M(x, y)$. Придадим аргументу x настолько малое приращение Δx, чтобы отрезок $\overline{MN}$, соединяющий точки $M(x, y)$ и $N(x + \Delta x, y)$, располагался в D [1] (рис. 7.9). Имеем

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \\ = \int\limits_{\overset{\smile}{M_0MN}} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\overset{\smile}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overline{MN}} P\,dx + Q\,dy.$$

На отрезке $\overline{MN}$ величина y имеет постоянное значение, и поэтому $\int\limits_{\overline{MN}} Q\,dy = 0$. Следовательно,

$$\Delta u = \int\limits_{\overline{MN}} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)dt.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta u = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

[1] Так как D — область, т. е. множество, состоящее лишь из внутренних точек, то такой выбор Δx возможен.

откуда

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x,\, y), \qquad 0 < \theta < 1.$$

В силу непрерывности $P(x,\, y)$, правая часть последнего равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный значению этой функции в точке $M(x,\, y)$. Следовательно, и левая часть имеет тот же предел, равный по определению частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Таким образом, существование частной производной и справедливость первого равенства (7.39) доказана. Существование частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и справедливость второго равенства (7.39) доказывается аналогично.

Докажем теперь соотношение (7.37). Пусть A и B — любые точки из D, $\overset{\frown}{AB}$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая эти точки и расположенная в D. Эта кривая определяется параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Используя правило вычисления криволинейных интегралов, получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P(x(t),\, y(t))x'(t) + Q(x(t),\, y(t))y'(t)\}dt =$$

$$= \int\limits_a^b u'_t dt = u(x(b),\, y(b)) - u(x(a),\, y(a)) = u(B) - u(A).$$

Таким образом, формула (7.37) доказана.

Третий шаг: $3 \to 1$. Это утверждение следует из формулы (7.37). В самом деле, для замкнутой кривой L начальная точка совпадает с конечной, и поэтому по формуле (7.37) имеем

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Мы отмечали, что условия 1, 2, 3 теоремы 7.7 равносильны, и поэтому, в частности, условие 3 представляет собой необходимое и достаточное условие, при котором криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ не зависит от выбора кривой L, соединяющей любые данные точки A и B области D.

Для односвязных областей [1] мы укажем удобное для приложений необходимое и достаточное условие того, чтобы диффе-

[1] Напомним, что область D называется односвязной, если любая кусочно-гладкая, несамопересекающаяся замкнутая кривая, расположенная в D, ограничивает область, все точки которой принадлежат D.

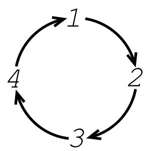
ренциальная форма $P\,dx + Q\,dy$ была полным дифференциалом некоторой функции.

Естественно, это условие будет необходимым и достаточным для независимости интеграла $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ от выбора кривой L, соединяющей любые данные точки A и B области D.

Теорема 7.8. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области D. Тогда каждое из трех условий 1, 2, 3 теоремы 7.7 эквивалентно следующему (четвертому) условию*

4. $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в } D.$$

Доказательство. Применим схему:



Мы уже доказали утверждения $1 \to 2 \to 3$. Докажем, что $3 \to 4$ и $4 \to 1$.

Первый шаг: $3 \to 4$. Пусть в области D существует функция $u(x, y)$ такая, что $du = P\,dx + Q\,dy$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Таким образом, условие 4 выполнено. Отметим, что для доказательства шага $3 \to 4$ не требуется условия односвязности области D.

Второй шаг: $4 \to 1$. Пусть выполнено условие 4. Тогда в каждой точке области D справедливо равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{7.40}$$

Если L — расположенная в D замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений, ограничивающая область D^* (область D односвязна, и поэтому каждая точка области D^* принадлежит D), то, применяя формулу Грина к области D^* и используя (7.40), получим

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D^*} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 0.$$

В случае, когда L имеет конечное число точек самопересечения и является ломаной с конечным числом звеньев, то для каждой петли $\widetilde{L}$ кривой L справедливо равенство $\oint\limits_{\widetilde{L}} P\,dx+Q\,dy =$ $= 0$, и поэтому для L справедливо равенство

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Пусть L — произвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая. Выберем для L число $\lambda > 0$ так, как это указано в лемме 1. Разобьем L на части L_k длины меньше λ (к точкам разбиения относятся и угловые точки кривой L, см. рис. 7.10). Согласно упомянутой лемме касательные в концах M_k и N_k каждой части L_k составляют угол, меньший $\pi/8$. Тогда, очевидно, для достаточно малого λ криволинейный треугольник $M_kN_kC_k$ (этот треугольник заштрихован на рис. 7.10), в котором M_kC_k составляет угол меньший $\pi/8$ с касательной в M_k, а N_kC_k — нормаль к L в точке N_k, целиком расположен в D и представляет собой замкнутую кусочно-гладкую кривую без самопересечений. Поэтому

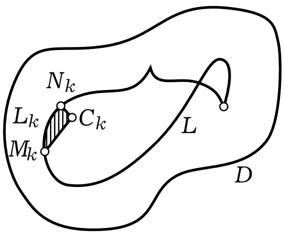


Рис. 7.10

$$\oint\limits_{M_kN_kC_k} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Отсюда следует, что криволинейный интеграл по дуге $\overgroup{M_kN_k}$ равен криволинейному интегралу по ломаной $M_kC_kN_k$:

$$\int\limits_{\smile M_kN_k} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M_kN_kC_k} P\,dx + Q\,dy.$$

Проводя аналогичные рассуждения для любой части L_k, мы получим в результате расположенную в D замкнутую ломаную $\widehat{L}$, для которой

$$\oint\limits_{\widehat{L}} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy. \tag{7.41}$$

Выше мы отмечали, что дли замкнутой, расположенной в D ломаной $\widehat{L}$, интеграл $\oint\limits_{\widehat{L}} P\,dx + Q\,dy = 0$. Отсюда и из (7.41) получаем

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Теорема доказана.

4. Потенциальные и соленоидальные векторные поля. Нами были ранее (см. п. 3 § 1, п. 3 § 2 и п. 3 § 3) введены понятия циркуляции и потока векторного поля. Напомним эти понятия.

Пусть в некоторой области D задано непрерывное векторное поле $\boldsymbol{p}(M) = \boldsymbol{p}(x, y, z)$.

Определение 1. *Циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *по замкнутой кусочно-гладкой кривой* L, *расположенной в области* D, *называется интеграл*

$$\oint_L \boldsymbol{pt}\, dl,$$

в котором $\boldsymbol{t}$ — *единичный вектор касательной к* L, *а* dl — *дифференциал длины дуги кривой* L.

Определение 2. *Потоком векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *через ориентированную кусочно-гладкую поверхность* S, *расположенную в области* D, *называется интеграл*

$$\iint_S \boldsymbol{pn}\, d\sigma,$$

в котором $\boldsymbol{n}$ — *единичный вектор нормали к поверхности* S, *указывающий ее ориентацию, а* $d\sigma$ — *элемент площади поверхности* S.

Введем понятия *потенциального* и *соленоидального* векторного поля.

Определение 3. *Векторное поле* $\boldsymbol{p}$ *называется потенциальным в области* D, *если циркуляция этого поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, расположенной в области* D, *равна нулю.*

Определение 4. *Векторное поле* $\boldsymbol{p}$ *называется соленоидальним в области* D, *если поток этого поля через любую кусочно-гладкую несамопересекающуюся поверхность, расположенную в* D *и представляющую собой границу некоторой ограниченной подобласти области* D, *равен нулю.*

Для непрерывно дифференцируемых векторных полей и специального класса областей мы докажем теорему, содержащую необходимые и достаточные условия потенциальности поля.

Предварительно мы введем понятие *трехмерной поверхностно-односвязной области.*

Трехмерная область D называется *поверхностно-односвязной*, если для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой L, расположенной в D, можно указать такую ориентируемую кусочно-гладкую поверхность S, расположенную в D, границей которой является L. Отметим, что для упомянутой поверхности S справедлива формула Стокса.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.9. *Пусть в поверхностно-односвязной области* D *задано непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{p} = \{P, Q, R\}$. *Тогда эквивалентны следующие три условия:*

1. *Векторное поле* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M)$ *является потенциальным.*

2. *В области* D *существует потенциальная функция* $u(M)$, *т. е. такая функция, что* $\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} u$, *или, что то же,*

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

В этом случае для любых точек A *и* B *из области* D *и для произвольной кусочно-гладкой кривой* AB, *соединяющей эти точки и расположенной в* D,

$$\int\limits_{\smile AB} \boldsymbol{pt}\,dl = u(B) - u(A)$$

(*здесь* $\boldsymbol{t}$ — *единичный вектор касательной к кривой* AB, *а* dl — *дифференциал дуги*).

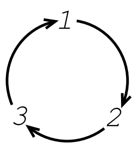
3. *Векторное поле* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M)$ *является безвихревым, т. е.* $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = 0$ *в* D.

Очевидно, условие 3 *эквивалентно соотношениям*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Таким образом, каждое из условий 2 *и* 3 *представляет собой необходимое и достаточное условие потенциальности дифференцируемого векторного поля* $\boldsymbol{p}$.

Доказательство. Применим схему:



Утверждения $1 \to 2$ и $2 \to 3$ справедливы без предположения поверхностной односвязности области D и доказываются в полной аналогии с соответствующими утверждениями теорем 7.7 и 7.8.

Докажем утверждение $3 \to 1$.

Пусть L — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в D. По предположению, D — поверхностно-односвязная область. Поэтому в D существует такая кусочно-гладкая поверхность S, границей которой является L. По формуле Стокса (7.26) имеем

$$\oint\limits_L \boldsymbol{pt}\,dl = \iint\limits_D \boldsymbol{n} \operatorname{rot}\boldsymbol{p}\,d\sigma.$$

Отсюда и из условия $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = 0$ получаем

$$\oint\limits_L \boldsymbol{pt}\,dl = 0,$$

т. е. поле $\boldsymbol{p}$ является потенциальным. Теорема доказана.

В заключение этого пункта докажем теорему о необходимых и достаточных условиях соленоидальности векторного поля в так называемых *объемно-односвязных областях.* При этом пространственная область D называется объемно-односвязной, если любая замкнутая, кусочно-гладкая, несамопересекающаяся ориентируемая поверхность, расположенная в D, является границей области, также расположенной в D.

Теорема 7.10. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{p}$ *было соленоидальным в объемно-односвязной области* D, *необходимо и достаточно*, *чтобы во всех точках* D *выполнялось равенство*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0.$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть M — произвольная точка области D. Рассмотрим любую сферу S с центром в M, целиком расположенную в D. Применяя к шару D_S с границей S формулу Остроградского (7.33), получим

$$\iiint\limits_{D_S} \operatorname{div} \boldsymbol{p} dv = \iint\limits_S \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma. \tag{7.42}$$

Так как поле $\boldsymbol{p}$ является соленоидальным, то $\iint\limits_S \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma = 0$, и поэтому, согласно (7.42), $\iiint\limits_{D_S} \operatorname{div} \boldsymbol{p} dv = 0$. Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, мы убедимся, что в некоторой точке шара D_S $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0$. В силу произвольности этого шара и непрерывности поля $\boldsymbol{p}$ отсюда следует обращение в нуль $\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ в точке M. Таким образом, необходимость условий теоремы доказана.

2) *Достаточность.* Пусть S — любая замкнутая, кусочно-гладкая, несамопересекающаяся, ориентируемая поверхность, расположенная в D. Так как D — объемно односвязная область, то S является границей области D_S, также расположенной в D. Применяя к D_S и векторному полю $\boldsymbol{p}$ формулу Остроградского (7.33), получим соотношение (7.42), из которого и из условия $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = 0$ следует соотношение

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\, d\sigma = 0.$$

Так как S — произвольная замкнутая, кусочно-гладкая, несамопересекающаяся, ориентируемая поверхность, расположенная в D, то последнее равенство, согласно определению, означает соленоидальность поля $\boldsymbol{p}$ в D. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Знакопеременные полилинейные формы

1. Линейные формы. Пусть V — произвольное n-мерное векторное пространство, элементы которого будем обозначать символами $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, ... Предметом нашего изучения будут функции, сопоставляющие каждому элементу $\boldsymbol{\xi} \in V$ некоторое вещественное число.

Определение 1. *Функция $a(\boldsymbol{\xi})$ называется* л и н е й н о й ф о р м о й, *если для любых $\boldsymbol{\xi} \in V$, $\boldsymbol{\eta} \in V$ и любого вещественного числа λ выполняются равенства*

1) $a(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) = a(\boldsymbol{\xi}) + a(\boldsymbol{\eta})$,

2) $a(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda a(\boldsymbol{\xi})$.

Определение 2. *Суммой двух линейных форм a и b назовем линейную форму c, которая каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in V$ сопоставляет число*

$$c(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi}) + b(\boldsymbol{\xi}).$$

Произведением линейной формы a на вещественное число λ назовем линейную форму b, которая каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in V$ сопоставляет число

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \lambda a(\boldsymbol{\xi}).$$

Таким образом, множество всех линейных форм образует векторное пространство, которое мы обозначим символом $L(V)$ [1]. Найдем представление линейной формы a в каком-либо базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$. Пусть

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \boldsymbol{e}_i,$$

где числа ξ^i определяются однозначно. Если обозначить $a_i = a(\boldsymbol{e}_i)$, то искомое представление будет иметь вид

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i.$$

Докажем, что размерность $\dim L(V)$ линейного пространства $L(V)$ равна n. Для этого достаточно указать какой-либо базис в $L(V)$, содержащий точно n элементов, т. е. n линейных форм. Фиксируем произвольный базис $\{e_k\}$ пространства V и рассмотрим следующие линейные формы:

$$e^k(\boldsymbol{\xi}) = \xi^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\{\xi^k\}$ — коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{\xi}$ по элементам базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$. Иначе говоря, линейная форма e^k действует на элементы базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ по правилу

$$e^k(\boldsymbol{e}_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

В таком случае в данном базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$ линейная форма a имеет вид

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(\boldsymbol{\xi}), \qquad a_i = a(\boldsymbol{e}_i),$$

[1] Пространство $L(V)$ обозначают также символом V^* и называют *сопряженным* (или *дуальным*) к V.

т. е. линейные формы $e^1(\boldsymbol{\xi})$, $e^2(\boldsymbol{\xi})$, $\ldots$, $e^n(\boldsymbol{\xi})$ образуют базис в $L(V)$. Этот базис называют *сопряженным* (а также *взаимным* или *дуальным*) к базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

2. Билинейные формы. Обозначим через $V \times V$ множество всех упорядоченных пар $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, где $\boldsymbol{\xi}_1 \in V$, $\boldsymbol{\xi}_2 \in V$, и рассмотрим функции $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, сопоставляющие каждому элементу из $V \times V$ (т. е. каждым двум элементам $\boldsymbol{\xi}_1 \in V$ и $\boldsymbol{\xi}_2 \in V$) некоторое вещественное число.

Определение. *Функция $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ называется билинейной формой, если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой относительно другого аргумента.*

Иначе говоря, для любых векторов $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ и любых вещественных чисел λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 выполняется равенство

$$a(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \mu_1\boldsymbol{\eta}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 + \mu_2\boldsymbol{\eta}_2) = \\ = \lambda_1\lambda_2 a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) + \lambda_1\mu_2 a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + \mu_1\lambda_2 a(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2) + \mu_1\mu_2 a(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2).$$

Множество всех билинейных форм легко превратить в линейное пространство, вводя в нем естественным образом операции сложения и умножения на вещественное число. Полученное пространство билинейных форм обозначим символом $L_2(V)$.

Найдем представление билинейной формы $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ в каком-либо базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ пространства V. Пусть $\boldsymbol{\xi}_k = \sum\limits_{j=1}^n \xi_k^j \boldsymbol{e}_j$, $k = 1, 2$. Положим $a(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$ и получим искомое представление

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_1^i \xi_2^i.$$

Для того чтобы определить размерность пространства $L_2(V)$, образуем с помощью линейных форм $e^i(\boldsymbol{\xi})$, составляющих в $L(V)$ базис, сопряженный к базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$, следующие билинейные формы:

$$e^{ij}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = e^i(\boldsymbol{\xi}_1) e^j(\boldsymbol{\xi}_2).$$

Тогда произвольная билинейная форма будет однозначно представимой в виде

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} e^{ij}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2).$$

Это означает, что формы $e^{ij}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ образуют базис в $L_2(V)$ и, следовательно, размерность $L_2(V)$ равна n^2.

3. Полилинейные формы. Пусть p — натуральное число. Обозначим символом $V^p = V \times V \times \ldots \times V$ множество всех упорядоченных наборов $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ из p векторов, каждый из которых принадлежит V, и рассмотрим функции, сопоставляющие каждому такому набору некоторое вещественное число.

Определение. *Функция $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ называется полилинейной формой степени p (или p-формой), если она является линейной формой по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных.*

Вводя в множестве всех p-форм линейные операции, мы получим линейное пространство, которое обозначим символом $L_p(V)$.

Найдем представление произвольной полилинейной формы $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ в каком-либо базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ пространства V. Обозначим

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}).$$

Тогда, если $\boldsymbol{\xi}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_k^i \boldsymbol{e}_i$, $k = 1, 2, \ldots, p$, то

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = \sum_{i_1=1}^{p} \ldots \sum_{i_p=1}^{p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p}.$$

Если $e^k(\xi)$ есть базис в $L(V)$, сопряженный к $\{\boldsymbol{e}_i\}$, то, очевидно, p-формы

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_p}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = e^{i_1}(\boldsymbol{\xi}_1) e^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \ldots e^{i_p}(\boldsymbol{\xi}_p)$$

образуют базис в $L_p(V)$ и, таким образом, $L_p(V)$ имеет размерность n^p.

4. Знакопеременные полилинейные формы.

Определение. *Полилинейная форма $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ называется знакопеременной, если при перестановке любых двух аргументов она меняет знак* [1]. *Иначе говоря,*

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_i, \ldots, \boldsymbol{\xi}_j, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = -a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_j, \ldots, \boldsymbol{\xi}_i, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Очевидно, множество всех полилинейных знакопеременных форм степени p образует подпространство линейного пространства $L_p(V)$, которое мы обозначим символом $A_p(V)$ [2]. Элементы пространства $A_p(V)$ мы будем обозначать символом $\omega = \omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$.

Заметим, что если $\{\boldsymbol{e}_i\}$ — произвольный базис в V и

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{p} \ldots \sum_{i_p=1}^{p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_p^{i_p},$$

то числа $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ меняют знак при перестановке двух индексов. Это вытекает из того, что

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \omega(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}).$$

Естественно считать, что $A_1(V) = L_1(V)$, а $A_0(V)$ состоит из всех постоянных, т. е. совпадает с числовой прямой.

5. Внешнее произведение знакопеременных форм. Рассмотрим две знакопеременные формы $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$. В этом пункте мы введем основную операцию в теории знакопеременных форм — операцию *внешнего умножения.*

Пусть

$$\omega^p = \omega^p(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p), \qquad \boldsymbol{\eta}_i \in V,$$
$$\omega^q = \omega^q(\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \ldots, \boldsymbol{\zeta}_p), \qquad \boldsymbol{\zeta}_j \in V.$$

Рассмотрим следующую полилинейную форму $a = L_{p+q}(V)$:

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = \omega^p(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \omega^q(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}). \tag{7.43}$$

Эта форма, вообще говоря, не является знакопеременной. Именно, при перестановке аргументов $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_j$, где $1 \leqslant i \leqslant p$ и $p+1 \leqslant j \leqslant p+q$, форма (7.43) может не изменить знака. Этим обстоятельством и вызвана необходимость введения внешнего произведения.

Для того чтобы ввести внешнее произведение, нам понадобятся некоторые факты из теории перестановок.

---

[1] Знакопеременные полилинейные формы называют также *антисимметрическими, кососимметрическими, косыми, внешними.*

[2] Это пространство обозначают также символом $\wedge^p V^*$ и называют p-й внешней степенью пространства V^*.

Напомним, что *перестановкой* чисел $\{1,\, 2,\, \ldots,\, m\}$ называют функцию $\sigma = \sigma(k)$, определенную на этих числах, и отображающую их взаимно однозначно на себя. Множество всех таких перестановок обозначается символом Σ_m. Очевидно, существует всего $m!$ различных перестановок из Σ_m. Для двух перестановок $\sigma \in \Sigma_m$ и $\tau \in \Sigma_m$ естественным образом определяется суперпозиция $\sigma\tau \in \Sigma_m$. Перестановка σ^{-1} называется обратной к σ, если $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$, где ε — тождественная перестановка (т. е. $\varepsilon(k) = k$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$).

Перестановка σ называется *транспозицией*, если она переставляет два числа, оставляя другие на своем месте. Иначе говоря, существует пара чисел i и j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ i \neq j)$ такая, что $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ и $\sigma(k) = k$ для $k \neq i$ и $k \neq j$. Очевидно, если σ — транспозиция, то $\sigma^{-1} = \sigma$ и $\sigma \cdot \sigma = \varepsilon$.

Известно, что всякая перестановка σ разлагается в суперпозицию транспозиций, переставляющих числа с соседними номерами, причем четность числа транспозиций в таком разложении не зависит от его выбора и называется четностью перестановки σ.

Введем следующее обозначение:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ четна}, \\ -1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ нечетна}. \end{cases}$$

Заметим, что форма $a \in L_p(V)$ принадлежит $A_p(V)$, если для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_p$

$$a(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)},\, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)},\, \ldots,\, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot a(\boldsymbol{\xi}_1,\, \boldsymbol{\xi}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Рассмотрим снова полилинейную форму (7.43). Для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ положим

$$\sigma a(\boldsymbol{\xi}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = a(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)},\, \ldots,\, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \tag{7.44}$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\tau \in \Sigma_{p+q}$ и $\sigma \in \Sigma_{p+q}$, то $(\tau\sigma)a = \tau(\sigma a)$. Введем следующее определение.

Определение. *Внешним произведением формы $\omega^p \in A_p(V)$ и формы $\omega^q \in A_q(V)$ называется форма $\omega \in A_{p+q}(V)$, определяемая равенством*

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \sigma a, \tag{7.45}$$

где сумма берется по всем перестановкам $\sigma \in \Sigma_{p+q}$, удовлетворяющим условию

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q), \tag{7.46}$$

а величина σa определяется равенствами (7.43) *и* (7.44).

Внешнее произведение форм ω^p и ω^q обозначается символом

$$\omega = \omega^p \wedge \omega^q.$$

Проиллюстрируем на примере, как действует перестановка σ, удовлетворяющая условию (7.46). Предположим, что по некоторой дороге параллельно движутся две колонны автомобилей, в первой из которых p, а во второй q машин. Через некоторое время дорога сужается и обе колонны на ходу перестраиваются в одну. При этом автомобили первой колонны занимают места где-то среди автомобилей второй, однако порядок следования автомобилей внутри каждой колонны сохраняется. В результате мы получаем перестановку, удовлетворяющую условию (7.46). Легко видеть, что и обратно, всякая такая перестановка может быть реализована на нашей модели.

Для того чтобы убедиться, что данное нами определение является корректным, необходимо доказать, что $\omega = \omega^p \wedge \omega^q \in A_{p+q}(V)$. Очевидно, в доказательстве нуждается только знакопеременность формы ω.

Покажем, что при перестановке двух аргументов ξ_i и ξ_{i+1} форма ω меняет знак. Отсюда легко будет следовать, что $\omega \in A_{p+q}(V)$. Пусть $\tau \in \Sigma_{p+q}$ является такой перестановкой. Убедимся в том, что

$$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn}\tau)\omega. \tag{7.47}$$

Из равенства (7.45) получим

$$\tau\omega = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\cdot(\tau\sigma)a.$$

Разобьем эту сумму на две:

$$\tau\omega = \sum_{\sigma}{}'(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a + \sum_{\sigma}{}''(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a. \tag{7.48}$$

К первой сумме отнесем те перестановки σ, для которых либо $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$ либо $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$. Для каждой такой перестановки

$$(\tau\sigma)a = -\sigma a.$$

Для того чтобы сделать это утверждение более очевидным, обозначим $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(i+1)$, т. е. $i = \sigma(k)$, $i+1 = \sigma(l)$. Форма σa представляет собой произведение форм ω^p и ω^q, причем аргументами ω^p являются векторы $\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}$, а аргументами ω^q — векторы $\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}$. Если $k \leqslant p$ и $l \leqslant p$, то $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{\sigma(k)}$ и $\boldsymbol{\xi}_{i+1} = \boldsymbol{\xi}_{\sigma(l)}$ являются аргументами формы ω^p, которая по условию знакопеременна. Следовательно, при перестановке $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_{i+1}$, форма ω^p, а значит и σa, меняет знак. Аналогично рассматривается случай, когда $k \geqslant p+1$ и $l \geqslant p+1$. Итак, для первой суммы выполняется равенство

$$\sum_{\sigma}{}'(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a = -\sum_{\sigma}{}'(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma a. \tag{7.49}$$

Ко второй сумме отнесем те перестановки σ, для которых либо $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$ либо $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$. Покажем, что множество перестановок $\{\sigma\}$, удовлетворяющих этому условию (а также, разумеется, условию (7.46)), совпадает с множеством перестановок вида $\tau\sigma$, где $\sigma \in \{\sigma\}$. Обратимся к нашей модели с двумя колоннами автомобилей. Утверждение примет следующий очевидный вид.

Если при каком-либо перестроении автомобиль с номером k из первой колонны окажется непосредственно перед автомобилем с номером l из второй колонны, то легко можно указать другое перестроение, в результате которого эти автомобили поменяются местами, в то время как порядок движения остальных сохранится.

Таким образом, поскольку $\operatorname{sgn}\tau\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma$

$$\sum_{\sigma}{}''(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a = -\sum_{\sigma}{}''(\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)a = -\sum_{\sigma}{}''(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma a. \tag{7.50}$$

Подставляя (7.49) и (7.50) в (7.48), мы получим (7.47).

Пример 1. Рассмотрим две линейные формы $f(\boldsymbol{\xi}) \in A_1(V)$ и $g(\boldsymbol{\xi}) \in A_1(V)$. Внешним произведением будет являться билинейная форма

$$f \wedge g = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma f(\boldsymbol{\xi}_1)g(\boldsymbol{\xi}_2) = f(\boldsymbol{\xi}_1)g(\boldsymbol{\xi}_2) - g(\boldsymbol{\xi}_1)f(\boldsymbol{\xi}_2).$$

Пример 2. Пусть $f(\boldsymbol{\xi}) \in A_1(V)$, $g(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q) \in A_q(V)$. Внешним произведением $\omega = f \wedge g$ будет $q+1$-форма, аргументы которой мы обозначим через $\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q$:

$$\omega = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma f(\boldsymbol{\xi}_0) g(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q) = \\ = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f(\boldsymbol{\xi}_i) g(\boldsymbol{\xi}_0, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q).$$

6. Свойства внешнего произведения знакопеременных форм. 1) Очевидным свойством внешнего произведения является линейность:

а) если $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, то для любого вещественного числа λ

$$(\lambda\omega^p) \wedge \omega^q = \omega^p \wedge (\lambda\omega^q) = \lambda(\omega^p \wedge \omega^q);$$

б) если $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$(\omega_1^p + \omega_2^p) \wedge \omega^q = \omega_1^p \wedge \omega^q + \omega_2^p \wedge \omega^q.$$

2) Антикоммутативность. Если $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq} \omega^q \wedge \omega^p.$$

Доказательство. Пусть

$$\omega^p \wedge \omega^q = \omega = \omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}).$$

Легко видеть, что

$$\omega^q \wedge \omega^p = \omega(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \boldsymbol{\xi}_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Убедимся в том, что перестановку $(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \boldsymbol{\xi}_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ можем получить из векторов $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q})$ с помощью pq последовательных транспозиций. Вектор $\boldsymbol{\xi}_{p+1}$ можно передвинуть на первое место, используя p транспозиций. Затем с помощью такого же числа транспозиций передвинем на второе место вектор $\boldsymbol{\xi}_{p+2}$ и т. д. Всего мы передвинем q векторов, используя каждый раз p транспозиций, т. е. число всех транспозиций равно pq. В таком случае антикоммутативность будет следовать из знакопеременности внешнего произведения.

3) Ассоциативность. Если $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, то

$$(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r).$$

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma_{p+q+r}$. Рассмотрим следующую величину:

$$\omega = \sum_\sigma (\operatorname{sgn})\sigma[\omega^p(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)\omega^q(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q})\omega^r(\boldsymbol{\xi}_{p+q+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q+r}). \tag{7.51}$$

Сумма (7.51) будет равна $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$, если вначале произвести суммирование по всем перестановкам, оставляющим без изменения числа $p+q+1$, $p+q+2, \ldots, p+q+r$ и удовлетворяющим условию (7.46), а затем просуммировать по всем перестановкам, сохраняющим получившийся порядок первых $p+q$ аргументов и порядок аргументов $\boldsymbol{\xi}_{p+q+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q+r}$.

Аналогично можно получить величину $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Покажем, что в обоих случаях получается сумма по всем перестановкам, удовлетворяющим условиям

$$\begin{gathered} \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \\ \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) < \ldots < \sigma(p+q+r). \end{gathered} \tag{7.52}$$

Для этого обратимся снова к нашей модели с колоннами автомобилей. Предположим, что по дороге движутся три колонны автомобилей, в первой из которых p, во второй q, а а третьей r машин. Один из способов перестроения этих трех колонн в одну заключается в том, что вначале сливаются первая и вторая колонны, а затем полученная соединяется с третьей. При другом способе вначале сливаются вторая и третья колонны, а к ним присоединяется первая. Очевидно, перестановка σ, получаемая в результате любого из этих перестроений, удовлетворяет условию (7.52) и, наоборот, любая перестановка, удовлетворяющая условию (7.52), может быть получена как с помощью первого, так и с помощью второго способа перестроения. Это и означает совпадение $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$ и $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Ассоциативность внешнего умножения дает возможность рассматривать любое конечное произведение

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m, \text{ где } \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

Пример 1. Пусть $a_1(\boldsymbol{\xi})$, $a_2(\boldsymbol{\xi})$, ..., $a_m(\boldsymbol{\xi})$ — линейные формы. Тогда

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma [a_1(\boldsymbol{\xi}_1), a_2(\boldsymbol{\xi}_2), \ldots, a_m(\boldsymbol{\xi}_m)], \tag{7.53}$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma \in \Sigma_m$.

Равенство это легко проверяется с помощью индукции. Заметим, что если ввести матрицу $\{a_i(\boldsymbol{\xi}_j)\}$, то равенство (7.53) можно переписать в следующем виде:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m) = \det \{a_i(\boldsymbol{\xi}_j)\}. \tag{7.54}$$

7. Базис в пространстве знакопеременных форм. Выберем какой-либо базис $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V и обозначим через $\{e^i\}_{i=1}^n$ сопряженный к нему базис в пространстве $L(V)$. Напомним, что $e^i(\boldsymbol{\xi})$ есть линейная форма, которая на элементах базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ принимает значение $e^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$.

В п. 3 мы показали, что всевозможные произведения

$$e^{i_1}(\boldsymbol{\xi}_1) e^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \ldots e^{i_p}(\boldsymbol{\xi}_p)$$

образуют базис в $L_p(V)$. Поскольку $A_p(V) \subset L_p(V)$, то каждая знакопеременная p-форма может быть разложена единственным образом в линейную комбинацию указанных произведений. Однако эти произведения не образуют базиса в $A_p(V)$, поскольку они не являются знакопеременными p-формами, т. е. не принадлежат $A_p(V)$. Тем не менее из них можно сконструировать с помощью внешнего умножения базис в $A_p(V)$.

Теорема 7.11. *Пусть $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве V, $\{e^i\}_{i=1}^n$ — сопряженный базис в пространстве $L(V)$. Любая знакопеременная p-форма $\omega \in A_p(V)$ может быть представлена и притом единственным образом в виде*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \tag{7.55}$$

Каждое слагаемое суммы в правой части (7.55) *представляет собой произведение постоянной $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ на знакопеременную p-форму $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$.*

Доказательство. В силу результатов п. 4 мы можем записать

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \tag{7.56}$$

где числа $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_p})$ определены однозначно.

Так как форма $\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ знакопеременна, то для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_p$

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Следовательно,

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \tag{7.57}$$

Сгруппируем слагаемые в сумме (7.56), отличающиеся перестановкой индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, и воспользуемся равенством (7.57). Получим

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} =$$
$$= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} \left[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}}\right]. \tag{7.58}$$

В силу примера из п. 6 сумма, стоящая в квадратных скобках, есть $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Элементы $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n)$ образуют базис в пространстве $A_p(V)$. Этот базис пуст для $p > n$ и состоит из одного элемента, если $p = n$.*

Следствие 2. *Размерность пространства $A_p(V)$ равна C_n^p.*

В дальнейшем, как правило, мы будем считать, что выбранный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ нами зафиксирован и линейные формы $e^i(\boldsymbol{\xi})$ будем обозначать символом $e^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$. Тогда любая форма $\omega \in A_p(V)$ примет вид

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{7.59}$$

Пример 1.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 = (e^1 \wedge e^2)(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[e^1(\boldsymbol{\xi}_1)e^2(\boldsymbol{\xi}_2)] =$$
$$= e^1(\boldsymbol{\xi}_1)e^2(\boldsymbol{\xi}_2) - e^1(\boldsymbol{\xi}_2)e^2(\boldsymbol{\xi}_1) = \xi_1^1\xi_2^2 - \xi_2^1\xi_1^2,$$

где ξ_i^j есть j-й коэффициент в разложении вектора $\boldsymbol{\xi}_i$ по базису $\{\boldsymbol{e}_j\}$.

Пример 2.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^n = \det\{\xi_i^j\},$$

где $\boldsymbol{\xi}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i^j \boldsymbol{e}_j$.

§ 2. Дифференциальные формы

1. Определения. Рассмотрим произвольную открытую область G n-мерного евклидова пространства E^n. Точки области G будем обозначать символами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ и т. д.

Определение. *Дифференциальной формой степени p, определенной в области G, будем называть функцию $\omega(x, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$, которая при каждом фиксированном $x \in G$ представляет собой знакопеременную p-форму из $A_p(E^n)$.*

Множество всех дифференциальных p-форм в области G обозначим через $\Omega_p(G) = \Omega_p(G, E^n)$.

Мы будем считать, что при фиксированных $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p \in E^n$ p-форма ω представляет собой бесконечно дифференцируемую в G функцию. Используя результаты § 1, мы можем каждую p-форму ω записать в виде

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{7.60}$$

Всюду в дальнейшем вектор $\boldsymbol{\xi}$ будем обозначать символом $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, а векторы $\boldsymbol{\xi}_k$ — символами $d_kx = (d_kx^1, d_kx^2, \ldots, d_kx^n)$. В качестве базиса в E^n выберем векторы $\boldsymbol{e}_k = \{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, где единица стоит на k-м месте. Элементами сопряженного базиса будут функции $e^k(\boldsymbol{\xi}) = e^k(dx)$, определяемые равенствами

$$e^k(dx) = dx^k.$$

Тогда дифференциальная форма (7.60) примет вид

$$\omega(x, d_1x, \ldots, d_px) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

П р и м е р 1. Дифференциальная 0-форма — это любая функция, определенная в области G (и, в силу наших предположений, бесконечно дифференцируемая в G).

П р и м е р 2. Дифференциальная 1-форма имеет вид

$$\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\, dx^k.$$

В частности, когда $n = 1$, $\omega(x, dx) = f(x)\, dx$. Дифференциальную форму степени 1 называют также линейной дифференциальной формой.

П р и м е р 3. Дифференциальная 2-форма имеет вид

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = \sum_{i<k} \omega_{ik}\, dx^i \wedge dx^k.$$

По определению

$$dx^i \wedge dx^k = (e^i \wedge e^k)(d_1x, d_2x) = \\ = e^i(d_1x)e^k(d_2x) - e^i(d_2x)e^k(d_1x) = \\ = d_1x^i d_2x^k - d_2x^i d_1x^k = \begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^k \\ d_2x^i & d_2x^k \end{vmatrix}.$$

В частности, при $n = 2$ получаем

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 \\ d_2x^1 & d_2x^2 \end{vmatrix}.$$

Определитель равен элементу площади, соответствующему векторам d_1x и d_2x.

В случае, когда $n = 3$, обозначая $\omega_{12} = R$, $\omega_{23} = P$, $\omega_{13} = -Q$, получим

$$\omega = Pdx^2 \wedge dx^3 - Qdx^1 \wedge dx^3 + Rdx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

П р и м е р 4. Дифференциальная 3-форма в трехмерном пространстве имеет вид

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x) = f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

Определитель равен элементу объема, отвечающему векторам d_1x, d_2x, d_3x.

2. Внешний дифференциал.

Определение. *Внешним дифференциалом p-линейной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_p(G)$ будем называть форму $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$, определяемую соотношением*

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где

$$d\omega_{i_1\ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k.$$

Таким образом, если

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Дифференциал формы степени нуль (т. е. функции $f(x)$) имеет вид

$$df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

Пример 2. Вычислим дифференциал от линейной формы

$$\omega = \omega(x,\, dx) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx^i.$$

Получим

$$d\omega = d\omega(x,\, d_1x,\, d_2x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega_i(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i.$$

Так как $dx^k \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^k$ и $dx^k \wedge dx^k = 0$, то

$$d\omega = \sum_{k<i}^{n} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i + \sum_{i<k}^{n} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i = \\ = \sum_{k<i}^{n} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i - \sum_{k<i}^{n} \frac{\partial\omega_k}{\partial x^i} dx^k \wedge dx^i = \\ = \sum_{k<i}^{n} \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\right) dx^k \wedge dx^i.$$

В частности, когда $n = 2$, получим для $\omega = Pdx^1 + Qdx^2$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

3. Свойства внешнего дифференциала. Непосредственно из определения вытекают следующие свойства:

1) если $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_p(G)$, то $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;

2) если $\omega \in \Omega_p(G)$ и λ — вещественное число, то $d(\lambda\omega) = \lambda d\omega$;

3) если $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, то

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Докажем свойство 3). Пусть
$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$
Введем следующее обозначение:
$$\frac{\partial \omega}{\partial x^k} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$
Тогда $d\omega$ можно записать в виде
$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^k}.$$

Вспомним, что
$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1.$$
Далее
$$\frac{\partial \omega}{\partial x^k} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + (-1)^{pq} \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1.$$
Тогда
$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 +$$
$$+ (-1)^{pq} \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1 = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{pq} d\omega_2 \wedge \omega_1.$$
Поскольку $d\omega_2$ есть $(q+1)$-форма, то
$$d\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p(q+1)}\omega_1 \wedge d\omega_2.$$
Отсюда $d\omega = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.

Справедливо следующее *важное* свойство дифференциала.

Основное свойство внешнего дифференциала:
$$d(d\omega) = 0.$$

Доказательство. Предположим вначале, что ω есть форма степени 0, т. е. $\omega(x) = f(x)$. Тогда
$$d(df) = d \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} dx^k \wedge dx^i.$$
Так как $dx^k \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^k$, это равенство можно переписать в виде
$$d(df) = \sum_{i<k} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \Big) dx^i \wedge dx^k,$$
откуда следует, что $d(df) = 0$.

Пусть теперь
$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$
Тогда
$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Заметим, что каждый член суммы представляет собой внешнее произведение дифференциалов форм степени 0, именно, форм $\omega_{i_1\ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx)$, … …, $e^{i_p}(dx)$. Остается применить свойство 3) и воспользоваться тем, что для формы степени 0 основное свойство доказано.

§ 3. Дифференцируемые отображения

1. Определение дифференцируемых отображений. Рассмотрим произвольную m-мерную область D евклидова пространства E^m и n-мерную область $G \subset E^n$. Точки области D будем обозначать символами $t = (t^1, t^2, \ldots, t^m)$, а точки области G символами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Будем говорить, что φ отображает D в G, если

$$\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

где $\varphi^k(t)$ определены в области D, а векторы x с координатами $x^k = \varphi^k(t)$ лежат в области G.

Определим отображение φ^*, которое переводит $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ для любого p, $0 \leqslant p \leqslant n$. При этом мы будем считать, что каждая компонента $\varphi^k(t)$ отображения φ является бесконечно дифференцируемой.

Определение. *Пусть φ — отображение $D \subset E^m$ в $G \subset E^n$. Обозначим через φ^* отображение, которое для всех $0 \leqslant p \leqslant n$ действует из $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ по следующему правилу: если*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(\varphi(t)) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}),$$

где

$$\varphi^*(dx^i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} \, dt^k.$$

Пример 1. Пусть ω — форма степени 0, т. е. $\omega = f(x)$. Тогда

$$\varphi^*(f) = f(\varphi(t)).$$

Пример 2. Пусть φ отображает n-мерную область $D \subset E^n$ в n-мерную область $G \subset E^n$, и пусть ω — следующая n-форма:

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Тогда

$$\varphi^*(\omega) = \left(\sum_{k_1=1}^{n} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{k_1}} \, dt^{k_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{k_n}} \, dt^{k_n} \right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{k_1}} \ldots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{k_n}} \, dt^{k_1} \wedge \ldots \wedge dt^{k_n} =$$

$$= dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}} \ldots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}} =$$

$$= dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n \det \left\{ \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \right\}.$$

Таким образом,

$$\varphi^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n) = \frac{D(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^n)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^n.$$

Замечание. Форму $\varphi^*(\omega)$ называют дифференциальной формой, получающейся из формы ω при помощи замены переменных φ.

2. Свойства отображения φ^*. Справедливы следующие свойства отображения φ^*:

1. Если $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, то

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{k_1 < \ldots < k_q} b_{k_1 \ldots k_q}(x) dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q}.$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \sum_{k_1 < \ldots < k_q} a_{i_1 \ldots i_p}(x) b_{k_1 \ldots k_q}(x) \times \\ \times dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q}$$

и, следовательно,

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_i \sum_k a_i(\varphi(t)) b_k(\varphi(t)) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{k_q}) =$$

$$= \sum_i a_i(\varphi)\varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) \wedge \Big[\sum_k b_k(\varphi)\varphi^*(dx^{k_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{k_q})\Big] = \\ = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

2. Если $\omega \in \Omega_p(G)$, то

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega).$$

Доказательство. Докажем вначале это равенство для $p = 0$, т. е. для $\omega = f(x)$. Получим

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t^k} f(\varphi(t)) dt^k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega).$$

Для произвольного p проведем доказательство по индукции. Пусть $\omega = f_{i_1 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Тогда $d\omega = df_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. По свойству 1 и только что доказанному соотношению

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}).$$

С другой стороны,

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*\big[\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge dx^{i_p}\big] = \\ = d\big[\varphi^*\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge \varphi^*\big(dx^{i_p}\big)\big].$$

Далее в силу свойства 3 внешнего дифференциала

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge \varphi^*\big(dx^{i_p}\big) + \\ + (-1)^{p-1}\varphi^*\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge d\varphi^*\big(dx^{i_p}\big).$$

Заметим, что $\varphi^*\big(dx^{i_p}\big) = d\varphi^*\big(x^{i_p}\big)$ в силу только что доказанного, а тогда по основному свойству внешнего дифференциала $d\varphi^*\big(dx^{i_p}\big) = 0$.

По предположению индукции, справедливому для $p-1$,
$$d\varphi^*\left(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}}\right)=\varphi^*\left(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}}\right).$$
В результате получим
$$d\varphi^*(\omega)=\varphi^*\left(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}}\right)\wedge\varphi^*\left(dx^{i_p}\right),$$
а по свойству 1
$$d\varphi^*(\omega)=\varphi^*\left(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right).$$

Следующее важное свойство называют *транзитивностью.*

3. Рассмотрим открытые области $U\subset E^l$, $V\subset E^m$, $W\subset E^n$, точки которых соответственно $u=(u^1,u^2,\ldots,u^l)$, $v=(v^1,v^2,\ldots,v^m)$, $w=(w^1,w^2,\ldots,w^n)$. Пусть φ отображает $U\to V$, а ψ отображает $V\to W$. Через $\psi\circ\varphi$ обозначим отображение, называемое композицией, которое действует по правилу
$$(\psi\circ\varphi)(u)=\psi[\varphi(u)].$$
Аналогично введем композицию $\varphi^*\circ\psi^*$, которая для любого p переводит $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т. е.
$$(\varphi^*\circ\psi^*)(\omega)=\varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Справедливо следующее равенство:
$$(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*.$$

Доказательство. Обозначим $\beta=\psi\circ\varphi$. Это означает, что $\beta=(\beta^1,\beta^2,\ldots,\beta^n)$, где
$$\beta^k=\psi^k(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^m).$$

Проведем сначала доказательство для линейной формы $dw^k\subset\Omega_1(W)$. Получим
$$\beta^*(dw^k)=d\beta^*(w^k)=d\beta^k(u)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\beta^k}{\partial u^i}du^i=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^i}du^i.$$
Далее
$$(\varphi^*\circ\psi^*)(dw^k)=\varphi^*[\psi^*(dw^k)]=\varphi^*[d\psi^*(w^k)]=\varphi^*(d\psi^k)=$$
$$=\varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}dv^j\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}\varphi^*(dv^j).$$
Но
$$\varphi^*(dv^j)=d\varphi^*(v^j)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^i}du^i,$$
и тогда
$$(\varphi^*\circ\psi^*)(dw^k)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\psi^k}{\partial v^j}\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^i}du^i$$
и равенство доказано. Отсюда следует справедливость свойства 3 для любой линейной формы. Далее доказательство проведем по индукции. Пусть
$$\omega=f(w)\,dw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_p}\in\Omega_p(W).$$
Тогда
$$\beta^*(w)=\beta^*\left(fdw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_{p-1}}\right)\wedge\beta^*\left(dw^{i_p}\right)=$$
$$=\left(\varphi^*\circ\psi^*\right)\left(fdw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_{p-1}}\right)\wedge\left(\varphi^*\circ\psi^*\right)\left(dw^{i_p}\right)=$$
$$=\left(\varphi^*\circ\psi^*\right)\left(fdw^{i_1}\wedge\ldots\wedge dw^{i_p}\right)=\left(\varphi^*\circ\psi^*\right)(\omega).$$

§ 4. Интегрирование дифференциальных форм

1. Определения. Обозначим через I^m единичный куб в евклидовом пространстве E^m:

$$I^m = \{t \in E^m,\ 0 \leqslant t^i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Под отображением φ куба I^m в n-мерную область $G \subset E^n$ мы будем понимать отображение в G некоторой области $D \subset E^m$, содержащей внутри себя I^m. Аналогично дифференциальной p-формой ω, определенной в I^m, будем называть p-форму, определенную в некоторой области $D \subset E^m$, содержащей I^m.

Определение 1. *Интегралом от p-формы*

$$\omega = f(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p,$$

определенной в кубе I^p, по кубу I^p будем называть величину

$$\int\limits_{I^p} \omega = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(t) dt^1 dt^2 \ldots dt^p.$$

Нашей ближайшей целью является определение интеграла от дифференциальной формы по любой поверхности. Естественно, что при этом степень формы будет совпадать с размерностью поверхности. Под поверхностью мы будем при этом понимать отображение единичного куба той же размерности (напомним, что понятие отображения включает в себя как область значений, так и закон соответствия). Впрочем, иногда мы будем называть поверхностью только лишь образ куба.

Определение 2. *Назовем m-мерным сингулярным кубом в пространстве E^n $(m \leqslant n)$ дифференцируемое отображение куба I^m в E^n. Таким образом, обозначая сингулярный куб через C, мы можем записать*

$$C = \varphi\colon\ I^m \to E^n.$$

Мы будем говорить, что сингулярный куб C содержится в $G \subset E^n$, если $\varphi(I^m) \subset G$.

Теперь мы можем определить интеграл от любой p-формы $\omega \in \Omega_p(G)$ по любому p-мерному сингулярному кубу $C \subset G$.

Определение 3. *Интегралом от формы $\omega \subset \Omega_p(G)$ по сингулярному кубу $C = \varphi\colon\ I^p \to E^n$, содержащемуся в G, назовем величину*

$$\int\limits_C \omega = \int\limits_{I^p} \varphi^*(\omega).$$

Убедимся в том, что интеграл от p-формы ω по p-мерному сингулярному кубу C зависит лишь от образа $\varphi(I^p)$, а не от закона соответствия φ.

Прежде всего рассмотрим подробнее определение интеграла от ω по сингулярному кубу C.

Пусть $\omega \in \Omega_p(G)$ имеет вид $\omega = f(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, тогда $\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)]\varphi^*\big(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\big)$. В силу примера 2 к п. 1 § 3

$$\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)] \frac{D\big(\varphi^{i_1}, \varphi^{i_2}, \ldots, \varphi^{i_p}\big)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \omega = \int\limits_{I^p} f[\varphi(t)] \frac{D\big(\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_p}\big)}{D(t^1, \ldots, t^p)} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Определение 4. *Пусть $C_1 = \varphi_1\colon\ I^p \to E^n$ и $C_2 = \varphi_2\colon\ I^p \to E^n$ — два сингулярных куба. Будем говорить, что $C_1 = C_2$, если существует* *взаимно однозначное отображение τ куба I^p на себя такое, что*

$$1)\ \varphi_1(t) = \varphi_2[\tau(t)];$$

$$2)\ \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} > 0.$$

Ясно, что если $C_1 = C_2$, то и $C_2 = C_1$, так как обратное отображение τ^{-1} будет удовлетворять необходимым требованиям.

Мы будем говорить, что $C_1 = -C_2$, если в условии 2 функциональный определитель всюду меньше нуля (очевидно, при этом $C_2 = -C_1$). Иногда в этом случае говорят, что C_1 и C_2 отличаются ориентацией.

Справедливо следующее утверждение: *если $C_1 = C_2$, то*

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая, когда

$$\omega = f(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^p.$$

По определению

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_2(t)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

По условию существует отображение τ куба I^p на себя, удовлетворяющее условиям 1 и 2.

Сделаем в интеграле замену переменной $t = \tau(s)$, $s \in I^p$. Получим $\varphi_2(t) = \varphi_2[\tau(s)] = \varphi_1(s)$,

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge ds^2 \wedge \ldots \wedge ds^p =$$

$$= \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^p)}{D(s^1, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int_{C_1} \omega.$$

Аналогично можно показать, что если $C_1 = -C_2$, то

$$\int_{C_1} \omega = -\int_{C_2} \omega.$$

2. Дифференцируемые цепи. Нам понадобятся поверхности, которые распадаются на несколько кусков, каждый из которых является образом некоторого m-мерного куба. Примером такой поверхности может служить состоящая из двух окружностей граница кольца, лежащего на двумерной плоскости. При этом мы будем различать ориентации этих окружностей. В связи с этим весьма полезным оказывается введение линейных комбинаций сингулярных кубов с вещественными коэффициентами.

Определение 1. *Будем называть p-мерной цепью C произвольный набор*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, C_1, C_2, \ldots, C_k\},$$

где λ_i — вещественные числа, а C_i — p-мерные сингулярные кубы. При этом будем использовать обозначение

$$C = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_k C_k.$$

Будем говорить, что C принадлежит G, если все C_i принадлежат G.

Множество p-мерных цепей образует линейное пространство, если ввести естественным образом операции сложения и умножения на вещественные числа.

Определение 2. *Интегралом формы ω по p-мерной цепи C, содержащейся в G, назовем величину*

$$\int_C \omega = \lambda_1 \int_{C_1} \omega + \lambda_2 \int_{C_2} \omega + \ldots + \lambda_k \int_{C_k} \omega.$$

Теперь мы можем определить границу произвольного сингулярного куба. Для этого определим вначале границу единичного куба.

Определение 3. *Границей куба I^p назовем $(p-1)$-мерную цепь*

$$\partial I^p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [I_0^p(i) - I_1^p(i)],$$

где $I_\alpha^p(i)$ есть пересечение куба I^p с гиперплоскостью $x^i = \alpha$ $(\alpha = 0, 1)$.

Для того чтобы это определение было корректным, необходимо разъяснить, какой смысл мы вкладывали в утверждение о том, что $I_\alpha^p(i)$ является $(p-1)$-мерным сингулярным кубом.

Построим канонкое отображение $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_i^{\alpha,p}$ куба I^{p-1} на $I_\alpha^p(i)$. Пусть $s = (s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) \in I^{p-1}$. Положим

$$\widetilde{\varphi}^k(s) = \begin{cases} s^k, & \text{если} \quad 1 \leqslant k < i, \\ \alpha, & \text{если} \quad k = i, \\ s^{k-1}, & \text{если} \quad i \leqslant k \leqslant p. \end{cases}$$

Очевидно, $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)$ отображает взаимно однозначно I^{p-1} на $I_\alpha^p(i)$. В частности, при $\alpha = 0$ и $i = p$ отображение φ является сужением на $I_0^p(p-1)$ тождественного отображения пространства E^p на себя.

Определение 4. *Границей p-мерного сингулярного куба $C = \varphi\colon I^p \to E^n$ назовем $(p-1)$-мерную цепь*

$$\partial C = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [\varphi(I_0^p(i)) - \varphi(I_1^p(i))].$$

Таким образом, граница образа куба I^p есть образ границы I^p с естественной ориентацией.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости квадрат I^2. Очевидно, этот квадрат мы можем рассматривать как сингулярный куб, взяв в качестве φ

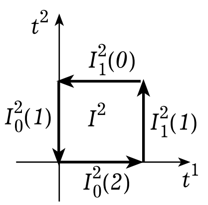


Рис. 7.11

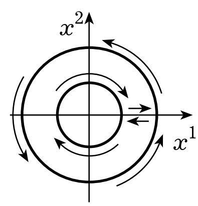


Рис. 7.12

тождественное отображение. На рис. 7.11 указана граница этого квадрата, причем направление стрелок совпадает с направлением возрастания параметра t^k, по которому производится интегрирование, в случае, если эта сторона квадрата входит в цепь ∂I^2 со знаком $+$, и направление стрелок является противоположным, если сторона берется со знаком $-$. Мы видим, что наше соглашение о знаках приводит к обычному обходу границы против часовой стрелки.

П р и м е р 2. Рассмотрим сингулярный куб $C = \varphi\colon I^2 \to R^2$, где φ имеет вид

$$\varphi^1 = (a + Rt^1)\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = (a + Rt^1)\sin 2\pi t^2.$$

Легко видеть, что $\varphi(I^2)$ есть кольцо, граница которого образована окружностями радиусов a и $a + R$. Выясним, что является границей сингулярного куба C. Очевидно, $\varphi(I_0^2(1))$ есть окружность

$$\varphi^1 = a\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = a\sin 2\pi t^2.$$

Далее, $\varphi(I_1^2(1))$ — это окружность радиуса $a + R$. Наконец, $\varphi(I_0^2(2))$ и $\varphi(I_1^2(2))$ — это отрезок $x^2 = 0$, $a \leqslant x^1 \leqslant a + R$.

На рис. 7.12 стрелками указано направление обхода границы ∂C, если обход границы ∂I^2 совершается против часовой стрелки.

Поскольку $\varphi(I_0^2(2)) - \varphi(I_1^2(2)) = 0$, мы можем считать, что

$$\partial C = \varphi(I_1^2(1)) - \varphi(I_0^2(1)),$$

что совпадает с обычным пониманием границы кольца.

Выясним, каким образом связаны интегралы от формы ω по границе куба C и формы $\varphi^*(\omega)$ по границе I^p.

Утверждение. *Пусть $C = \varphi\colon I^p \to E^n$ — произвольный сингулярный куб, содержащийся в G, и пусть $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\partial C} \omega = \int\limits_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, в силу определения интеграла по цепи достаточно доказать равенство

$$\int\limits_{\varphi\left(I_\alpha^p(i)\right)} \omega = \int\limits_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega).$$

Рассмотрим каноническое отображение $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_i^{\alpha,p}\colon I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. По определению

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega) = \int\limits_{I^{p-1}} \widetilde{\varphi}^*[\varphi^*(\omega)].$$

В силу свойства 3 дифференцируемых отображений (см. п. 2 § 3)

$$\widetilde{\varphi}^* \circ \varphi^* = \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)^*.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega) = \int\limits_{I^{p-1}} \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)^*(\omega) = \int\limits_{(\varphi\circ\widetilde{\varphi})\left(I^{p-1}\right)} \omega = \int\limits_{\varphi\left(I_\alpha^p(i)\right)} \omega,$$

поскольку $\left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)\left(I^{p-1}\right) = \varphi\left(I_\alpha^p(i)\right)$.

3. Формула Стокса.

Основная теорема. *Пусть $C = \varphi : I^p \to E^n$ — произвольный сингулярный куб, содержащийся в G, и пусть $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Справедлива ф о р м у л а С т о к с а*

$$\int\limits_C d\omega = \int\limits_{\partial C} \omega.$$

Докажем формулу Стокса сначала в следующем частном случае.

Пусть ω — дифференциальная форма степени $p - 1$, определенная в I^p. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{I^p} d\omega = \int\limits_{\partial I^p} \omega. \tag{7.61}$$

Доказательство. Пусть $\omega = f(t)dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p$. По определению

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \left(\int\limits_{I_0^p(i)} \omega - \int\limits_{I_1^p(i)} \omega \right).$$

Вычислим следующий интеграл:

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \omega, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, p, \ \alpha = 0, 1.$$

Рассмотрим каноническое отображение $\widetilde{\varphi} : I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. В силу результатов п. 1 этого параграфа

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \omega = \int\limits_{I^{p-1}} f[\widetilde{\varphi}(s)] \frac{D(\widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)}{D(s^1, \ldots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определению канонического отображения $\widetilde{\varphi}_i^{\alpha,\,p}$ якобиан имеет вид

$$J = \frac{D(s^2, \ldots s^{i-1}, \alpha, s^i, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 0,$$

если $i \neq 1$, и

$$J = \frac{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 1,$$

если $i = 1$. Итак, отличными от нуля могут быть только интегралы по $I_\alpha^p(1)$:

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = (-1) \left(\int\limits_{I_0^p(1)} \omega - \int\limits_{I_1^p(1)} \omega \right) = \int\limits_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1} - \\ - \int\limits_{I^{p-1}} f(0, s^1, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определению интеграла по кубу I^{p-1}

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 [f(1, s^1, \ldots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})]\, ds^1 ds^2 \ldots ds^{p-1} = \\ = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0}\, ds^0 ds^1 \ldots ds^{p-1} = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0}\, ds^0 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

С другой стороны,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Стало быть

$$\int\limits_{I^p} d\omega = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Равенство (7.61) доказано.

Доказательство теоремы Стокса. По определению интеграла по сингулярному кубу

$$\int\limits_C d\omega = \int\limits_{I^p} \varphi^*(d\omega).$$

В силу свойства 2 дифференцируемых отображений (см. п. 2 § 3)

$$\int\limits_{I^p} \varphi^*(d\omega) = \int\limits_{I^p} d\varphi^*(\omega).$$

Далее воспользуемся уже доказанной формулой Стокса для куба I^p

$$\int_{I^p} d\varphi^*(\omega) = \int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Остается заметить, что по свойству интегралов по границе сингулярного куба (см. конец п. 2 настоящего параграфа)

$$\int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega) = \int_{\partial C} (\omega).$$

Теорема полностью доказана.

4. Примеры. 1. Рассмотрим случай $p = 1$. Одномерный сингулярный куб C в E^n — некоторая кривая, концы которой обозначим через a и b. Формула Стокса приобретает вид

$$\int_C df = \int_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

В частности, когда $n = 1$, получаем формулу Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

2. Пусть теперь $p = 2$. Двумерный сингулярный куб C — это двумерная поверхность, форма $\omega \in \Omega_1$ имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k\,dx^k.$$

Используя пример 2 п. 2 § 2, получим

$$\int_C \sum_{k<i} \Big(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i}\Big) dx^k \wedge dx^i = \int_{\partial C} \sum_{k=1}^n \omega^k dx^k.$$

Если $n = 2$, то, обозначая $\omega = P\,dx^1 + Q\,dx^2$, получим формулу Грина:

$$\int_C \Big(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial C} P\,dx^1 + Q\,dx^2.$$

Если $n = 3$, то получим обычную формулу Стокса.

3. Пусть $p = n$. Тогда $\omega \in \Omega_{n-1}$ имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Далее

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

В частности, при $n = 3$

$$\omega = P\,dx^2 \wedge dx^3 - Q\,dx^1 \wedge dx^3 + R\,dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\omega = \Big(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

и мы получаем формулу Остроградского.

ГЛАВА 8

МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

В гл. 10 вып. 1 и в гл. 2 настоящего выпуска был изучен интеграл Римана от функции одной и соответственно n переменных. Понятие интеграла Римана охватывало класс функций, либо строго непрерывных в рассматриваемой области, либо близких к непрерывным (множество точек разрыва которых имеет равный нулю n-мерный объем). Этого понятия оказывается недостаточно в ряде фундаментальных разделов современной математики (в теории обобщенных функций, в современной теории уравнений с частными производными и в других).

В настоящей главе излагается теория более общего интеграла — так называемого интеграла Лебега [1]), для чего предварительно развивается теория меры и так называемых измеримых функций (являющихся широким обобщением непрерывных функций).

Основная идея интеграла Лебега, отличающая его от интеграла Римана, заключается в том, что при составлении лебеговской интегральной суммы точки объединяются в отдельные слагаемые не по принципу близости этих точек в области интегрирования (как это было в римановой интегральной сумме), а по принципу близости в этих точках значений интегрируемой функции. Эта идея и позволяет распространить понятие интеграла на весьма широкий класс функций.

Следует отметить, что многие математические теории, допускающие понимание интеграла в смысле Римана, принимают более законченный характер при использовании интеграла Лебега. Примером такой теории может служить теория рядов Фурье, излагаемая с пониманием интеграла в смысле Римана в гл. 10 и с привлечением интеграла Лебега в гл. 11.

Все изложение в настоящей главе ведется для случая одной переменной, но без каких-либо затруднений переносится на случай любого числа n переменных (соответствующее замечание сделано в конце главы).

[1]) Анри Лебег — французский математик (1875–1941).

§ 1. О структуре открытых и замкнутых множеств

Будем рассматривать произвольное множество E точек бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$.

Назовем дополнением множества E множество, обозначаемое символом CE и равное совокупности тех точек бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$, которые не принадлежат множеству E.

Если назвать разностью множеств A и B совокупность тех точек множества A, которые не принадлежат множеству B, и обозначить разность множеств A и B символом $A \setminus B$, то дополнение CE множества E можно представить в виде

$$CE = (-\infty, \infty) \setminus E.$$

Напомним некоторые определения, введенные еще в вып. 1.

1°. Точка x называется внутренней точкой множества E, если найдется некоторая окрестность точки x (т. е. интервал, содержащий эту точку), целиком принадлежащая множеству E.

В дальнейшем произвольную окрестность точки x мы будем обозначать символом $v(x)$.

2°. Точка x называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности $v(x)$ точки x найдется хотя бы одна точка x^1 множества E, отличная от x.

3°. Множество G называется открытым, если все точки этого множества являются внутренними.

4°. Множество F называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки [1].

Совокупность всех предельных точек произвольного множества E договоримся обозначать символом E', а сумму, или объединение двух множеств A и B будем обозначать символом $A + B$ или $A \bigcup B$ [2]. Договоримся далее называть замыканием произвольного множества E множество, обозначаемое символом $\overline{E}$ и равное сумме $E + E'$.

Очевидно, что для любого замкнутого множества F справедливо равенство $\overline{F} = F$.

Совокупность всех внутренних точек произвольного множества E будем обозначать символом $\operatorname{int} E$ [3].

---

[1] В частности, множество, не имеющее предельных точек, замкнуто (ибо пустое множество содержится в любом множестве).

[2] Суммой или объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из точек, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B

[3] Символ int образован от французского слова intérieur (внутренняя часть).

Очевидно, что для любого открытого множества G справедливо равенство $\operatorname{int} G = G$,

Для совершенно произвольного множества E множество $\operatorname{int} E$ является открытым, а множество $\overline{E}$ — замкнутым.

Замечание. Можно показать, что $\operatorname{int} E$ является суммой всех содержащихся в E открытых множеств, а $\overline{E}$ является пересечением [1] всех содержащих E замкнутых множеств. Таким образом, $\operatorname{int} E$ является наибольшим содержащимся в E открытым множеством, а $\overline{E}$ является наименьшим содержащим E замкнутым множеством.

Остановимся на простейших свойствах открытых и замкнутых множеств.

1°. *Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто.*

Доказательство. Любая точка x множества CF не принадлежит F и (в силу замкнутости F) не принадлежит множеству F' предельных точек F. Но это означает, что некоторая окрестность $v(x)$ точки x не принадлежит F и поэтому принадлежит CF.

2°. *Если множество G открыто, то его дополнение CG замкнуто.*

Доказательство. Любая предельная точка x множества CG заведомо принадлежит этому множеству, ибо в противном случае x принадлежала бы G, а поскольку G — открытое множество, то и некоторая окрестность $v(x)$ точки x принадлежала бы G и не принадлежала бы CG, т. е. точка x не являлась бы предельной точкой CG.

3°. *Сумма любого числа открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть множество E представляет собой сумму какого угодно числа открытых множеств G_α (индекс α, вообще говоря, не является номером), и пусть x — произвольная точка E. Тогда (по определению суммы множеств) x принадлежит хотя бы одному из множеств G_α, и поскольку каждое множество G_α является открытым, то найдется некоторая окрестность $v(x)$ точки x, также принадлежащая указанному множеству G_α, а стало быть, и множеству E.

4°. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть множество E является пересечением открытых множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n$, и пусть x — любая точка E. Тогда для любого k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ точка x принад-

[1] Пересечением множеств A и B называется множество точек, принадлежащих и A, и B.

лежит G_k, и потому найдется некоторая окрестность $v_k(x) = (x - \varepsilon_k,\, x + \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, точки x, также принадлежащая G_k. Если $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \ldots,\, \varepsilon_n\}$, то окрестность $v(x) = (x-\varepsilon,\, x+\varepsilon)$ точки x принадлежит всем G_k и вследствие этого принадлежит E.

5°. *Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть множество E представляет собой пересечение какого угодно числа замкнутых множеств F_α (индекс α, вообще говоря, не является номером). Заметим, что дополнение CE представляет собой сумму всех дополнений CF_α, каждое из которых, согласно 1°, представляет собой открытое множество.

Согласно 3° множество CE является открытым, а поэтому на основании 2° множество E является замкнутым.

6°. *Сумма конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть E представляет собой сумму замкнутых множеств F_1, F_2, ... , F_n. Тогда CE представляет собой пересечение множеств CF_1, CF_2, ... , CF_n, каждое из которых в силу 1° является открытым. Согласно 4° множество CE является открытым, а поэтому на основании 2° множество E является замкнутым.

7°. *Если множество F замкнуто, а множество G открыто, то множество $F \setminus G$ замкнуто, а множество $G \setminus F$ открыто.*

Доказательство. Достаточно заметить, что множество $F \setminus G$ является пересечением замкнутых множеств F и CG, а множество $G \setminus F$ является пересечением открытых множеств G и CF.

С помощью установленных свойств докажем теорему о структуре произвольного открытого множества точек бесконечной прямой.

Договоримся всюду ниже в этой главе называть интервалом любое связное открытое множество точек бесконечной прямой (не обязательно ограниченное). Иными словами, интервал — это либо открытый отрезок $a < x < b$, либо одна из открытых полупрямых $a < x < \infty$ или $-\infty < x < b$, либо вся бесконечная прямая $-\infty < x < \infty$.

Теорема 8.1. *Любое открытое множество точек бесконечной прямой представляет собой сумму конечного или счетного [1] числа попарно непересекающихся интервалов.*

[1] Напомним, что счетным называется бесконечное множество, элементы которого можно перенумеровать, т. е. поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел 1, 2, 3, ... (см. вып. 1, гл. 3, § 4, п. 6).

Доказательство. Пусть G — любое открытое множество, а x — произвольная фиксированная точка G. Так как G является открытым, то найдется некоторая содержащаяся в G окрестность $v(x)$ точки x. Сумму всех содержащихся в G окрестностей $v(x)$ данной фиксированной точки x обозначим через $I(x)$. Докажем, что $I(x)$ представляет собой интервал.

Обозначим через a точную нижнюю грань множества всех точек $I(x)$ (в случае, если множество всех точек $I(x)$ не ограничено снизу, мы положим $a = -\infty$), а через b точную верхнюю грань множества всех точек $I(x)$ (в случае, если множество всех точек $I(x)$ не ограничено сверху, мы положим $b = \infty$). Достаточно доказать, что произвольная точка y интервала (a, b) принадлежит $I(x)$. Пусть y — произвольная точка (a, b). Ради определенности будем считать, что $a < y < x$ (случай $x < y < b$ рассматривается совершенно аналогично). По определению точной нижней грани найдется принадлежащая $I(x)$ точка y' такая, что $a \leqslant y' < y$. Но это означает, что найдется некоторая окрестность $v(x)$ фиксированной нами точки x, содержащая точку y'. В силу неравенства $y' < y < x$ эта же окрестность $v(x)$ содержит и точку y. Отсюда следует, что и $I(x)$ содержит y, и доказательство того, что $I(x)$ — интервал, завершено. Можно сказать, что $I(x)$ представляет собой наибольший интервал, содержащий точку x и содержащийся в G.

Убедимся теперь в том, что если интервалы $I(x_1)$ и $I(x_2)$ построены для двух различных фиксированных точек x_1 и x_2 множества G, то эти интервалы *либо не имеют общих точек, либо совпадают между собой.* В самом деле, если бы интервалы $I(x_1)$ и $I(x_2)$ содержали общую точку x, то они оба содержались бы в $I(x)$ и потому совпадали бы.

Построив для каждой точки x свой интервал $I(x)$, мы отберем теперь интервалы, не содержащие общих точек (т. е. попарно непересекающиеся). Каждый такой интервал содержит хотя бы одну рациональную точку (это известно из гл. 2 вып. 1). Поскольку множество всех рациональных точек счетно (см. вып. 1, гл. 3, § 4, п. 6), то число всех попарно непересекающихся интервалов $I(x)$ не более чем счетно. Так как сумма всех таких интервалов составляет множество G, то теорема доказана.

Следствие. *Всякое замкнутое множество точек бесконечной прямой получается удалением из бесконечной прямой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.*

§ 2. Измеримые множества

1. Внешняя мера множества и ее свойства. Вся излагаемая в этом параграфе теория принадлежит А. Лебегу. Отправным пунктом этой теории является привлечение в качестве основного (исходного) множества интервала $\Delta = (a, b)$, длина или мера которого считается известной и равной числу $|\Delta| = b - a > 0$.

Пусть E — произвольное множество на числовой прямой.

Покрытием $S = S(E)$ множества E назовем всякую конечную или счетную систему интервалов $\{\Delta_n\}$, сумма которых содержит множество E. Сумму длин всех интервалов $\{\Delta_n\}$, составляющих покрытие $S = S(E)$, обозначим символом $\sigma(S)$.

Итак,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| \leqslant \infty.$$

Определение. *Внешней мерой множества E называется точная нижняя грань $\sigma(S)$ на множестве всех покрытий $S = S(E)$ множества E.*

Внешнюю меру множества E будем обозначать символом $|E|^*$. Итак, по определению

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S).$$

Очевидно, внешняя мера любого интервала совпадает с длиной этого интервала.

Выясним основные свойства внешней меры.

1°. *Если множество E_1 содержится в E_2* [1]*, то* $|E_1|^* \leqslant |E_2|^*$.

Для доказательства достаточно заметить, что любое покрытие E_2 является одновременно покрытием и E_1.

2°. *Если множество E представляет собой сумму конечного или счетного числа множеств $\{E_k\}$ (символически $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$), то*

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*. \tag{8.1}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению меры $|E_k|^*$ как точной нижней грани, для каждого номера k найдется покрытие $S_k(E_k)$ множества E_k системой интервалов $\{\Delta_n^k\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_n^k| \leqslant |E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{8.2}$$

[1] Символически тот факт, что множество E_1 содержится в E_2, обозначается так: $E_1 \subset E_2$.

Обозначим через S покрытие всего E, объединяющее все покрытия S_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и состоящее из всех интервалов $\{\Delta_n^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$. Так как S является покрытием E, то $|E|^* \leqslant \sigma(S)$, но $\sigma(S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta_n^k|$.

Из последних двух соотношений и из (8.2) получим

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(|E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}|E_k|^* + \varepsilon.$$

Неравенство (8.1) доказано.

Договоримся называть расстоянием между множествами E_1 и E_2 точную нижнюю грань расстояний между двумя точками множеств E_1 и E_2 соответственно.

Будем обозначать расстояние между множествами E_1 и E_2 символом $\rho(E_1, E_2)$.

3°. *Если* $\rho(E_1, E_2) > 0$, *то* $|E_1 \bigcup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

Доказательство. Положим $\delta = \frac{1}{2}\rho(E_1, E_2)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и выбранного нами $\delta > 0$ найдется покрытие $S(E)$ множества $E = E_1 \bigcup E_2$ такое, что $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$ и длина каждого интервала покрытия $|\Delta_n|$ меньше δ [1]. Очевидно, что интервалы Δ_n, покрывающие точки E_1, не содержат точек E_2 и, наоборот, интервалы, покрывающие точки E_2, не содержат точек E_1. Иными словами, взятое нами покрытие $S(E)$ распадается на сумму двух покрытий $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$, первое из которых S_1 покрывает E_1, а второе S_2 покрывает E_2. Итак, мы получаем, что

$$S_1(E_1) + S_2(E_2) \leqslant |E|^* + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$ и, стало быть (в силу произвольности ε), $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^*$. Так как на основании свойства 2° справедливо и обратное неравенство $|E|^* \leqslant |E_1|^* + |E_2|^*$, то $|E|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$. Свойство 3° доказано.

В частности, свойство 3° справедливо, если E_1 и E_2 ограничены, замкнуты и не содержат общих точек.

[1] Это вытекает из того, что для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует покрытие $S(E)$ множества E такое, что $\sigma(S) < |E|^* + \varepsilon$ и $|\Delta_n| < \delta$ (для каждого интервала Δ_n покрытия S). Чтобы убедиться в этом, достаточно, взяв покрытие S', для которого $\sigma(S') < |E|^* + \frac{\varepsilon}{2}$, разделить каждый интервал покрытия S' на интервалы длины, меньшей δ, и концы этих последних интервалов покрыть интервалами, общая сумма длин которых меньше $\varepsilon/2$.

4°. *Для произвольного множества E и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве G сумму всех интервалов, составляющих покрытие $S(E)$ множества E, для которого $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$.

2. Измеримые множества и их свойства.

Определение 1. *Множество E называется измеримым, если для любого положительного числа ε найдется открытое множество G, содержащее E и такое, что внешняя мера разности $G \setminus E$ меньше ε.*

Внешнюю меру измеримого множества E назовем мерой этого множества и обозначим символом $|E|$.

Из этого определения следует, что мера множества E равна нулю тогда и только тогда, когда равна нулю внешняя мера этого множества.

Докажем ряд утверждений, выясняющих основные свойства измеримых множеств.

Теорема 8.2. *Всякое открытое множество измеримо, причем мера его равна сумме длин составляющих его попарно не пересекающихся интервалов.*

Доказательство очевидно (достаточно в определении измеримости взять $G = E$ и заметить, что точная нижняя грань $\sigma(S)$ достигается на покрытии S, совпадающем с разбиением E на сумму попарно непересекающихся интервалов).

Теорема 8.3. *Сумма конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, причем каждое E_n измеримо. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого множества E_n найдется содержащее его открытое множество G_n такое, что

$$|G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \cdot 2^{-n}. \tag{8.3}$$

Положив $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, заметим, что множество E содержится в G и что разность $G \setminus E$ содержится в сумме $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$. Но тогда из свойства 2° внешней меры (см. предыдущий пункт) и из неравенства (4.3) получим

$$|G \setminus E|^* \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 8.4. *Всякое замкнутое множество F измеримо.*

Доказательство. Проведем доказательство в два шага.

1°. Сначала предположим, что множество F ограничено. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно свойству 4° внешней меры (см. предыдущий пункт) найдется открытое множество G, содержащее F и такое, что

$$|G|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon. \tag{8.4}$$

Согласно свойству 7° из § 1 множество $G \backslash F$ является открытым. Поэтому, согласно теореме 8.1, множество $G \setminus F$ представимо в виде суммы $G \setminus F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ попарно не пересекающихся интервалов Δ_n. Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$|G \setminus F|^* = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon. \tag{8.5}$$

Для каждого интервала $\Delta = (a, b)$ и для каждого числа α из интервала $0 < a < \dfrac{b-a}{2}$ договоримся обозначать символом Δ^α интервал $\Delta^\alpha = (a + \alpha, b - \alpha)$, а символом $\overline{\Delta}^{\,\alpha}$ сегмент $\overline{\Delta}^{\,\alpha} = [a + \alpha, b - \alpha]$. Если же $\alpha \geqslant \dfrac{b-a}{2}$, то Δ^α будет обозначать пустое множество, для которого $|\Delta^\alpha| = 0$. Для каждого номера n положим $\overline{E}_n^\alpha = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^\alpha$. Очевидно, что $|\overline{E}_n^\alpha|^* = \bigcup\limits_{k=1}^{n} |\overline{\Delta}_k^\alpha|$. Множество $\overline{E}_n^\alpha$, согласно свойству 6° из § 1, является замкнутым. Так как это множество не имеет общих точек с замкнутым множеством F, то (в силу свойства 3° внешней меры)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* = |\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^*. \tag{8.6}$$

С другой стороны, поскольку множество $\overline{E}_n^\alpha + F$ (при любом $\alpha > 0$ и для всех номеров n) содержится в G, то (в силу свойства 1° внешней меры)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* \leqslant |G|^*. \tag{8.7}$$

Из (8.4), (8.6) и (8.7) получим, что

$$|\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon \tag{8.8}$$

(для всех $\alpha > 0$ и всех номеров n). Так как множество F ограничено и его внешняя мера $|F|^* < \infty$, из (8.8) получим, что

$$|\overline{E}_n^\alpha|^* < \varepsilon \tag{8.9}$$

(для всех $\alpha > 0$ и всех номеров n). Переходя в (8.9) к пределу сначала при $\alpha \to 0 + 0$, а затем при $n \to \infty$, мы получим неравенство (8.5). Тем самым для случая ограниченного множества F теорема доказана.

2°. Если замкнутое множество F, вообще говоря, не является ограниченным, то мы представим F в виде суммы $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — пересечение замкнутых множеств F и $[-n, n]$. Согласно доказанному в первом шаге каждое F_n измеримо (ибо оно замкнуто и ограничено), а поэтому в силу теоремы 8.3 измеримо и множество F. Теорема полностью доказана.

Теорема 8.5. *Если множество E измеримо, то и его дополнение CE измеримо.*

Доказательство. По определению измеримости множества E для любого номера n найдется содержащее E открытое множество G_n, для которого

$$|G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}. \tag{8.10}$$

Пусть $F_n = CG_n$. Поскольку $CE_1 \setminus CE_2 = E_2 \setminus E_1$ для любых множеств E_1 и E_2 (проверьте это сами), то $CE \setminus CG_n = G_n \setminus E$ и, стало быть, $CE \setminus F_n = G_n \setminus E$. Из последнего равенства следует, что для любого номера n

$$CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset G_n \setminus E. \tag{8.11}$$

(Напоминаем, что запись $E_1 \subset E_2$, означает, что E_1 принадлежит E_2.)

Из (8.11) и из свойства 1° внешней меры получим, что для любого номера n

$$\left| CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right|^* \leqslant |G_n \setminus E|^*,$$

а из последнего неравенства и из (8.10) получим, что

$$\left| CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right|^* < \frac{1}{n}$$

(для любого номера n). Но это означает, что внешняя мера, а стало быть, и мера множества $E_0 = CE \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ равна нулю, т. е. множество CE равно сумме измеримых множеств E_0 и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ (последнее множество измеримо в силу теорем 8.4 и 8.3). Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлось замкнутое множество F, содержащееся в E и такое, что внешняя мера разности $E \setminus F$ меньше ε.*

Доказательство. Измеримость множества E эквивалентна измеримости CE (теорема 8.5), т. е. эквивалентна требованию, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось открытое множество G, содержащее CE и такое, что $|G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Но указанное требование (в силу тождества $CE_1 \setminus CE_2 \equiv E_2 \setminus E_1$) эквивалентно требованию, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество $F = CG$, содержащееся в E и такое, что $|E \setminus F|^* = |CF \setminus CE|^* = |G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Следствие доказано.

Замечание 1. Содержащееся в только что доказанном следствии условие измеримости может быть принято за новое определение измеримости, эквивалентное определению, сформулированному в начале этого пункта.

Теорема 8.6. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.*

Доказательство. Будем обозначать пересечение множеств E_1, E_2, ... символом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. В силу тождества $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \equiv C\Big[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} CE_n\Big]$ (проверьте это тождество сами) доказываемая теорема сразу вытекает из теорем 8.3 и 8.5.

Теорема 8.7. *Разность двух измеримых множеств является измеримым множеством.*

Доказательство вытекает из тождества $A \setminus B \equiv A\bigcap(CB)$ и из теорем 8.5 и 8.6.

Переходим теперь к доказательству основной теоремы теории меры.

Теорема 8.8. *Мера суммы конечного или счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, причем множества E_n измеримы и попарно не пересекаются. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Сначала предположим, что все E_n ограничены. Заметим, что для случая, когда все E_n замкнуты и их — конечное число, доказываемая теорема сразу вытекает из свойства 3° внешней меры (см. п. 1 этого параграфа).

Пусть теперь E_n — произвольные ограниченные попарно непересекающиеся множества.

В силу следствия из теоремы 8.5 для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого номера n найдется замкнутое множество F_n, содержащееся в E_n и такое, что [1] $|E_n \setminus F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Так как все множества F_n ограничены, замкнуты и попарно не пересекаются, то для любого конечного m в силу сделанного выше замечания

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |F_n|. \tag{8.12}$$

С другой стороны, из равенства $E_n = (E_n \setminus F_n) \bigcup F_n$ вытекает (в силу свойства 2° внешней меры), что $|E_n| \leqslant |E_n \setminus F_n| + |F_n| < < |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, так что

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \varepsilon \tag{8.13}$$

(для любого конечного m). Из (8.12) и (8.13) заключаем, что для любого конечного m

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| + \varepsilon. \tag{8.14}$$

Учтем теперь, что сумма всех множеств F_n содержится в E. Отсюда следует, что для любого номера m

$$\left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| \leqslant |E|,$$

так что (в силу (8.14)) для любого номера m

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon. \tag{8.15}$$

Переходя в (8.15) к пределу при $m \to \infty$, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon,$$

и, стало быть, на основании произвольности $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E|. \tag{8.16}$$

[1]) Так как измеримость всех фигурирующих в доказательстве множеств нами уже установлена, то мы можем всюду вместо верхней меры писать просто меру.

Теперь остается заметить, что из равенства суммы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ множеству E и из свойства 2° внешней меры вытекает обратное неравенство

$$|E| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|. \tag{8.17}$$

Из неравенств (8.16) и (8.17) вытекает утверждение доказываемой теоремы (для случая ограниченных множеств E_n).

2) Пусть теперь множества E_n не являются, вообще говоря, ограниченными. Тогда мы обозначим символом E_n^k ограниченное множество $E_n^k = E_n \bigcap (k-1 \leqslant |x| < k)$ (напомним, что знак $\bigcap$ означает пересечение).

Из равенства $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_n^k$ и из рассмотренного выше случая следует, что

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |E_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 2. Фундаментальное свойство меры, устанавливаемое теоремой 8.8, называется σ-аддитивностью меры.

Для того чтобы сформулировать еще одно свойство меры, введем новое понятие.

Определение 2. *Назовем множество E множеством типа G_δ, если E представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств G_n, и множеством типа F_σ, если E представимо в виде суммы счетного числа замкнутых множеств F_n.*

Теорема 8.9. *Если множество E измеримо, то найдутся множество E_1 типа F_σ, содержащееся в E, и множество E_2 типа G_δ, содержащее E, для которых $|E_1| = |E| = |E_2|$.*

Доказательство. В силу измеримости E и следствия из теоремы 8.5 для любого номера n найдутся открытое множество G_n, содержащее E, и замкнутое множество F_n, содержащееся в E, такие, что

$$|E \setminus F_n| < \frac{1}{n}, \quad |G_n \setminus E| < \frac{1}{n}. \tag{8.18}$$

Положим $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $E_2 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Так как для любого номера n

$$E \setminus E_1 \subset E \setminus F_n, \quad E_2 \setminus E \subset G_n \setminus E,$$

то в силу (8.18) и свойства 1° внешней меры

$$|E \setminus E_1| < \frac{1}{n}, \quad |E_2 \setminus E| < \frac{1}{n}.$$

В силу произвольности номера n отсюда следует, что $|E \setminus E_1| = 0$ и $|E_2 \setminus E| = 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что существуют неизмеримые множества. Для их построения достаточно принять во внимание, что на единичной окружности существует счетное число попарно непересекающихся и конгруэнтных [1]) друг другу множеств, объединение которых равно множеству всех точек этой окружности. Таковыми являются множество E_0 всех точек окружности, любые две из которых нельзя совместить друг с другом поворотом на угол $n \cdot \alpha$, где n — любое целое, а α — фиксированное иррациональное число, и все множества E_n, которые получаются из E_0 поворотом на угол $n \cdot \alpha$. Если бы E_0 было измеримо, то были бы измеримы и все множества E_n, причем $|E_n| = |E_0|$ для всех целых n. Но тогда в силу теоремы 8.8 мы получили бы, что $2\pi = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |E_n|$, что невозможно ни при каком значении E_n.

§ 3. Измеримые функции

1. Понятие измеримой функции. Договоримся называть расширенной числовой прямой обычную числовую прямую $-\infty < x < \infty$ с добавлением двух новых элементов $-\infty$ и $+\infty$. Для распространения арифметических операций на расширенную числовую прямую договоримся считать, что $a+(+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$ (для любого конечного a); $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) - a = +\infty$, $(-\infty) - a = -\infty$ (для любого конечного a), $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$; $a \cdot (+\infty) = +\infty$ при $a > 0$, $0 \cdot (+\infty) = 0$, $a \times (+\infty) = -\infty$ при $a < 0$; $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$ при $a > 0$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$ при $a < 0$; $\dfrac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot \dfrac{1}{a}$ при любом конечном $a \neq 0$, $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$ при любом конечном a.

Неопределенными остаются только следующие операции: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

[1]) Под термином «конгруэнтные» в данном случае нужно понимать множества, одно из которых может быть совмещено с другим посредством поворота в плоскости окружности на некоторый угол.

Всюду в дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать функции, определенные на измеримых множествах обычной числовой прямой и принимающие значения, принадлежащие расширенной числовой прямой.

Примером такой функции может служить

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{при} \quad x < -1, \\ 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ +\infty & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Договоримся всюду в дальнейшем обозначать символом $E\,[f$ удовлетворяет условию $A]$ множество всех принадлежащих E значений x, для которых $f(x)$ удовлетворяет условию A.

Например, $E\,[f \geqslant a]$ — множество тех принадлежащих E значений x, для которых $f(x) \geqslant a$.

Определение. *Функция $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется измеримой на этом множестве, если для любого вещественного числа a множество $E\,[f \geqslant a]$ измеримо.*

Теорема 8.10. *Для измеримости функции $f(x)$ на множестве E необходимо и достаточно, чтобы одно из следующих трех множеств*

$$E\,[f > a], \quad E\,[f < a], \quad E\,[f \leqslant a] \tag{8.19}$$

было измеримо при любом вещественном a.

Доказательство. 1) Из определения измеримости функции $f(x)$ из элементарных соотношений

$$E\,[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\Big[f \geqslant a + \frac{1}{n}\Big],$$

$$E\,[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\Big[f > a - \frac{1}{n}\Big]$$

и из теорем 8.3 и 8.6 вытекает, что измеримость (при любом вещественном a) множества $E\,[f > a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E.

2) Из соотношения $E\,[f < a] = E \setminus E\,[f \geqslant a]$ и из теорем 8.3 и 8.7 вытекает, что измеримость (при любом вещественном a) множества $E\,[f < a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E.

3) Наконец, из соотношения $E\,[f \leqslant a] = E \setminus E\,[f > a]$, из тех же теорем 8.3 и 8.7 и из доказанного в 1) вытекает, что измеримость (при любом вещественном a) множества $E\,[f \leqslant a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E. Теорема доказана.

Замечание. В силу теоремы 8.10 измеримость (при любом вещественном a) любого из трех множеств (8.19) можно принять за новое определение измеримости функции $f(x)$ на множестве E, эквивалентное определению, сформулированному выше.

2. Свойства измеримых функций.

1°. *Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любой измеримой части E_1 множества E.*

Доказательство непосредственно вытекает из тождества $E_1[f \geqslant a] \equiv E_1 \bigcap E\,[f \geqslant a]$ и из теоремы 8.6.

2°. *Если множество E представляет собой конечную или счетную сумму измеримых множеств E_n и если функция $f(x)$ измерима на каждом множестве E_n, то $f(x)$ измерима и на множестве E.*

Доказательство непосредственно вытекает из тождества $E\,[f \geqslant a] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n[f \geqslant a]$ и из теоремы 8.3.

3°. *Любая функция $f(x)$ измерима на множестве E меры нуль.*

В самом деле, любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

Определение 1. *Две определенные на измеримом множестве E функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными на этом множестве, если множество $E\,[f \neq g]$ имеет меру нуль.*

Для обозначения эквивалентных (на множестве E) функций $f(x)$ и $g(x)$ часто используют символику $f \approx g$

4°. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E и функция $f(x)$ измерима на E, то и функция $g(x)$ измерима на E.*

Доказательство. Положим $E_0 = E\,[f \neq g]$, $E_1 = E \setminus E_0$. Так как на E_1 функция $g(x)$ совпадает с $f(x)$, то (в силу свойства 1°) $g(x)$ измерима на E_1. Согласно свойству 3° $g(x)$ измерима и на E_0, а поэтому, согласно свойству 2°, $g(x)$ измерима и на E.

Определение 2. *Мы будем говорить, что некоторое свойство A справедливо почти всюду на множестве E, если множество точек E, на котором это свойство несправедливо, имеет меру нуль.*

Следствие из свойства 4°. *Если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду на измеримом множестве E, то $f(x)$ измерима на E.*

Доказательство. Заметим сначала, что если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом множестве F, то $f(x)$ измерима на F, ибо множество $F\,[f \geqslant a]$ при любом вещественном a замкнуто, а стало быть, и измеримо. Предположим, что $f(x)$ непрерывна на произвольном измеримом множестве E почти всюду и обозначим через R подмножество всех точек разрыва $f(x)$, имеющее меру нуль.

В силу свойств 2° и 3° достаточно доказать измеримость $f(x)$ на множестве $E_1 = E \setminus R$. Согласно теореме 8.9 найдется множество E_2 типа F_σ (см. п. 2 § 2), содержащееся в E_1 и такое, что $|E_2| = |E_1| = |E|$. В силу тех же свойств 2° и 3° достаточно доказать, что $f(x)$ измерима на множестве E_2. Но E_2 (как множество типа F_σ) представимо в виде счетной суммы замкнутых множеств F_n, на каждом из которых $f(x)$ непрерывна и потому (в силу сделанного выше замечания) измерима. А тогда в силу свойства 2° функция $f(x)$ измерима на E_2.

Замечание. Подчеркнем, что непрерывность функции $f(x)$ почти всюду на множестве E следует отличать от эквивалентности $f(x)$ на множестве E непрерывной функции. Так функция Дирихле $f(x) = 1$, если x рационально, и $f(x) = 0$, если x иррационально, не является непрерывной ни в одной точке сегмента $[0, 1]$ (см. гл. 4 вып. 1), однако эта функция эквивалентна на сегменте $[0, 1]$ непрерывной функции $g(x) \equiv 0$, ибо $f(x) \neq g(x)$ только на множестве всех рациональных точек сегмента $[0, 1]$, которое счетно и потому имеет меру нуль [1].

3. Арифметические операции над измеримыми функциями. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1. 1) *Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то и функция $|f(x)|$ измерима на этом множестве.* 2) *Если $f(x)$ измерима на множестве E, а C — любая постоянная, то каждая из функций $f(x) + C$ и $C \cdot f(x)$ измерима на множестве E.* 3) *Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, то множество $E\,[f > g]$ измеримо.*

Доказательство. 1) Достаточно учесть, что для любого неотрицательного a

$$E[|f| \geqslant a] = E\,[f \geqslant a] \bigcup E\,[f \leqslant -a]$$

и привлечь теорему 8.3. Если же $a < 0$, то $E[|f| > a]$ совпадает с E и также измеримо.

2) Достаточно для любого вещественного a воспользоваться

[1] Тот факт, что счетное множество точек имеет меру, равную нулю, вытекает из теоремы 8.8 и из того, что мера множества, состоящего из одной точки, равна нулю.

соотношениями

$$E\,[f + C \geqslant a] = E\,[f \geqslant a - C],$$

$$E\,[C \cdot f \geqslant a] = \begin{cases} E\left[f \geqslant \frac{a}{C}\right] & \text{при} \quad C > 0, \\ E\left[f \leqslant \frac{a}{C}\right] & \text{при} \quad C > 0. \end{cases}$$

Если же $C = 0$, то $C \cdot f(x) \equiv 0$ и также измерима.

3) Пусть $\{r_k\}$ — все рациональные точки бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$. Достаточно учесть, что

$$E\,[f > g] = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E\,[f > r_k] \bigcap E[g < r_k]),$$

и воспользоваться теоремами 8.3 и 8.6. Лемма доказана.

Опираясь на лемму 1 докажем следующую теорему.

Теорема 8.11. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают на множестве E конечные значения и измеримы на этом множестве, то каждая из функций $f(x)-g(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (для частного $f(x)/g(x)$ дополнительно требуется, чтобы все значения $g(x)$ были отличны от нуля) измерима на множестве E.*

Доказательство. 1) Для доказательства измеримости разности $f(x) - g(x)$ достаточно заметить, что для любого вещественного a множество $E\,[f - g > a]$ совпадает с измеримым (в силу леммы 1) множеством $E\,[f > g + a]$.

2) Для доказательства измеримости суммы $f(x)+g(x)$ достаточно учесть, что $f+g = f-(-g)$ и что функция $g(x)$ измерима согласно лемме 1.

3) Чтобы доказать измеримость произведения двух измеримых функций, убедимся сначала, что квадрат измеримой функции является измеримой функцией. В самом деле, если $a < 0$, то множество $E\,[f^2 > a]$ совпадает с E и потому измеримо. Если же $a \geqslant 0$, то множество $E\,[f^2 > a]$ совпадает с измеримым (согласно лемме 1) множеством $E\,[|f| > \sqrt{a}\,]$. Из измеримости квадрата измеримой функции и из измеримости суммы и разности измеримых функций, в силу соотношения $f \cdot g = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$, вытекает измеримость произведения $f(x)g(x)$.

4) В силу измеримости произведения двух измеримых функций для доказательства измеримости частного f/g достаточно доказать измеримость $1/g$, но она вытекает из теорем 8.3 и 8.6

и из соотношения

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = \begin{cases} E\,[g>0] \bigcap E\left[g < \frac{1}{a}\right] & \text{при} \quad a > 0, \\ E\,[g > 0] & \text{при} \quad a = 0, \\ E\,[g>0] \bigcup E\left[g < \frac{1}{a}\right] & \text{при} \quad a < 0. \end{cases}$$

Теорема полностью доказана.

4. Последовательности измеримых функций. Докажем несколько важных утверждений, относящихся к последовательностям измеримых функций.

Теорема 8.12. *Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых на множестве E функций, то как нижний, так и верхний пределы этой последовательности* [1] *являются измеримыми на множестве E функциями.*

Доказательство. Сначала убедимся в том, что если последовательность $\{g_n(x)\}$ состоит из измеримых на множестве E функций, то каждая из функций [2] $\varphi(x) = \inf\limits_n g_n(x)$ и $\psi(x) = \sup\limits_n g_n(x)$ является измеримой на множестве E. Достаточно принять во внимание соотношения

$$E\,[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\,[g_n < a],$$

$$E\,[\psi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\,[g_n > a]$$

и использовать теорему 8.3.

Обозначим теперь нижний и верхний пределы последовательности $\{f_n(x)\}$ соответственно через $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$. Для доказательства измеримости $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ на множестве E достаточно заметить, что

$$\underline{f}(x) = \sup_{n \geqslant 1} \left\{ \inf_{k \geqslant n} f_k(x) \right\}, \quad \overline{f}(x) = \inf_{n \geqslant 1} \left\{ \sup_{k \geqslant n} f_k(x) \right\},$$

и воспользоваться доказанным выше утверждением. Теорема доказана.

---

[1] В гл. 3 вып. 1 доказано существование нижнего и верхнего пределов у любой ограниченной последовательности. Здесь мы договариваемся считать, что если последовательность не является ограниченной снизу (сверху), то ее нижний (верхний) предел равен $-\infty$ $(+\infty)$.

[2] Запись $\varphi(x) = \inf\limits_n g_n(x)$ означает, что в каждой точке x значение $\varphi(x)$ является точной нижней гранью значений в этой точке $g_1(x), g_2(x), \ldots$ Аналогичный смысл имеет запись $\psi(x) = \sup\limits_n g_n(x)$.

Теорема 8.13. *Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, то функция $f(x)$ измерима на множестве E.*

Доказательство. В случае, когда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ не почти всюду, а всюду на E, утверждение теоремы об измеримости $f(x)$ сразу вытекает из теоремы 8.12. Если же $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ всюду на E, кроме множества E_0 меры нуль, то $f(x)$ измерима на $E \setminus E_0$ в силу теоремы 8.12 и измерима на E_0 как на множестве меры нуль (свойство 3° из п. 2), и потому измерима на множестве $E = (E \setminus E_0) \bigcup E_0$ (в силу свойства 2° из п. 2). Теорема доказана.

Введем теперь важное понятие сходимости последовательности по мере на данном множестве.

Определение. *Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, если для любого положительного числа ε*

$$\lim_{n\to\infty} |E\,[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]| = 0, \tag{8.20}$$

т. е. если для любых положительных ε и δ найдется номер N такой, что при $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|E\,[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]| < \delta$.

А. Лебег доказал следующую теорему.

Теорема 8.14. *Пусть E — измеримое множество конечной меры, и пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E вытекает сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ и по мере на множестве E.*

Доказательство. Положим $A = E\,[|f| = +\infty]$, $A_n = E\,[|f_n| = +\infty]$, $B = E \setminus E\,\big[\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f\big]$, $C = A + B + \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Тогда по условию теоремы $|C| = 0$ и всюду вне множества C последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ имеют конечные значения.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $E_n = E\,[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]$, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. Тогда, поскольку E_n содержится в R_n, справедливо неравенство $|E_n| \leqslant |R_n|$, и для доказательства (8.20) *достаточно доказать, что $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Обозначим через R пересечение всех множеств $R_1, R_2, \ldots$ и убедимся в том, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$. По построению R_{n+1} содержится в R_n для каждого номера n и, стало быть, для каждого номера n

$$R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1}),$$

причем множества, стоящие под знаком суммы, попарно не пересекаются. Но тогда, в силу теоремы 8.8, для каждого номера n

$$|R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|, \tag{8.21}$$

и, в силу сходимости ряда

$$|R_1 \setminus R| = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|,$$

остаток этого ряда (8.21) стремится к нулю при $n \to \infty$. Итак, $|R_n \setminus R| \to 0$ при $n \to \infty$. Но это в силу соотношения $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$ означает, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$.

Теперь для доказательства (8.20) нам остается доказать, что $|R| = 0$. Для этого в свою очередь *достаточно доказать, что R содержится в C*.

Пусть x_0 — любая точка, не принадлежащая C. Тогда для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(x_0, \varepsilon)$ такой, что $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$. Но это означает, что при $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$ точка x_0 не принадлежит E_n и тем более не принадлежит R_n и множеству R, являющемуся пересечением всех R_n.

Итак, всякая точка x_0, не принадлежащая C, не принадлежит и R. Но это и означает, что R содержится в C. Теорема доказана.

Замечание. Подчеркнем, что из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве E по мере не вытекает не только сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E, но даже сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ хотя бы в одной точке множества E. Достаточно рассмотреть пример, построенный в п. 3 § 2 гл. 1. Построенная в этом примере последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке сегмента $[0, 1]$, но поскольку каждая функция $f_n(x)$ отлична от нуля только на сегменте I_n, длина которого стремится к нулю при $n \to \infty$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ по мере на сегменте $[0, 1]$.

Тем не менее Ф. Рисс [1] доказал следующую теорему.

Теорема 8.15. *Пусть E — измеримое множество конечной меры, и пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ измери-*

[1] Ф. Рисс — венгерский математик (1880–1956).

мы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, то из этой последовательности можно выделить последовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что функции $f_n(x)$ и $f(x)$ принимают конечные значения не почти всюду, а всюду на E (в противном случае мы ввели бы те же множества A и A_n, что и при доказательстве предыдущей теоремы, и проводили бы все рассуждения для множества $E \setminus A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big)$. Из сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере на множестве E вытекает, что для любого номера k найдется номер n_k такой, что для меры множества $E_k = E\,[|f - f_{n_k}| \geqslant 1/k]$ справедливо неравенство $|E_k| \leqslant 1/2^k$. Положим, как и при доказательстве предыдущей теоремы, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$, $R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$. Тогда в силу свойства внешней меры (см. п. 1 § 2) $|R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty} |E_k|$, так что $|R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1}$. Таким образом, $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Как и в предыдущей теореме, доказывается, что $|R_n| \to$ $\to |R|$ при $n \to \infty$. Тем самым мы получаем, что $|R| = 0$.

Остается доказать, что всюду вне R подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится к $f(x)$. Пусть x — произвольная точка $E \setminus R$. Тогда x не принадлежит множеству R_N при некотором $N =$ $= N(x)$. Но это означает, что x не принадлежит E_k при $k \geqslant$ $\geqslant N(x)$. Иными словами, $|f(x) - f_{n_k}(x)| < 1/k$ при $k \geqslant N(x)$. Теорема доказана.

§ 4. Интеграл Лебега

1. Понятие интеграла Лебега от ограниченной функции. Назовем *разбиением* измеримого множества E всякое семейство T конечного числа измеримых и попарно непересекающихся подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ множества E, составляющих в сумме множество E.

Для обозначения разбиения множества E будем использовать символ $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ или более краткий символ $T = \{E_k\}$.

Рассмотрим на измеримом множестве E конечной меры произвольную ограниченную функцию $f(x)$. Для произвольного разбиения $T = \{E_k\}$ множества E обозначим символами M_k и m_k соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на частичном множестве E_k и введем в рассмотрение две суммы

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k| \quad \text{и} \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|,$$

называемые соответственно верхней и нижней суммами разбиения $T = \{E_k\}$.

Сразу же отметим, что для любого разбиения $T = \{E_k\}$

$$s_T \leqslant S_T. \tag{8.22}$$

Для любой ограниченной на множестве конечной меры E функции $f(x)$ как множество всех верхних сумм $\{S_T\}$, так и множество всех нижних сумм $\{s_T\}$ (отвечающих всевозможным разбиениям $T = \{E_k\}$ множества E) ограничено. Поэтому существует точная нижняя грань множества $\{S_T\}$, которую мы обозначим символом $\overline{I}$ и назовем верхним интегралом Лебега, и точная верхняя грань множества $\{s_T\}$, которую мы обозначим символом $\underline{I}$ и назовем нижним интегралом Лебега.

Определение. *Ограниченная на множестве конечной меры E функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Лебегу) на этом множестве, если $\underline{I} = \overline{I}$, т. е. если верхний и нижний интегралы Лебега этой функции совпадают.*

При этом число $\underline{I} = \overline{I}$ называется интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается символом

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Остановимся на некоторых свойствах верхних и нижних сумм и верхних и нижних интегралов Лебега.

Договоримся называть разбиение $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^{m}$ измельчением разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, если для любого номера i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ найдется номер $\nu(i)$, удовлетворяющий неравенствам $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$ и такой, что E_i^* содержится в $E_{\nu(i)}$.

Номер $\nu(i)$ может оказаться одним и тем же для различных номеров i, причем сумма множеств E_i^* по всем номерам i, для которых $\nu(i)$ равняется одному и тому же номеру k, равна, очевидно, множеству E_k, т. е.

$$\bigcup_{\nu(i)=k} E_i^* = E_k. \tag{8.23}$$

Далее договоримся называть разбиение $\widehat{T} = \{E_i\}$ произведением разбиений $T_1 = \{E_p^{(1)}\}$ и $T_2 = \{E_q^{(2)}\}$, если $\widehat{T}$

состоит из множеств E_i, представляющих собой пересечения всевозможных пар множеств $E_p^{(1)}$ и $E_q^{(2)}$, т. е. если каждое E_i равно $E_p^{(1)} \bigcap E_q^{(2)}$, причем перебираются всевозможные комбинации номеров p и q.

Очевидно, произведение $\widehat{T}$ двух разбиений T_1 и T_2 является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2 (причем любое другое разбиение T, являющееся измельчением как T_1, так и T_2, само является измельчением $\widehat{T}$).

Справедливы следующие свойства верхних и нижних сумм и верхних и нижних интегралов.

1°. *Если разбиение T^* является измельчением разбиения T, то $s_T \leqslant s_{T^*}$, $S_{T^*} \leqslant S_T$.*

Доказательство. Проведем доказательство для верхних сумм (ибо для нижних сумм оно проводится совершенно аналогично). Пусть $T^*=\{E_i^*\}_{i=1}^m$ является измельчением разбиения $T=\{E_k\}_{k=1}^n$, и пусть M_i^* — точная верхняя грань $f(x)$ на множестве E_i^* $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а M_k — точная верхняя грань $f(x)$ на множестве E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

По определению измельчения для каждого номера i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ найдется отвечающий ему номер $\nu(i)$, удовлетворяющий неравенствам $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$ и такой, что E_i^* содержится в $E_{\nu(i)}$, причем сумма множеств E_i^* по всем номерам i, для которых $\nu(i)$ равно одному и тому же номеру k, удовлетворяет равенству (8.23). Добавим к этому, что для всех номеров i, для которых $\nu(i)$ равняется одному и тому же номеру k, справедливо неравенство

$$M_i^* \leqslant M_k \tag{8.24}$$

(ибо точная верхняя грань на подмножестве не превосходит точную верхнюю грань на всем множестве).

Из определения верхней суммы и из соотношений (8.23) и (8.24) мы получим, что [1]

$$S_{T^*} = \sum_{i=1}^{m} M_i^*|E_i^*| = \sum_{k=1}^{n}\Bigl[\sum_{\nu(i)=k} M_i^*|E_i^*|\Bigr] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\Bigl[\sum_{\nu(i)=k} |E_i^*|\Bigr] = \sum_{k=1}^{n} M_k|E_k| = S_T.$$

[1] Мы учитываем, что из (8.23) и из того, что множества E_i^* попарно не пересекаются, в силу теоремы 8.8 вытекает, что $\sum\limits_{\nu(i)=k} |E_i^*| = |E_k|$.

2°. *Для двух совершенно произвольных разбиений* T_1 *и* T_2 *справедливо неравенство* $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

Доказательство. Пусть $\widehat{T}$ — произведение разбиений T_1 и T_2. Так как $\widehat{T}$ является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2, то в силу свойства 1° справедливы неравенства

$$s_{T_1} \leqslant s_{\widehat{T}}, \quad S_{\widehat{T}} \leqslant S_{T_2}. \tag{8.25}$$

Из неравенств (8.25) и (8.22) вытекает, что $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

3°. *Верхний и нижний интегралы Лебега связаны соотношением* $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное разбиение T_2. Так как для любого разбиения T_1 (в силу свойства 2°) справедливо неравенство $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$, то число S_{T_2}, является одной из верхних граней множества $\{s_{T_1}\}$ всех нижних сумм, и, стало быть, точная верхняя грань $\underline{I}$ указанного множества удовлетворяет неравенству $\underline{I} \leqslant S_{T_2}$. Так как последнее неравенство справедливо для произвольного разбиения T_2, то число $\underline{I}$ является одной из нижних граней множества $\{S_{T_2}\}$ всех верхних сумм, и, стало быть, точная нижняя грань $\overline{I}$ указанного множества удовлетворяет условию $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Следствие. *Всякая функция, интегрируемая по Риману, является интегрируемой по Лебегу, причем интегралы Лебега и Римана от такой функции совпадают.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема на $E = [a, b]$ по Риману (а стало быть, и ограничена на этом сегменте). Обозначив для такой функции символами $\underline{I}$ и $\overline{I}$ нижний и верхний интегралы Лебега и символами $\underline{I}_R$ и $\overline{I}_R$ нижний и верхний интегралы Дарбу (см. гл. 10 вып. 1), мы получим следующие неравенства [1])

$$\underline{I}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}_R. \tag{8.26}$$

Если функция интегрируема по Риману, то для нее $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, а стало быть, в силу (8.26) $\underline{I} = \overline{I}$, т. е. эта функция интегрируема по Лебегу. Более того, при $\underline{I}_R = \overline{I}_R$ из (8.26) вытекают равенства $\underline{I}_R = \underline{I} = \overline{I} = \overline{I}_R$, т. е. вытекает совпадение интегралов Римана и Лебега, ибо первый из этих интегралов равен числу $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, а второй — числу $\underline{I} = \overline{I}$.

В следующем пункте мы покажем, что класс функций, интегрируемых по Лебегу, является более широким, чем класс функ-

[1]) Ибо любое разбиение $E = [a, b]$ на частичные сегменты включается в класс разбиений множества E в смысле Лебега.

ций, интегрируемых по Риману. При этом выяснится целесообразность введения измеримых функций.

2. Класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций. Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 8.16. *Каково бы ни было измеримое множество E конечной меры, всякая ограниченная и измеримая на множестве E функция $f(x)$ интегрируема на этом множестве.*

Доказательство. Построим специальное разбиение множества E, называемое лебеговским. Обозначив через M и m точные грани $f(x)$ на множестве E, разобьем сегмент $[m, M]$ с помощью точек $m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M$ на частичные сегменты $[y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и обозначим через δ длину наибольшего из этих частичных сегментов, т. е. положим

$$\delta = \max_{k=1, 2, \ldots, n} (y_k - y_{k-1}).$$

Лебеговским разбиением множества E назовем разбиение $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, в котором $E_1 = E\,[y_0 \leqslant f \leqslant y_1]$, $E_k = E\,[y_{k-1} < f \leqslant y_k]$ при $k = 2, 3, \ldots, n$.

Пусть S_T и s_T — верхняя и нижняя суммы, отвечающие лебеговскому разбиению T и называемые лебеговскими верхней и нижней суммами. Заметим, что для любого номера k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливы неравенства

$$y_{k-1} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k, \tag{8.27}$$

в которых через M_k и m_k обозначены точные грани $f(x)$ на частичном множестве E_k. Умножая неравенства (8.27) на меру $|E_k|$ множества E_k и после этого суммируя их по всем номерам $k = 1, 2, \ldots, n$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}|E_k| \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k|E_k|.$$

Из полученных неравенств заключаем, что

$$0 \leqslant S_T - s_T \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k|E_k| - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}|E_k| = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})|E_k| < \delta|E|. \tag{8.28}$$

Так как для любого разбиения T справедливы неравенства $s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T$, то из (8.28) получим, что

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \delta|E|. \tag{8.29}$$

Поскольку $\delta > 0$ может быть фиксировано произвольно малым, то из (8.29) следует, что $\underline{I} = \overline{I}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В дополнении 2 к этой главе мы докажем, что измеримость ограниченной на измеримом множестве E функции $f(x)$ является не только достаточным, но и необходимым условием интегрируемости этой функции по Лебегу на множестве E.

З а м е ч а н и е 2. Пусть ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольный элемент частичного множества E_k лебеговского разбиения T. Сумму $\sigma_T(\xi_k, f) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |E_k|$ будем называть л е б е г о в с к о й и н т е г р а л ь н о й с у м м о й функции $f(x)$. Так как при произвольном выборе точек ξ_k на множествах E_k эта сумма заключена между нижней и верхней суммами соответствующего лебеговского разбиения T, то из неравенства (8.28) следует, что $\sigma_T(\xi_k, f)$ (вместе с S_T и s_T) стремится при $\delta \to 0$ к интегралу Лебега $\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f(x)\,dx$.

3. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.

1°. $\int\limits_E 1\,dx = |E|$.

Для доказательства достаточно заметить, что для функции $f(x) \equiv 1$ как верхняя, так и нижняя сумма любого разбиения T множества E равна $|E|$.

2°. *Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на множестве E конечной меры и α — любое вещественное число, то и функция $[\alpha \cdot f(x)]$ интегрируема на множестве E, причем*

$$\int\limits_E [\alpha \cdot f(x)]\,dx = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx. \tag{8.30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного разбиения $T = \{E_k\}$ множества E обозначим верхнюю и нижнюю суммы функции $f(x)$ символами S_T и s_T, а верхнюю и нижнюю суммы функции $[\alpha \cdot f(x)]$ символами $S_T^{(\alpha)}$ и $s_T^{(\alpha)}$. Тогда, очевидно,

$$S_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha S_T & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha s_T & \text{при} \quad \alpha < 0, \end{cases} \quad s_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot s_T & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot S_T & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.31}$$

Если обозначить через $\overline{I}$ и $\underline{I}$ верхний и нижний интегралы функции $f(x)$, а через $\overline{I}^{(\alpha)}$ и $\underline{I}^{(\alpha)}$ верхний и нижний интегралы функции $[\alpha \cdot f(x)]$, то из (8.31) следует, что

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \overline{I} & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot \underline{I} & \text{при} \quad \alpha < 0, \end{cases} \quad \underline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \underline{I} & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot \overline{I} & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.32}$$

В силу интегрируемости $f(x)$ справедливо равенство

$$\underline{I} = \overline{I} = \int_E f(x)\,dx,$$

а потому из неравенств (8.32) следует, что при любом α

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \underline{I}^{(\alpha)} = \alpha \cdot \int_E f(x)\,dx.$$

Это и означает, что интеграл в левой части (8.30) существует и что справедливо равенство (8.30).

3°. *Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E, то и сумма этих функций $[f_1(x)+f_2(x)]$ интегрируема на множестве E, причем*

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_E f_1(x)\,dx + \int_E f_2(x)\,dx. \tag{8.33}$$

Доказательство. Положим $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$, и пусть $T = \{E_k\}$ — произвольное разбиение множества E. Обозначим для функции $f(x)$ точные грани на частичном множестве E_k через M_k и m_k, верхнюю и нижнюю суммы разбиения T через S_T и s_T, верхний и нижний интегралы Лебега через $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Аналогичные величины для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обозначим теми же символами, что и для $f(x)$, но с индексами (1) и (2) соответственно.

Заметим, что *точная верхняя (точная нижняя) грань суммы не больше (не меньше) суммы точных верхних (точных нижних) граней слагаемых.* Отсюда следует, что для любого номера k

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M_k^{(1)} + M_k^{(2)}$$

и, стало быть, для любого разбиения T

$$s_T^{(1)} + s_T^{(2)} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_T^{(1)} + S_T^{(2)}.$$

Из последних неравенств в свою очередь следует, что

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.34}$$

Так как (в силу интегрируемости $f_1(x)$ и $f_2(x)$)

$$\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int_E f_1(x)\,dx, \quad \underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int_E f_2(x)\,dx,$$

то из (8.34) получим, что

$$\underline{I} = \overline{I} = \int_E f_1(x)\,dx + \int_E f_2(x)\,dx.$$

Но это и означает, что интеграл в левой части (8.33) существует и что справедливо равенство (8.33).

Следствие. Непосредственно из 2° и 3° вытекает линейное свойство интеграла: *если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E и если α и β — произвольные вещественные числа, то функция $[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)]$ интегрируема на множестве E, причем*

$$\int_E [\alpha f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)]\, dx = \alpha \int_E f_1(x)\, dx + \beta \int_E f_2(x)\, dx.$$

4°. *Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом из непересекающихся множеств конечной меры E_1 и E_2, то $f(x)$ интегрируема и на сумме E множеств E_1 и E_2, причем*

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{E_1} f(x)\, dx + \int_{E_2} f(x)\, dx. \tag{8.35}$$

Это свойство обычно называют аддитивностью интеграла.

Доказательство. Заметим, что объединение произвольного разбиения T_1 множества E_1 и произвольного разбиения T_2 множества E_2 образует разбиение T множества $E = E_1 \bigcup E_2$. Обозначим верхние суммы $f(x)$, отвечающие разбиениям T_1, T_2 и T, соответственно через S_{T_1}, S_{T_2} и S_T, а нижние суммы $f(x)$, отвечающие разбиениям T_1, T_2 и T, соответственно через s_{T_1}, s_{T_2} и s_T. Тогда, очевидно,

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2}, \quad s_T = s_{T_1} + s_{T_2}. \tag{8.36}$$

Обозначим верхний и нижний интегралы функции $f(x)$ на множестве E_1 через $\overline{I}^{(1)}$ и $\underline{I}^{(1)}$, на множестве E_2 через $\overline{I}^{(2)}$ и $\underline{I}^{(2)}$ и на множестве E через $\overline{I}$ и $\underline{I}$.

Из равенств (8.36) и из того, что точная верхняя (точная нижняя) грань суммы не больше (не меньше) суммы точных верхних (точных нижних) граней слагаемых, заключаем, что

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.37}$$

Так как (в силу интегрируемости $f(x)$ на E_1 и на E_2) $\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int_{E_1} f(x)\, dx$, $\underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int_{E_2} f(x)\, dx$, то из (8.37) получим, что

$$\underline{I} = \overline{I} = \int_{E_1} f(x)\, dx + \int_{E_2} f(x)\, dx.$$

Но это и означает, что интеграл, стоящий в левой части (8.35), существует и что справедливо равенство (8.35).

5°. *Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E и если всюду на этом множестве $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, то*

$$\int_E f_1(x)\,dx \geqslant \int_E f_2(x)\,dx. \tag{8.38}$$

Доказательство. Так как все нижние суммы функции $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ неотрицательны, то $\underline{I} \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\int\limits_E F(x)\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx - \int\limits_E f_2(x)\,dx \geqslant 0$ (существование этого интеграла и написанное нами равенство вытекают из уже доказанного нами линейного свойства). Тем самым (8.38) доказано.

4. Интеграл Лебега от неотрицательной неограниченной функции и его свойства. Теперь мы переходим к определению интеграла Лебега для случая, когда измеримая функция $f(x)$ не является ограниченной. Сначала *будем считать, что $f(x) \geqslant 0$ всюду на множестве конечной меры E.*

Для любого $N > 0$ положим

$$(f)_N(x) = \min\{N,\ f(x)\}, \tag{8.39}$$

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx. \tag{8.40}$$

Заметим, что для любой измеримой на множестве E функции $f(x)$ функция (8.39) также является измеримой [1]) и потому интеграл (8.40) существует. Отметим также, что из (8.39) и (8.40) вытекает, что *$I_N(f)$ возрастает с увеличением N.*

Определение. *Если существует конечный предел $I_N(f)$ при $N \to \infty$, то функция $f(x)$ называется суммируемой (по Лебегу) на множестве E, а указанный предел называется интегралом от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается символом $\int\limits_E f(x)\,dx$.*

Итак, по определению

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} I_N(f).$$

Убедимся в том, что *если неотрицательная на множестве E функция $f(x)$ суммируема на этом множестве, то $f(x)$ может обращаться в $+\infty$ только на подмножестве E, имеющем меру нуль.* В самом деле, положим $E_0 = E\,[f = +\infty]$ и учтем,

[1]) Ибо для любого вещественного a является измеримым множество

$$E\,[(f)_N > a] = \begin{cases} E\,[f > a] \text{ при } a < N, \\ \text{пустое множество при } a \geqslant N. \end{cases}$$

что из (8.40) и (8.39) (в силу свойств 4° и 5° из предыдущего пункта) вытекает цепочка неравенств

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} N\,dx \geqslant N|E_0|.$$

Но из неравенства $I_N(f) \geqslant N|E_0|$ следует, что предположение $|E_0| > 0$ привело бы к тому, что $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(f)$ был бы равен $+\infty$.

Добавим к этому, что *всякая функция $f(x)$ суммируема на множестве меры нуль*. (Этот факт очевиден.)

Переходя к выяснению общих свойств суммируемых функций, прежде всего отметим, что *для неотрицательных суммируемых функций справедливы свойства* 2°–5°, *установленные в предыдущем пункте для ограниченных интегрируемых функций* [1]).

В качестве примера приведем доказательство свойства 3°. Из (8.39) сразу же вытекают следующие неравенства:

$$(f_1)_{N/2}(x) + (f_2)_{N/2}(x) \leqslant (f_1+f_2)_N(x) \leqslant (f_1)_N(x) + (f_2)_N(x),$$

справедливые при любом $N > 0$ в любой точке x множества E. Интегрируя эти неравенства по множеству E [2]), мы и установим свойство 3° для произвольных неотрицательных суммируемых функций f_1 и f_2.

Доказательство для таких функций остальных свойств 2°–5° предоставим читателю.

Перейдем к выяснению еще двух фундаментальных свойств произвольных неотрицательных суммируемых функций.

***Теорема 8.17* (*свойство полной аддитивности*).** *Пусть множество E представляет собой сумму счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств E_k, т. е. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

I. *Если неотрицательная функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то $f(x)$ суммируема и на каждом множестве E_k, причем справедливо равенство*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.41}$$

II. *Если неотрицательная на множестве E функция $f(x)$ суммируема на каждом множестве E_k и если ряд в правой части* (8.41) *сходится, то функция $f(x)$ суммируема и на множестве E и для нее справедливо равенство* (8.41).

[1]) Постоянная α в свойстве 2° должна быть при этом неотрицательной.

[2]) При этом мы используем свойства 5° и 3° для ограниченных интегрируемых функций.

Доказательство. 1) Сначала докажем теоремы I и II для ограниченной неотрицательной интегрируемой функции $f(x)$. Пусть существует постоянная M такая, что $f(x) \leqslant M$ всюду на E. Положим $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$ и заметим, что в силу теоремы 8.8 $|R_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \to 0$ (при $n \to \infty$). Но тогда на основании свойств 4°, 5° и 1°

$$\int\limits_E f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx = \int\limits_{R_n} f(x)\,dx \leqslant M \int\limits_{R_n} dx = M|R_n| \to 0$$

(при $n \to \infty$). Последнее соотношение доказывает теоремы I и II для случая ограниченной интегрируемой функции.

2) Докажем теперь теорему I для произвольной неотрицательной суммируемой функции. Суммируемость $f(x)$ на каждом E_k сразу же вытекает из неравенства $\int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \int\limits_E (f)_N(x)\,dx$ и из неубывания по N интеграла в левой его части. Остается доказать равенство (8.41). С помощью доказанного в п. 1) и неравенства $(f)_N(x) \leqslant f(x)$ получим

$$\int\limits_E (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.42}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_E f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.43}$$

С другой стороны, в силу свойств, доказанных в предыдущем пункте, для любого номера m

$$\int\limits_E (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx,$$

и устремляя в последнем неравенстве сначала N к ∞, а уж затем m к ∞, мы получим неравенство

$$\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx,$$

которое в соединении с (8.43) доказывает (8.41).

3) Докажем, наконец, теорему II для произвольной неотрицательной суммируемой функции. Заметим, что достаточно

доказать только суммируемость $f(x)$ на множестве E (ибо равенство (8.41) будет при этом вытекать из уже доказанной нами теоремы I).

Но суммируемость $f(x)$ на E сразу же вытекает из неравенства (8.42) и из сходимости ряда в правой части этого неравенства. Теорема полностью доказана.

Теорема 8.18 (свойство абсолютной непрерывности интеграла). *Если функция $f(x)$ неотрицательна и суммируема на множестве E, то для любого положительного ε найдется положительное число δ такое, что, каково бы ни было измеримое подмножество e множества E с мерой $|e|$, меньшей δ, справедливо неравенство*

$$\int_e f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) Пусть сначала неотрицательная функция $f(x)$ ограничена, т. е. найдется M такое, что $f(x) \leqslant M$. Тогда (на основании свойств установленных в предыдущем пункте)

$$\int_e f(x)\,dx \leqslant M \int_e dx = M|e| < M\delta < \varepsilon \quad \text{при} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{M}.$$

2) Докажем теперь теорему для произвольной неотрицательной суммируемой функции $f(x)$. Фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, мы (на основании определения суммируемости) можем выбрать $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_E [f(x) - (f)_N(x)]\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.44}$$

С помощью (8.44) и неравенства $(f)_N(x) \leqslant N$, получим

$$\int_e f(x)\,dx = \int_e [f(x) - (f)_N(x)]\,dx + \int_e (f)_N(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + N\int_e dx = \\ = \frac{\varepsilon}{2} + N\cdot|e| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta < \varepsilon,$$

если только $\delta < \varepsilon/(2N(\varepsilon))$. Теорема доказана.

В заключение укажем еще два свойства, справедливые исключительно для неотрицательных суммируемых функций.

Условие эквивалентности нулю неотрицательной суммируемой функции. *Если функция $f(x)$ неотрицательна, измерима и суммируема на множестве E и* *если интеграл* $\int\limits_E f(x)\,dx$ *равен нулю, то функция* $f(x)$ *эквивалентна тождественному нулю на множестве* E.

Доказательство. Достаточно доказать, что мера множества $E\,[f > 0]$ равна нулю. Убедимся сначала в том, что для любого $a > 0$ равна нулю мера множества $E_a = E\,[f > a]$. В самом деле, если бы мера $|E_a|$ была положительна, то получили бы неравенство $\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{E_a} f(x)\,dx \geqslant aE_a > 0$, противоречащее условию $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$. Теперь остается заметить, что справедливо равенство $E\,[f > 0] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\,[f > 1/k]$, из которого следует, что $|E\,[f > 0]| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |E\,[f > 1/k]| = 0$.

Мажорантный признак суммируемости неотрицательной измеримой функции. *Если функция* $f_1(x)$ *неотрицательна и измерима на множестве* E, *а функция* $f_2(x)$ *суммируема на* E *и если всюду на* E *справедливо неравенство* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, *то и функция* $f_1(x)$ *суммируема на множестве* E.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\int\limits_E (f_1)_N(x)\,dx \leqslant \int\limits_E (f_2)_N(x)\,dx \leqslant \int\limits_E f_2(x)\,dx,$$

и учесть, что интеграл, стоящий в левой части последнего неравенства, является неубывающей функцией N.

5. Интеграл Лебега от неограниченной функции произвольного знака. Предположим теперь, что измеримая функция $f(x)$ не является, вообще говоря, ограниченной на множестве E и принимает на этом множестве значения любых знаков.

Введем в рассмотрение две rrнеотрицательные функции

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \quad \text{и} \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

первая из которых $f^+(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве $E\,[f \geqslant 0]$ и равна нулю на множестве $E\,[f < 0]$, а вторая $f^-(x)$ совпадает с $-f(x)$ на множестве $E\,[f < 0]$ и равна нулю на множестве $E\,[f \geqslant 0]$. Очевидно, $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется суммируемой на множестве* E, *если на этом множестве суммируема каждая из неотрицательных функций* $f^+(x)$ *и* $f^-(x)$. *При этом разность интегралов* $\int\limits_E f^+(x)\,dx - \int\limits_E f^-(x)\,dx$ *называется* *интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается символом $\int\limits_E f(x)\,dx$.*

Итак, по определению

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E f^+(x)\,dx - \int\limits_E f^-(x)\,dx. \tag{8.45}$$

Вместо термина «суммируемая функция» часто употребляют термин «интегрируемая функция».

Совокупность всех суммируемых на множестве E функций обычно обозначают символом $L(E)$ или $L^1(E)$. Запись $f(x) \in L(E)$ означает, что $f(x)$ принадлежит классу $L(E)$, т. е. является измеримой и суммируемой на множестве E функцией.

Подчеркнем, что *измеримая на множестве E функция $f(x)$ суммируема на E тогда и только тогда, когда суммируема на E функция $|f(x)|$.*

В самом деле, если $f(x)$ суммируема на E, то по определению каждая из функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируема на E, а стало быть, и сумма указанных функций $f^+(x)+f^-(x)$, равная $|f(x)|$, суммируема на E. Если же суммируема на множестве E функция $|f(x)|$, то из измеримости на E каждой из функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ и из неравенств $f^+(x) \leqslant |f(x)|$, $f^-(x) \leqslant |f(x)|$, в силу мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции (см. конец предыдущего пункта), вытекает, что каждая из функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируема на E, а это и означает, что функция $f(x)$ суммируема на множестве E.

Таким образом, для интеграла Лебега (в отличие от интеграла Римана) интегрируемость функции $f(x)$ эквивалентна интегрируемости $|f(x)|$.

Перейдем к вопросу о свойствах произвольных суммируемых функций.

Сразу же отметим, что для произвольных суммируемых функций справедливы свойства 2°–5°, установленные в п. 3 для ограниченных интегрируемых функций и в п. 4 для неотрицательных суммируемых функций. Справедливость указанных свойств для произвольных суммируемых функций сразу же вытекает из равенства (8.45) и из справедливости указанных свойств для неотрицательных суммируемых функций.

Наконец, для произвольных суммируемых функций остаются справедливыми свойства полной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега (доказательство этих свойств для неотрицательных суммируемых функций составляло содержание теорем 8.17 и 8.18 из предыдущего пункта). Приведем формулировку и краткие указания по поводу доказательства этих свойств.

Теорема 8.17* **(свойство полной аддитивности).** *Пусть множество E представляет собой сумму счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств E_k, т. е. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

I. *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то $f(x)$ суммируема и на каждом множестве E_k, причем справедливо равенство* (8.41).

II. *Если функция $f(x)$ измерима и суммируема на каждом множестве E_k и если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|\, dx,$$

то $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство (8.41).

Для доказательства теоремы I достаточно применить теорему 8.17, I к неотрицательным функциям $f^{+}(x)$ и $f^{-}(x)$ и воспользоваться равенством (8.45).

Для доказательства теоремы II достаточно учесть, что в силу теоремы 8.17, II функция $|f(x)|$ суммируема на E. Но тогда и $f(x)$ суммируема на E и в силу уже доказанной теоремы I справедливо равенство (8.41).

Теорема 8.18* **(свойство абсолютной непрерывности интеграла).** *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то для любого положительного ε найдется положительное число δ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество e множества E с мерой $|e|$, меньшей δ, справедливо неравенство $\left|\int\limits_{e} f(x)\, dx\right| < \varepsilon$.*

Для доказательства достаточно применить теорему 8.18 к неотрицательной функции $|f(x)|$ и воспользоваться неравенством $\left|\int\limits_{e} f(x)\, dx\right| \leqslant \int\limits_{e} |f(x)|\, dx$.

6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Определение. *Будем говорить, что последовательность суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к суммируемой на этом же множестве функции $f(x)$ в $L(E)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0. \tag{8.46}$$

Сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в $L(E)$ обеспечивает возможность почленного интегрирования последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E, ибо из (8.46) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx$.

Заметим, что *если последовательность измеримых и суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой и суммируемой на E функции $f(x)$ в $L(E)$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и по мере на E.*

В самом деле, фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначив через E_n множество $E\,[|f - f_n| > \varepsilon]$, будем иметь

$$\int\limits_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{E_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \varepsilon |E_n|,$$

так что из (8.46) следует, что $|E_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, сходимость по мере на E является более слабой, чем сходимость в $L(E)$ (и, как уже установлено выше, более слабой, чем сходимость почти всюду на E).

Докажем, однако, что при дополнительных предположениях из сходимости по мере на E будет следовать сходимость в $L(E)$.

***Теорема 8.19* (*теорема Лебега*).** *Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой на E функции $f(x)$ по мере на E и если существует суммируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в $L(E)$.*

Доказательство. Сначала убедимся, что предельная функция $f(x)$ сама удовлетворяет почти всюду на E неравенству $|f(x)| \leqslant F(x)$. Из теоремы 8.15 вытекает, что из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E. Переходя в неравенстве $|f_{n_k}(x)| \leqslant F(x)$ к пределу при $k \to \infty$, мы и получим, что $|f(x)| \leqslant F(x)$ для почти всех точек E. Из доказанного нами неравенства и из мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции (см. конец п. 4) следует, что $f(x)$ суммируема на E.

Фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначив через E_n множество $E\,[|f - f_n| > \varepsilon]$, будем иметь [1]

$$\int\limits_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = \int\limits_{E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx + \int\limits_{E \setminus E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant \leqslant \int\limits_{E_n} F(x)\,dx + \varepsilon |E|.$$

[1] Мы учитываем при этом, что $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2F(x)$ почти всюду на E.

Из этого неравенства и из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает, что для установления сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в $L(E)$ достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} F(x)\,dx = 0$, но это сразу вытекает из теоремы 8.18* об абсолютной непрерывности интеграла и из того, что по условию $|E_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Следствие (теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). *Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции $f(x)$ и если существует суммируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то $f(x)$ суммируема на E и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx. \tag{8.47}$$

Доказательство. Из теоремы 8.13 вытекает измеримость $f(x)$ на множестве E. После этого достаточно заметить, что из сходимости почти всюду на E вытекает (в силу теоремы 8.14) сходимость по мере на E, и привлечь теорему 8.19.

Теорема 8.20 (теорема Б. Леви). *Пусть каждая функция $f_n(x)$ измерима и суммируема на множестве E, и пусть для всех номеров n и для почти всех точек множества E справедливо неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Пусть далее существует постоянная M такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\left|\int\limits_E f_n(x)\,dx\right| \leqslant M$. Тогда для почти всех точек x из множества E существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем предельная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство* (8.47).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что все $f_n(x)$ неотрицательны почти всюду на E (иначе вместо $f_n(x)$ мы взяли бы неотрицательные функции $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$). Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает почти всюду на E, то почти во всех точках E определена предельная функция $f(x)$, которая принимает в этих точках либо конечные значения, либо значения, равные $+\infty$. Если мы докажем, что эта предельная функция суммируема на множестве E, то из этого будет следовать, что $f(x)$ почти всюду на E имеет конечные значения, т. е. будет следовать сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E, а отсюда и из неравенства $f_n(x) \leqslant f(x)$ (почти всюду на E), в силу следствия из предыдущей теоремы, будет вытекать равенство (8.47).

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить суммируемость предельной функции $f(x)$ на множестве E.

Заметим, что для любого $N > 0$ последовательность [1] $\{(f_n)_N(x)\}$ сходится к $(f)_N(x)$ почти всюду на E, причем ограниченная функция $(f)_N(x)$ суммируема на E и для всех номеров n и почти всех точек E справедливо неравенство $(f_n)_N(x) \leqslant \leqslant (f)_N(x)$.

Это обеспечивает применимость к последовательности $\{(f_n)_N(x)\}$ следствия из предыдущей теоремы, в силу которого

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n)_N(x)\,dx = \int_E (f)_N(x)\,dx.$$

Из этого соотношения и из неравенства [2]

$$\int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E (f_n)_N(x)\,dx$$

заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E (f)_N(x)\,dx,$$

и поскольку $\int\limits_E f_n(x)\,dx \leqslant M$ для всех номеров n, то и

$$\int_E (f)_N(x)\,dx \leqslant M. \tag{8.48}$$

Из неравенства (8.48) и из неубывания по N интеграла в левой части этого равенства вытекает существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f)_N(x)\,dx,$$

которое и означает суммируемость $f(x)$ на множестве E. Теорема доказана.

Сформулируем теперь теорему 8.20 в терминах функционального ряда (в таком виде эта теорема имеет широкое применение).

Если каждая функция $u_n(x)$ неотрицательна почти всюду на множестве E, измерима и суммируема на этом множестве и если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx,$$

[1] Напомним, что для любого $N > 0$ и для любой функции $F(x)$ мы полагаем $(F)_N(x) = \min\{N,\, F(x)\}$.

[2] Это неравенство следует из того, что $(f_n)_N(x) = \min\{N,\, f_n(x)\}$.

то почти всюду на E сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{8.49}$$

причем сумма $S(x)$ ряда (8.49) суммируема на множестве E и удовлетворяет условию

$$\int_E S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx.$$

Теорема 8.21 (теорема Фату). *Если последовательность измеримых и суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции $f(x)$ и если существует постоянная A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\int\limits_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, то предельная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и для нее справедливо неравенство $\int\limits_E |f(x)|\,dx \leqslant A$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функции $g_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} |f_k(x)|$ [1] и заметим, что каждая функция $g_n(x)$ неотрицательна и измерима [2] на множестве E и что последовательность $\{g_n(x)\}$ убывает на множестве E и для почти всех точек E сходится к $|f(x)|$. Кроме того, для любого номера n всюду на множестве E справедливо неравенство

$$g_n(x) \leqslant |f_n(x)|, \tag{8.50}$$

из которого (в силу мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции, см. конец п. 4) вытекает суммируемость $g_n(x)$ на множестве E. Применяя к последовательности $\{g_n(x)\}$ теорему 8.20, мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,dx = \int_E |f(x)|\,dx. \tag{8.51}$$

Так как для любого номера n, в силу (8.50), $\int\limits_E g_n(x)\,dx \leqslant \int\limits_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, то из (8.51) получим, что $\int\limits_E |f(x)|\,dx \leqslant A$. Теорема доказана.

[1] Эта запись означает, что для каждого x значение $g_n(x)$ является точной нижней гранью значений $|f_n(x)|$, $|f_{n+1}(x)|$, …

[2] Измеримость $g_n(x)$ на E вытекает из теоремы 8.12 предыдущего параграфа.

7. Классы Лебега $L^p(E)$. Напомним, что линейное пространство R называется нормированным, если выполнены следующие два требования: 1) известно правило, посредством которого каждому элементу f пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой этого элемента и обозначаемое символом $\|f\|_R$, 2) указанное правило удовлетворяет следующим трем аксиомам:

1°. $\|f\|_R > 0$, если $f \neq \mathbf{0}$ [1], $\|f\|_R = 0$, если $f = \mathbf{0}$.

2°. $\|\lambda f\|_R = |\lambda| \cdot \|f\|_R$ для любого элемента f и любого вещественного числа λ.

3°. Для любых двух элементов f и g справедливо так называемое неравенство треугольника $\|f+g\|_R \leqslant \|f\|_R + \|g\|_R$.

Будем рассматривать в линейном нормированном пространстве R произвольную последовательность элементов $\{f_n\}$.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов линейного нормированного пространства R называется фундаментальной, если*

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \|f_m - f_n\|_R = 0.$$

Определение 2. *Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ элементов линейного нормированного пространства R сходится в R к элементу этого пространства f, если*

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_R = 0.$$

Такого рода сходимость называют еще сходимостью по норме или сильной сходимостью в R.

Легко доказать, что *всякая сходящаяся в R последовательность элементов $\{f_n\}$ всегда является фундаментальной.* В самом деле, если существует некоторый элемент f такой, что $\|f_n - f\|_R \to 0$ при $n \to \infty$, то из неравенства треугольника

$$\|f_m - f_n\|_R \leqslant \|f_m - f\|_R + \|f - f_n\|_R$$

сразу же следует, что

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \|f_m - f_n\|_R = 0.$$

Естественно возникает вопрос о том, является ли всякая фундаментальная последовательность элементов $\{f_n\}$ сходящейся в R к некоторому элементу f пространства R.

---

[1] $\mathbf{0}$ обозначает нулевой элемент линейного пространства R

Определение 3. *Линейное нормированное пространство R называется полным, если всякая фундаментальная последовательность элементов $\{f_n\}$ пространства R сходится в R к некоторому элементу f этого пространства.*

В настоящем пункте мы рассмотрим важный класс линейных нормированных пространств, введенных Лебегом, и докажем полноту этих пространств.

Пусть вещественное число p удовлетворяет условию $p \geqslant 1$.

Определение 4. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу (или пространству) $L^p(E)$, если функция $f(x)$ измерима на множестве E, а функция $|f(x)|^p$ суммируема на этом множестве* [1].

Легко убедиться, что при любом $p \geqslant 1$ класс $L^p(E)$ является линейным нормированным пространством, если в нем ввести норму с помощью соотношения

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \Big(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Линейность такого пространства очевидна. Легко проверить справедливость аксиом 1°–3° из определения нормированного пространства. Аксиома 1° сразу вытекает из условия эквивалентности нулю неотрицательной суммируемой функции (см. конец п. 4). Аксиома 2° совершенно очевидна. Аксиома 3° при $p = 1$ очевидна, а при $p > 1$ вытекает из установленного в дополнении 1 к гл. 10 вып. 1 неравенства Минковского [2]

$$\Big(\int\limits_E |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_E |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Докажем теперь следующую *основную* теорему [3].

Теорема 8.22. *При любом $p \geqslant 1$ пространство $L^p(E)$ является полным.*

---

[1] При этом мы не будем различать эквивалентных на множестве E функций, рассматривая их как один элемент $L^p(E)$.

[2] В указанном дополнении неравенство Минковского установлено для случая интеграла Римана. В случае интеграла Лебега достаточно установить это неравенство лишь для ограниченных функций $f(x)$ и $g(x)$, а для таких функций доказательство его проводится по той же схеме, что и для интеграла Римана (достаточно рассмотреть лебеговское разбиение множества E).

[3] В специальной форме (относящейся к так называемой тригонометрической системе) эта теорема была доказана в 1907 г. Ф. Риссом и независимо от него Фишером. В 1909 г. Вейль заметил, что связь с тригонометрической системой несущественна и дал приводимую нами более общую формулировку (для $p = 2$).

Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\}$ — произвольная фундаментальная последовательность элементов пространства $L^p(E)$. Положим

$$\varepsilon_n = \sup_{m \geqslant n} \|f_m - f_n\|_p$$

(точная верхняя грань величины $\|f_m - f_n\|_p$ берется по множеству всех m, удовлетворяющих неравенству $m \geqslant n$). Из условия фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ вытекает, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что можно выбрать подпоследовательность номеров n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ такую, что будет сходиться ряд [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k}. \tag{8.52}$$

Из установленного в дополнении 1 к гл. 10 вып. 1 неравенства Гёльдера [2])

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q}$$

$\left(p > 1,\ q = \dfrac{p}{p-1}\right)$ вытекает, что при $p > 1$

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \leqslant \left\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right\|_p \cdot \left(\int_E 1^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_{n_k} \cdot |E|^{\frac{p-1}{p}},$$

а из последнего неравенства и из сходимости ряда (8.52) вытекает сходимость ряда [3])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx. \tag{8.53}$$

[1]) Достаточно взять n_k таким, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_{n_k} \leqslant 2^{-k}$.

[2]) В указанном дополнении неравенство Гёльдера установлено для интеграла Римана. В случае интеграла Лебега достаточно установить это неравенство лишь для ограниченных функций $f(x)$ и $g(x)$, но для таких функций это доказательство проводится по той же схеме, что и для интеграла Римана (достаточно рассмотреть лебеговское разбиение множества E).

[3]) При $p = 1$ неравенство Гёльдера применять не нужно, ибо ряд (8.53) совпадает с (8.52).

Из сходимости ряда (8.53) и из теоремы 8.20 (см. формулировку этой теоремы в терминах ряда) заключаем, что почти всюду на E сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

а стало быть, и ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Но это означает, что k-я частичная сумма указанного ряда, равная $f_{n_{k+1}}(x)$ сходится почти всюду на E к некоторой функции $f(x)$. Далее, поскольку $\|f_m(x) - f_{n_k}(x)\|_p \leqslant \varepsilon_m$ при любом номере m и любом $n_k \geqslant m$ и поскольку $[f_m(x) - f_{n_k}(x)] \to$ $\to [f_m(x) - f(x)]$ при $k \to \infty$ почти всюду на E, то по теореме Фату 8.21 $\|f_m(x) - f(x)\|_p \leqslant \varepsilon_m$ (при любом номере m), а это и означает сходимость последовательности $\{f_m(x)\}$ в $L^p(E)$ к $f(x)$. Теорема доказана.

8. Заключительные замечания. Центральным моментом теории Лебега является *замкнутость относительно операции предельного перехода* и в теории измеримых множеств (теоремы 8.3 и 8.8), и в теории измеримых функций (теорема 8.13), и в теории интеграла (теорема 8.22).

Мы проводили все изложение для случая одной переменной. В случае n переменных схема построения теории остается той же самой, но за исходное (основное) множество вместо интервала (a, b) следует взять открытый n-мерный параллелепипед $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k < x_k < b_k)$ (для чисел a_k допускаются значения $-\infty$, а для чисел b_k — значения $+\infty$). В n-мерном случае качественно новым моментом теории является только так называемая теорема Фубини о сведении n-кратного интеграла Лебега к повторному интегралу меньшей кратности. Мы не будем останавливаться на этой теореме.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО РИМАНУ

Не ограничивая общности, будем рассматривать функции, определенные на сегменте $[0, 1]$. Для каждой такой функции $f(x)$ введем так называемые функции Бэра $m(x)$ и $M(x)$, являющиеся в каждой точке соответственно верхним и нижним пределами в этой точке рассматриваемой функции $f(x)$ [1]. Итак, по определению

$$m(x) = \varliminf_{y\to x} f(y), \qquad M(x) = \varlimsup_{y\to x} f(y).$$

Заметим, что функции Бэра можно определить и по другому:

$$m(x) = \lim_{\delta\to 0+0}\left[\inf_{v_\delta(x)} f(y)\right], \qquad M(x) = \lim_{\delta\to 0+0}\left[\sup_{v_\delta(x)} f(y)\right],$$

где $v_\delta(x)$ — δ-окрестность точки x (в случае, если x — граничная точка $[0, 1]$, вместо δ-окрестности следует брать соответсгвенно правую или левую δ-полуокрестность точки x).

Очевидно, *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0) = m(x_0) = M(x_0)$.*

Теорема 8.23. *Для того чтобы ограниченная на сегменте $[0, 1]$ функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывной почти всюду на сегменте $[0, 1]$.*

Доказательство. Для любого номера n разобьем сегмент $[0, 1]$ на 2^n интервалов $\Delta_k^{(n)} = \left(\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{k}{2^n}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$ и введем в рассмотрение две ступенчатые функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$, полагая на каждом интервале $\Delta_k^{(n)}$ функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ соответственно равными $\inf\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$ и $\sup\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$, а в точках $k/2^n$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ обе функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ равными нулю. Тогда для каждой точки $x \neq k/2^n$, взяв стягивающуюся к x последовательность интервалов $\Delta_k^{(n)}$, мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = m(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = M(x). \tag{8.54}$$

Таким образом, сходимость (8.54) имеет место почти всюду на сегменте $[0, 1]$. Так как ступенчатые функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ заведомо измеримы на $[0, 1]$, то из (8.54) и из теоремы 8.13 следует, что и функции Бэра $m(x)$ и $M(x)$ измеримы на $[0, 1]$.

Из (8.54) получим, что почти всюду на $[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)] = M(x) - m(x).$$

Из последнего соотношения в силу следствия из теоремы 8.19 вытекает, что [2]

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)]\, dx = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx. \tag{8.55}$$

Остается заметить, что

$$\int_0^1 \Phi_n(x)\, dx = S_n, \quad \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = s_n, \tag{8.56}$$

[1] В случае, если в произвольно малой окрестности точки x функция $f(x)$ не ограничена снизу (сверху), мы полагаем нижний (верхний) предел $f(x)$ в этой точке равным $-\infty$ $(+\infty)$.

[2] В дальнейшем все интегралы в дополнении 1 понимаются в смысле Лебега.

где S_n и s_n — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие разбиению $\{\Delta_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$.

Из (8.55) и (8.56) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\,dx,$$

так что (в силу гл. 10 вып. 1) необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману приводится к равенству $\int_0^1 [M(x) - m(x)]\,dx = 0$. Но последнее равенство в силу условия эквивалентности нулю неотрицательной измеримой и суммируемой функции (см. п. 4 § 4) означает, что $M(x) - m(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ФУНКЦИИ ПО ЛЕБЕГУ

Теорема 8.24. *Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве E функция $f(x)$ являлась интегрируемой на этом множестве по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была измерима на множестве E.*

Доказательство. Доказательство достаточности составляет содержание теоремы 8.16, поэтому в доказательстве нуждается лишь необходимость.

Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E. Это означает, что верхний и нижний интегралы Лебега от этой функции равны друг другу, и, стало быть, существует последовательность разбиений $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ множества E такая, что соответствующие последовательности верхних $\{S_n\}$ и нижних $\{s_n\}$ сумм удовлетворяют условию $S_n - s_n < 1/n$, причем каждое последующее разбиение $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ является измельчением предыдущего разбиения $T_{n-1} = \{E_k^{(n-1)}\}$. (Для построения такой последовательности разбиений достаточно там, где это необходимо, брать произведение вводимых разбиений.)

Напомним, что по определению

$$S_n = \sum_k M_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|, \quad s_n = \sum_k m_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|,$$

где $M_k^{(n)}$ и $m_k^{(n)}$ — соответственно точная верхняя и точная нижняя грани $f(x)$ на множестве $E_k^{(n)}$.

Определим две последовательности функций $\{\overline{f}_n(x)\}$ и $\{\underline{f}_n(x)\}$, положив функцию $\overline{f}_n(x)$ равной $M_k^{(n)}$ на множестве $E_k^{(n)}$, а функцию $\underline{f}_n(x)$ равной $m_k^{(n)}$ на множестве $E_k^{(n)}$.

Очевидно, что для каждого номера n обе функции $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ измеримы на множестве E (ибо эти функции являются линейными комбинациями характеристических функций измеримых множеств $E_k^{(n)}$).

Кроме того, очевидно, что последовательность $\{\overline{f}_n(x)\}$ не возрастает, а последовательность $\{\underline{f}_n(x)\}$ не убывает на множестве E, причем для любого номера n в каждой точке множества E справедливы неравенства

$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x). \tag{8.57}$$

Положим $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x)$, $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n(x)$. Из (8.57) заключаем, что в каждой точке x

$$\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x), \tag{8.58}$$

причем в силу теоремы 8.13 функции $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ измеримы на множестве E.

Из теоремы Б. Леви 8.20 получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E \left[\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)\right] dx = \int\limits_E \left[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right] dx. \tag{8.59}$$

Из определения функций $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ вытекает, что $\int\limits_E \left[\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)\right] dx = S_n - s_n$, причем по построению $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$. В силу (8.59) это приводит к равенству $\int\limits_E \left[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right] dx = 0$.

Из последнего равенства и из неотрицательности и измеримости функции $\left[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right]$ в силу п. 4 § 4 получим, что $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ почти всюду на E. Следовательно, в силу (8.58) $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду на E, и поскольку функции $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ измеримы на множестве E, то по свойству 4° из п. 2 § 3 и функция $f(x)$ также измерима на множестве E. Теорема доказана.

ГЛАВА 9

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

В этой главе мы изучим специальный класс функций, который характеризуется общим наименованием «интегралы, зависящие от параметра». Представление об этих функциях можно получить, если проинтегрировать по x при каждом фиксированном y функцию двух переменных x и y. В результате, очевидно, получится функция, зависящая от параметра y.

Естественно возникают вопросы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости таких функций. Эти вопросы будут изучены в настоящей главе.

Совершенно ясно, что интегрирование по аргументу x не обязательно должно быть собственным — если область, в которой задана функция $f(x, y)$, является бесконечной полосой $\Pi = \{a \leqslant x < \infty, c \leqslant y \leqslant d\}$, то интегрирование по x при фиксированном y будет производиться по полупрямой, и поэтому соответствующий интеграл по переменной x будет несобственным. Таким образом, возникает понятие несобственных интегралов, зависящих от параметра. В этой главе будут изучены свойства таких интегралов.

Подчеркнем, что всюду в этой главе изучаются функции, интегрируемые по Риману, а не по Лебегу, и все интегралы, собственные или несобственные, понимаются в смысле Римана.

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Понятие интеграла, зависящего от параметра. Пусть в прямоугольнике $\Pi = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ определена функция $f(x, y)$, интегрируемая по x на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ при любом фиксированном y из сегмента $c \leqslant y \leqslant d$. В этом случае на сегменте $c \leqslant y \leqslant d$ определена функция

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{9.1}$$

называемая *интегралом, зависящим от параметра* y. Функция $f(x, y)$ может быть задана и на множестве более общего вида. Например, областью задания $f(x, y)$ может служить следующее множество $D = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y),\, c \leqslant y \leqslant d\}$. В этом случае на сегменте $[c, d]$ определена функция от y с помощью соотношения (9.1), но пределы интегрирования a и b будут зависеть от y. Мы изучим сначала случай, когда пределы интегрирования постоянны.

2. Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра. Следующие теоремы дают ответ на перечисленные вопросы. В этих теоремах символом П мы будем обозначать прямоугольник $\{a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant y \leqslant d\}$.

Теорема 9.1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике* П, *то функция $I(y)$, определенная соотношением* (9.1), *непрерывна на сегменте $[c, d]$.*

Доказательство. Из формулы (9.1) вытекает, что приращение $\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y)$ функции $I(y)$ равно

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx. \tag{9.2}$$

Поскольку по теореме Кантора функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике П, то по данному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех x из $[a, b]$ и всех y и $(y + \Delta y)$ из $[c, d]$ таких, что $|\Delta y| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$. Но тогда из соотношения (9.2) вытекает, что при $|\Delta y| < \delta$ выполняется неравенство $|\Delta I| < \varepsilon$, которое означает непрерывность функции $I(y)$ в каждой точке y сегмента $[c, d]$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике* П, *то функция $I(y)$ интегрируема на сегменте $[c, d]$. Кроме того, справедлива формула*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{9.3}$$

Иными словами, в условиях теоремы интеграл, *зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.*

Доказательство. Согласно теореме 9.1 функция $I(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$ и поэтому интегрируема на этом сегменте. Справедливость формулы (9.3) следует из равенства повторных интегралов, фигурирующих в соотношении (9.3) (эти интегралы равны двойному интегралу $\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dx\, dy$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В соотношении (9.3) вместо верхнего предела d интегрирования по y мы можем поставить любое число из сегмента $[c, d]$.

Теорема 9.3. *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике Π, то функция $I(y)$ дифференцируема на сегменте $[c, d]$ и ее производная $\frac{dI}{dy}$ может быть найдена по формуле*

$$\frac{dI}{dy} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.4}$$

Иными словами, в условиях теоремы *интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$g(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.5}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике Π, то по теореме 9.1 функция $g(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$ и интеграл от этой функции по сегменту $[c, y]$ может быть найден по формуле интегрирования под знаком интеграла. Согласно замечанию к теореме 9.2 получим

$$\int\limits_c^y g(t)\, dt = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dt = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx - \int\limits_a^b f(x, c)\, dx. \tag{9.6}$$

Поскольку $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx = I(y)$, а $\int\limits_a^b f(x, c)\, dx = I(c)$, то из соотношения (9.6) получаем следующее представление для $I(y)$:

$$I(y) = \int\limits_c^y g(t)\, dt + I(c). \tag{9.7}$$

Как известно, производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции $g(t)$ существует и равна значению этой функции в точке y. Поэтому функция $I(y)$ дифференцируема и ее производная $\frac{dI}{dy}$ равна $g(y)$. Обращаясь к формуле (9.5) для $g(y)$, мы убедимся в справедливости соотношения (9.4). Теорема доказана.

3. Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра. Мы уже говорили, что возможен случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра. Будем считать, что функция $f(x, y)$ задана в прямоугольнике Π, который заключает в себе область D, определенную соотношениями $\{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$ (рис. 9.1). Если при любом фиксированном y из сегмента $[c, d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x на сегменте $[a(y), b(y)]$, то, очевидно, на сегменте $[c, d]$ определена следующая функция:

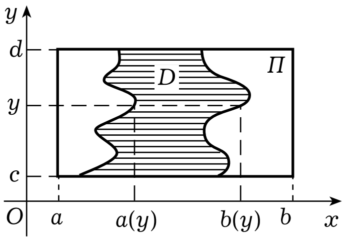


Рис. 9.1

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx, \tag{9.8}$$

представляющая собой *интеграл, зависящий от параметра, у которого пределы интегрирования также зависят от параметра.*

Мы исследуем непрерывность и дифференцируемость по параметру таких интегралов. Следующие теоремы дают ответ на перечисленные вопросы.

Теорема 9.4. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике* Π, *а функции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на сегменте $[c, d]$. Тогда функция $I(y)$, определенная соотношением* (9.8), *непрерывна на сегменте $[c, d]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 из сегмента $[c, d]$ и представим $I(y)$ в следующей форме:

$$I(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)\, dx + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\, dx. \tag{9.9}$$

Так как первый интеграл в правой части (9.9) представляет собой интеграл, зависящий от параметра y, с постоянными пределами интегрирования и с непрерывной подынтегральной функцией, то в силу теоремы 9.1 этот интеграл является непрерывной функцией от y и поэтому при $y \to y_0$ стремится к $I(y_0)$. Для двух других интегралов получаем следующие оценки:

$$\left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M |b(y) - b(y_0)|,$$

$$\left| \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M |a(y) - a(y_0)|,$$

где $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)|$. Из последних неравенств и из непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ следует, что при $y \to y_0$ оба последних интеграла в правой части (9.9) стремятся к нулю. Таким образом, предел правой части (9.9) при $y \to y_0$ существует и равен $I(y_0)$. Итак, функция $I(y)$ непрерывна в любой точке y_0 сегмента $[c, d]$, т. е. непрерывна на этом сегменте. Теорема доказана.

Докажем теорему о дифференцируемости интеграла $I(y)$ по параметру.

Теорема 9.5. *Пусть функция* $f(x, y)$ *и ее производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в прямоугольнике* Π. *Пусть далее функции* $a(y)$ *и* $b(y)$ *дифференцируемы на сегменте* $[c, d]$. *Тогда функция* $I(y)$, *определенная соотношением* (9.8), *дифференцируема на сегменте* $[c, d]$ *и ее производная* $I'(y)$ *может быть вычислена по формуле*

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + b'(y)f(b(y), y) - a'(y)f(a(y), y). \tag{9.10}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 из сегмента $[c, d]$ и представим $I(y)$ в форме (9.9). Первый интеграл в правой части (9.9) является интегралом, зависящим от параметра y, с постоянными пределами интегрирования. Так как по условию $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в Π, то, согласно теореме 9.3, первое слагаемое представляет собой дифференцируемую функцию в точке y_0 и производная указанной функции в этой точке равна $\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \dfrac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}\,dx$. Докажем, что второе слагаемое в правой части (9.9) имеет производную в точке y_0. Поскольку это второе слагаемое обращается в нуль при $y = y_0$, достаточно убедиться в существовании следующего предела:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx}{y - y_0}, \tag{9.11}$$

который по определению и равен искомой производной.

Преобразуем интеграл в числителе формулы (9.11). По формуле среднего значения имеем

$$\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx = f(\overline{x}, y)(b(y) - b(y_0)), \tag{9.12}$$

причем $\overline{x}$ заключено между $b(y_0)$ и $b(y)$. Подставляя выражение интеграла из формулы (9.12) в числитель выражения (9.11) и учитывая, что в силу непрерывности $f(\overline{x}, y) \to f(b(y_0), y_0)$ при $y \to y_0$, а $\dfrac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0} \to b'(y_0)$ при $y \to y_0$, убедимся, что интересующий нас предел (9.11) существует и равен $b'(y_0)f(b(y_0), y_0)$. Рассуждая совершенно аналогично, убедимся, что третье слагаемое в правой части (9.9) также имеет производную в точке y_0, равную $a'(y_0)f(a(y_0), y_0)$.

Итак, мы доказали, что функция $I(y)$ дифференцируема в произвольной точке y_0 сегмента $[c, d]$ и ее производная $I'(y_0)$ может быть вычислена по формуле (9.10). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теоремы 9.4 и 9.5 верны и в случае, когда функция $f(x, y)$ задана лишь в области D и удовлетворяет в этой области таким же требованиям, как и в прямоугольнике П.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Понятие несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Символом Π_∞ мы будем обозначать полуполосу $\{a \leqslant x < \infty, c \leqslant y \leqslant d\}$.

Пусть в полуполосе Π_∞ задана функция $f(x, y)$, интегрируемая по x в несобственном смысле на полупрямой $a \leqslant x < \infty$ при любом фиксированном y из сегмента $[c, d]$. При этих условиях на сегменте $[c, d]$ определена функция

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx, \tag{9.13}$$

называемая *несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра* y. При этом говорят, что интеграл (9.13) *сходится* на сегменте $[c, d]$.

В теории несобственных интегралов, зависящих от параметра, важную роль играет понятие *равномерной сходимости.* Сформулируем это понятие.

Определение. *Несобственный интеграл* (9.13) *называется* *р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я по параметру* y *на сегменте* $[c, d]$, *если он сходится на сегменте* $[c, d]$ *и если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $A \geqslant a$, *зависящее только от* ε, *что для любого* $R > A$ *и для всех* y *из сегмента* $[c, d]$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int_R^\infty f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{9.14}$$

Сформулируем критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 9.6. *Для того чтобы несобственный интеграл* (9.13) *равномерно сходился по параметру y на сегменте $[c,\,d]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать число $A \geqslant a$, зависящее только от ε и такое, что для любых R' и R'', больших A, и для всех y из сегмента $[c,\,d]$*

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,\,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Справедливость этого критерия вытекает непосредственно из определения равномерной сходимости.

Для приложений целесообразно указать ряд достаточных признаков равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 9.7 (признак Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x,\,y)$ определена в полуполосе Π_∞ и для каждого y из сегмента $[c,\,d]$ интегрируема по x на любом сегменте $[a,\,R]$. Пусть далее для всех точек полуполосы Π_∞ выполняется неравенство*

$$|f(x,\,y)| \leqslant g(x). \tag{9.15}$$

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ вытекает равномерная сходимость по y на сегменте $[c,\,d]$ интеграла (9.13).

Доказательство. В силу критерия Коши сходимости интеграла от функции $g(x)$ (см. теорему 3.1) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $A \geqslant a$ такое, что при всех $R'' > R' \geqslant A$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

Применяя неравенство (9.15), получим

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,\,y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon$$

для всех y из сегмента $[c,\,d]$.

Это и означает выполнение критерия Коши равномерной сходимости интеграла (9.13).

Следствие. *Пусть функция $\varphi(x,\,y)$, определенная в полуполосе Π_∞, ограничена в этой полуполосе и при каждом $y \in \in [c,\,d]$ интегрируема по x на любом сегменте $[a,\,R]$. Тогда, если сходится интеграл*

$$\int\limits_a^\infty |h(x)|\,dx,$$

то сходится равномерно по y на сегменте $[c,\,d]$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x,\,y)h(x)\,dx$.

Для доказательства достаточно в теореме 9.7 положить

$$f(x,\,y)=\varphi(x,\,y)h(x),\quad g(x)=M|h(x)|,\ \text{где}\ M=\sup_{\Pi_\infty}|\varphi(x,\,y)|.$$

Заметим, что признак Вейерштрасса является достаточным признаком равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, гарантирующим и абсолютную сходимость. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.4, можно установить следующий достаточный признак равномерной сходимости, применимый и к условно сходящимся интегралам. Справедливо следующее *утверждение* (*признак Дирихле–Абеля*).

Пусть функция $f(x,\,y)$ *определена в полуполосе* Π_∞, *при каждом* $y\in[c,\,d]$ *интегрируема по* x *на любом сегменте* $[a,\,R]$ *и с некоторой постоянной* $M>0$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\int_a^x f(t,\,y)\,dt\right|\leqslant M.$$

Предположим также, что функция $g(x)$, *определенная при* $x\geqslant a$, *монотонно не возрастая, стремится к нулю при* $x\to+\infty$. *Тогда несобственный интеграл*

$$\int_a^\infty f(x,\,y)g(x)\,dx$$

сходится равномерно по y *на сегменте* $[c,\,d]$.

Следующий признак равномерной сходимости относится к интегралам от неотрицательных функций.

Теорема 9.8 **(*признак Дини*).** *Пусть функция* $f(x,\,y)$ *непрерывна и неотрицательна в полуполосе* Π_∞, *и пусть для каждого* $y\in[c,\,d]$ *сходится несобственный интеграл*

$$I(y)=\int_a^\infty f(x,\,y)\,dx.$$

Пусть далее функция $I(y)$ *непрерывна на сегменте* $[c,\,d]$. *Тогда интеграл* (9.13) *сходится равномерно по* y *на этом сегменте.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$I_n(y)=\int_a^{a+n} f(x,\,y)\,dx,$$

каждая из которых в силу теоремы 9.1 непрерывна на сегменте $[c,\,d]$. Поскольку подынтегральная функция $f(x,\,y)$ неотрицательна, то $I_n(y)$ монотонно не убывая, сходятся на сегменте $[c,\,d]$ к непрерывной функции $I(y)$. Следовательно, по теореме 1.5

(признак Дини для функциональных последовательностей) последовательность $I_n(y)$ сходится к $I(y)$ равномерно на $[c,\, d]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$I(y) - I_N(y) = \int\limits_{a+N}^{\infty} f(x,\, y)\, dx < \varepsilon$$

сразу для всех y сегмента $[c,\, d]$. Из неотрицательности $f(x,\, y)$ вытекает, что для любого $R \geqslant N + a$ и любого $y \in [c,\, d]$

$$0 \leqslant \int\limits_{R}^{\infty} f(x,\, y)\, dx < \varepsilon.$$

Это и означает равномерную сходимость интеграла (9.13). Теорема доказана,

2. Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 9.9. *Пусть функция $f(x,\, y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞, а интеграл* (9.13) *сходится равномерно на сегменте $[c,\, d]$. Тогда этот интеграл является непрерывной функцией y на сегменте $[c,\, d]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$I_n(y) = \int\limits_{a}^{a+n} f(x,\, y)\, dx,$$

каждая из которых в силу теоремы 9.1 непрерывна на сегменте $[c,\, d]$. Очевидно, из равномерной сходимости интеграла (9.13) вытекает равномерная сходимость к $I(y)$ функциональной последовательности $I_n(y)$. В таком случае непрерывность функции $I(y)$ следует из теоремы 1.7.

Теорема 9.10. *Пусть функция $f(x,\, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе Π_∞. Пусть далее для некоторого y из сегмента $[c,\, d]$ сходится интеграл $I(y) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x,\, y)\, dx$, а интеграл $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\, dx$ сходится равномерно по y на сегменте $[c,\, d]$. При этих условиях функция $I(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,\, d]$ и ее производная $I'(y)$ может быть найдена по формуле*

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\, dx. \tag{9.16}$$

Иными словами, при условиях теоремы *дифференцирование по параметру может производиться под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,\, y)\, dx.$$

По теореме 9.3 каждая из функций $I_n(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,\, d]$ и справедливо равенство

$$I_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}\, dx. \qquad (9.17)$$

Из условия теоремы вытекает, что последовательность интегралов, стоящих в правой части (9.17), сходится равномерно на $[c,\, d]$. Следовательно, к той же предельной функции равномерно сходится последовательность производных $I_n'(y)$. Применяя теорему 1.9, мы получаем равенство (9.16).

Докажем теорему о *собственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 9.11. *Если выполнены условия теоремы* 9.9, *то интеграл* (9.13) *можно интегрировать по параметру* y *на сегменте* $[c,\, d]$, *причем*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,\, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,\, y)\, dy. \qquad (9.18)$$

Иными словами, в условиях теоремы *несобственный интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком несобственного интеграла.*

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 9.9, то функция $I(y)$ непрерывна на сегменте $[c,\, d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте. Перейдем к доказательству соотношений (9.18).

Используя свойство равномерной сходимости интеграла (9.13), мы можем по данному $\varepsilon > 0$ указать такое $A \geqslant a$, что при $R \geqslant A$ для всех y из сегмента $[c,\, d]$ справедливо неравенство

$$\left| \int_R^\infty f(x,\, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}. \qquad (9.19)$$

Считая далее $R \geqslant A$ и используя возможность перестановки порядка интегрирования для собственных интегралов, зависящих от параметра, обратимся к следующим очевидным равенствам:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^R f(x,\,y)\,dx + \int_R^\infty f(x,\,y)\,dx\right] dy =$$
$$= \int_a^R dx\left[\int_c^d f(x,\,y)\,dy\right] + \int_c^d dy\left[\int_R^\infty f(x,\,y)\,dx\right].$$

Из этих соотношений и неравенства (9.19) вытекает следующее неравенство, справедливое для всех $R \geqslant A$:

$$\left|\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^R dx\left[\int_c^d f(x,\,y)\,dy\right]\right| < \varepsilon,$$

которое означает, что несобственный интеграл $\int_a^\infty dx \int_c^d f(x,\,y)\,dy$ по переменной x сходится и равен числу $\int_c^d I(y)\,dy$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Очевидно, в соотношении (9.18) вместо верхнего предела d интегрирования по y мы можем поставить любое число из сегмента $[c,\,d]$.

Следствие. *Если функция* $f(x,\,y)$ *непрерывна и неотрицательна в полуполосе* Π_∞ *и интеграл* (9.13) *является непрерывной функцией на сегменте* $[c,\,d]$, *то справедлива формула* (9.18).

В самом деле, при сформулированных требованиях выполнены все условия признака Дини равномерной сходимости интеграла (9.13) (см. теорему 9.8). Таким образом, утверждение следствия справедливо.

Докажем теорему о *несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 9.12. *Пусть функция* $f(x,\,y)$ *неотрицательна и непрерывна при* $x \geqslant a$ *и* $y \geqslant c$. *Пусть далее интегралы*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,\,y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^\infty f(x,\,y)\,dy$$

непрерывны соответственно при $y \geqslant c$ *и* $x \geqslant a$. *Тогда из сходимости одного из следующих двух несобственных интегралов*

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,\,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty K(x)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,\,y)\,dy$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что сходится интеграл $\int_c^\infty I(y)\,dy$. Нам нужно доказать, что интеграл $\int_a^\infty K(x)\,dx$ сходится и равен $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$. Иными словами, нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $A \geqslant a$, что при $\overline{R} \geqslant A$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_c^\infty I(y)\,dy - \int\limits_a^{\overline{R}} K(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{9.20}$$

Из условий теоремы вытекает, что при любом фиксированном $\overline{R} \geqslant a$ для функции $f(x, y)$ в полуполосе $\left\{a \leqslant x \leqslant \overline{R},\, c \leqslant y < < \infty\right\}$ выполнены условия следствия из теоремы 9.11. Поэтому для любого $\overline{R} \geqslant a$ справедливы соотношения

$$\int\limits_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int\limits_a^{\overline{R}} dx \int\limits_c^\infty f(x, y)\,dy = \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^{\overline{R}} f(x, y)\,dx.$$

Используя эти равенства и сходимость интеграла $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$ преобразуем разность, находящуюся под знаком абсолютной величины в неравенстве (9.20). Для любого $\overline{\overline{R}}$, превосходящего c, запишем равенство

$$\int\limits_c^\infty I(y)\,dy - \int\limits_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx - \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^{\overline{R}} f(x, y)\,dx =$$
$$= \int\limits_c^\infty dy \int\limits_{\overline{R}}^\infty f(x, y)\,dx = \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int\limits_{\overline{R}}^\infty f(x, y)\,dx + \int\limits_c^{\overline{\overline{R}}} dy \int\limits_{\overline{R}}^\infty f(x, y)\,dx. \tag{9.21}$$

Перейдем к оценке последних интегралов в соотношении (9.21). Так как по условию $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$ сходится, то по данному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\overline{\overline{R}} > c$, что выполняются неравенства $0 \leqslant \leqslant \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^\infty I(y)\,dy < \varepsilon/2$ [1]. Заменяя в этих неравенствах $I(y)$ его выражением через интеграл, получим следующие неравенства: $0 \leqslant \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx < \varepsilon/2$. Отсюда и из неотрицательности $f(x, y)$ заключаем, что при выбранном $\overline{\overline{R}} > c$ и любом $\overline{R} \geqslant a$

[1] Левое из этих неравенств следует из неотрицательности функции $f(x, y)$ при $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$.

справедлива оценка

$$0 \leqslant \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^{\infty} dy \int\limits_{\overline{R}}^{\infty} f(x,\,y)\,dx < \varepsilon/2. \tag{9.22}$$

Зафиксируем теперь $\overline{\overline{R}}$ так, как указано выше, и воспользуемся произвольностью выбора $\overline{R}$. В полуполосе $\{a \leqslant x < \infty,\, c \leqslant y \leqslant \overline{\overline{R}}\}$ функция $f(x,\,y)$ удовлетворяет всем условиям признака Дини равномерной сходимости несобственных интегралов (см. теорему 9.8). Поэтому по данному $\varepsilon > 0$ можно выбрать $A \geqslant a$ так, что для любого $\overline{R} \geqslant A$ и для всех y из сегмента $[c,\,\overline{\overline{R}}]$ выполняются неравенства $0 \leqslant \int\limits_{\overline{R}}^{\infty} f(x,\,y)\,dx < \dfrac{\varepsilon}{2(\overline{\overline{R}} - c)}$, из которых получается следующая оценка:

$$0 \leqslant \int\limits_{c}^{\overline{\overline{R}}} dy \int\limits_{\overline{R}}^{\infty} f(x,\,y)\,dx < \varepsilon/2. \tag{9.23}$$

Обращаясь к выражению (9.21) и к оценкам (9.22) и (9.23) последних интегралов в этом выражении, мы видим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $A \geqslant a$ так, что для любого $\overline{R} \geqslant A$ выполняется неравенство (9.20). Доказательство теоремы завершено.

3. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра. Введем понятие несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра. Пусть функция $f(x,\,y)$ задана в полуоткрытом прямоугольнике $\Pi = \{a \leqslant x < b,\, c \leqslant y \leqslant d\}$. Допустим, что при любом фиксированном y из сегмента $[c,\,d]$ несобственный ингеграл второго рода $\int\limits_{a}^{b} f(x,\,y)\,dx$ сходится. При этих условиях на сегменте $[c,\,d]$ определена функция

$$I(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x,\,y)\,dx, \tag{9.24}$$

называемая *несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y.*

В теории таких интегралов важную роль играет понятие *равномерной сходимости.* Сформулируем это понятие.

Определение. *Несобственный интеграл* (9.24) *называется р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я п о п а р а м е т р у y на сегменте $[c,\,d]$, если он сходится для каждого y из сегмента $[c,\,d]$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее* *только от* ε, *что для любого* α *из интервала* $0 < \alpha < \delta$ *и для всех* y *из сегмента* $[c,\, d]$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x,\, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Для несобственных интегралов второго рода без труда формулируются и доказываются теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру.

Отметим, что с помощью преобразования переменной x, указанных в п. 2 § 2 гл. 3, несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра y, сводятся к зависящим от параметра несобственным интегралам первого рода.

§ 3. Применение теории интегралов, зависящих от параметра к вычислению несобственных интегралов

Операции над несобственными интегралами, зависящими от параметра, обоснованные в предыдущем параграфе, позволяют вычислять различные несобственные интегралы.

Рассмотрим примеры вычисления и исследования свойств таких интегралов.

1°. Докажем, что интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{9.25}$$

подынтегральная функция которого в точке $x = 0$ по определению равна единице, сходится равномерно относительно α на полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$. Мы получим сначала некоторые оценки. Заметим, во-первых, что

$$\int e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{1+\alpha^2} + C = \Phi(\alpha,\, x) + C.$$

Очевидно, при $\alpha \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ функция $\Phi(\alpha,\, x)$ (являющаяся первообразной для функции $e^{-\alpha x} \sin x$) ограничена:

$$|\Phi(\alpha,\, x)| \leqslant \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \leqslant 2. \tag{9.26}$$

Оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad (R > 0).$$

Интегрируя по частям при любом фиксированном $\alpha \geqslant 0$, найдем

$$\left|\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\left[\frac{\Phi(\alpha,\,x)}{x}\right]_R^\infty + \int\limits_R^\infty \frac{\Phi(\alpha,\,x)}{x^2}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\Phi(\alpha,\,R)|}{R} + \int\limits_R^\infty \frac{\Phi(\alpha,\,x)}{x^2}\,dx.$$

Из этого неравенства и неравенств (9.26) получаем следующую оценку:

$$\left|\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{R} + 2\int\limits_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{R}. \tag{9.27}$$

Из этой оценки вытекает равномерная сходимость интеграла (9.25) по α на полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$. Действительно, пусть ε — произвольное положительное число. Выберем по этому ε число $A > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{4}{A} < \varepsilon.$$

Ясно, что тогда при $R \geqslant A$, в силу оценки (9.27), для всех $\alpha \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\left|\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

означающее равномерную сходимость по α на полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$ исследуемого интеграла (9.25).

2°. Используем только что полученные выводы для вычисления интеграла [1])

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{9.28}$$

Отметим, во-первых, что указанный интеграл представляет собой предельное значение при $\alpha \to 0+0$ функции $I(\alpha)$, определенной соотношением (9.25). Действительно, подынтегральная функция в интеграле (9.25) непрерывна при $\alpha \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ (при $x = 0$ эта функция считается равной единице), а интеграл (9.25) равномерно сходится по α на полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$. Поэтому,

[1]) Сходимость рассматриваемого интеграла была установлена в п. 2 § 1 гл. 3.

согласно теореме 9.9, интеграл (9.25) представляет собой непрерывную функцию α на полупрямой $\alpha \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\alpha \to 0+0} I(\alpha) = I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{9.29}$$

Мы получим для функции $I(\alpha)$ специальное представление, с помощью которого будет найдено значение предела (9.29). Это представление получается из выражения для производной $I'(\alpha)$. Поэтому сначала мы должны убедиться в возможности дифференцирования интеграла (9.25) по параметру α под знаком интеграла. Для этой цели проверим выполнение условий теоремы 9.10 применительно к интегралу (9.25). Очевидны непрерывность подынтегральной функции и ее частной производной по параметру α при $\alpha \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Обратимся теперь к выяснению вопроса о равномерной сходимости по α интеграла

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx \tag{9.30}$$

от частной производной подынтегральной функции в (9.25). Фиксируем любое $\Delta > 0$. Так как при всех $\alpha \geqslant \Delta$ справедливо неравенство $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\Delta x}$ и так как интеграл $\int_0^\infty e^{-\Delta x}\, dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса (теорема 9.7) интеграл (9.30) сходится равномерно по α при $\alpha \geqslant \Delta$. Поскольку Δ — любое положительное число, мы можем дифференцировать интеграл (9.25) под знаком интеграла по параметру α при любом $\alpha > 0$. Итак, при $\alpha > 0$

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Интегрируя левую и правую части последних соотношений, получим при $\alpha > 0$

$$I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg} \alpha + C. \tag{9.31}$$

Найдем постоянную C. Так как $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то из выражения (9.25) при $\alpha > 0$ получим неравенство

$$|I(\alpha)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha},$$

из которого вытекает, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} |I(\alpha)| = 0,$$

и стало быть,

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0. \tag{9.32}$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \operatorname{arctg}\alpha = \pi/2$, то из (9.31) и (9.32) находим, что $C = \pi/2$. Итак, при $\alpha > 0$ функция $I(\alpha)$ может быть представлена в следующей форме:

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha.$$

Отсюда и из формулы (9.29) получаем значение интеграла (9.28):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9.33}$$

Замечание. Рассмотрим интеграл

$$K(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx. \tag{9.34}$$

Найдем значение этого интеграла для различных значений α.

При $\alpha > 0$ в интеграле (9.34) произведем замену переменных, полагая $\alpha x = y$. Тогда

$$K(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

При $\alpha < 0$ произведем замену переменных, полагая $\alpha x = -y$ $(y > 0)$. Тогда

$$K(\alpha) = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = -\frac{\pi}{2}.$$

При $\alpha = 0$ интеграл (9.34), очевидно, равен нулю. Итак,

$$K(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при} \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha = 0, \\ -\pi/2 & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Рассмотренный интеграл обычно называется *разрывным множителем Дирихле.*

С помощью разрывного множителя Дирихле получаем следующее аналитическое представление известной функции $\operatorname{sgn}\alpha$, именуемой обычно термином «знак α» [1]:

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx.$$

[1] Это наименование связано с тем, что значения $\operatorname{sgn}\alpha$ при $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha < 0$ равны соответственно 1, 0, -1.

§ 4. Интегралы Эйлера

В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми свойствами важных неэлементарных функций, называемых интегралами Эйлера [1].

Эйлеровым интегралом первого рода или «бета-функцией» называют интеграл

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx. \tag{9.35}$$

В этом интеграле p и q считаются параметрами. Если эти параметры удовлетворяют условиям $p < 1$ и $q < 1$, то интеграл (9.35) будет несобственным интегралом, зависящим от параметров p и q, причем особыми точками этого интеграла будут точки $x = 0$ и $x = 1$.

Эйлеровым интегралом второго рода или «гамма-функцией» принято называть несобственный интеграл

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx. \tag{9.36}$$

Отметим, что в интеграле (9.36) имеются два типа особенностей: 1) интегрирование по полупрямой $0 \leqslant x < \infty$; 2) при $p < 1$ точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции (подынтегральная функция обращается в бесконечность).

В процессе рассуждений мы будем учитывать указанные выше особенности функций $\mathrm{B}(p,\, q)$ и $\Gamma(p)$. Ниже мы убедимся, что интегралы (9.35) и (9.36) сходятся для значений $p > 0$ и $q > 0$.

1. Область сходимости интегралов Эйлера. Докажем, что функция $\mathrm{B}(p,\, q)$ определена для всех положительных значений параметров p и q, а функция $\Gamma(p)$ для всех положительных значений p.

Займемся сначала функцией $\mathrm{B}(p,\, q)$. При $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$ подынтегральная функция в соотношении (9.35) непрерывна, и поэтому интеграл в правой части (9.35) является собственным. Поэтому функция $\mathrm{B}(p,\, q)$ определена для всех отмеченных значений p и q. Обратимся теперь к случаю, когда выполняются одно или оба из следующих неравенств:

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \tag{9.37}$$

В этом случае одна или обе из точек $x = 0$ и $x = 1$ являются особенными точками подынтегральной функции. Имея это в виду,

[1] Подробные сведения об интегралах Эйлера читатель может найти в книге Э. Г. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона «Курс современного анализа», т. II. — М.: Физматгиз, 1963.

представим $\mathrm{B}(p,\,q)$ в следующей форме:

$$\mathrm{B}(p,\,q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \\ = I_1(p,\,q) + I_2(p,\,q).$$

Очевидно, каждый из интегралов $I_1(p,\,q)$ и $I_2(p,\,q)$ имеет лишь одну особую точку.

Для интеграла $I_1(p,\,q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ особой точкой будет точка $x = 0$. Замечая, что на сегменте $[0,\,1/2]$ функция $(1-x)^{q-1}$ непрерывна и поэтому ограничена некоторой константой C, легко убедиться, что функция Cx^{p-1} будет мажорантой для подынтегральной функции интеграла $I_1(p,\,q)$. Отсюда следует, что интеграл $I_1(p,\,q)$ сходится при $0 < p < 1$ и любом q. Рассуждая аналогично, легко убедиться, что интеграл $I_2(p,\,q)$ сходится при $0 < q < 1$ и любом p.

Итак, мы убедились, что в случае, когда выполняются неравенства $p > 0$ и $q > 0$ интеграл (9.35) сходится, т. е. *функция* $\mathrm{B}(p,\,q)$ *определена для всех положительных значений* p и q.

Перейдем теперь к функции $\Gamma(p)$. Мы уже отмечали, что интеграл (9.36) имеет два типа особенностей — интегрирование по полупрямой и особую точку $x = 0$. Чтобы разделить эти особенности, разобьем область интегрирования на две части так, чтобы на каждой части наблюдалась лишь одна из отмеченных особенностей. Например, можно представить $\Gamma(p)$ следующим образом:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int\limits_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx = I_1(p) + I_2(p).$$

Так как $|e^{-x}x^{p-1}| \leqslant x^{p-1}$ при $x > 0$, то, согласно частному признаку сравнения, интеграл $I_1(p)$ сходится при $p > 0$. Интеграл $I_2(p)$ также сходится при $p > 0$. Чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться частным признаком сравнения в предельной форме: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^r = 0$ при любом r. Итак, мы доказали, что областью определения функции $\Gamma(p)$ является полупрямая $p > 0$.

2. Непрерывность интегралов Эйлера. Докажем, что функция $\mathrm{B}(p,\,q)$ непрерывна в квадранте $p > 0$, $q > 0$, а функция $\Gamma(p)$ непрерывна на полупрямой $p > 0$. Займемся сначала функцией $\mathrm{B}(p,\,q)$. Для доказательства непрерывности $\mathrm{B}(p,\,q)$ в квадранте $p > 0$, $q > 0$, очевидно, достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла (9.35) относительно параметров p и q при $p \geqslant p_0 > 0$ и $q \geqslant q_0 > 0$ для любых фиксированных положительных значений p_0 и q_0. Так как $p_0-1 \leqslant p-1$, $q_0-1 \leqslant q-1$, то при $0 < x < 1$ справедливы неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

Отсюда и из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx$ вытекает в силу признака Вейерштрасса равномерная сходимость интеграла (9.35) для указанных значений p и q. Таким образом, непрерывность $\mathrm{B}(p,\, q)$ при $p > 0$ и $q > 0$ доказана.

Для доказательства непрерывности $\Gamma(p)$ на полупрямой $p > 0$, очевидно, достаточно установить равномерную сходимость интеграла (9.36) относительно параметра p при $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ для любых фиксированных значений p_0 и p_1, удовлетворяющих условию $0 < p_0 < p_1$. Так как при указанных значениях p, p_0 и p_1 и при $x > 0$ справедливо неравенство

$$e^{-x}x^{p-1} \leqslant e^{-x}[x^{p_0-1} + x^{p_1-1}],$$

то из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}[x^{p_0-1} + x^{p_1-1}]\,dx$$

следует в силу признака Вейерштрасса равномерная сходимость интеграла (9.36) для указанных значений p. Таким образом, непрерывность $\Gamma(p)$ при $p > 0$ доказана.

3. Некоторые свойства функции $\boldsymbol{\Gamma(p)}$. В этом пункте мы докажем существование производной любого порядка у функции $\Gamma(p)$. Кроме того, для этой функции будет получена формула, называемая *формулой приведения.*

Дифференцируя $\Gamma(p)$ по параметру под знаком интеграла, получим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx, \tag{9.38}$$

который сходится равномерно по параметру p на любом сегменте $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1$. В самом деле, абсолютная величина подынтегральной функции в интеграле (9.38) удовлетворяет на полупрямой $0 < x < \infty$ неравенству

$$|x^{p-1}e^{-x}\ln x| < e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1} + x^{p_1-1}).$$

Отсюда из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1} + x^{p_1-1})\,dx$$

следует, согласно признаку Вейерштрасса, равномерная сходимость интеграла (9.38). Это обстоятельство и непрерывность подынтегральной функции в интеграле (9.38) [1] при $0 < x < \infty$, $0 < p < \infty$ позволяет сделать вывод о возможности дифференцирования $\Gamma(p)$ по параметру под знаком интеграла. Итак, *производная* $\Gamma'(p)$ *существует и равна выражению* (9.38).

Рассуждая аналогично, легко убедиться, что функция $\Gamma(p)$ имеет производную любого порядка и эта производная может быть найдена посредством дифференцирования по параметру p под знаком интеграла в выражении (9.36) для $\Gamma(p)$.

Перейдем к выводу *формулы приведения* для функции $\Gamma(p)$.

Применяя формулу интегрирования по частям для функции $\Gamma(p+1)$ при $p > 0$, получим

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = [-x^p e^{-x}]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

Итак, для любого $p > 0$ справедлива формула

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{9.39}$$

Последовательно применяя формулу (9.39) для любого $p > n-1$ и любого натурального n, получим

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\Gamma(p-n+1). \tag{9.40}$$

Соотношение (9.40) называется *формулой приведения* для функции $\Gamma(p)$. С помощью формулы (9.40) гамма-функция для значений аргумента, больших единицы, «приводится» к гамма-функции для значений аргумента, заключенных между нулем и единицей. Так как $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, то, полагая в (9.40) $p = n$, получим

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Эта формула ниже будет использована нами для вывода так называемой формулы Стирлинга [2], дающей асимптотическое представление для $n!$.

Полученные сведения о функции $\Gamma(p)$ позволяют дать качественную характеристику графика этой функции. Мы приведем геометрическое исследование графика $\Gamma(p)$, следуя в основном схеме, изложенной в § 6 гл. 9 вып. 1 этого курса.

Мы установили, что областью задания $\Gamma(p)$ служит полупрямая $0 < p < \infty$. На этой полупрямой $\Gamma(p)$ непрерывна и дифференцируема любое число раз, причем любая производная может быть найдена дифференцированием выражения (9.36) для $\Gamma(p)$

[1] Эта функция представляет собой частную производную по параметру p подынтегральной функции в выражении (9.36) для $\Gamma(p)$.

[2] Стирлинг — шотландский математик (1692–1770).

по параметру p под знаком интеграла. В частности, вторая производная $\Gamma''(p)$ равна

$$\Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^2 e^{-x}\, dx.$$

Так как $\Gamma''(p) > 0$, то первая производная $\Gamma'(p)$ может иметь только один нуль. Поскольку $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ [1], то, согласно теореме Ролля, этот нуль производной $\Gamma'(p)$ существует и расположен на интервале $(1, 2)$. Поскольку $\Gamma''(p) > 0$, то в точке, где $\Gamma'(p)$ обращается в нуль, функция $\Gamma(p)$ имеет минимум. Отметим также, что график $\Gamma(p)$ обращен выпуклостью вниз. График функции $\Gamma(p)$ имеет вертикальную асимптоту в точке $p = 0$. В самом деле, так как $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, то из непрерывности $\Gamma(p)$ в точке 1 следует, что $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to 0 + 0$. Очевидно, $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$. Отметим без доказательства, что график функции $\Gamma(p)$ не имеет наклонных асимптот.

4. Некоторые свойства функции $\mathrm{B}(p,\, q)$. В этом пункте мы установим свойство симметрии функции $\mathrm{B}(p,\, q)$ и формулу приведения для этой функции. Сделаем в интеграле (9.35) замену переменной, полагая $x = 1 - t$. Проделав необходимые вычисления, мы убедимся в справедливости равенства

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \mathrm{B}(q,\, p), \tag{9.41}$$

которое выражает *свойство симметрии функции* $\mathrm{B}(p,\, q)$.

Установим для функции $\mathrm{B}(p,\, q)$ формулы приведения. Для этой цели обратимся к функции $\mathrm{B}(p,\, q+1)$, причем будем считать p и q положительными. Применяя интегрирование по частям и формулу $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$, получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(p,\, q+1) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\, dx = \\
&= \left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\, dx = \\
&= \frac{q}{p}\int_0^1 \{x^{p-1}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^q\}\, dx = \\
&= \frac{q}{p}\,\mathrm{B}(p,\, q) - \frac{q}{p}\,\mathrm{B}(p,\, q+1).
\end{aligned}$$

[1] Это следует из соотношения (9.39).

Из этих соотношений получаем следующую формулу:

$$\mathrm{B}(p,\, q+1) = \frac{q}{p+q}\,\mathrm{B}(p,\, q). \tag{9.42}$$

Совершенно аналогично при $p > 0$ и $q > 0$, получаем соотношение

$$\mathrm{B}(p+1,\, q) = \frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,\, q). \tag{9.43}$$

Формулы (9.42) и (9.43) называются формулами приведения для функции $\mathrm{B}(p,\, q)$. Последовательное применение этих формул сводит вычисление $\mathrm{B}(p,\, q)$ для произвольных положительных значений аргументов к вычислению этой функции для значений аргументов из полуоткрытого квадрата $0 < p \leqslant 1$, $0 < q \leqslant 1$.

5. Связь между эйлеровыми интегралами. Сделаем в интеграле (9.35) замену переменной, полагая $x = \dfrac{1}{1+t}$. В результате получим для $\mathrm{B}(p,\, q)$ следующее выражение:

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.44}$$

Используя формулу (9.41), получим наряду с (9.44) следующее выражение для $\mathrm{B}(p,\, q)$

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.45}$$

Обратимся теперь к выражению (9.36) для $\Gamma(p)$. С помощью подстановки $x = ty$, $t > 0$, преобразуем это выражение к виду

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int\limits_0^\infty e^{-ty} y^{p-1}\,dy. \tag{9.46}$$

Заменив в этой формуле p на $p+q$ и t на $1+t$, получим

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty e^{-(1+t)y} y^{p+q-1}\,dy.$$

Умножим обе части последнего равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Очевидно, согласно соотношению (9.45), получим формулу

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dy. \tag{9.47}$$

Если в правой части соотношения (9.47) можно поменять местами порядки интегрирования по t и y, то, учитывая (9.46), получим

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\,dy\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}\,dy = \Gamma(p)\int\limits_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(p)\Gamma(q),$$

т. е. будет доказана справедливость формулы

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.48}$$

Убедимся теперь в возможности изменения порядка интегрирования в правой части (9.47). Для этого нужно проверить выполнение условий теоремы 9.12. Пусть сначала $p > 1$ и $q > 1$. Тогда, очевидно, выполнены условия теоремы 9.12. В самом деле:

1) функция $f(t,\,y) = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}$ неотрицательна и непрерывна в квадранте $t \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2) Интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,\,y)\,dy = t^{p-1}\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy = \dfrac{\Gamma(p+q)t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$ есть непрерывная функция от t при $t \geqslant 0$.

3) Интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,\,y)\,dt = y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dt = \Gamma(p)y^{q-1}e^{-y}$ есть непрерывная функция от y при $y \geqslant 0$.

4) Сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty f(t,\,y)\,dt$ установлена непосредственным вычислением.

Итак, при $p > 1$ и $q > 1$ формула (9.48) справедлива. Если же выполнены лишь условия $p > 0$ и $q > 0$, то по доказанному справедлива формула

$$\mathrm{B}(p+1,\,q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Из этой формулы с помощью формул приведения для функций $\mathrm{B}(p,\,q)$ и $\Gamma(p)$ получим опять формулу (9.48).

6. Вычисление определенных интегралов с помощью эйлеровых интегралов. Эйлеровы интегралы представляют собой хорошо изученные неэлементарные функции. Задача считается решенной, если она приводится к вычислению эйлеровых интегралов.

Приведем примеры вычисления обычных и несобственных интегралов путем сведения их к эйлеровым интегралам.

1. Вычислим интеграл
$$I = \int\limits_0^\infty x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$
Обращаясь к формулам (9.44) и (9.48), очевидно, получим
$$I = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right).$$

2. Вычислим интеграл
$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi\,d\varphi.$$
Полагая $x = \sin^2\varphi$, получим
$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{q}{2}-1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

3. Обратимся к интегралу
$$I_{p-1} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\,d\varphi.$$
Используя результат, полученный в примере 2 (надо положить $q=1$), найдем
$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \tag{9.49}$$
Имеем далее
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int\limits_0^\infty e^{-(\sqrt{x})^2}\,d\sqrt{x}.$$
Полагая $\sqrt{x} = t$ и замечая, что $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ равен $\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt$, получим, согласно примеру, рассмотренному в п. 2 § 4 гл. 3 (интеграл Пуассона)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
Поэтому формула (9.49) примет вид
$$I_{p-1} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \tag{9.50}$$

§ 5. Формула Стирлинга

Формулой Стирлинга называют следующую асимптотическую формулу:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1+\alpha_n), \tag{9.51}$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В этом параграфе мы докажем более общую формулу, сколь угодно точно описывающую поведение при больших значениях аргумента гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^\infty t^\lambda e^{-t}\, dt. \tag{9.52}$$

Для этого мы воспользуемся так называемым методом Лапласа, опирающимся на следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $f(t)$, интегрируемая при некотором $a > 0$ на сегменте $[-a, a]$, представима в виде*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k + O(t^{2n}). \tag{9.53}$$

Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} f(t)\, dt = \sum_{m=0}^{n-1} c_{2m} \frac{\Gamma\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{9.54}$$

Доказательство. Подставим соотношение (9.53) в интеграл, стоящий в левой части формулы (9.54), и учтем, что интегралы, отвечающие нечетным степеням t, обратятся в нуль. Для оценки оставшихся интегралов достаточно убедиться в справедливости при $m \geqslant 0$ следующего равенства:

$$\int\limits_0^a t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.55}$$

Представим интеграл в левой части (9.55) в следующем виде:

$$\int\limits_0^a t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt = \int\limits_0^\infty t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt - \int\limits_a^\infty t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt. \tag{9.56}$$

В первом интеграле в правой части (9.56) произведем замену $x = \lambda t^2$ и получим

$$\int\limits_0^\infty t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt = \frac{1}{2\lambda^{m+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{9.57}$$

Далее заметим, что при $\lambda > 1$ и $t \geqslant a$ справедливо следующее неравенство:

$$e^{-\lambda t^2} \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-t^2}.$$

Применяя это неравенство, оценим второй интеграл в правой части (9.56)

$$\int\limits_a^\infty e^{-\lambda t^2} t^{2m}\, dt \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int\limits_a^\infty t^{2m} e^{-t^2}\, dt = ce^{-\lambda a^2}. \tag{9.58}$$

Из равенств (9.56), (9.57) и оценки (9.58) вытекает требуемая формула (9.55). Лемма доказана.

Для того чтобы применить эту лемму, произведем в интеграле (9.52) замену $t = \lambda(1 + x)$. В результате этот интеграл примет вид

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int\limits_{-1}^\infty e^{-\lambda[x-\ln(1+x)]}\, dx. \tag{9.59}$$

Обозначим через $g(x)$ следующую функцию, определенную на полупрямой $x > -1$:

$$g(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x - \ln(1+x)}. \tag{9.60}$$

Тогда равенство (9.59) можно переписать в виде

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int\limits_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\, dx. \tag{9.61}$$

Нашей целью является изучение асимптотического поведения при $\lambda \to +\infty$ следующего интеграла:

$$I(\lambda) = \int\limits_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\, dx. \tag{9.62}$$

Для этого рассмотрим подробнее функцию $g(x)$, определенную равенством (9.60). Поскольку

$$\frac{d}{dx} g^2(x) = \frac{d}{dx}(x - \ln(1+x)) = \frac{x}{1+x}, \tag{9.63}$$

то функция $g^2(x)$ строго убывает при $-1 < x < 0$ и строго возрастает при $x > 0$. Отсюда вытекает, что функция $g(x)$ строго возрастает на полупрямой $x > -1$, причем областью ее значений является вся числовая прямая. Далее, так как функция $g^2(x)$ имеет в окрестности точки $x = 0$ разложение

$$g^2(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + O(x^3),$$

то существует строго положительная при $x > -1$ функция $h(x)$ такая, что справедливо равенство

$$g^2(x) = x^2 h(x).$$

Функция $h(x)$ является бесконечно дифференцируемой при $x > -1$, следовательно, бесконечно дифференцируемой будет и функция $g(x) = x\sqrt{h(x)}$.

Учитывая вышенаписанное, можно утверждать, что для функции $y = g(x)$, определенной равенством (9.60), существует обратная функция $x = g^{-1}(y)$, строго возрастающая и бесконечно дифференцируемая на всей числовой прямой и удовлетворяющая условию $g^{-1}(0) = 0$.

Обозначим эту обратную функцию символом $x = \varphi(y)$. Используя указанные выше ее свойства, найдем асимптотику интеграла (9.62). Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.13. *Пусть функция $x = \varphi(y)$ является обратной к функции $y = g(x)$, определенной равенством* (9.60). *Тогда для интеграла* (9.62) *при любом фиксированном номере n справедлива следующая асимптотическая формула*:

$$I(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2m+1)}(0)}{(2m)!} \frac{\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{9.64}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное положительное число a и положим $b = \varphi(-a)$, $c = \varphi(a)$. Это означает, что $a = g(c) = -g(b)$, и, следовательно, $-1 < b < 0$ и $c > 0$.

Оценим следующие два интеграла:

$$I_1(\lambda) = \int_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx, \quad I_2(\lambda) = \int_{c}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx. \tag{9.65}$$

Для оценки первого интеграла заметим, что при $-1 < x < b$ выполняется неравенство $g(x) < -a$, т. е. $g^2(x) > a^2$ и, следовательно,

$$e^{-\lambda g^2(x)} < e^{-\lambda a^2}.$$

В таком случае

$$I_1(\lambda) \leqslant e^{-\lambda a^2} \int_{-1}^{b} dx = (1 - |b|)e^{-\lambda a^2}. \tag{9.66}$$

Аналогично оценивается интеграл $I_2(\lambda)$. При $x > c$ выполняется неравенство $g(x) > a$, т. е. $g^2(x) > a^2$. Следовательно, при $\lambda > 1$ и $x > c$ имеет место оценка

$$e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-(\lambda-1)g^2(x)}e^{-g^2(x)} < e^{-(\lambda-1)a^2}e^{-g^2(x)}.$$

Отсюда мы получаем

$$I_2(\lambda) \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int\limits_c^\infty e^{-g^2(x)}\,dx = c_1 e^{-\lambda a^2}. \tag{9.67}$$

Из оценок (9.66) и (9.67), которым удовлетворяют интегралы (9.65), мы получаем для интеграла (9.62) следующее соотношение:

$$I(\lambda) = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)}\,dx + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.68}$$

Произведем в интеграле (9.68) замену переменной $t = g(x)$, т. е. $x = \varphi(t)$. В результате получим

$$I(\lambda) = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2}\varphi'(t)\,dt + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.69}$$

Поскольку функция $\varphi'(t)$ является бесконечно дифференцируемой, воспользовавшись формулой Маклорена, представим ее в виде

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}t^k + O(t^{2n}).$$

Для получения формулы (9.64) остается применить лемму к функции $f(t) = \varphi'(t)$. Теорема 9.13 доказана.

В заключение этого параграфа укажем следующий простой способ вычисления производных $\varphi^{(k)}(0)$. Из равенства (9.63) мы получаем

$$2g \cdot g' = \frac{x}{x+1} = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+1}.$$

Из этого равенства вытекает соотношение

$$\varphi'(t) = \frac{1}{g'} = 2g\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)} = 2t\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)}.$$

Таким образом, мы получаем следующее равенство:

$$\varphi(t)\varphi'(t) = 2t + 2t\varphi(t). \tag{9.70}$$

Последовательно дифференцируя это равенство и полагая $t=0$, мы определим все производные $\varphi^{(k)}(0)$. Найдем для примера значения первых трех производных функций $\varphi(t)$ в нуле.

Продифференцировав (9.70), получим

$$[\varphi'(t)]^2 + \varphi(t)\varphi''(t) = 2 + 2(t\varphi'(t) + \varphi(t)). \tag{9.71}$$

Положим $t = 0$ и учтем, что $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'^2(0) = 2$, т. е. $\varphi'(0) = \sqrt{2}$.

После дифференцирования равенства (9.71) получим

$$3\varphi' \cdot \varphi'' + \varphi \cdot \varphi''' = 2(t\varphi'' + 2\varphi').$$

Приравняв t нулю, получим $3\sqrt{2}\varphi''(0) = 4\sqrt{2}$, т. е. $\varphi''(0) = 4/3$. Аналогично из равенства

$$3\varphi''^2 + 4\varphi' \cdot \varphi''' + \varphi \cdot \varphi^{\mathrm{IV}} = 2(t\varphi''' + 3\varphi'').$$

получим $\varphi'''(0) = \sqrt{2}/3$.

Следовательно формулу (9.64) можно записать в виде

$$I(\lambda) = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda\sqrt{\lambda}} + \frac{O(1)}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}. \tag{9.72}$$

Подставим равенство (9.72) в (9.61) и учтем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. В результате получим

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^\lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^2}\right). \tag{9.73}$$

Выпишем первые пять членов асимптотического разложения гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^\lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} - \frac{139}{51\,840\lambda^3} - \frac{571}{2\,488\,320\lambda^4} + \frac{O(1)}{\lambda^5}\right).$$

Отметим без доказательства, что остаток асимптотического ряда не превосходит последнего удерживаемого слагаемого.

§ 6. Кратные интегралы, зависящие от параметров

1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — произвольная точка области D m-мерного евклидова пространства E^m, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ — точка области Ω пространства E^l. Обозначим символом $D \times \Omega$ подмножество $(l + m)$-мерного евклидова пространства, состоящее из всех точек $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+l})$ таких, что точка $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ принадлежит D, а точка $(z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+l})$ принадлежит Ω. При этом мы будем часто использовать обозначение $z = (x, y) \in D \times \Omega$. Замыкание области D мы будем обозначать символом $\overline{D}$. Легко видеть, что замыкание $D \times \Omega$ совпадает с $\overline{D} \times \overline{\Omega}$.

Пусть $f(x, y)$ — функция, определенная в $D \times \Omega$, причем для любого $y_0 \in \Omega$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x в области D. Тогда функцию

$$I(y) = \int\limits_D f(x, y)\,dx, \tag{9.74}$$

определенную в области Ω, будем называть интегралом, зависящим от параметра y. Заметим, что параметр y является

l-мерным вектором и, следовательно, интеграл (9.74) зависит от l числовых параметров $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

В полной аналогии с теоремами 9.9–9.12 доказываются следующие теоремы.

***Теорема 9.14* (о непрерывности интеграла (9.74) по параметру).** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, то интеграл* (9.74) *представляет собой непрерывную функцию параметра y в области $\overline{\Omega}$.*

***Теорема 9.15* (об интегрировании интеграла (9.74) по параметру).** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, то функцию* (9.74) *можно интегрировать по параметру под знаком интеграла, т. е. справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Omega} I(y)\, dy = \int\limits_{D} dx \int\limits_{\Omega} f(x, y)\, dy.$$

***Теорема 9.16* (о дифференцируемости интеграла (9.74) по параметру).** *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ непрерывны в $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, то интеграл* (9.74) *имеет в области Ω непрерывную частную производную $\dfrac{\partial I}{\partial y_k}$, причем справедливо равенство*

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = \int\limits_{D} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\, dx.$$

2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Понятие несобственного кратного интеграла, зависящего от параметров, можно было бы ввести так же, как и в предыдущем пункте, для случая, когда подынтегральная функция $f(x, y)$ определена в $D \times \Omega$, где $D \subset E^m$ и $\Omega \subset E^l$. Однако наибольший интерес представляет случай $D = \Omega$, который и будет нами изучен. Кроме того, мы будем предполагать, что $f(x, y) = F(x, y)\, g(x)$, где $F(x, y)$ непрерывна при $x \neq y$ в $\overline{D} \times \overline{D}$, а функция $g(x)$ ограничена в D. Таким образом, мы рассматриваем интегралы вида

$$V(y) = \int\limits_{D} F(x, y) g(x)\, dx, \tag{9.75}$$

где подынтегральная функция может иметь особенности лишь при $x = y$. Нас будет интересовать вопрос о непрерывности интегралов вида (9.75) по параметру y. В связи с этим введем следующее определение *равномерной сходимости интеграла* (9.75) *в точке.* Символом $K(y_0, \delta)$ мы будем обозначать шар радиуса δ с центром в точке y_0.

Определение. *Интеграл* (9.75) *назовем сходящимся равномерно по параметру y в точке $y_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $K(y_0,\, \delta) \subset D$ и для любой кубируемой области $\omega \subset K(y_0,\, \delta)$ и всех точек $y \in K(y_0,\, \delta)$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_\omega F(x,\, y) g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 9.17. *Если интеграл* (9.75) *сходится равномерно по y в точке $y_0 \in D$, то он непрерывен в точке y_0.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|V(y) - V(y_0)| < \varepsilon$. Из определения равномерной сходимости в точке следует существование такого $\delta_1 > 0$, что $K(y_0,\, \delta_1) \subset D$ и при $y \in K(y_0,\, \delta_1)$

$$\left| \int_K F(x,\, y) g(x)\, dx \right| < \varepsilon/3. \tag{9.76}$$

Положим

$$\begin{aligned} V_1(y) &= \int_K F(x,\, y) g(x)\, dx, \\ V_2(y) &= \int_{D \setminus K} F(x,\, y) g(x)\, dx. \end{aligned} \tag{9.77}$$

Из неравенства (9.76) следует, что при $|y - y_0| < \delta_1$

$$|V_1(y)| < \varepsilon/3. \tag{9.78}$$

Далее заметим, что при $x \in D \setminus K(y_0,\, \delta_1)$ и $y \in K(y_0,\, \delta_1/2)$ функция $F(x,\, y)$ будет равномерно непрерывной по совокупности аргументов. Следовательно, найдется положительное число $\delta < \delta_1/2$ такое, что при $|y - y_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|F(x,\, y_0) - F(x,\, y)| < \varepsilon/(3M|D|),$$

где M — константа, ограничивающая функцию g, и $|D|$ — объем области D. В таком случае, при $|y - y_0| < \delta$

$$|V_2(y) - V_2(y_0)| \leqslant M \int_{D \setminus K(y_0,\, \delta_1)} |F(x,\, y_0) - F(x,\, y)|\, dx \leqslant \varepsilon/3. \tag{9.79}$$

Из соотношений (9.77)–(9.79) следует, что при $|y - y_0| < \delta$

$$|V(y) - V(y_0)| \leqslant |V_1(y)| + |V_1(y_0)| + |V_2(y) - V_2(y_0)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Укажем одно достаточное условие равномерной сходимости интеграла в точке, наиболее часто встречающееся в приложениях.

Теорема 9.18. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в $\overline{D} \times \overline{D}$ при $x \neq y$, а функция $g(x)$ равномерно ограничена в D. Предположим, что существуют постоянные λ, $0 < \lambda < m$, и $c > 0$ такие, что для всех $x \in D$, $y \in D$ выполняется неравенство*

$$|F(x, y)| \leqslant c|x - y|^{-\lambda}. \tag{9.80}$$

Тогда интеграл (9.75) сходится равномерно по y в каждой точке $y_0 \in D$.

Доказательство. Пусть y_0 — произвольная точка области D. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой кубируемой области $\omega \subset K(y_0, \delta)$ и всех $y \in K(y_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\Bigl|\int\limits_{\omega} F(x, y)g(x)\,dx\Bigr| < \varepsilon. \tag{9.81}$$

Применяя (9.80) и используя условие ограниченности $g(x)$, получим

$$\Bigl|\int\limits_{\omega} F(x, y)g(x)\,dx\Bigr| \leqslant c_1 \int\limits_{\omega} |x - y|^{-\lambda}\,dx.$$

Фиксируем точку $y \in K(y_0, \delta)$ и заметим, что из условия $\omega \subset K(y_0, \delta)$ вытекает включение $\omega \subset K(y, 2\delta)$. Следовательно,

$$\Bigl|\int\limits_{\omega} F(x, y)g(x)\,dx\Bigr| \leqslant c_1 \int\limits_{K(y,\,2\delta)} |x - y|^{-\lambda}\,dx. \tag{9.82}$$

Переходя в интеграле в правой части (9.82) к сферическим координатам с центром в точке y (см. гл. 2, § 5, п. 3°), получим

$$\Bigl|\int\limits_{\omega} F(x, y)g(x)\,dx\Bigr| \leqslant c_2 \int\limits_{0}^{2\delta} r^{m-1-\lambda}\,dr = \frac{c_2\,2^{m-\lambda}}{m-\lambda}\delta^{m-\lambda} = c_3\delta^{m-\lambda}.$$

Отсюда следует, что, выбрав δ достаточно малым, мы получим неравенство (9.81). Теорема доказана.

3. Приложение к теории ньютонова потенциала. Пусть в некоторой точке $P_0(x, y, z)$ помещена масса m_0. По закону всемирного тяготения на массу m, помещенную в точку $M(\xi, \eta, \zeta)$, действует сила

$$F = -\gamma\frac{mm_0}{R^2}\overline{r},$$

где $R = \rho(P_0, M) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, γ — гравитационная постоянная, $\overline{r} = \overline{R}/R$ — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{P_0M}$. Считая $\gamma = 1$ и массу $m = 1$, получим силу тяготения

$$F = -\frac{m_0}{R^2}\,\overline{r}.$$

Отметим, что компоненты этой силы имеют вид

$$X = -\frac{m_0}{R^3}(\xi - x),$$
$$Y = -\frac{m_0}{R^3}(\eta - y),$$
$$Z = -\frac{m_0}{R^3}(\zeta - z).$$

Очевидно, что потенциал силы тяготения, определяемый как скалярная функция u такая, что $F = \operatorname{grad} u$, равен

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

Если масса сосредоточена не в точке $P_0(x,\, y,\, z)$, а распределена по области D с плотностью $\rho(x,\, y,\, z)$, то для потенциала силы и для компонент силы мы получим следующие выражения:

$$u(\xi,\, \eta,\, \zeta) = \iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R}\,dx\,dy\,dz, \tag{9.83}$$

$$\begin{aligned} X &= -\iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R^3}(\xi - x)\,dx\,dy\,dz, \\ Y &= -\iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R^3}(\eta - y)\,dx\,dy\,dz, \\ Z &= -\iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R^3}(\zeta - z)\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{9.84}$$

Нетрудно показать, что интегралы (9.84) представляют собой частные производные потенциала (9.83). Поскольку подынтегральные функции в интегралах (9.83) и (9.84) мажорируются функцией $\dfrac{C}{R^\lambda}$, где $\lambda = 1$ для интеграла (9.83) и $\lambda = 2$ для интегралов (9.84), то в силу теоремы 9.18 указанные интегралы сходятся равномерно в каждой точке $M(\xi,\, \eta,\, \zeta)$. Следовательно, по теореме 9.17 эти интегралы представляют собой непрерывные функции точки $M(\xi,\, \eta,\, \zeta)$.

ГЛАВА 10

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Из курса линейной алгебры известно, что если выбрать в линейном пространстве конечной размерности некоторый базис, то любой элемент указанного линейного пространства может быть разложен по этому базису (и притом единственным способом).

Несравненно более сложным является вопрос о выборе базиса и о разложении по базису для случая бесконечномерного пространства.

В настоящей главе этот вопрос изучается для случая так называемых евклидовых бесконечномерных пространств и для базисов специального вида (так называемых ортонормированных базисов).

Особо обстоятельно изучается базис, образованный в пространстве всех кусочно-непрерывных функций так называемой тригонометрической системой.

Обобщением идеи разложения функции по базису является изучаемое в настоящей главе разложение функции в так называемый интеграл Фурье [1].

Всюду в данной главе интеграл понимается в смысле Римана.

§ 1. Понятие об ортонормированных системах и об общем ряде Фурье

В настоящем параграфе мы будем рассматривать произвольное евклидово пространство бесконечной размерности [2]. Ради удобства чтения приведем определение евклидова пространства.

Определение 1. *Линейное пространство R называется евклидовым, если выполнены следующие два требования:*

1) *известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g пространства R ставится в соответствие*

---

[1] Ж. Фурье — французский математик (1772–1837).

[2] Говорят, что линейное пространство является бесконечномерным, если в этом пространстве найдется любое наперед взятое число линейно независимых элементов.

число, называемое **скалярным произведением** *этих элементов и обозначаемое символом* (f, g);

2) *указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам*:

1°. $(f, g) = (g, f)$ — *переместительное свойство.*

2°. $(f+g, h) = (f, h)+(g, h)$ — *распределительное свойство.*

3°. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ *для любого вещественного числа* λ.

4°. $(f, f) > 0$, *если* $f \neq \mathbf{0}$ [1], $(f, f) = 0$, *если* $f = \mathbf{0}$.

Классическим примером бесконечномерного евклидова пространства является пространство всех кусочно-непрерывных на некотором сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ функций.

При этом мы договоримся всюду в данной главе понимать под кусочно-непрерывной на сегменте $[a, b]$ функцией $f(x)$ такую функцию, которая непрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек x_i $(i = 1, 2, \ldots \ldots, n)$, в которых она имеет разрыв первого рода, причем в каждой точке разрыва x_i эта функция удовлетворяет условию

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}. \tag{10.1}$$

Таким образом, всюду в этой главе мы требуем, чтобы *кусочно-непрерывная функция* $f(x)$ *в каждой точке разрыва* x_i *удовлетворяла условию* (10.1), *т. е. была равна полусумме правого и левого предельных значений.* Отметим, что в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ условие типа (10.1) автоматически справедливо.

Скалярное произведение двух любых элементов $f(x)$ и $g(x)$ пространства всех кусочно-непрерывных на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ функций определим следующим образом:

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{10.2}$$

Существование интеграла (10.2) от произведения двух кусочно-непрерывных функций не вызывает сомнений. Легко проверить справедливость для скалярного произведения (10.2) аксиом 1°–4°. Справедливость аксиомы 1° очевидна. Справедливость аксиом 2° и 3° вытекает из линейных свойств интеграла.

Остановимся на доказательстве справедливости аксиомы 4°. Поскольку очевидно, что всегда $(f, f) = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$, то достаточно доказать, что из равенства $(f, f) = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ вытекает,

---

[1] $\mathbf{0}$ обозначает нулевой элемент линейного пространства.

что $f(x) \equiv 0$, т. е. является нулевым элементом изучаемого пространства. Так как $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[a, b]$, то этот сегмент распадается на конечное число частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых $f(x)$ непрерывна [1].

Из равенства $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ вытекает, что и для каждого частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0. \tag{10.3}$$

Но из равенства (10.3) и из непрерывности $f^2(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ следует, что $f(x) \equiv 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ [2].

Так как последнее равенство относится к каждому частичному сегменту и в точках разрыва справедливо соотношение (10.1), то $f(x) \equiv 0$ на всем сегменте $[a, b]$. Справедливость аксиомы 4° установлена.

Тем самым доказано, что пространство всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций является евклидовым пространством со скалярным произведением (10.2).

Установим следующее общее свойство любого евклидова пространства.

Теорема 10.1. *Во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов f и g справедливо следующее неравенство*:

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f) \cdot (g, g), \tag{10.4}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство. Для любого вещественного числа λ

$$(\lambda f - g, \lambda f - g) \geqslant 0.$$

В силу аксиом 1°–4° последнее неравенство можно переписать в виде

$$\lambda^2 (f, f) - 2\lambda (f, g) + (g, g) \geqslant 0.$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности последнего квадратного трехчлена является неположительность его дискриминанта, т. е. неравенство

$$(f, g)^2 - (f, f) \cdot (g, g) \leqslant 0. \tag{10.5}$$

Из (10.5) немедленно следует (10.4). Теорема доказана.

---

[1] При этом значения $f(x)$ в граничных точках x_{i-1} и x_i каждого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ мы полагаем соответственно равными предельным значениям $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i - 0)$.

[2] Ибо в § 6 гл. 10 вып. 1 доказано, что если функция непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю на данном сегменте, то интеграл от этой функции по данному сегменту больше нуля.

Наша очередная задача — ввести в изучаемом евклидовом пространстве понятие нормы каждого элемента.

Но прежде всего напомним определение линейного нормированного пространства.

Определение 2. *Линейное пространство R называется нормированным, если выполнены следующие два требования:*

1) *известно правило, посредством которого каждому элементу f пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой указанного элемента и обозначаемое символом $\|f\|$;*

2) *указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:*

1°. $\|f\| > 0$, *если* $f \neq 0$, $\|f\| = 0$, *если* $f = 0$.

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *для любого элемента f и любого вещественного числа λ.*

3°. *Для любых двух элементов f и g справедливо следующее неравенство:*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \tag{10.6}$$

называемое неравенством треугольника (или неравенством Минковского).

Теорема 10.2. *Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента f определить равенством*

$$\|f\| = \sqrt{(f,\, f)}. \tag{10.7}$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что для нормы, определенной соотношением (10.7), справедливы аксиомы 1°–3° из определения 2.

Справедливость аксиомы 1° сразу вытекает из аксиомы 4° для скалярного произведения. Справедливость аксиомы 2° также почти непосредственно вытекает из аксиомы 1° и 3° для скалярного произведения.

Остается убедиться в справедливости аксиомы 3°, т. е. неравенства (10.6). Будем опираться на неравенство Коши–Буняковского (10.4), которое перепишем в виде

$$|(f,\, g)| \leqslant \sqrt{(f,\, f)} \cdot \sqrt{(g,\, g)}.$$

С помощью последнего неравенства, аксиом 1° — 4° для скалярного произведения и определения нормы (10.7) получим

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g,\, f+g)} = \sqrt{(f,\, f) + 2(f,\, g) + (g,\, g)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(f,\, f) + 2\sqrt{(f,\, f)} \cdot \sqrt{(g,\, g)} + (g,\, g)} =$$
$$= \sqrt{\left[\sqrt{(f,\, f)} + \sqrt{(g,\, g)}\right]^2} = \sqrt{(f,\, f)} + \sqrt{(g,\, g)} = \|f\| + \|g\|.$$

Теорема доказана.

Замечание. Конечно, в каждом евклидовом пространстве скалярное произведение (и норму) можно ввести не единственным способом. Для нас в дальнейшем достаточно, что в рассматриваемом евклидовом пространстве существует хотя бы один способ введения скалярного произведения. Фиксировав этот способ, мы всегда в дальнейшем будем определять норму рассматриваемого евклидова пространства соотношением (10.7). Так, в пространстве всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций (в соответствии с (10.2)) норма определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{10.8}$$

а неравенство треугольника (10.6) имеет вид

$$\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{10.9}$$

Введем теперь понятие ортогональных элементов данного евклидова пространства.

Определение 3. *Два элемента евклидова пространства f и g называются ортогональными, если скалярное произведение (f, g) этих элементов равно нулю.*

Рассмотрим в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве R некоторую последовательность элементов

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{10.10}$$

Определение 4. *Последовательность* (10.10) *называется ортонормированной системой, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице.*

Классическим примером ортонормированной системы в пространстве всех кусочно-непрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций является так называемая тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{10.11}$$

Читатель легко проверит, что все функции (10.11) попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения (10.2), взятого при $a = -\pi$, $b = \pi$) и что норма каждой из этих функций (определяемая равенством (10.7) при $a = -\pi$, $b = \pi$) равна единице.

В математике и в ее приложениях часто встречаются различные ортонормированные (на соответствующих множествах) системы функций.

Приведем некоторые примеры таких систем.

1°. Многочлены, определяемые равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

принято называть полиномами Лежандра.

Нетрудно убедиться, что образованные с помощью этих многочленов функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

образуют ортонормированную (на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$) систему функций.

2°. Многочлены, определяемые равенствами $T_0(x) \equiv 1$, $T_n(x) = 2^{1-n} \times \cos n(\arccos x)$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$, называются полиномами Чебышева. Среди всех многочленов n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице, полином Чебышева $T_n(x)$ имеет наименьший на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ максимум модуля. Можно доказать, что полученные с помощью полиномов Чебышева функции

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{1-x^2}}, \quad \psi_n(x) = \frac{2^{n-\frac{1}{2}} \cdot T_n(x)}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{1-x^2}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

образуют ортонормированную на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ систему.

3°. В теории вероятностей часто применяется так называемая система Радемахера [1])

$$\psi_n(x) = \varphi(2^n \cdot x) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\varphi(t) = \operatorname{sgn}(\sin\, 2\pi t)$.

Доказывается, что эта система ортонормирована на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4°. В ряде исследований по теории функций находит применение так называемая система Хаара [2]), являющаяся ортонормированной на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Элементы этой системы $\chi_n^{(k)}(x)$ определяются для всех $n = 0,\ 1,\ \ldots$ и для всех k, принимающих значения $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Они имеют вид

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant x < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leqslant \dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0,\ 1]. \end{cases}$$

Каждая функция Хаара представляет собой ступеньку такого же вида, как функция $\sqrt{2^n}\operatorname{sgn} x$ на сегменте $[-2^{-(n+1)},\ 2^{-(n+1)}]$. Для каждого фиксированного номера n при увеличении значения k эта ступенька сдвигается вправо. Всюду вне соответствующей ступеньки каждая функция Хаара тождественно равна нулю.

Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве R задана произвольная ортонормированная система элементов $\{\psi_k\}$. Рассмотрим какой угодно элемент f пространства R.

[1]) Радемахер — немецкий математик (род. 1892 г.).

[2]) Хаар — немецкий математик (1885–1933).

Определение 5. *Назовем* *рядом Фурье* *элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k, \tag{10.12}$$

в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые *коэффициентами Фурье* *элемента f и определяемые равенствами*

$$f_k = (f, \psi_k), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Естественно назвать конечную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{10.13}$$

n-й частичной суммой ряда Фурье (10.12).

Рассмотрим наряду с n-й частичной суммой (10.13) произвольную линейную комбинацию первых n элементов ортонормированной системы $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k \tag{10.14}$$

с какими угодно постоянными числами $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Выясним, что отличает n-ю частичную сумму ряда Фурье (10.13) от всех других сумм (10.14).

Договоримся называть, величину $\|f - g\|$ отклонением g от f (по норме данного евклидова пространства).

Имеет место следующая *основная* теорема.

Теорема 10.3. *Среди всех сумм вида* (10.14) *наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма* (10.13) *ряда Фурье элемента f.*

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы $\{\psi_k\}$ и пользуясь аксиомами скалярного произведения, можем записать

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f, \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 (\psi_k, \psi_k) - 2 \sum_{k=1}^{n} C_k (f, \psi_k) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 .$$

Итак,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{10.15}$$

В левой части (10.15) стоит квадрат отклонения суммы (10.14) от элемента f (по норме данного евклидова пространства). Из вида правой части (10.15), следует, что указанный квадрат отклонения является наименьшим при $C_k = f_k$ (ибо при этом первая сумма в правой части (10.15) обращается в нуль, а остальные слагаемые в правой части (10.15) от C_k не зависят). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ при произвольном выборе постоянных C_k для любого номера n справедливо неравенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2. \tag{10.16}$$

Неравенство (10.16) является непосредственным следствием тождества (10.15).

Следствие 2. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства, любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и любого номера n справедливо равенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{10.17}$$

часто называемое тождеством Бесселя [1].

Для доказательства равенства (10.17) достаточно положить в (10.15) $C_k = f_k$.

Теорема 10.4. *Для любого элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ справедливо следующее неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{10.18}$$

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из неотрицательности левой части (10.17) следует, что для любого номера n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{10.19}$$

[1] Ф. Бессель — немецкий астроном и математик (1784–1846).

Но это означает, что ряд из неотрицательных членов, стоящий в левой части (10.18), обладает ограниченной последовательностью частичных сумм и поэтому сходится. Переходя в неравенстве (10.19) к пределу при $n \to \infty$ (см. теорему 3.13 из вып. 1), мы получим неравенство (10.18). Теорема доказана.

В качестве примера обратимся к пространству всех кусочно-непрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций и в этом пространстве к ряду Фурье по тригонометрической системе (10.11) (этот ряд принято называть *тригонометрическим рядом Фурье*). Для любой кусочно-непрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$\overline{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\overline{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \overline{\overline{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \qquad (10.20)$$

где коэффициенты Фурье $\overline{f}_k$ и $\overline{\overline{f}}_k$ определяются формулами

$$\overline{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$\overline{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \; \overline{\overline{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \; (k = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Неравенство Бесселя, справедливое для любой кусочно-непрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$, имеет вид

$$\overline{f}_0^{\,2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{f}_k^{\,2} + \overline{\overline{f}}_k^{\,2}) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \qquad (10.21)$$

Отклонение $f(x)$ от $g(x)$ по норме в этом случае равно так называемому *среднему квадратичному отклонению*

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2\, dx}. \qquad (10.22)$$

Впрочем, в теории тригонометрических рядов Фурье принята несколько иная форма записи как самого ряда Фурье (10.20), так и неравенства Бесселя (10.21). Именно тригонометрический ряд Фурье (10.20) обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (10.20')$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\overline{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \\ &(k = 1,\,2,\,\ldots). \end{aligned} \tag{10.23}$$

При такой форме записи неравенство Бесселя (10.21) принимает вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{10.21$'$}$$

Замечание. Из неравенства Бесселя (10.21$'$) вытекает, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$ величины a_k и b_k (называемые тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f(x)$), стремятся к нулю при $k \to \infty$ (в силу необходимого условия сходимости ряда в левой части (10.21$'$)).

§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы

Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать произвольную ортонормированную систему $\{\psi_k\}$ в каком угодно бесконечномерном евклидовом пространстве R.

Определение 1. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если для любого элемента f данного евклидова пространства R и для любого положительного числа ε найдется такая линейная комбинация* (10.14) *конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по норме пространства R) меньше ε.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если любой элемент f данного евклидова пространства R можно приблизить по норме этого пространства с любой степенью точности линейными комбинациями конечного числа элементов $\{\psi_k\}$.

Замечание 1. Мы опускаем вопрос о том, во всяком ли евклидовом пространстве существуют замкнутые ортонормированные системы. Отметим, что в гл. 11 изучается важный подкласс евклидовых пространств — так называемые гильбертовы пространства — и устанавливается существование в каждом таком пространстве замкнутых ортонормированных систем.

Теорема 10.5. *Если ортонормированная система* $\{\psi_k\}$ *является замкнутой, то для любого элемента* f *рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя* (10.18) *переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \tag{10.24}$$

называемое равенством Парсеваля [1]*.*

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент f рассматриваемого евклидова пространства и произвольное положительное число ε. Так как система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то найдется такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что квадрат нормы, стоящий в правой части (10.16), будет меньше ε. В силу (10.16) это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, для которого

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon. \tag{10.25}$$

Для всех номеров, превосходящих указанный номер n, неравенство (10.25) будет тем более справедливо, ибо при возрастании n сумма, стоящая в левой части (10.25) может только возрасти.

Итак, мы доказали, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, начиная с которого справедливо неравенство (10.25).

В соединении с неравенством (10.19) это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$. Теорема доказана.

Теорема 10.6. *Если ортонормированная система* $\{\psi_k\}$ *является замкнутой, то, каков бы ни был элемент* f*, ряд Фурье этого элемента сходится к нему по норме рассматриваемого евклидова пространства, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f \right\| = 0. \tag{10.26}$$

Доказательство. Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из равенства (10.17) и из предыдущей теоремы.

Замечание 2. В пространстве всех кусочно-непрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций сходимость по норме (10.26) переходит в сходимость на этом сегменте в среднем (см. п. 3 § 2 гл. 1). Таким образом, если будет доказана замкнутость тригонометрической системы (10.11), то теорема 10.6

[1] М. Парсеваль — французский математик, умерший в 1836 г.

будет утверждать, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней на указанном сегменте в среднем.

Определение 2. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется полной, если, кроме нулевого элемента, не существует никакого другого элемента f данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется полной, если всякий элемент f, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$, является нулевым элементом.

Теорема 10.7. *Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является полной.*

Доказательство. Пусть система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, и пусть f — любой элемент данного евклидова пространства, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.

Тогда все коэффициенты Фурье f_k элемента f по системе $\{\psi_k\}$ равны нулю, и, стало быть, в силу равенства Парсеваля (10.24) и $\|f\| = 0$. Последнее равенство (в силу аксиомы 1° для нормы) означает, что $f = \mathbf{0}$. Теорема доказана.

Замечание 3. Мы доказали, что в произвольном евклидовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы вытекает ее полнота. В гл. 11 будет приведен пример, показывающий, что в произвольном евклидовом пространстве из полноты ортонормированной системы, вообще говоря, не вытекает замкнутость этой системы. Там же будет доказано, что для весьма важного класса евклидовых пространств — так называемых гильбертовых пространств — полнота ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.

Теорема 10.8. *Для всякой полной (и тем более для всякой замкнутой) ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g рассматриваемого евклидова пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье.*

Доказательство. Если бы все коэффициенты Фурье элементов f и g совпадали, то все коэффициенты Фурье разности $f - g$ были бы равны нулю, т. е. разность $f - g$ была бы ортогональна ко всем элементам ψ_k полной системы $\{\psi_k\}$. Но это означало бы, что разность $f - g$ является нулевым элементом, т. е. означало бы совпадение элементов f и g. Теорема доказана.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общего ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе в любом евклидовом пространстве.

Наша очередная цель — детальное изучение ряда Фурье по тригонометрической системе (10.11).

§ 3. Замкнутость тригонометрической системы и следствия из нее

1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами. В этом параграфе будет установлена замкнутость (а стало быть, и полнота) тригонометрической системы (10.11) в пространстве всех кусочно-непрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций. Но прежде чем приступить к доказательству замкнутости тригонометрической системы, мы установим важную теорему о равномерном приближении непрерывной функции так называемыми тригонометрическими многочленами.

Будем называть тригонометрическим многочленом произвольную линейную комбинацию любого конечного числа элементов тригонометрической системы (10.11), т. е. выражение вида

$$T(x) = \overline{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{C}_k \cos kx + \overline{\overline{C}}_k \sin kx),$$

где n — любой номер, а $\overline{C}_k$ и $\overline{\overline{C}}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные вещественные числа.

Отметим два совершенно элементарных утверждения:

1°. *Если $P(x)$ — какой угодно алгебраический многочлен произвольной степени n, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ суть тригонометрические многочлены.*

2°. *Если $T(x)$ — тригонометрический многочлен, то каждое из выражений $T(x) \cdot \sin x$ и $T(x) \cdot \sin^2 x$ также представляет собой тригонометрический многочлен.*

Оба утверждения вытекают из того, что произведение двух (а поэтому и любого конечного числа) тригонометрических функций [1]) от аргумента x приводится к линейной комбинации конечного числа тригонометрических функций от аргументов типа kx (убедитесь в этом сами).

В теории тригонометрических рядов Фурье важную роль играет понятие периодической функции.

Функция $f(x)$ называется периодической функцией с периодом T, если: 1) *$f(x)$ определена для всех вещественных x;* 2) *для любого вещественного x справедливо равенство*

$$f(x + T) = f(x).$$

Это равенство обычно называют условием периодичности. К рассмотрению периодических функции приводит изучение различных колебательных процессов.

[1]) Под тригонометрическими функциями в данном случае понимаются косинус или синус.

Заметим, что все элементы тригонометрической системы (10.11) являются периодическими функциями с периодом 2π.

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 10.9 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то эту функцию можно равномерно на указанном сегменте приблизить тригонометрическими многочленами*, т. е. для этой функции $f(x)$ и для любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что сразу для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{10.27}$$

Доказательство. Ради удобства разобьем доказательство на два пункта.

1°. Сначала дополнительно предположим, что функция $f(x)$ является четной, т. е. для любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$.

В силу теоремы о непрерывности сложной функции $y = f(x)$, где $x = \arccos t$ (см. вып. 1, гл. 4, § 7) функция $F(t) = f(\arccos t)$ является непрерывной функцией аргумента t на сегменте $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Стало быть, по теореме Вейерштрасса для алгебраических многочленов (см. теорему 1.18 из гл. 1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P(t)$ такой, что $|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon$ сразу для всех t из сегмента $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Положив $t = \cos x$, мы получим, что

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \tag{10.28}$$

сразу для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Так как обе функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются четными, то неравенство (10.28) справедливо и для всех x из сегмента $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. Таким образом, неравенство (10.28) справедливо для всех x из сегмента $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, и поскольку (в силу указанного выше утверждения 1°) $P(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом, то для четной функции $f(x)$ теорема доказана.

Заметим теперь, что функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям доказываемой теоремы, можно периодически с периодом 2π продолжить на всю бесконечную прямую $-\infty < x < \infty$, так что продолженная функция будет непрерывна в каждой точке x бесконечной прямой. Если функция $f(x)$ продолжена таким образом, то, поскольку $P(\cos x)$ также является периодической функцией периода 2π, мы получим, что *для четной функции $f(x)$ неравенство* (10.28) *справедливо всюду на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$.*

2°. Пусть теперь $f(x)$ — совершенно произвольная функция, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы. Эту функцию мы периодически с периодом 2π продолжим на всю бесконечную прямую и составим с помощью этой функции следующие две четные функции:

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \tag{10.29}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x. \tag{10.30}$$

По доказанному в п. 1° для любого $\varepsilon > 0$ найдутся тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такие, что всюду на бесконечной прямой

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \varepsilon/4, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \varepsilon/4,$$

и поэтому

$$|f_1(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2 x| < \varepsilon/4,$$
$$|f_2(x)\sin x - T_2(x)\sin x| < \varepsilon/4.$$

Складывая последние два неравенства, учитывая, что модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, и принимая во внимание равенства (10.29) и (10.30), мы получим, что всюду на бесконечной прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\sin^2 x - T_3(x)| < \varepsilon/2, \tag{10.31}$$

в котором через $T_3(x)$ обозначен тригонометрический многочлен, равный $T_3(x) = T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x$.

В проведенных нами рассуждениях вместо функции $f(x)$ можно взять функцию $f(x+\pi/2)$ [1]. В полной аналогии с (10.31) мы получим, что для функции $f(x+\pi/2)$ найдется тригонометрический многочлен $T_4(x)$ такой, что всюду на бесконечной прямой

$$|f(x+\pi/2)\sin^2 x - T_4(x)| < \varepsilon/2. \tag{10.32}$$

Заменяя в (10.32) x на $x - \pi/2$ и обозначая через $T_5(x)$ тригонометрический многочлен вида $T_5(x) = T_4(x - \pi/2)$, мы получим, что всюду на бесконечной прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\cos^2 x - T_5(x)| < \varepsilon/2. \tag{10.33}$$

Наконец, складывая неравенства (10.31) и (10.33) и обозначая через $T(x)$ тригонометрический многочлен вида $T(x) = T_4(x) + T_5(x)$, мы получим, что всюду па бесконечной прямой справедливо неравенство (10.27). Теорема доказана.

[1] Ибо эта функция удовлетворяет тем же условиям, что и полученная после продолжения функция $f(x)$.

Замечание. Каждое из условий 1) непрерывности $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$; 2) равенства значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ является необходимым условием для равномерного на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ приближения функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами.

Иными словами, теорему Вейерштрасса можно переформулировать следующим образом: *для того чтобы функцию* $f(x)$ *можно было равномерно на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяла условию* $f(-\pi) = f(\pi)$.

Достаточность составляет содержание теоремы 10.9.

Остановимся на доказательстве необходимости. Пусть существует последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\}$, равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$. Так как каждая функция $T_n(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, то по теореме 1.8 и функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $T_n(x)$ такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon/2$ для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Стало быть,

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon/2, \quad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon/2.$$

Из последних двух неравенств и из вытекающего из условия периодичности (с периодом 2π) равенства $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$ заключаем, что $|f(-\pi) - f(\pi)| < \varepsilon$, откуда $f(-\pi) = f(\pi)$ (в силу произвольности $\varepsilon > 0$).

2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы. Опираясь на теорему Вейерштрасса, докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 10.10. *Тригонометрическая система* (10.11) *является замкнутой* [1], *т. е. для любой кусочно-непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *и любого положительного числа* ε *найдется тригонометрический многочлен* $T(x)$ *такой, что*

$$\|f(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2\, dx} < \varepsilon. \tag{10.34}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная на этом сегменте функция $F(x)$, удовлетворяющая условию $F(-\pi) = F(\pi)$ и такая, что

$$\|f(x) - F(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2\, dx} < \varepsilon/2. \tag{10.35}$$

[1] А стало быть (в силу теоремы 10.7) и полной.

В самом деле, достаточно взять функцию $F(x)$ совпадающей с $f(x)$ всюду, кроме достаточно малых окрестностей точек разрыва функции $f(x)$ и точки $x = \pi$, а в указанных окрестностях взять $F(x)$ линейной функцией так, чтобы $F(x)$ являлась непрерывной на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $F(-\pi) = F(\pi)$.

Так как кусочно-непрерывная функция и срезающая ее линейная функция являются ограниченными, то, выбирая указанные окрестности точек разрыва $f(x)$ и точки $x = \pi$ достаточно малыми, мы обеспечим выполнение неравенства (10.35).

По теореме Вейерштрасса 10.9 для функции $F(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|F(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/(2\sqrt{2\pi}). \tag{10.36}$$

Из (10.36) заключаем, что

$$\|F(x) - T(x)\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} [F(x) - T(x)]^2\,dx} \leqslant \varepsilon/2. \tag{10.37}$$

Из (10.35) и (10.37) и из неравенства треугольника для норм

$$\|f(x) - T(x)\| \leqslant \|f(x) - F(x)\| + \|F(x) - T(x)\|$$

вытекает неравенство (10.34). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из теорем 10.10 и 10.7 сразу же вытекает, что *тригонометрическая система* (10.11) *является полной.* Отсюда в свою очередь вытекает, что *система* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *является полной на множестве всех функций, кусочно-непрерывных на сегменте* $[0, \pi]$ (*или соответственно на сегменте* $[-\pi, 0]$). В самом деле, всякая кусочно-непрерывная на сегменте $[0, \pi]$ функция $f(x)$, ортогональная на этом сегменте всем элементам системы $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, после нечетного продолжения на сегмент $[-\pi, 0]$ оказывается ортогональной на сегменте $[-\pi, \pi]$ в с е м элементам тригонометрической системы (10.11). В силу полноты системы (10.11) эта функция равна нулю на $[-\pi, \pi]$, а стало быть, и на $[0, \pi]$. Совершенно аналогично доказывается, что *система* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *является полной на множестве всех функций, кусочно-непрерывных на сегменте* $[0, \pi]$ (или соответственно на сегменте $[-\pi, 0]$).

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что среди ортонормированных систем, указанных в § 1, системы, образованные с помощью полиномов

Лежандра, полиномов Чебышева и функций Хаара, являются замкнутыми, а система Радемахера замкнутой не является.

3. Следствия замкнутости тригонометрической системы.

Следствие 1. *Для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \tag{10.38}$$

(вытекает из теоремы 10.5).

Следствие 2. *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции на указанном сегменте в среднем* (вытекает из теоремы 10.6 и замечания 2 к этой теореме).

Следствие 3. *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно почленно интегрировать на этом сегменте* (вытекает из предыдущего следствия и из теоремы 1.11 гл. 1).

Следствие 4. *Если две кусочно-непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье, то эти функции совпадают всюду на этом сегменте* (вытекает из теоремы 10.8).

Следствие 5. *Если тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится равномерно на некотором содержащемся в $[-\pi, \pi]$ сегменте $[a, b]$, то он сходится на сегменте $[a, b]$ именно к функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ — та функция, к которой сходится равномерно на $[a, b]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$. Докажем, что $F(x) \equiv f(x)$ всюду на сегменте $[a, b]$. Так как из равномерной сходимости на сегменте $[a, b]$ вытекает сходимость в среднем на этом сегменте (см. гл. 1, § 2, п. 3), то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $F(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n_1, начиная с которого n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье $S_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [F(x) - S_n(x)]^2\,dx} < \varepsilon/2. \tag{10.39}$$

С другой стороны, в силу следствия 2 последовательность $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, а стало быть, и на сегменте $[a, b]$, т. е. для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n_2, начиная с которого

$$\|S_n(x) - f(x)\| = \sqrt{\int\limits_a^b [S_n(x) - f(x)]^2\,dx} < \varepsilon/2. \tag{10.40}$$

Из (10.39) и (10.40) и из неравенства треугольника

$$\|F(x) - f(x)\| \leqslant \|F(x) - S_n(x)\| + \|S_n(x) - f(x)\|$$

вытекает, что $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Из последнего неравенства и из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\|F(x) - f(x)\| = 0$, а отсюда на основании первой аксиомы для нормы заключаем, что $F(x) - f(x)$ есть нулевой элемент пространства кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций, т. е. функция, тождественно равная нулю на сегменте $[a, b]$. Следствие 5 доказано.

Замечание 1. Конечно, в следствии 5 сегмент $[a, b]$ может совпадать со всем сегментом $[-\pi, \pi]$, т. е. *из равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ следует, что этот ряд сходится на указанном сегменте именно к функции $f(x)$.*

Замечание 2. Совершенно аналогичные следствия будут справедливы и для ряда Фурье по любой другой замкнутой ортонормированной системе в пространстве кусочно-непрерывных на произвольном сегменте $[a, b]$ функций со скалярным произведением (10.2) и нормой (10.8). Примерами таких систем могут служить указанные в § 1 ортонормированные системы, связанные с полиномами Лежандра и Чебышева, и система Хаара.

§ 4. Простейшие условия равномерной сходимости и почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье

1. Вводные замечания. В математической физике и в ряде других разделов математики существенную роль играет вопрос об условиях, при выполнении которых тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) в данной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$.

Еще в конце прошлого века было известно, что существуют непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяющие условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся в наперед заданной точке сегмента $[-\pi, \pi]$ (или даже расходятся на бесконечном множестве точек сегмента $[-\pi, \pi]$, всюду плотном на этом сегменте) [1].

[1] Первый пример такой функции был построен французским математиком Дю Буа Раймоном в 1876 г.

Таким образом, одна непрерывность функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ без дополнительных условий не обеспечивает не только равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции, но даже сходимости этого ряда в наперед заданной точке указанного сегмента.

В этом и в следующем параграфах мы выясним, какие требования следует добавить к непрерывности функции $f(x)$ (или ввести взамен непрерывности $f(x)$) для обеспечения сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции в заданной точке, а также для обеспечения равномерной сходимости указанного ряда на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ или на какой-либо его части.

При изучении сходимости тригонометрического ряда Фурье возникает и другой вопрос: должен ли тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной (или даже строго непрерывной) на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходиться хотя бы в одной точке этого сегмента?

Положительный ответ па этот вопрос был получен только в 1966 г.

Этот ответ является следствием фундаментальной теоремы, доказанной в 1966 г. Л. Карлесоном [1] и решившей знаменитую проблему Н. Н. Лузина [2], поставленную еще в 1914 г.: *тригонометрический ряд Фурье любой функции $f(x)$, для которой существует понимаемый в смысле Лебега интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$* [3].

Из теоремы Карлесона вытекает, что ряд Фурье не только любой кусочно-непрерывной, но и любой интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в собственном смысле Римана функции $f(x)$ сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ (ибо для такой функции существует интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ в смысле Римана, а стало быть, и в смысле Лебега).

---

[1] Л. Карлесон — современный шведский математик. Полное доказательство теоремы Карлесона можно найти в сборнике переводных статей: «Математика». 1967. Т. II, № 4. С. 113–132.

[2] Николай Николаевич Лузин — советский математик, основатель современной московской математической школы по теории функций (1883–1950). Постановку проблемы Лузина, решенной Карлесоном, и других его проблем можно найти в книге Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд». М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

[3] Определение интеграла в смысле Лебега и сходимости почти всюду на данном сегменте см. в гл. 8 этой книги.

Заметим, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-\pi, \pi]$ не в смысле Римана, а только в смысле Лебега, то тригонометрический ряд Фурье этой функции может не сходиться ни в одной точке сегмента $[-\pi, \pi]$. Первый пример интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в смысле Лебега функции $f(x)$ со всюду расходящимся тригонометрическим рядом Фурье был построен в 1923 г. советским математиком А. Н. Колмогоровым [1].

2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Договоримся о следующей терминологии.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения* [2].

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную порядка $n \geqslant 1$, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную в смысле определения* 1.

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 10.11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Более того, ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k \cos kx| + |b_k \sin kx|\} \tag{10.41}$$

сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, ибо отсюда будет вытекать как равномерная на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимость самого

[1] Построение примера А. Н. Колмогорова можно найти на с. 412–421 книги Н. К. Бари «Тригонометрические ряды». М.: Физматгиз, 1961.

[2] При этом функция $f'(x)$ может оказаться не определенной в конечном числе точек сегмента $[a, b]$. В этих точках мы доопределим ее произвольным образом (например, положим равной полусумме правого и левого предельных значений).

тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, так и сходимость этого ряда (в силу следствия 5 из п. 3 § 3) именно к функции $f(x)$.

В силу признака Вейерштрасса (см. теорему 1.4 из гл. 1) для доказательства равномерной на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ сходимости ряда (10.41) достаточно доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl\{|a_k|+|b_k|\bigr\}. \tag{10.42}$$

Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производная функции $f(x)$ [1].

Производя интегрирование по частям и учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на всем сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и удовлетворяет соотношениям $f(-\pi)=f(\pi)$, мы получим следующие соотношения, связывающие тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ [2]:

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos kx\,dx=k\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=k\cdot b_k,$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin kx\,dx=-k\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=-k\cdot a_k.$$

Таким образом,

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k},$$

и для доказательства сходимости ряда (10.42) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{10.43}$$

---

[1] Например, можно положить функцию $f'(x)$ в указанных точках равной полусумме правого и левого предельных значений.

[2] При интегрировании по частям следует разбить сегмент $[-\pi,\,\pi]$ на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на каждом из которых производная $f'(x)$ непрерывна, и, беря формулу интегрирования по частям для каждого из этих частичных сегментов, учесть, что при суммировании интегралов по всем частичным сегментам все подстановки обратятся в нуль (вследствие непрерывности $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и условий $f(-\pi)=f(\pi)$).

Сходимость ряда (10.43) вытекает из элементарных неравенств [1]

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}\right),$$
$$\frac{|\beta_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}\right) \tag{10.44}$$

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{10.45}$$

первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$, а второй — в силу интегрального признака Коши–Маклорена (см. вып. 1, гл. 13, § 2). Теорема доказана.

Замечание. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 10.11, периодически (с периодом 2π) продолжить на всю бесконечную прямую, то теорема 10.11 будет утверждать сходимость тригонометрического ряда Фурье к так продолженной функции, *равномерную на всей бесконечной прямой.*

3. Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье. Прежде всего докажем следующую лемму о порядке тригонометрических коэффициентов Фурье.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ и все ее производные до некоторого порядка m (m — целое неотрицательное число) непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= f(\pi), \\ f'(-\pi) &= f'(\pi), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(m)}(-\pi) &= f^{(m)}(\pi). \end{aligned} \tag{10.46}$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную порядка $(m+1)$. Тогда сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m\{|a_k| + |b_k|\}, \tag{10.47}$$

в котором a_k и b_k суть тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

---

[1] Мы исходим из элементарного неравенства $|a|\cdot|b| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$, вытекающего из неотрицательности величины $(|a|-|b|)^2$.

Доказательство. Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производной порядка $(m+1)$ функции $f(x)$. Интегрируя выражения для α_k и β_k $(m+1)$ раз по частям и учитывая непрерывность на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ самой функции $f(x)$ и всех ее производных до порядка m, а также учитывая соотношения (10.46), мы установим следующую связь между тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$ и самой функции $f(x)$ [1]:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}\big\{|a_k| + |b_k|\big\}.$$

Таким образом,

$$k^m\big\{|a_k| + |b_k|\big\} = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

и сходимость ряда (10.47) вытекает из элементарных неравенств (10.44) и из сходимости рядов (10.45), первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$, а второй — в силу признака Коши–Маклорена. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 1 является следующая теорема.

Теорема 10.12. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, причем $m \geqslant 1$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Пусть s — любое из чисел $1, 2, \ldots, m$. В результате s-кратного почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ получается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s\Big\{a_k \cos\Big(kx - \frac{\pi s}{2}\Big) + b_k \sin\Big(kx - \frac{\pi s}{2}\Big)\Big\}. \qquad (10.48)$$

Заметим, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и ряд (10.48) (с любым $s = 1, 2, \ldots, m$) мажорируется сходящимся числовым рядом (10.47). По признаку Вейерштрасса (см. теорему 1.4 из гл. 1) как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и каждый из рядов (10.48) (при $s = 1, 2, \ldots, m$) сходится равномерно на

[1] При интегрировании по частям сегмент $[-\pi, \pi]$ следует разбить на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на каждом из которых $f^{(m+1)}(x)$ непрерывна, и учесть, что при суммировании интегралов по всем частичным сегментам все подстановки дают нуль.

сегменте $[-\pi, \pi]$, а это (в силу теоремы 1.9 из гл. 1) обеспечивает возможность m-кратного почленного дифференцирования исходного ряда Фурье. Теорема доказана.

§ 5. Более точные условия равномерной сходимости и условия сходимости в данной точке

1. Модуль непрерывности функции. Классы Гёльдера. Мы начнем с выяснения понятий, характеризующих гладкость изучаемых функций, и с определения классов функций, в терминах которых будут сформулированы условия сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Определение 1. *Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ точную верхнюю грань модуля разности $|f(x') - f(x'')|$ на множестве всех x' и x'', принадлежащих сегменту $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$.*

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ символом $\omega(\delta, f)$. Итак, по определению [1]

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x',\, x'' \in [a,b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Непосредственно из теоремы Кантора (см. вып. 1, теорему 10.2) вытекает, что *модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ любой непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$* [2].

Однако для произвольной только непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ нельзя, вообще говоря, ничего сказать о порядке ее модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ относительно малого δ.

Покажем теперь, что *если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ ограничена на этом сегменте, то модуль непрерывности функции $f(x)$ на указанном сегменте $\omega(\delta, f)$ имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta)$* [3].

---

[1] Напомним, что символ $\in$ означает «принадлежит», так что запись $x', x'' \in [a, b]$ означает, что точки x' и x'' принадлежат сегменту $[a, b]$.

[2] Ибо (в силу теоремы Кантора) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех x' и x'' из сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$.

[3] Напомним, что символ $\alpha = O(\delta)$ был введен в главах 3 и 4 вып. 1 и обозначает существование постоянной M такой, что $|\alpha| \leqslant M\delta$.

В самом деле, из теоремы Лагранжа [1] вытекает, что для любых точек x' и x'' сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, заключенная между x' и x'' и такая, что

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|. \tag{10.49}$$

Так как производная $f'(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то найдется постоянная M такая, что для всех x из этого сегмента $|f'(x)| \leqslant M$ и, стало быть, $|f'(\xi)| \leqslant M$. Из последнего неравенства и из (10.49) заключаем, что $|f(x') - f(x'')| \leqslant M\delta$ для всех x' и x'' из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$. Но это и означает, что $\omega(\delta, f) \leqslant M\delta$, т. е. $\omega(\delta, f) = O(\delta)$.

Пусть α — любое вещественное число из полусегмента $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^α с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$.*

Для обозначения того, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^α, обычно употребляют символику: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$.

Сразу же отметим, что если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и ее производная ограничена на этом сегменте, то эта функция заведомо принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^1 [2] (это утверждение непосредственно вытекает из доказанного выше соотношения $\omega(\delta, f) = O(\delta)$).

Замечание. Пусть $f(x) \in C^\alpha[a, b]$. Точную верхнюю грань дроби $\dfrac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}$ на множестве всех x' и x'', принадлежащих сегменту $[a, b]$ и не равных друг другу, называют константой Гёльдера (или коэффициентом Гёльдера) функции $f(x)$ (на сегменте $[a, b]$). Сумму константы Гёльдера функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и точной верхней грани $|f(x)|$ на этом сегменте называют гёльдеровой нормой функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначают символом $\|f\|_{C^\alpha[a,b]}$.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ принадлежит на сегменте $[0, 1]$ классу $C^{1/2}$, ибо для любых x' и x'' из $[0, 1]$, связанных условием $x' > x''$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| = \sqrt{x' - x''} \times \dfrac{\sqrt{x' - x''}}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leqslant \sqrt{x' - x''}$ (при этом константа Гёльдера,

[1] См. теорему 8.12 из вып 1.

[2] Класс Гёльдера C^1, отвечающий значению $\alpha = 1$, часто называют классом Липшица.

являющаяся точной верхней гранью на $[0,\, 1]$ дроби $\dfrac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, равна единице, а гёльдерова норма равна двум).

2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье. Пусть $f(x)$ — произвольная кусочно-гладкая на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ функция. Эту функцию мы периодически (с периодом 2π) продолжим на всю бесконечную прямую [1]. Обозначим через $S_n(x,\, f)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x, равную

$$S_n(x,\, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{10.50}$$

Вставляя в правую часть (10.50) значения коэффициентов Фурье [2]

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\, dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\, dy \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots)$$

и учитывая линейные свойства интеграла, мы получим, что для любой точки x бесконечной прямой

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx)\right] dy =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right] dy.$$

[1] По договоренности, принятой еще в § 1, кусочно-непрерывная функция $f(x)$ в каждой точке x обязана иметь значение, равное полусумме правого и левого предельных значений. Чтобы это свойство имело место и для функции $f(x)$, периодически (с периодом 2π) продолженной на всю бесконечную прямую, мы должны потребовать, чтобы для продолженной функции имело место соотношение $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$. Иными словами, мы назовем определенную на бесконечной прямой функцию $f(x)$ *периодическим продолжением* кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ функции $f(x)$, если обе эти функции совпадают на интервале $-\pi < x < \pi$ и если определенная на бесконечной прямой функция $f(x)$ удовлетворяет условию периодичности $f(x+2\pi) = f(x)$ и условию $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$.

[2] См. формулы (10.23).

Сделав в последнем интеграле замену переменной $y = t + x$, придем к следующему выражению:

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt. \qquad (10.51)$$

Заметим теперь, что так как каждая из функций $f(x+t)$ и $\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt\right]$ является периодической функцией переменной t с периодом 2π, то вся подынтегральная функция в (10.51) (обозначим ее кратко через $F(t)$) является периодической функцией t с периодом 2π. Заметим также, что интегрирование в (10.51) идет по сегменту $[-\pi - x,\, \pi - x]$, имеющему длину, равную 2π, т. е. равную периоду подынтегральной функции. Воспользуемся следующим элементарным у т в е р ж д е н и е м: *если $F(t)$ — интегрируемая по любому конечному сегменту периодическая функция периода 2π, то все интегралы от этой функции по любому из сегментов, имеющих длину, равную периоду 2π, равны между собой, т. е. для любого x*

$$\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt\ ^{1)}. \qquad (10.52)$$

Равенство (10.52) позволяет нам следующим образом переписать формулу (10.51)

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt. \qquad (10.53)$$

Вычислим сумму, стоящую в (10.53) в квадратных скобках. Для этого заметим, что для любого номера k и любого значения t

[1]) Для доказательства этого утверждения достаточно, пользуясь свойством аддитивности, представить интеграл $\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\, dt$ в виде суммы трех интегралов

$$\int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\, dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} F(t)\, dt$$

и заметить, что с помощью условия периодичности $F(t) = F(t+2\pi)$ и замены переменной $t = y - 2\pi$ первый из указанных трех интегралов приводится к третьему, взятому со знаком минус. Действительно,

$$\int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\, dt = \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} F(t+2\pi)\, dt = \int\limits_{\pi-x}^{\pi} F(y)\, dy = -\int\limits_{\pi}^{\pi-x} F(y)\, dy.$$

справедливо равенство
$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$
Суммируя это равенство по всем номерам k, равным $1, 2, \ldots, n$, получим
$$2\sin\frac{t}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}.$$
Отсюда
$$2\sin\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$
и, стало быть,
$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \qquad (10.54)$$
Подставляя (10.54) в (10.53), мы окончательно получим следующее выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье:
$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \qquad (10.55)$$
справедливое в любой точке x бесконечной прямой.

Замечание. Из формулы (10.55) и из того, что все частичные суммы $S_n(x,\, 1)$ функции $f(x)\equiv 1$ равны единице [1], вытекает следующее равенство:
$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (10.56)$$

3. Интегральный модуль непрерывности функции. Пусть функция $f(x)$ интегрируема (в смысле собственного интеграла Римана) на сегменте $[-\pi,\, \pi]$. Эту функцию мы периодически (с периодом 2π) продолжим на всю бесконечную прямую.

Определение. *Для любого δ из полусегмента $0<\delta\leqslant 2\pi$ назовем интегральным модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ точную верхнюю грань интеграла*
$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-f(t)|\,dt$$
на множестве всех чисел u, удовлетворяющих условию $|u|\leqslant\delta$.

[1] Ибо величина (10.55) для функции $f(x)\equiv 1$ равна сумме (10.50), в которой $a_0=2$, $a_k=b_k=0$ при $k=1, 2, \ldots$

Будем обозначать интегральный модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ символом $I(\delta, f)$.

Итак, по определению

$$I(\delta, f) = \sup_{|u|\leqslant\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то интегральный модуль непрерывности этой функции на указанном сегменте $I(\delta, f)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 10.10 (о замкнутости тригонометрической системы) для функции $f(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$\|f - T\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2\, dt} < \varepsilon/\bigl(3\sqrt{2\pi}\,\bigr),$$

и потому на основании неравенства Коши–Буняковского [1])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\, dt \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2\, dt \int_{-\pi}^{\pi} dt} < \varepsilon/3. \qquad (10.57)$$

Из неравенства (10.57) и из того, что $f(t)$ и $T(t)$ являются периодическими функциями периода 2π, заключаем, что для любого числа u

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\, dt < \varepsilon/3. \qquad (10.58)$$

Поскольку модуль суммы трех величин не превосходит суммы модулей этих величин, то для любого числа u справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\, dt + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)|\, dt. \qquad (10.59)$$

Теперь остается заметить, что в силу непрерывности тригонометрического многочлена и теоремы Кантора (см. теорему 10.2

[1]) См. неравенство (1.33).

из вып. 1) для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|u| < \delta$ и при всех t из $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u) - T(t)| < \varepsilon/(6\pi),$$

и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\, dt \leqslant \varepsilon/3. \tag{10.60}$$

Сопоставляя неравенство (10.59) с неравенствами (10.57), (10.58) и (10.60), получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt < \varepsilon \tag{10.61}$$

для всех u, для которых $|u| < \delta$. Лемма доказана.

Замечание к лемме 2. Легко убедиться, что *стремление к нулю интегрального модуля непрерывности $I(\delta, f)$ при $\delta \to 0$ имеет место не только для любой кусочно-непрерывной, но и для любой интегрируемой (в собственном смысле Римана) на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$.* Для доказательства этого фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и заметим, что в силу интегрируемости $f(t)$ на сегменте $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для любого разбиения сегмента $[-\pi, \pi]$ на частичные сегменты длины, меньшей δ_0, разность между верхней и нижней суммами функции $f(t)$ будет меньше $\varepsilon/4$. Фиксируем некоторое разбиение T сегмента $[-\pi, \pi]$ на частичные сегменты равной длины $\delta < \delta_0$. Из того, что $f(t)$ — периодическая функция, вытекает, что для любого $|u| \leqslant \delta$ и для фиксированного нами разбиения T сегмента $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ разность между верхней и нижней суммами функции $f(t+u)$ (при достаточно малом δ) будет по крайней мере меньше $\varepsilon/2$. Но отсюда следует, что при фиксированном нами разбиении T разность между верхней и нижней суммами функции $[f(t+u) - f(t)]$ при любом $|u| \leqslant \delta$ будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{3}{4}\varepsilon$. Обозначим для фиксированного нами разбиения T верхнюю и нижнюю суммы функции $[f(t+u) - f(t)]$ соответственно через S и s, а верхнюю и нижнюю суммы функции $|f(t+u) - f(t)|$ соответственно через $\overline{S}$ и $\overline{s}$. В § 5 гл. 10 вып. 1 установлено, что для любого разбиения верхняя и нижняя суммы S и s самой функции и верхняя и нижняя суммы $\overline{S}$ и $\overline{s}$ модуля этой функции связаны соотношением $\overline{S} - \overline{s} \leqslant S - s$. Таким образом, для фиксированного нами разбиения T справедливо неравенство $\overline{S} - \overline{s} < 3\varepsilon/4$. Но это означает, что для фиксированного нами разбиения T разность между любой интегральной суммой функции $|f(t+u) - f(t)|$ и интегралом $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt$ меньше числа $3\varepsilon/4$. Если мы выберем в этой интегральной сумме все промежуточные точки ξ_k в центре соответствующих частичных сегментов длины δ и потребуем, чтобы число u удовлетворяло неравенству $|u| < \delta/2$, то обе точки ξ_k и $\xi_k + u$ будут принадлежать k-му частичному сегменту, и потому разность $|f(\xi_k + u) - f(\xi_k)|$

не будет превосходить колебания $M_k - m_k$ функции $f(t)$ на k-м частичном сегменте [1]. Но тогда вся указанная интегральная сумма не будет превосходить суммы $\Sigma(M_k - m_k)\Delta t_k$, равной разности верхней и нижней сумм функции $f(t)$ для разбиения T, т. е. не будет превосходить числа $\varepsilon/4$. Отсюда следует, что при $|u| < \delta/2$ интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt$ не превосходит числа ε, что и доказывает стремление $I(\delta, f)$ к нулю при $\delta \to 0$.

Извлечем теперь из леммы 2 ряд важных для дальнейшего следствий.

Следствие 1. *Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, а x — любая фиксированная точка сегмента $[-\pi, \pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)|\,dt < \varepsilon \tag{10.62}$$

при $|u| < \delta$.

Доказательство. Сделав в интеграле, стоящем в левой части (10.62), замену переменной $\tau = x + t$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)|\,dt = \int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u) - f(\tau)|\,d\tau$$

и заметив, что (в силу равенства (10.52))

$$\int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u) - f(\tau)|\,d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u) - f(\tau)|\,d\tau,$$

мы убедимся в том, что неравенство (10.62) является следствием (10.61).

Следствие 2. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то функция*

$$I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt$$

является непрерывной функцией x на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Доказательство. Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$I(x+u) - I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u) - f(x+t)]g(t)\,dt,$$

[1] Через M_k и m_k мы обозначаем точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(t)$ на k-м частичном сегменте.

и поскольку кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ удовлетворяет на этом сегменте условию ограниченности $|g(t)| \leqslant M$, то

$$|I(x+u) - I(x)| \leqslant M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)|\,dt$$

и потому в силу (10.62) для любого $\varepsilon > 0$

$$|I(x+u) - I(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |u| < \delta(\varepsilon).$$

Непрерывность $I(x)$ в точке x доказана.

Следствие 3. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то тригонометрические коэффициенты Фурье функции $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ при разложении ее по переменной t*

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\,dt, \tag{10.63}$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\,dt \tag{10.64}$$

сходятся к нулю (при $n \to \infty$) равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а стало быть, и на всей бесконечной прямой).

Доказательство. Для любой фиксированной точки x сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ является кусочно-непрерывной функцией аргумента t на сегменте $[-\pi, \pi]$ и, стало быть, для этой функции справедливо равенство Парсеваля [1])

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2(x) + b_k^2(x)] = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)\,dt. \tag{10.65}$$

Из равенства (10.65) вытекает сходимость ряда, стоящего в левой его части, в каждой фиксированной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$. Так как указанный ряд состоит из неотрицательных членов, то в силу теоремы Дини [2]) для доказательства равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости указанного ряда достаточно

[1]) См. следствие 1 из п. 3 § 3 этой главы.

[2]) См. теорему 1.5 (формулировку в терминах рядов).

доказать, что как каждая функция $a_n(x)$ и $b_n(x)$, так и сумма ряда (10.65) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)\,dt$ являются непрерывными функциями x на сегменте $[-\pi, \pi]$, но это сразу вытекает из предыдущего следствия (достаточно учесть, что квадрат кусочно-непрерывной функции является кусочно-непрерывной функцией и что $\cos nt$ и $\sin nt$ при каждом фиксированном номере n являются непрерывными функциями).

Следствие 4. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то последовательность*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\,dt \qquad (10.66)$$

сходится к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а стало быть, и на всей бесконечной прямой).

Доказательство. Достаточно учесть, что

$$\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t = \cos nt\cdot\sin\frac{t}{2} + \sin nt\cdot\cos\frac{t}{2},$$

и применить предыдущее следствие, беря в (10.63) вместо $g(t)$ функцию $g(t)\cdot\sin\frac{t}{2}$, а в (10.64) вместо $g(t)$ функцию $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$.

4. Принцип локализации. В этом пункте мы докажем, что вопрос о том, сходится или расходится тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ в данной точке x_0, решается *лишь на основании поведения функции $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x_0*. Это замечательное свойство тригонометрического ряда Фурье принято называть принципом локализации.

Начнем с доказательства важной леммы.

Лемма 3 (лемма Римана). *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую и если эта функция обращается в нуль на некотором сегменте $[a, b]$* [1]*, то для любого положительного числа δ, меньшего $\frac{b-a}{2}$, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ сходится к нулю.*

[1]) Сегмент $[a, b]$ является совершенно произвольным. В частности, этот сегмент может не содержаться целиком в $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть δ — произвольное положительное число, меньшее $\frac{b-a}{2}$. Частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в произвольной точке x бесконечной прямой определяется равенством (10.55). Полагая

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}} & \text{при} \quad \delta \leqslant |\,t\,| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при} \quad |\,t\,| < \delta \end{cases} \tag{10.67}$$

и учитывая, что $f(x+t)$ равняется нулю при условии, что x принадлежит сегменту $[a+\delta,\ b-\delta]$, а t принадлежит сегменту $|\,t\,| \leqslant \delta$ [1]), мы можем следующим образом переписать равенство (10.55) для каждой точки x сегмента $[a+\delta,\ b-\delta]$:

$$S_n(x,\ f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)t\,dt.$$

Остается принять во внимание, что последовательность, стоящая в правой части последнего равенства, в силу следствия 4 из п. 3 сходится к нулю равномерно относительно x на всей бесконечной прямой. Лемма доказана.

Непосредственными следствиями доказанной леммы являются следующие две теоремы.

Теорема 10.13. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, и пусть $[a,\ b]$ — некоторый сегмент. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом положительном δ, меньшем $\frac{b-a}{2}$, сходился (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta,\ b-\delta]$, достаточно, чтобы существовала кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая равномерно сходящимся на сегменте $[a,\ b]$ тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая на сегменте $[a,\ b]$ с функцией $f(x)$.*

Доказательство. Применяя лемму 3 к разности $[f(x) - g(x)]$, мы получим, что тригонометрический ряд Фурье разности $[f(x) - g(x)]$ при любом δ из интервала $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $[a+\delta,\ b-\delta]$, а отсюда

[1]) В силу того, что функция $f(x)$ равна нулю на всем сегменте $[a,\ b]$.

и из равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $g(x)$ вытекает равномерная на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Тот факт, что последний ряд сходится на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ именно к функции $f(x)$ непосредственно вытекает из следствия 5 п. 3 § 3 этой главы. Теорема доказана.

Теорема 10.14. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, и пусть x_0 — некоторая точка бесконечной прямой. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходился в точке x_0, достаточно, чтобы существовала кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая сходящимся в точке x_0 тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая с $f(x)$ в как угодно малой δ-окрестности точки x_0.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 3 к разности $[f(x) - g(x)]$ по сегменту $\left[x_0 - \dfrac{\delta}{2}, x_0 + \dfrac{\delta}{2}\right]$ и учесть, что из сходимости в точке x_0 тригонометрических рядов функций $[f(x) - g(x)]$ и $g(x)$ вытекает сходимость в этой точке и тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 10.14 не устанавливает конкретного вида условий, обеспечивающих сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0. Она лишь доказывает, что эти условия определяются только поведением $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x_0 (т. е. имеют локальный характер).

5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функции из класса Гёльдера. В этом и в следующем пунктах мы займемся уточнением условий, обеспечивающих равномерную сходимость и сходимость в данной точке тригонометрического ряда Фурье.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 10.15. *Если функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гёльдера C^α с каким угодно положительным показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и если, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Как обычно, будем считать, что функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую. Условие $f(-\pi) = f(\pi)$ обеспечивает принадлежность так продолженной функции классу Гёльдера C^α на всей бесконечной прямой.

Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi, \pi]$. Умножая обе части равенства (10.56) на $f(x)$ и вычитая полученное при этом равенство из (10.55), мы получим равенство

$$S_n(x,\, f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt. \tag{10.68}$$

Из условия принадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^α вытекает существование постоянной M такой, что

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant M\cdot t^\alpha \tag{10.69}$$

во всяком случае для всех x и всех t из сегмента $[-\pi,\, \pi]$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{M}{\alpha}\cdot\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.70}$$

Разбивая сегмент $[-\pi,\, \pi]$ на сумму отрезка $|\,t\,| \leqslant \delta$ и множества $\delta \leqslant |\,t\,| \leqslant \pi$, мы придадим равенству (10.68) следующий вид:

$$S_n(x,\, f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\leqslant\delta}[f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt + {}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|\,t\,|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt - \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|\,t\,|\leqslant\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt. \tag{10.71}$$

Для оценки первого из интегралов в правой части (10.71) воспользуемся неравенством (10.69) и учтем, что $\dfrac{1}{2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|} \leqslant \dfrac{\pi}{2|\,t\,|}$ для всех t из сегмента $[-\pi,\, \pi]$ [1]. Мы получим, что для любого

[1] Указанное неравенство сразу вытекает из того, что функция $\dfrac{\sin x}{x}$ при изменении x от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до $2/\pi$. Факт убывания функции $\dfrac{\sin x}{x}$ в свою очередь вытекает из того, что $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$ всюду при $0 < x < \pi/2$, ибо $x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$ (см. п. 6 § 5 гл. 4 вып. 1).

номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$

$$\left|\int\limits_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant\delta}|f(x+t)-f(x)|\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant\delta}|t|^{\alpha-1}\,dt=M\pi\int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt=\frac{M\pi}{\alpha}\cdot\delta^\alpha.$$

Отсюда на основании (10.70) для любого номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.72}$$

Второй из интегралов в правой части (10.71) с помощью кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции (10.67) записывается в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

В силу следствия 4 из п. 3 правая часть последнего равенства сходится к нулю (при $n\to\infty$) равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому для фиксированного нами $\varepsilon>0$ найдется номер N_1 такой, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{10.73}$$

для всех $n\geqslant N_1$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Для оценки последнего интеграла в правой части (10.71) заметим, что с помощью кусочно-непрерывной функции (10.67) этот интеграл записывается в виде

$$\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, сходится к нулю (при $n \to \infty$) в силу все того же следствия 4 из п. 3 (достаточно применить это следствие к функции $f(x) \equiv 1$). Учитывая также, что функция $f(x)$ во всяком случае ограничена на сегменте $[-\pi, \pi]$, мы получим, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N_2 такой, что

$$\left| \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.74}$$

для всех $n \geqslant N_2$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначив через N наибольший из двух номеров N_1 и N_2, мы получим в силу (10.71)–(10.74), что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что в условиях теоремы 10.15 тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и *равномерно на всей бесконечной прямой* (к функции, являющейся периодическим (с периодом 2π) продолжением $f(x)$ на всю бесконечную прямую).

Замечание 2. Отметим, что при оценке интегралов (10.73) и (10.74) мы использовали лишь кусочную непрерывность (и вытекающую из нее ограниченность) функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ (принадлежность $f(x)$ классу Гёльдера при оценке этих интегралов не использовалась).

Замечание 3. Естественно возникает вопрос о том, можно ли в теореме 10.15 ослабить требование гладкости на функцию $f(x)$, сохраняя утверждение этой теоремы о равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

Напомним, что принадлежность $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гёльдера C^α по определению означает, что модуль, непрерывности $f(x)$ на этом сегменте имеет порядок

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

Отметим без доказательства так называемую теорему Дини–Липшица, которая утверждает, что *для равномерной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *сходимости тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x)$ *достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию* $f(-\pi) = f(\pi)$ *и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *имел порядок*

$$\omega(\delta, f) = o\Big(\frac{1}{\ln 1/\delta}\Big).$$

т. е. являлся бесконечно малой при $\delta \to 0$ величиной более высокого порядка, чем $1/(\ln 1/\delta)$.

Теорема Дини–Липшица содержит окончательное (в терминах модуля непрерывности функции) условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции, ибо можно построить функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(-\pi) = f(\pi)$ с модулем непрерывности, имеющим на сегменте $[-\pi, \pi]$ порядок $O(1/(\ln 1/\delta))$ и с тригонометрическим рядом Фурье, расходящимся на множестве точек, всюду плотном на сегменте $[-\pi, \pi]$ [1].

В условиях теоремы 10.15 после периодического (с периодом 2π) продолжения функция $f(x)$ оказывалась принадлежащей классу Гёльдера C^α *на всей бесконечной прямой.* Естественно возникает вопрос о поведении тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, принадлежащей классу Гёльдера C^α *только на некотором сегменте* $[a, b]$, а всюду вне этого сегмента удовлетворяющей лишь обычному требованию кусочной непрерывности.

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 10.16. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую. Пусть далее на некотором сегменте $[a, b]$, имеющем длину, меньшую 2π, эта функция принадлежит классу Гёльдера C^α с произвольным положительным показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Тогда для любого δ из интервала $0 < \delta < \dfrac{b-a}{2}$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$.*

Доказательство. Построим функцию $g(x)$, которая на сегменте $[a, b]$ совпадает с $f(x)$, на сегменте $[b, a + 2\pi]$ является линейной функцией вида $Ax + B$, обращающейся в $f(b)$ при $x = b$ и в $f(a)$ при $x = a + 2\pi$ [2], и которая периодически (с периодом 2π) продолжена с сегмента $[a, a + 2\pi]$ на всю бесконечную прямую (на рис. 10.1 жирная линия изображает график функции $f(x)$, а штриховая линия — график построенной по ней функции $g(x)$).

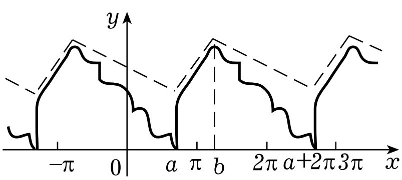


Рис. 10.1

---

[1] Доказательство теоремы Дини–Липшица и построение только что указанного примера можно найти, например, в книге А. Зигмунда «Тригонометрические ряды». Т. I. — М.: Мир. 1965, с. 108 и 477.

[2] Условие обращения функции $Ax + B$ в $f(b)$ при $x = b$ и в $f(a)$ при $x = a + 2\pi$ однозначно определяет постоянные A и B : $A = \dfrac{f(a) - f(b)}{a + 2\pi - b}$, $B = \dfrac{(a + 2\pi)f(b) - bf(a)}{a + 2\pi - b}$.

Очевидно, что построенная нами функция $g(x)$ удовлетворяет условию $g(-\pi) = g(\pi)$ и принадлежит классу Гёльдера C^α (с тем же положительным показателем α, что и $f(x)$) на всей бесконечной прямой [1]. В силу теоремы 10.15 и замечания 1 тригонометрический ряд Фурье функции $g(x)$ сходится равномерно на всей бесконечной прямой, а поэтому в силу теоремы 10.13 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом δ из интервала $0 < \delta < \dfrac{b-a}{2}$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta,\, b-\delta]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. Утверждение теоремы 10.16 остается справедливым и для сегмента $[a,\, b]$, имеющего длину, р а в н у ю 2π (т. е. для случая $b = a + 2\pi$), но в этом случае при доказательстве теоремы следует, фиксировав произвольное δ из интервала $0 < \delta < \pi$, взять функцию $g(x)$ совпадающей с $f(x)$ на сегменте $\left[a+\dfrac{\delta}{2},\, a+2\pi-\dfrac{\delta}{2}\right]$, линейной на сегменте $\left[a+2\pi-\dfrac{\delta}{2},\, a+2\pi+\dfrac{\delta}{2}\right]$ и периодически (с периодом 2π) продолженной с сегмента $\left[a+\dfrac{\delta}{2},\, a+2\pi+\dfrac{\delta}{2}\right]$ на всю бесконечную прямую. Если же сегмент $[a,\, b]$ имеет длину, п р е в о с х о д я щ у ю 2π, то из принадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^α на таком сегменте и из условия периодичности $f(x)$ (с периодом 2π) вытекает, что $f(x)$ принадлежит классу C^α на всей бесконечной прямой, т. е. в этом случае мы приходим к теореме 10.15.

6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-гёльдеровой функции.

Определение 1. *Будем называть функцию $f(x)$ к у с о ч н о-г ё л ь д е р о в о й на сегменте $[a,\, b]$, если эта функция кусочно-непрерывна на сегменте $[a,\, b]$ и если сегмент $[a,\, b]$ при помощи конечного числа точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ разбивается на частичные сегменты $[x_{k-1},\, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots \ldots, n)$, на каждом из которых эта функция принадлежит классу Гёльдера C^{α_k} с некоторым положительным показателем α_k $(0 < \alpha_k \leqslant 1)$, причем при определении класса Гёльдера на частичном сегменте $[x_{k-1},\, x_k]$ в качестве значений функции на концах сегмента следует брать предельные значения $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_k-0)$* [2].

---

[1] Достаточно учесть, что $g(x)$ всюду непрерывна и что линейная функция имеет ограниченную производную и потому принадлежит классу Гёльдера C^α при любом $\alpha \leqslant 1$.

[2] Как у всякой кусочно-непрерывной функции, у кусочно-гёльдеровой функции значения в каждой точке x_k обязаны быть равны полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, т. е. должно быть справедливо равенство $f(x_k) = (1/2)[f(x_k-0) + f(x_k+0)]$.

Иными словами, область задания всякой кусочно-гёльдеровой функции распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек сегментов, на каждом из которых эта функция принадлежит классу Гёльдера с некоторым положительным показателем. Каждый из этих сегментов мы будем называть участком гладкости функции.

Определение 2. *Будем называть функцию $f(x)$ кусочно-гладкой на сегменте $[a, b]$, если эта функция кусочно-непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную* [1]*, т. е. если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом сегменте, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения.*

Ясно, что всякая кусочно-гладкая на сегменте $[a, b]$ функция является кусочно-гёльдеровой на этом сегменте.

Имеет место следующая *основная* теорема.

Теорема 10.17. *Пусть кусочно-гёльдеровая на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке x бесконечной прямой к значению $f(x) = (1/2)[f(x-0) + f(x+0)]$, причем сходимость этого ряда является равномерной на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости функции $f(x)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы в равномерной сходимости на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости, сразу вытекает из теоремы 10.16. Отсюда же вытекает и сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой внутренней точке участка гладкости функции $f(x)$ [2]. Остается доказать сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке соединения двух участков гладкости.

Фиксируем одну из таких точек и обозначим ее через x. Тогда найдутся постоянные M_1 и M_2 такие, что при любом достаточно малом положительном t справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leqslant M_1 t^{\alpha_1} \qquad (0 < \alpha_1 \leqslant 1), \tag{10.75}$$

а при любом достаточно малом отрицательном t справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x-0)| \leqslant M_2 \cdot |t|^{\alpha_2} \qquad (0 < \alpha_2 \leqslant 1). \tag{10.76}$$

[1] См. определение 1 из п. 2 § 4 этой главы.

[2] Ибо каждую внутреннюю точку участка гладкости можно охватить сегментом, лежащим внутри этого участка.

Обозначим через M наибольшее из чисел M_1 и M_2, а через α наименьшее из чисел α_1 и α_2. Тогда при $|\,t\,| \leqslant 1$ в правой части каждого из неравенств (10.75) и (10.76) можно писать $M \cdot |\,t\,|^{\alpha}$.

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству (10.70) и настолько малое, что при $|\,t\,| \leqslant \delta$ справедливы оба неравенства (10.75) и (10.76) и в правой части этих неравенств можно брать число $M \cdot |\,t\,|^{\alpha}$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 10.15, мы придем к равенству (10.71) и для доказательства теоремы нам остается убедиться, что в фиксированной нами точке x справедливы оценки (10.72), (10.73) и (10.74). В замечании 2 п. 5 мы отметили, что оценки (10.73) и (10.74) справедливы для любой *только кусочно-непрерывной и периодической* (*с периодом* 2π) *функции.* Остается доказать справедливость для всех номеров n оценки (10.72).

Имея в виду, что $f(x) = (1/2)[f(x-0) + f(x+0)]$ и что [1])

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \int\limits_{-\delta}^{0} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

мы можем следующим образом переписать интеграл, стоящий в левой части (10.72):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\leqslant\delta} [f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+t) - f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}[f(x+t) - f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \quad (10.77)$$

---

[1]) В силу того, что функция $\varphi(t) = \dfrac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}$ является четной, т. е. для любого t удовлетворяет условию $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Легко убедиться, что для такой функции $\int\limits_{0}^{\delta} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{-\delta}^{0} \varphi(t)\,dt$ (достаточно в одном из этих интегралов сделать замену $t = -\tau$), и поэтому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\delta} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{-\delta}^{0} \varphi(t)\,dt.$$

Для оценки интегралов, стоящих в правой части (10.77), воспользуемся неравенствами (10.75) и (10.76), беря в правой части этих неравенств число $M|\,t\,|^{\alpha}$. Учитывая уже применявшуюся при доказательстве теоремы 10.15 оценку $\dfrac{1}{2\left|\sin \dfrac{t}{2}\right|} \leqslant \dfrac{\pi}{2|\,t\,|}$ (при $|\,t\,| \leqslant \pi$) и неравенство (10.70), будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\left[\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt + \int\limits_{-\delta}^{0}|\,t\,|^{\alpha-1}\,dt\right] = \frac{M}{\alpha}\cdot\delta^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценка (10.72), а с ней и теорема доказаны.

Следствие 1. *Утверждение теоремы* 10.17 *будет тем более справедливо, если в ее формулировке вместо кусочно-гёльдеровой взять кусочно-гладкую (на $[-\pi, \pi]$) функцию, периодически (с периодом 2π) продолженную на всю бесконечную прямую.*

Для формулировки еще одного следствия введем новое понятие. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в данной точке x справа (слева) условию Гёльдера порядка α, если функция $f(x)$ имеет в точке x правое (левое) предельное значение и если существует такая постоянная M, что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство*

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^{\alpha}} \leqslant M \qquad \left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|\,t\,|^{\alpha}} \leqslant M\right).$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ имеет в данной точке x правую (левую) производную, понимаемую как предел $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ $\left(\lim\limits_{t\to 0-0}\dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right)$, то функция $f(x)$ заведомо удовлетворяет в этой точке x справа (слева) условию Гёльдера любого порядка $\alpha \leqslant 1$.

Следствие 2 (условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в данной точке). *Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ сходился в данной точке x бесконечной прямой, достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла в точке x справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка α_1 и в точке x слева условию Гёльдера* *какого-либо положительного порядка* α_2 (*и тем более достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *имела в точке* x *правую и левую производные*).

Доказательство. Достаточно заметить, что из того, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x справа (слева) условию Гёльдера порядка α_1 (порядка α_2), вытекает существование постоянной M_1, (постоянной M_2) такой, что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство (10.75) (неравенство (10.76)). Но изложенное нами доказательство теоремы 10.17 использует лишь неравенства (10.75) и (10.76) и кусочную непрерывность и периодичность $f(x)$.

Пример. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ 1/2 & \text{при} \quad x = 0, \\ \sqrt{x} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

мы можем утверждать, что тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в точке $x = 0$ к значению $1/2$, ибо функция $f(x)$ имеет в этой точке левую производную и удовлетворяет в этой точке справа условию Гёльдера порядка $\alpha_2 = 1/2$.

7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических. Мы уже отмечали, что тригонометрический ряд Фурье всюду непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции может быть расходящимся (см. п. 1). Докажем, что этот ряд тем не менее всегда суммируем (равномерно на всей бесконечной прямой) методом Чезаро (или методом средних арифметических) [1].

***Теорема 10.18* (*теорема Фейера* [2]).** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяет условию* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то средние арифметические частичных сумм ее тригонометрического ряда Фурье*

$$\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + S_1(x, f) + \ldots + S_{n-1}(x, f)}{n}$$

сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ (*а в случае, если функция с периодом* 2π *продолжена на всю бесконечную прямую, равномерно на всей бесконечной прямой*).

Доказательство. Из равенства (10.55) для $S_n(x, f)$ получим, что

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t\right] dt. \tag{10.78}$$

[1] См. дополнение 3 к гл. 13 вып. 1.

[2] Л. Фейер доказал свою теорему в 1904 г. Л. Фейер — венгерский математик (1880–1959).

Для вычисления суммы, стоящей в (10.78) в квадратных скобках, просуммируем тождество

$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \cos kt - \cos(k+1)t$$

по всем $k = 0, 1, \ldots, n-1$. В результате получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = 1-\cos nt = 2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

С помощью последнего равенства (10.78) приводится к виду

$$\sigma_n(x,\, f) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt. \tag{10.79}$$

Из (10.79) в свою очередь немедленно следует, что

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt = 1, \tag{10.80}$$

ибо левая часть (10.80) равна среднему арифметическому частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \equiv 1$, а все указанные частичные суммы тождественно равны единице (см. п. 2).

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса 10.9 найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$|f(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/2 \tag{10.81}$$

для всех x из бесконечной прямой. В силу линейности средних арифметических $\sigma_n(x,\, f) = \sigma_n(x,\, f-T+)\sigma_n(x,\, T)$, так что

$$|\sigma_n(x,\, f) - T(x)| \leqslant |\sigma_n(x,\, f-T| + |\sigma_n(x,\, T) - T(x)|. \tag{10.82}$$

Записав равенство (10.79) для функции $[f(x)-T(x)]$, мы получим, учитывая неотрицательность называемой ядром Фейера функции $\dfrac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}$ и используя оценку (10.81) и равенство (10.80),

$$|\sigma_n(x,\, f-T| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-T(x+t)|\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.83}$$

Неравенство (10.83) справедливо для любого номера n. Заметим теперь, что тригонометричский ряд Фурье многочлена $T(x)$ *совпадает с этим многочленом.* Отсюда следует, что все частичные суммы $S_n(x,\, T)$, начиная с некоторого номера n_0, равны $T(x)$. Но это позволяет нам для фиксированного выше произвольного $\varepsilon > 0$ отыскать номер N такой, что

$$|\sigma_n(x,\, T) - T(x)| < \varepsilon/2 \tag{10.84}$$

при всех $n \geqslant N$ и всех x.

Из неравенств (10.82), (10.83) и (10.84) заключаем, что $|\sigma_n(x,\, f)-f(x)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и всех x. Теорема доказана.

8. Заключительные замечания. 1°. При решении ряда конкретных задач приходится раскладывать функцию в тригонометрический ряд Фурье не на сегменте $[-\pi, \pi]$, а на сегменте $[-l, l]$, где l — произвольное положительное число. Для перехода к такому случаю достаточно во всех проведенных выше рассуждениях заменить переменную x на $\frac{\pi}{l}x$. Конечно, при такой линейной замене переменной останутся справедливыми все установленные нами результаты. Эти результаты будут относиться к тригонометрическому ряду Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{10.85}$$

со следующими выражениями для коэффициентов Фурье

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt, \\ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt \\ (k = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{10.86}$$

Мы не будем заново формулировать все установленные теоремы, а лишь отметим, что во всех формулировках сегмент $[-\pi, \pi]$ следует заменить сегментом $[-l, l]$, а период 2π периодом $2l$.

2°. Напомним, что функция $f(x)$ называется четной, если она удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если она удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$.

Из вида (10.86) тригонометрических коэффициентов Фурье вытекает, что для четной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты b_k $(k = 1, 2, \ldots)$, а для нечетной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Таким образом, *четная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi}{l}kx,$$

а нечетная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Приведем весьма часто употребляемую комплексную форму записи тригонометрического ряда Фурье (10.85).

Используя соотношения [1])

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx} = \cos\frac{\pi}{l}kx - i\sin\frac{\pi}{l}kx, \quad e^{i\frac{\pi}{l}kx} = \cos\frac{\pi}{l}kx + i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

легко убедиться в том, что тригонометрический ряд Фурье (10.85) с коэффициентами Фурье (10.86) приводится к виду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{10.87}$$

в котором комплексные коэффициенты c_k имеют вид

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt \tag{10.88}$$

и выражаются через коэффициенты (10.86) по формулам

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots).$$

4°. Чрезвычайно важной для приложений является задача о вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье этой функции. Решение этой задачи при помощи так называемого метода регуляризации приводится в приложении в конце настоящего выпуска.

§ 6. Интеграл Фурье

В случае, когда функция $f(x)$ задана на всей бесконечной прямой и не является периодической ни с каким конечным периодом, эту функцию естественно раскладывать не в тригонометрический ряд, а в так называемый интеграл Фурье. Изучению такого разложения и посвящен настоящий параграф. Всюду в этом параграфе мы подчиним функцию $f(x)$ требованию абсолютной интегрируемости на бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$, т. е. потребуем, чтобы существовал несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{10.89}$$

Договоримся о следующей терминологии.

Определение. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$ классу*

[1]) Эти соотношения являются непосредственными следствиями формулы Эйлера, установленной в п. 3 § 5 гл. 1.

L_1 и писать $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, если функция $f(x)$ интегрируема (в собственном смысле Римана) на любом сегменте и если сходится несобственный интеграл (10.89).

1. Образ Фурье и его простейшие свойства.

Лемма 4. *Если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, то для любой точки y бесконечной прямой $-\infty < y < \infty$ существует несобственный интеграл* [1])

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx, \tag{10.90}$$

называемый образом (или преобразованием) Фурье функции $f(x)$. Более того, функция $\widehat{f}(y)$ непрерывна по y в каждой точке бесконечной прямой и стремится к нулю при $y \to \infty$, т. е.

$$\lim_{|y|\to\infty} |\widehat{f}(y)| = 0. \tag{10.91}$$

Доказательство. Из равенства $|e^{ixy}f(x)| = |f(x)|$, из сходимости интеграла (10.89) и из признака Вейерштрасса (см. теорему 9.7) вытекает равномерная по y сходимость интеграла (10.90) на каждом сегменте бесконечной прямой, а отсюда, в силу непрерывности функции e^{ixy} по y, из теоремы 9.9 следует непрерывность интеграла (10.90) по y (на каждом сегменте, т. е. в каждой точке бесконечной прямой).

Остается доказать соотношение (10.91). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла (10.89) можно фиксировать $A > 0$ такое, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx + \int\limits_{A}^{\infty} |f(x)|\, dx < \varepsilon/3. \tag{10.92}$$

При так фиксированном A (в силу (10.92)) будет справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\, dx \right| + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10.93}$$

и для доказательства соотношения (10.91) нам остается доказать, что интеграл, стоящий в правой части (10.93), меньше $\frac{2}{3}\varepsilon$ для всех достаточно больших $|y|$.

[1]) Комплексную функцию $\widehat{f}(y) = u(y) + iv(y)$ вещественного аргумента y мы рассматриваем как пару вещественных функций $u(y)$ и $v(y)$. Непрерывность $\widehat{f}(y)$ в данной точке y понимается как непрерывность в этой точке каждой из функций $u(y)$ и $v(y)$.

Так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-A, A]$, то можно фиксировать такое разбиение T сегмента $[-A, A]$, что для верхней суммы S_T этого разбиения будет справедливо неравенство [1]

$$0 < S_T - \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \varepsilon/3. \tag{10.94}$$

Предположим, что это разбиение T производится при помощи точек $-A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = A$ и что M_k — точная верхняя грань функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Введем функцию

$$\overline{f}_T(x) = \begin{cases} M_k & \text{при} \quad x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ 0 & \text{при} \quad x = x_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Поскольку интеграл не зависит от значения подынтегральной функции в конечном числе точек, то очевидно, что

$$\int_{-A}^{A} \overline{f}_T(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S_T,$$

так что в силу (10.94)

$$\int_{-A}^{A} |\overline{f}_T(x) - f(x)|\,dx = \int_{-A}^{A} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx < \varepsilon/3. \tag{10.95}$$

Опираясь на неравенство (10.95) и учитывая, что $|e^{ixy}| = 1$ и что $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| \leqslant 2/|y|$, будем иметь

$$\begin{aligned} \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy}[f(x) - \overline{f}_T(x) + \overline{f}_T(x)]\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy}\overline{f}_T(x)\,dx\right| + \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy}[\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| + \int_{-A}^{A} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{|y|}\sum_{k=1}^{n} |M_k| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon, \end{aligned}$$

если только $|y| > \dfrac{6}{\varepsilon}\left[\sum_{k=1}^{n} |M_k|\right]$. Лемма доказана.

[1]) см. § 2 и 3 гл. 10 вып. 1.

Следствие. *Если* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x \cdot f(x)\,dx = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda x \cdot f(x)\,dx = 0.$$

2. Условия разложимости функции в интеграл Фурье.

Определение. *Для каждой функции* $f(x)$ *из класса* $L_1(-\infty, \infty)$ *назовем предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\,dy = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(u-x)} f(u)\,du \right] dy$$

(*при условии, что этот предел существует*) *р а з л о ж е н и е м этой функции в и н т е г р а л Ф у р ь е.*

Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 10.19 (условие разложимости функции в данной точке в интеграл Фурье). *Если* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ *и если функция* $f(x)$ *удовлетворяет в данной точке* x *справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка* α_1 $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$, *а слева — условию Гёльдера какого-либо положительного порядка* α_2 $(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$, *то в этой точке* x *справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\,dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{10.96}$$

З а м е ч а н и е 1. В каждой точке x, значение $f(x)$ в которой равно полусумме правого и левого предельных значений (в частности, в каждой точке непрерывности $f(x)$) в правой части (10.96) можно писать $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 10.19. Так как образ Фурье $\widehat{f}(y)$ (в силу леммы 4) является непрерывной функцией y, то при любом п о л о ж и т е л ь н о м λ существует интеграл

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\,dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f(u)\,du \right] dy. \tag{10.97}$$

В интеграле, стоящем в правой части (10.97), можно переменить порядок интегрирования относительно y и u (так как внутренний интеграл сходится равномерно относительно y на любом сегменте $[-\lambda, \lambda]$.

Меняя порядок интегрирования относительно y и u, пользуясь равенствами

$$e^{iy(u-x)} = \cos y(u-x) + i \sin y(u-x),$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \cos y(u-x)\, dy = \frac{\sin \lambda(u-x)}{2(u-x)}, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \sin y(u-x)\, dy = 0$$

и делая подстановку $u = x + t$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}\, dy \right] f(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda(u-x)}{u-x} f(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t)\, dt.$$

Итак, при любом положительном λ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t)\, dt. \tag{10.98}$$

Теперь учтем, что при любом положительном λ справедливо равенство [1]

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

а стало быть, и равенство

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Из последних двух равенств вытекает, что при любом положительном λ

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x+0) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt, \tag{10.99}$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} f(x-0) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt. \tag{10.100}$$

[1] См. гл. 9, § 3.

Вычитая из (10.98) равенства (10.99) и (10.100), получим, что при любом положительном λ

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \quad (10.101)$$

Так как функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x справа условию Гёльдера порядка α_1 и слева условию Гёльдера порядка α_2, то существуют постоянные M_1 и M_2 такие, что для всех достаточно малых положительных t будет справедливо неравенство (10.75), а для всех достаточно малых отрицательных t будет справедливо неравенство (10.76). Если мы обозначим через M наибольшее из чисел M_1 и M_2, а через α наименьшее из чисел α_1 и α_2, то в правых частях (10.75) и (10.76) можно писать $M|\,t\,|^{\alpha}$, причем эти неравенства будут справедливы для всех положительных (соответственно отрицательных) значений t, удовлетворяющих условию $|\,t\,| \leqslant \delta$, где δ — произвольное достаточно малое положительное число.

Теперь мы можем следующим образом переписать соотношение (10.101):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \\ - \frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \quad (10.102)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$ настолько малым, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.103}$$

Оценивая первые два интеграла в правой части (10.102) с помощью неравенств (10.75) и (10.76) (с величиной $M|\,t\,|^\alpha$ в правых частях этих неравенств), будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta |f(x+t)-f(x+0)|\frac{dt}{t} \leqslant \leqslant \frac{M}{\pi}\int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}$$

и совершенно аналогично

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 |f(x+t)-f(x-0)|\frac{dt}{t} \leqslant \leqslant \frac{M}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 |\,t\,|^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}.$$

Из последних двух неравенств и из (10.103) получим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.104}$$

Для оценки третьего интеграла в правой части (10.102) введем функцию

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{f(x+t)}{t} & \text{при} \quad |\,t\,| \geqslant \delta, \\ 0 & \text{при} \quad |\,t\,| < \delta. \end{cases}$$

Так как $g(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, то в силу следствия из леммы 4

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin\lambda t\,dt = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\,t\,|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = 0,$$

но это означает, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется Λ_1 такое, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\text{при } \lambda \geqslant \Lambda_1). \tag{10.105}$$

Наконец, заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \int\limits_{\lambda\delta}^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Отсюда следует, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ и рассматриваемой точки x найдется Λ_2 такое, что

$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| + \left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{при } \lambda \geqslant \Lambda_2). \tag{10.106}$$

Обозначим через Λ наибольшее из чисел Λ_1 и Λ_2. Из соотношений (10.102), (10.104)–(10.106) заключаем, что

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \varepsilon \qquad (\text{при } \lambda \geqslant \Lambda).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Равенство* (10.96) *будет тем более справедливо, если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и если функция $f(x)$ имеет в данной точке x правую и левую производные, понимаемые как пределы отношений* $\lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\left(\lim\limits_{t\to 0-0} \dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right)$.

З а м е ч а н и е 2. Предел, стоящий в левой части (10.96), можно записывать в виде несобственного интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy, \tag{10.107}$$

но следует помнить, что этот несобственный интеграл *сходится в смысле главного значения*, т. е. является пределом соответствующего собственного интеграла лишь при условии, что пределы интегрирования в этом собственном интеграле *являются симметричными относительно нуля числами.* Нельзя понимать несобственный интеграл (10.107) как предел

$$\lim_{\substack{\lambda' \to -\infty \\ \lambda'' \to +\infty}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda'}^{\lambda''} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy$$

при независимом стремлении λ' к $-\infty$ и λ'' к $+\infty$. В следующем пункте мы будем писать вместо предела (10.96) несобственный интеграл (10.107), всякий раз понимая его в указанном нами смысле.

3. Понятие о прямом и обратном преобразованиях Фурье. Записывая левую часть (10.96) в виде несобственного интеграла (10.107) и считая, что значение функции $f(x)$ в данной точке x равно полусумме правого и левого предельных значений, мы получим равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy, \qquad (10.108)$$

позволяющее найти функцию $f(x)$ по ее образу Фурье $\widehat{f}(y)$ и часто называемое обратным преобразованием Фурье. По отношению к этому равенству формулу (10.90), с помощью которой образ Фурье $\widehat{f}(y)$ выражается через саму функцию $f(x)$, часто называют прямым преобразованием Фурье.

Проводя аналогию с тригонометрическим рядом Фурье, мы придем к выводу, что образ Фурье является аналогом коэффициента Фурье, а обратное преобразование Фурье (10.108) является аналогом разложения функции в тригонометрический ряд Фурье.

Рассмотрим прямое и обратное преобразования Фурье для двух важных частных случаев: 1) для случая, когда функция $f(x)$ является четной (т. е. удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$) и 2) для случая, когда функция $f(x)$ является нечетной (т. е. удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$).

1) Если $f(x)$ — четная функция, то из формулы (10.90) с помощью формулы Эйлера $e^{ixy} = \cos xy + i \sin xy$ получим

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos xy f(x)\, dx = 2 \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cos xy\, dx. \qquad (10.109)$$

Из формулы (10.109) в свою очередь следует, что образ Фурье $\widehat{f}(y)$ также является четной функцией y. Поэтому обратное преобразование Фурье (10.108) принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) \cos yx \, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \widehat{f}(y) \cos yx \, dy. \qquad (10.110)$$

Формулу (10.109) часто называют прямым косинус-преобразованием Фурье, а формулу (10.110) — обратным косинус-преобразованием Фурье.

2) Если $f(x)$ — нечетная функция, то совершенно аналогично из формул (10.90) и (10.108) мы получим прямое синус-преобразование Фурье

$$\widehat{f}(y) = 2 \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \sin xy \, dx$$

и обратное синус-преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \widehat{f}(y) \sin yx \, dy.$$

На практике довольно часто встречается случай, когда функция $f(x)$ задана *только на полупрямой* $0 \leqslant x < \infty$. В этом случае мы можем по нашему желанию продолжить эту функцию на полупрямую $-\infty < x \leqslant 0$ либо четным, либо нечетным образом и пользоваться для этой функции либо косинус-преобразованием Фурье, либо синус-преобразованием Фурье.

Пример. Рассмотрим на полупрямой $0 \leqslant x < \infty$ функцию $f(x) = e^{-ax}$, где $a > 0$. Продолжая эту функцию четным образом на полупрямую $-\infty < x \leqslant 0$, получим прямое и обратное косинус-преобразования Фурье

$$\widehat{f}(y) = 2 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx = \frac{2a}{a^2 + y^2} \text{ [1]}$$

($\widehat{f}(y)$ иногда называют косинус-образом Фурье),

$$f(x) = \frac{2}{\pi} a \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos yx}{a^2 + y^2} \, dy = e^{-ax} \quad (x \geqslant 0).$$

[1] Напомним, что интеграл $\int e^{-ax} \cos xy \, dx$ элементарно вычисляется двукратным интегрированием по частям (см. вып. 1, гл. 6).

Продолжая ту же функцию на полупрямую $-\infty < x \leqslant 0$ нечетным образом, т. е. полагая

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -e^{-a|x|} & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

мы получим прямое и обратное синус-преобразования Фурье

$$\widehat{f}(y) = 2\int_0^\infty e^{-ax}\sin xy\,dx = \frac{2a}{a^2+y^2}$$ [1]

($\widehat{f}(y)$ иногда называют *синус-образом Фурье*),

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\sin yx}{a^2+y^2}\,dy = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Некоторые дополнительные свойства преобразования Фурье. В этом пункте мы остановимся на некоторых дополнительных свойствах преобразования Фурье, довольно часто встречающихся в приложениях.

Лемма 5. *Пусть при некотором целом неотрицательном числе* k *функция* $(1+|x|)^k \cdot f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$. *Тогда образ Фурье* (10.90) *функции* $f(x)$ *дифференцируем* k *раз по переменной* y, *причем производную по* y *любого порядка* m $(m = 1,\,2,\,\ldots,\,k)$ *можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла* (10.90), *т. е. по формуле*

$$\frac{d^m}{dy^m}\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}(ix)^m \cdot f(x)\,dx \qquad (m = 1,\,2,\,\ldots,\,k). \tag{10.111}$$

Доказательство. Из справедливого для любого m $(m = 1,\,2,\,\ldots,\,k)$ неравенства

$$\left|\frac{d^m}{dy^m}e^{ixy}f(x)\right| = |e^{ixy}\cdot(ix)^m f(x)| \leqslant (1+|x|)^k \cdot |f(x)|$$

и из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^k \cdot |f(x)|\,dx$ в силу признака Вейерштрасса (т. е. теоремы 9.7) вытекает равномерная по y (на каждом сегменте) сходимость интеграла, стоящего и правой части (10.111), для любого $m = 0,\,1,\,\ldots,\,k$. В силу теоремы 9.10 это обеспечивает существование производной по y любого порядка $m = 1,\,2,\,\ldots,\,k$ и справедливость формулы (10.111). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в каждой точке* x *все производные до порядка* $k \geqslant 1$ *включительно, причем сама функция* $f(x)$ *и производная порядка* k *абсолютно интегрируемы на бесконечной прямой и для любого* $m = 0,\,1,\,\ldots,\,(k-1)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right] = 0. \tag{10.112}$$

[1] См. предыдущую сноску.

Тогда для преобразования Фурье $\widehat{f}(y)$ функции $f(x)$ при $|y| \to \infty$ справедлива оценка

$$|\widehat{f}(y)| = o(|y|^{-k}). \tag{10.113}$$

Доказательство. Рассмотрим для любого $\lambda > 0$ интеграл

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx.$$

Интегрируя его k раз по частям, мы получим формулу

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = \left[e^{ixy} \frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}\right]\Big|_{-\lambda}^{\lambda} - \left[iy \cdot e^{ixy} \frac{d^{k-2} f(x)}{dx^{k-2}}\right]\Big|_{-\lambda}^{\lambda} + \ldots$$

$$\ldots + (-i)^k \cdot y^k \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} f(x)\, dx.$$

Устремляя в полученном равенстве λ к ∞ и учитывая, что в силу (10.112) все подстановки обращаются в нуль, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = (-iy)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \cdot f(x)\, dx = (-iy)^k \cdot \widehat{f}(y).$$

Учитывая, что интеграл, стоящий в левой части последнего равенства, в силу леммы 4 стремится к нулю при $|y| \to \infty$, мы и получим оценку (10.113). Лемма доказана.

Теорема 10.20. *Пусть функция $f(x)$ и ее вторая производная абсолютно интегрируемы на бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$, причем сама функция $f(x)$ и ее первая производная стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Пусть далее функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$. Тогда справедливо следующее равенство*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) \widehat{g}^*(y)\, dy, \tag{10.114}$$

называемое о б о б щ е н н ы м р а в е н с т в о м П а р с е в а л я *или* р а в е н с т в о м П л а н ш е р е л я [1]. (В этом равенстве $\widehat{f}(y)$ и $\widehat{g}(y)$ суть образы Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, а $\widehat{g}^*(y)$ обозначает величину, комплексно-сопряженную $\widehat{g}(y)$.)

Доказательство. В силу теоремы 10.19 в каждой точке x справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy, \tag{10.115}$$

причем в силу леммы 6 справедлива оценка $|\widehat{f}(y)| \leqslant C(1 + |y|)^{-2}$, обеспечивающая абсолютную и равномерную (относительно x) сходимость интеграла, стоящего в правой части (10.115), на всей бесконечной прямой.

[1] М. Планшерель — французский математик (род. в 1885 г.).

Умножая обе части (10.115) на $g(x)$ и интегрируя по x в пределах от $-\lambda$ до λ, будем иметь

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} g(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy\right]dx. \tag{10.116}$$

В силу отмеченной выше равномерной по x сходимости интеграла (10.115), в правой части (10.116) можно изменить порядок интегрирования относительно x и y, и мы получим

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy}g(x)\,dx\right]^{*}\widehat{f}(y)\,dy \tag{10.117}$$

(звездочка означает комплексное сопряжение).

В силу неравенства

$$\left|\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy}g(x)\,dx\right]^{*}\right|\cdot|\widehat{f}(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx\cdot C(1+|y|)^{-2}$$

и признака Вейерштрасса интеграл, стоящий в правой части (10.117), сходится равномерно относительно λ на бесконечной прямой $-\infty < \lambda < \infty$. Стало быть в (10.117) можно перейти к пределу при $\lambda \to \infty$, осуществляя в правой части (10.117) переход к пределу под знаком интеграла. Теорема доказана.

§ 7. Кратные тригонометрические ряды и интегралы Фурье

1. Понятие кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм. Пусть функция N переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ определена и интегрируема в N-мерном кубе $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). Этот куб мы обозначим символом Π. Кратный тригонометрический ряд такой функции удобно записывать сразу в комплексной форме, используя для сокращения записи понятие скалярного произведения двух N-мерных векторов.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — вектор с произвольными вещественными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — вектор с целочисленными координатами $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Кратным тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ называется ряд вида

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}e^{-i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})}, \tag{10.118}$$

в котором числа $\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}$, называемые коэффициентами Фурье, определяются равенствами

$$\widehat{f}_{\boldsymbol{n}} = \widehat{f}_{n_1 n_2\ldots n_N} = (2\pi)^{-N}\int\limits_{\Pi}\cdots\int f(y_1, \ldots, y_N)e^{i(y_1 n_1+\ldots+y_N n_N)}\,dy_1\ldots dy_N, \tag{10.119}$$

а символ $(\boldsymbol{xn})$ обозначает скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{n}$, равное $x_1 n_1 + \ldots + x_N n_N$.

Конечно, кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) можно рассматривать как ряд Фурье по ортонормированной (в N-мерном кубе П) системе [1], образованной с помощью всевозможных произведений элементов одномерной тригонометрической системы, взятых от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ соответственно. Эту ортонормированную систему принято называть кратной тригонометрической системой.

Как и для всякой ортонормированной системы, для кратной тригонометрической системы справедливо неравенство Бесселя, которое имеет вид

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}|^2 \leqslant (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\ldots} \int f^2(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N, \tag{10.120}$$

где $f(x_1, \ldots, x_N)$ — любая непрерывная в N-мерном кубе П функция.

Рассмотрим вопрос о сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье. Если этот ряд не сходится в данной точке $x = (x_1, \ldots, x_N)$ абсолютно, то вопрос о его сходимости (в силу теоремы Римана 13.10 из вып. 1) зависит от порядка следования его членов (или, что то же самое, зависит от порядка суммирования по индексам $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Широко распространены два способа суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье — сферический и прямоугольный.

Сферическими частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (10.118) называются суммы вида

$$S_\lambda(\boldsymbol{x}, f) = \sum_{|\boldsymbol{n}| \leqslant \lambda} \widehat{f}_{\boldsymbol{n}} e^{-i(\boldsymbol{xn})},$$

взятые по всем целочисленным значениям $n_1, n_2, \ldots, n_N$, удовлетворяющим условию $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_N^2} \leqslant \lambda$.

Говорят, что кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) *суммируем в данной точке x сферическим методом, если в этой точке существует предел* $\lim\limits_{\lambda \to \infty} S_\lambda(x, f)$.

Прямоугольными частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (10.118) называются суммы

[1] При этом скалярное произведение двух любых функций определяется как интеграл от произведения этих функций по кубу П.

вида

$$S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(\boldsymbol{x},\, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \ldots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \widehat{f}_{\boldsymbol{n}} e^{-i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})}.$$

Говорят, что кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) *суммируем в данной точке x прямоугольным методом* (*или методом Принсгейма*), *если в этой точке существует предел*

$$\lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty \\ \cdots\cdots \\ m_N \to \infty}} S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(\boldsymbol{x},\, f)$$

(*при стремлении к бесконечности каждого индекса* $m_1,\, m_2,\, \ldots$ $\ldots,\, m_N$).

Оба метода суммирования имеют свои преимущества и свои недостатки. При рассмотрении кратного тригонометрического ряда Фурье как ряда Фурье по ортонормированной системе естественно располагать его члены в порядке возрастания $|\boldsymbol{n}|$ и иметь дело со сферическими частичными суммами.

Прямоугольные частичные суммы применяются при исследовании поведения кратных степенных рядов около границы области сходимости. Следует отметить, что определение суммы ряда как предела прямоугольных сумм (в противоположность определению, опирающемуся на предел сферических сумм) не накладывает никаких ограничений на бесконечное множество частичных сумм этого ряда.

Прежде чем формулировать условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье, определим некоторые характеристики гладкости функции N переменных.

2. Модуль непрерывности и классы Гёльдера для функции N переменных. Пусть функция N переменных $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_N)$ определена и непрерывна в N-мерной области D.

Определение 1. *Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ в области D точную верхнюю грань модуля разности $|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')|$ на множестве всех точек $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, которые принадлежат области D и расстояние $\rho(\boldsymbol{x}',\, \boldsymbol{x}'')$ между которыми меньше δ.*

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ в области D символом $\omega(\delta,\, f)$.

Определение 2. *Для любого $\varkappa$ из полусегмента $0 < \varkappa \leqslant 1$ будем говорить, что функция $f(\boldsymbol{x})$ принадлежит в области D классу Гёльдера $C^\varkappa$ с показателем $\varkappa$, и писать $f(\boldsymbol{x}) \in$ $\in C^\varkappa(D)$, если модуль непрерывности функции $f(\boldsymbol{x})$ в области D имеет порядок $\omega(\delta,\, f) = o(\delta^\varkappa)$ при $0 < \varkappa < 1$ и $\omega(\delta,\, f) = O(\delta^\varkappa)$ при $\varkappa = 1$.*

Пусть теперь α — любое (не обязательно целое) положительное число: $\alpha = r + \varkappa$, где r — целое, а $\varkappa$ принадлежит полусегменту $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f(\boldsymbol{x})$ принадлежит в области D классу Гёльдера C^α с показателем $\alpha > 0$, и писать $f(\boldsymbol{x}) \in C^\alpha(D)$, если все частные производные функции $f(\boldsymbol{x})$ порядка r непрерывны в области D и каждая частная производная порядка r принадлежит классу $C^\varkappa(D)$, введенному в определении 2.*

3. Условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье. Начнем с установления простейших условий абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 10.21. *Если функция $f(\boldsymbol{x})$ периодически (с периодом 2π по каждой из переменных) продолжена на все пространство E^N и обладает в E^N непрерывными производными порядка $s = [N/2]+1$, где $[N/2]$ — целая часть числа $N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f(\boldsymbol{x})$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N.*

Доказательство. Договоримся обозначать символом $\left(\widehat{\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_{\boldsymbol{n}}$ коэффициент Фурье производной $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номером $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$. Производя интегрирование по частям, получим, что $\left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\boldsymbol{n}} = in_k\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}$ (для любого $k = 1, 2, \ldots, N$), так что $\left|\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right| = |\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}|(|n_1| + \ldots + |n_N|)$ и, стало быть,

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-1}\sum_{k=1}^{N}\left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right|. \qquad (10.121)$$

Формула (10.121) справедлива не только для функции f, но и для каждой частной производной функции f до порядка $(s-1)$ включительно. Отсюда сразу же вытекает соотношение

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| \leqslant (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-s}\sum_{s_1+\ldots+s_N=s}\left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right|, \quad (10.122)$$

сумма в правой части которого берется по всем целым неотрицательным $s_1, \ldots, s_N$, удовлетворяющим условию $s_1+\ldots+s_N = s$ (так что число слагаемых в этой сумме равно N^s). Из (10.122) в свою очередь следует [1])

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| \leqslant \frac{1}{2}(|n_1|+\ldots+|n_N|)^{-2s} + \frac{N^s}{2}\sum_{s_1+\ldots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right|^2, \tag{10.123}$$

Учитывая, что $s = \frac{N}{2}+\varepsilon$, где $\varepsilon = 1$ для четного N и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ для нечетного N, и что

$$(|n_1|+\ldots+|n_N|)^{-2s} = (|n_1|+\ldots+|n_N|)^{-N-2\varepsilon} \leqslant \leqslant |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

мы получим из (10.123)

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| \leqslant \frac{1}{2}|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} + \frac{N^s}{2}\sum_{s_1+\ldots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right|^2. \tag{10.124}$$

Для абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (10.118) достаточно (в силу признака Вейерштрасса) доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}|,$$

но (в силу неравенства (10.124)) сходимость последнего ряда является прямым следствием сходимости для любого k числового ряда $\sum\limits_{n_k=-\infty}^{\infty}|n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и сходимости для любых $s_1, s_2, \ldots, s_N$ ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right|^2,$$

вытекающей из неравенства Бесселя (10.120), записанного для непрерывной функции $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}$.

Тот факт, что кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) сходится именно к функции $f(\boldsymbol{x})$, вытекает из полноты

---

[1]) Мы пользуемся неравенствами $|a|\cdot|b| \leqslant \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ и $(|a_1|+\ldots+|a_p|)^2 \leqslant \leqslant p(a_1^2+\ldots+a_p^2)$.

кратной тригонометрической системы [1]. В самом деле, если бы ряд (10.118) равномерно сходился к некоторой функции $g(\boldsymbol{x})$, то из возможности почленного интегрирования такого ряда вытекало бы, что все коэффициенты Фурье функции $g(\boldsymbol{x})$ совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье функции $f(\boldsymbol{x})$. Но тогда разность $[f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})]$ была бы ортогональна всем элементам кратной тригонометрической системы и (в силу полноты этой системы) равнялась бы нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 10.21 может быть уточнена. Справедливо следующее утверждение [2]: *если функция $f(\boldsymbol{x})$ периодична по каждой из переменных (с периодом 2π) и принадлежит в E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha > N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье $f(\boldsymbol{x})$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N.*

Выяснение условий неабсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда требует привлечения более тонкой техники.

Сформулируем без доказательства условия суммируемости кратного тригонометрического ряда Фурье сферическим и прямоугольным методом.

Теорема 10.22. *Если функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ периодична по каждой переменной (с периодом 2π) и принадлежит в пространстве E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$, то сферические функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ сходятся к этой функции равномерно во всем пространстве E^N* [3].

Теорема 10.23. *Для любого положительного α, меньшего $\dfrac{N-1}{2}$, и любой точки $\boldsymbol{x}_0$ N-мерного куба Π существует функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, периодическая по каждой переменной (с периодом 2π), принадлежащая в E^N классу C^α, обращающаяся в нуль в некоторой δ-окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ и такая, что сферические частичные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье этой функции не имеют предела в точке $\boldsymbol{x}_0$* [4].

---

[1] Полнота кратной тригонометрической системы сразу вытекает из полноты составляющих ее одномерных тригонометрических систем, произведением которых она является.

[2] Это утверждение весьма просто получается из леммы 3.1, доказанной в работе В. А. Ильина и Ш. А. Алимова «Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, I» (// Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7, N4. С. 670–710).

[3] Эта теорема вытекает из более общих утверждений, доказанных в работе В. А. Ильина «Проблемы локализации и сходимости рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа» (// Успехи математических наук. 1968. Т. 23. Вып. 2. С. 61–120) и в работе В. А. Ильина и Ш. А. Алимова, упомянутой в предыдущей сноске.

[4] Эта теорема является частным случаем более общего утверждения, доказанного в гл. 3 работы В. А. Ильина, указанной в предыдущей сноске.

Теоремы 10.22 и 10.23 устанавливают окончательные (в классах Гёльдера C^α) условия сходимости сферических частичных сумм периодической функции $f(x_1, \ldots, x_N)$. Согласно этим теоремам при $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$ имеет место равномерная сходимость сферических частичных сумм, а при $\alpha < \frac{N-1}{2}$ для сферических частичных сумм несправедлив даже принцип локализации (сколь бы гладкой ни являлась функция f в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, принадлежность этой функции классу C^α (E^N) при $\alpha < \frac{N-1}{2}$ не обеспечивает сходимости сферических частичных сумм этой функции в точке $\boldsymbol{x}_0$).

Окончательные (в классах Гёльдера C^α) условия сходимости прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье установлены и работе Л. В. Жижиашвили [1]).

Теорема 10.24. *Если функция N переменных $f(x_1, \ldots, x_N)$ периодична по каждой из переменных (с периодом 2π) и принадлежит в E^N классу C^α при любом $\alpha > 0$, то прямоугольные частичные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_N)$ сходятся (к этой функции) равномерно в E^N.*

Замечание 2. Отметим, что еще в 1928 г. Л. Тонелли [2]) было установлено, что одна непрерывность функции $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_N)$ не обеспечивает не только равномерной сходимости, но и принципа локализации прямоугольных частичных сумм ее кратного тригонометрического ряда Фурье (существует периодическая по каждой переменной (с периодом 2π) функция, непрерывная в E^N, обращающаяся в нуль в некоторой δ-окрестности данной точки $\boldsymbol{x}_0$ и такая, что прямоугольные частичные суммы этой функции расходятся в $\boldsymbol{x}_0$).

4. О разложении функции в $\boldsymbol{N}$-кратный интеграл Фурье. Пусть функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, \ldots, x_N) = f(\boldsymbol{x})$ допускает существование несобственного интеграла

$$\int\limits_{E^N} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N. \tag{10.125}$$

Назовем образом (или преобразованием) Фурье такой функции величину

$$\widehat{f}(y_1, \ldots, y_N) = \widehat{f}(\boldsymbol{y}) = \int\limits_{E^N} \ldots \int e^{i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})} f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N.$$

В полной аналогии с леммой 4 доказывается, что $\widehat{f}(\boldsymbol{y})$ является непрерывной функцией $\boldsymbol{y}$ всюду в E^N и стремится к нулю при $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_N^2} \to \infty$.

[1]) Л. В. Жижиашвили. О сопряженных функциях и тригонометрических рядах. Докторская диссертация, Москва, МГУ, 1967.

[2]) Л. Тонелли — итальянский математик (1885–1946).

Предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{|\boldsymbol{y}|\leqslant\lambda}\ldots\int \widehat{f}(y_1, \ldots , y_N)e^{-i(\boldsymbol{xy})}\, dy_1 \ldots dy_N \tag{10.126}$$

(при условии, что этот предел существует) называется **разложением функции** $f(\boldsymbol{x})$ **в** N**-кратный интеграл Фурье**.

Справедливы следующие два утверждения [1].

1°. Если функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, \ldots , x_N)$ обращается в нуль вне некоторой ограниченной области и принадлежит во всем пространстве E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$, то разложение этой функции в N-кратный интеграл Фурье (10.126) сходится (к этой функции) равномерно во всем пространстве E^N.

2°. Для любого положительного α, меньшего $\dfrac{N-1}{2}$, и любой точки $\boldsymbol{x}_0$ существует функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, \ldots , x_N)$, отличная от нуля только в ограниченной области, принадлежащая в E^N классу C^α, обращающаяся в нуль в некоторой δ-окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ и такая, что для этой функции предел (10.126) в точке $\boldsymbol{x}_0$ не существует.

Утверждения 1° и 2° устанавливают окончательные (в классах Гёльдера C^α) условия сходимости разложения в N-кратный интеграл Фурье любой функции, равной нулю вне некоторой ограниченной области пространства E^N. Согласно этим утверждениям при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$ имеет место равномерная (в любой ограниченной области) сходимость разложения в N-ратный интеграл Фурье, а при $\alpha < \dfrac{N-1}{2}$ для разложения в N-кратный интеграл Фурье несправедлив даже принцип локализации (сколь бы гладкой ни являлась функция f в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, принадлежность этой функции во всем E^N классу C^α при $\alpha < \dfrac{N-1}{2}$ не обеспечивает сходимости в точке $\boldsymbol{x}_0$ разложения этой функции в N-кратный интеграл Фурье).

---

[1] Оба утверждения вытекают из более общих утверждений, доказанных в работе Ш. А. Алимова и В. А. Ильина «Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. II» (// Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7, N 5. С. 851–882.)

Г Л А В А 11

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

В этой главе изучается важный подкласс бесконечномерных евклидовых пространств — так называемые гильбертовы пространства.

Мы устанавливаем важное для приложений специальное представление всякой линейной функции от элементов такого пространства (такую функцию принято называть линейным функционалом), а также, что из всякого ограниченного по норме бесконечного множества элементов гильбертова пространства можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в некотором слабом смысле (это свойство называют слабой компактностью шара в гильбертовом пространстве).

Особое внимание уделяется изучению ортонормированных систем элементов гильбертова пространства. Мы устанавливаем эквивалентность для таких систем, введенных в § 2 гл. 10 понятий замкнутости и полноты, и доказываем знаменитую теорему Рисса–Фишера, согласно которой любая последовательность чисел, ряд из квадратов которых сходится, представляет собой последовательность коэффициентов Фурье некоторого элемента гильбертова пространства в разложении по наперед заданной ортонормированной системе элементов этого пространства. В последнем параграфе доказывается существование собственных значений у так называемых вполне непрерывных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

§ 1. Пространство l^2

1. Понятие пространства l^2. Рассмотрим множество, элементами которого являются всевозможные последовательности вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ такие, что ряд, составленный из квадратов этих чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \tag{11.1}$$

является сходящимся. Элементы такого множества будем обозначать (как векторы) полужирными латинскими буквами:

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ и т. д. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем называть координатами элемента $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Определим операции сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа. *Суммой* двух элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ называется элемент $\boldsymbol{z} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$ [1]. Этот элемент мы будем обозначать символом $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. *Произведением элемента* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *на вещественное число* λ назовем элемент, обозначаемый символом $\lambda\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{x}\lambda$ и равный $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots)$. Легко проверить, что определенное нами множество является *линейным пространством*, т. е. проверить выполнение всех аксиом, относящихся к сложению элементов и к умножению элементов на вещественные числа [2].

Введем теперь в указанном множестве скалярное произведение двух любых элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, определив его как сумму ряда [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Итак, мы полагаем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Легко проверить выполнение всех четырех аксиом скалярного произведения. (Эти аксиомы можно найти в § 1 гл. 10, а проверку их справедливости для изучаемого нами пространства предоставляем читателю).

Таким образом, введенное нами множество является *евклидовым пространством*. Это множество мы, следуя установившейся традиции, обозначим символом l^2.

Как и во всяком евклидовом пространстве, введем в l^2 норму каждого элемента $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, положив ее равной

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}. \tag{11.2}$$

---

[1] Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2$ сразу вытекает из неравенства $(x_k + y_k)^2 \leqslant 2x_k^2 + y_k^2$ и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

[2] Формулировку аксиом линейного пространства можно найти в любом курсе линейной алгебры.

[3] Сходимость указанного ряда вытекает из неравенства $|x_k y_k| \leqslant \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$ и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

(Так как ряд (11.1) является сходящимся, то такое определение имеет смысл).

Как обычно, назовем два элемента l^2 ортогональными, если скалярное произведение этих элементов равно нулю.

Напомним, что ортонормированной системой в произвольном евклидовом пространстве называется последовательность элементов $\{\boldsymbol{e}_k\}$ этого пространства, удовлетворяющая двум требованиям: 1) любые два элемента этой последовательности ортогональны; 2) норма каждого элемента равна единице.

Докажем, что в пространстве l^2 существует замкнутая (а стало быть, согласно теореме 10.7, и полная) ортонормированная система [1]. Убедимся, что такой системой является последовательность элементов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,\, 0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0,\, 1,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots), \\ \boldsymbol{e}_3 &= (0,\, 0,\, 1,\, \ldots,\, 0,\, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11.3}$$

То, что эта система является ортонормированной, очевидно (норма (11.2) для каждого элемента $\boldsymbol{e}_k$ равна единице, скалярное произведение любых двух элементов представляет собой бесконечную сумму произведений, каждое из которых равно нулю). Для доказательства замкнутости ортонормированной системы (11.3) достаточно доказать, что для любого, элемента $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$ пространства l^2 ряд Фурье этого элемента по системе (11.3) сходится к этому элементу по норме пространства l^2 [2].

Так как коэффициенты Фурье $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{e}_k)$ элемента $\boldsymbol{x}$ совпадают с координатами x_k этого элемента, то n-я частичная сумма ряда Фурье элемента $\boldsymbol{x}$ равна $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k$ и нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x} \right\| = 0. \tag{11.4}$$

Но из определения нормы (11.2), из ортонормированности системы $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и из свойств скалярного произведения вытекает,

[1] Определения полноты и замкнутости ортонормированной системы см. в § 2 гл. 10.

[2] Ибо тогда любой элемент $\boldsymbol{x}$ пространства l^2 можно сколь угодно точно приблизить по норме l^2 частичными суммами указанного ряда Фурье.

что
$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x}\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x},\ \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k(\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2,$$
так что соотношение (11.4) вытекает из сходимости ряда (11.1).

2. Общий вид линейного функционала в l^2. Мы будем рассматривать функции, аргументами которых служат элементы l^2, а значениями — вещественные числа. Такого рода функции принято называть ф у н к ц и о н а л а м и (определенными в пространстве l^2).

Точнее, нашей целью является детальное изучение простейшего функционала, определенного в пространстве l^2, так называемого л и н е й н о г о функционала.

Определение 1. *Функционал $l(\boldsymbol{x})$, определенный в пространстве l^2, называется л и н е й н ы м, если для любых элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства l^2 и любых вещественных чисел α и β справедливо равенство*
$$l(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha l(\boldsymbol{x}) + \beta l(\boldsymbol{y}).$$

Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — произвольный элемент пространства l^2. С целью геометризации терминологии мы часто будем называть этот элемент $\boldsymbol{x}_0$ т о ч к о й пространства l^2.

Определение 2. *Произвольный функционал $l(\boldsymbol{x})$, определенный в пространстве l^2, называется н е п р е р ы в н ы м в т о ч к е $\boldsymbol{x}_0$ пространства l^2, если для любой последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ пространства l^2, сходящейся по норме пространства l^2 к элементу $\boldsymbol{x}_0$, числовая последовательность $l(\boldsymbol{x}_n)$ сходится к $l(\boldsymbol{x}_0)$.*

Определение 3. *Функционал $l(\boldsymbol{x})$ называется н е п р е р ы в н ы м, если он непрерывен в каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства l^2.*

Сразу же заметим, что *в случае линейного функционала $l(\boldsymbol{x})$ непрерывность хотя бы в одной точке $\boldsymbol{x}_0$ влечет за собой непрерывность в каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства l^2.* В самом деле, пусть линейный функционал непрерывен в точке $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}$ — произвольная точка пространства l^2. Обозначим символом $\{\boldsymbol{x}_n\}$ произвольную последовательность элементов l^2, сходящуюся по норме l^2 к $\boldsymbol{x}$. Тогда последовательность $\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\}$ сходится по норме l^2 к $\boldsymbol{x}_0$ и из непрерывности функционала в точке $\boldsymbol{x}_0$ следует, что

$$l(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}) \to l(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11.5}$$

Но из линейности функционала вытекает, что $l(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}) = l(\boldsymbol{x}_0) + l(\boldsymbol{x}_n) - l(\boldsymbol{x})$. Из этого равенства и из (11.5) получим, что $l(\boldsymbol{x}_n) \to l(\boldsymbol{x})$ при $n \to \infty$, что и означает непрерывность функционала в точке $\boldsymbol{x}$.

Определение 4. *Функционал $l(\boldsymbol{x})$ называется ограниченным, если существует постоянная C такая, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ пространства l^2 справедливо неравенство*

$$|l(\boldsymbol{x})| \leqslant C\,\|\boldsymbol{x}\|. \tag{11.6}$$

Теорема 11.1. *Для того чтобы линейный функционал $l(\boldsymbol{x})$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть линейный функционал $l(\boldsymbol{x})$ непрерывен. Предположим, что постоянной C, обеспечивающей неравенство (11.6), не существует. Тогда найдется последовательность ненулевых элементов $\boldsymbol{x}_n$ [1]) такая, что $|l(\boldsymbol{x}_n)| \geqslant n^2\,\|\boldsymbol{x}_n\|$. Положим $\boldsymbol{y}_n = \dfrac{1}{n\,\|\boldsymbol{x}_n\|}\boldsymbol{x}_n$. Так как $\|\boldsymbol{y}_n - \mathbf{0}\| = \|\boldsymbol{y}_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу непрерывности функционала $l(\boldsymbol{y}_n) \to l(\mathbf{0}) = 0$ при $n \to \infty$, а это противоречит неравенству $l(\boldsymbol{y}_n) = \dfrac{1}{n\,\|\boldsymbol{x}_n\|}l(\boldsymbol{x}_n) \geqslant n$. Необходимость доказана.

2. Достаточность. Пусть линейный функционал $l(\boldsymbol{x})$ ограничен, т. е. существует постоянная C такая, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ справедливо неравенство (11.6). Пусть далее $\boldsymbol{x}_0$ — произвольная точка l^2, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ — произвольная последовательность элементов l^2, сходящаяся по норме l^2 к $\boldsymbol{x}_0$. Тогда в силу линейности функционала $l(\boldsymbol{x}_n)-l(\boldsymbol{x}_0) = l(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0)$, так что на основании неравенства (11.6) $|l(\boldsymbol{x}_n)-l(\boldsymbol{x}_0)| = |l(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0)| \leqslant C\,\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\|$. Из последнего неравенства следует, что $l(\boldsymbol{x}_n) \to l(\boldsymbol{x}_0)$ при $n \to \infty$. Достаточность доказана.

Доказанная теорема позволяет нам ввести норму линейного непрерывного функционала.

Определение 5. *Нормой линейного непрерывного функционала $l(\boldsymbol{x})$ называется точная верхняя грань отношения $\dfrac{|l(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ на множестве всех элементов $\boldsymbol{x}$ пространства l^2.*

[1]) Для нулевого элемента $\mathbf{0}$ неравенство (11.6) справедливо при любой постоянной C, ибо в силу линейности функционала $l(\mathbf{0}) = l(0\boldsymbol{x}) = 0 \cdot l(\boldsymbol{x}) = 0$.

Норму линейного непрерывного функционала $l(\boldsymbol{x})$ будем обозначать символом $\|l\|$. Итак, по определению

$$\|l\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in l^2} \frac{|l(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{11.7}$$

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 11.2 (теорема Рисса). *Для каждого линейного непрерывного функционала $l(\boldsymbol{x})$ существует один и только один элемент $\boldsymbol{a}$ пространства l^2 такой, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ пространства l^2 справедливо равенство*

$$l(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{x}), \tag{11.8}$$

причем $\|l\| = \|\boldsymbol{a}\|$.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_k\}$ — замкнутая ортонормированная система (11.3), $a_k = l(\boldsymbol{e}_k)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$. Убедимся в том, что последовательность вещественных чисел $(a_1,\, a_2,\, \ldots\, ,\, a_n)$ представляет собой элемент пространства l^2, т. е. убедимся в сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Для любого номера n положим $\boldsymbol{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k$. Тогда в силу линейности функционала

$$l(\boldsymbol{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k l(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|\boldsymbol{S}_n\|^2. \tag{11.9}$$

С другой стороны, из теоремы 11.1 и из определения нормы линейного непрерывного функционала (11.7) следует, что

$$|l(\boldsymbol{S}_n)| \leqslant \|l\| \cdot \|\boldsymbol{S}_n\|. \tag{11.10}$$

Из (11.9) и (11.10) получим, что $\|\boldsymbol{S}_n\| \leqslant \|l\|$ или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \|l\|^2. \tag{11.11}$$

Последнее неравенство, справедливое для любого номера n, доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$, т. е. доказывает, что последовательность $(a_1,\, a_2,\, \ldots\, ,\, a_n,\, \ldots)$ представляет собой некоторый элемент l^2, который мы обозначим через $\boldsymbol{a}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n,\, \ldots)$ — произвольный элемент l^2. Тогда в силу замкнутости ортонормированной системы

(11.3) частичная сумма ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k$ сходится по норме l^2 к $\boldsymbol{x}$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности функционала отсюда следует, что

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\right) \to l(\boldsymbol{x}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Но из линейности функционала и из равенства $a_k = l(\boldsymbol{e}_k)$ вытекает, что

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k l(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

Стало быть, мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = l(\boldsymbol{x}),$$

но это и означает, что нами установлено равенство (11.8) с однозначно определенным элементом $\boldsymbol{a}$, координаты которого равны $l(\boldsymbol{e}_k)$.

Остается убедиться в том, что $\|l\| = \|\boldsymbol{a}\|$. Из справедливого для любого номера n неравенства (11.11) сразу же следует, что

$$\|\boldsymbol{a}\| \leqslant \|l\|. \tag{11.12}$$

С другой стороны, из уже доказанного нами равенства (11.8) с помощью неравенства Коши–Буняковского [1] $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| \times \|\boldsymbol{x}\|$ получим, что $|l(\boldsymbol{x})| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$, откуда в силу определения нормы (11.7) вытекает, что

$$\|l\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|. \tag{11.13}$$

Из (11.12) и (11.13) заключаем, что $\|l\| = \|\boldsymbol{a}\|$. Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема устанавливает общий вид всякого линейного непрерывного функционала в пространстве l^2.

3. О слабой компактности ограниченного по норме l^2 множества.

Определение 1. *Множество E элементов l^2 называется ограниченным (или ограниченным по норме), если существует постоянная M такая, что $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant M$ для всех элементов $\boldsymbol{x}$ множества E.*

[1] Согласно теореме 10.1 неравенство Коши–Буняковского справедливо для любых двух элементов всякого евклидова пространства.

Определение 2. *Бесконечное множество E элементов l^2 называется компактным, если из любой принадлежащей множеству E последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить сходящуюся по норме l^2 подпоследовательность $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$.*

Очевидно, *что всякое компактное множество E элементов l^2 является ограниченным* [1].

В евклидовом пространстве конечного числа измерений верно и обратное утверждение: *всякое содержащее бесконечное число элементов ограниченное множество E является компактным* (теорема Больцано–Вейерштрасса). Но в бесконечномерном пространстве, каковым является l^2, из ограниченности бесконечного множества элементов E уже не вытекает компактность этого множества.

Например, множество $\{\boldsymbol{e}_k\}$ всех элементов ортонормированной системы (11.3) является ограниченным (ибо нормы всех элементов равны единице), но не является компактным (ибо для сходимости последовательности элементов по норме l^2 необходимо, чтобы норма разности двух элементов с номерами k и $k+1$ стремилась к нулю при $k \to \infty$, а для любой подпоследовательности, составленной из элементов (11.3), $\|\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l\|^2 = \|\boldsymbol{e}_k\|^2 + \|\boldsymbol{e}_l\|^2 = 2$ для любых k и l, не равных друг другу).

Естественно попытаться ввести понятие компактности множества в более слабом (чем в определении 2) смысле, с тем, чтобы любое (содержащее бесконечное число элементов) ограниченное множество оказалось компактным в таком слабом смысле.

Определение 3. *Последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$ элементов пространства l^2 называется слабо сходящейся к элементу $\boldsymbol{x}_0$ этого пространства, если для любого элемента $\boldsymbol{a}$ пространства l^2 справедливо соотношение*

$$(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}) \to (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}) \qquad \textit{при} \qquad n \to \infty.$$

Заметим, что из сходимости $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$ по норме l^2 и из неравенства Коши–Буняковского вытекает слабая сходимость $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$, ибо $|(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a})| = |(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a})| \leqslant \sqrt{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| \cdot \|a\|}$ для любого элемента $\boldsymbol{a}$. Слабая сходимость $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$, вообще говоря, не влечет за собой сходимость $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$ по норме l^2. Например, последовательность $\{\boldsymbol{e}_k\}$ всех элементов ортонормированной системы (11.3) слабо сходится к нулевому элементу $\boldsymbol{0}$, ибо для любого элемента $\boldsymbol{a}$ пространства l^2 справедливо неравенство

[1] В самом деле, из неограниченности множества E вытекало бы существование последовательности принадлежащих E элементов, для которых последовательность норм является бесконечно большой. Любая подпоследовательность такой последовательности расходится по норме l^2, что противоречит условию компактности множества E.

Бесселя [1] $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a})^2 \leqslant \|\boldsymbol{a}\|^2$, согласно которому $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}) \to$ $\to (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}) = 0$ при $n \to \infty$. Вместе с тем выше доказано, что последовательность $\{\boldsymbol{e}_k\}$ не сходится по норме l^2.

Сходимость по норме l^2 (в отличие от слабой сходимости) часто называют сильной сходимостью.

Определение 4. *Бесконечное множество E элементов l^2 называется слабо компактным, если из любой принадлежащей множеству E последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Справедлива следующая фундаментальная теорема.

Теорема 11.3. *Всякое состоящее из бесконечного числа элементов ограниченное множество в l^2 является слабо компактным.*

Доказательство. Пусть E — произвольное ограниченное подмножество l^2, содержащее бесконечное число элементов, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ — произвольная последовательность элементов E. Условие ограниченности множества E позволяет утверждать, что $\|\boldsymbol{x}_n\| \leqslant$ $\leqslant M$, где M — некоторая постоянная. Но тогда из соотношения $\|\boldsymbol{x}_n\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{nk}^2$ вытекает ограниченность для любого номера k числовой последовательности k-х координат x_{nk} элементов $\boldsymbol{x}_n$. Стало быть, в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса (см. теорему 3.3 из вып. 1) из последовательности $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить подпоследовательность элементов $\{\boldsymbol{x}_n^{(1)}\}$ такую, что первые координаты этих элементов образуют сходящуюся числовую последовательность, затем из $\{\boldsymbol{x}_n^{(1)}\}$ можно выделить подпоследовательность элементов $\{\boldsymbol{x}_n^{(2)}\}$ такую, что как первые, так и вторые координаты этих элементов образуют сходящиеся числовые последовательности и т. д. После k шагов мы выделим подпоследовательность элементов $\{\boldsymbol{x}_n^{(k)}\}$, у которой каждая из первых k координат образует сходящуюся числовую последовательность.

Положим $\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}_n^{(n)}$. Очевидно, что $\{\boldsymbol{y}_n\}$ является подпоследовательностью исходной последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ и что последовательность, образованная любой координатой элементов $\boldsymbol{y}_n$, является сходящейся числовой последовательностью, т. е. если $\boldsymbol{y}_n = (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nk}, \ldots)$, то для каждого k последовательность y_{nk} сходится при $n \to \infty$. Обозначим

[1] Согласно теореме 10.4 неравенство Бесселя справедливо для каждого элемента и любой ортонормированной системы в произвольном евклидовом пространстве.

через ξ_k предел последовательности k-х координат элементов $\boldsymbol{y}_n$, т. е. положим $\xi_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и убедимся в том, что последовательность $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ представляет собой некоторый элемент пространства l^2, т. е. убедимся в сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^2$. Так как $\|\boldsymbol{y}_n\| \leqslant M$ для всех номеров n, то для всех номеров n

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.14}$$

и тем более

$$\sum_{k=1}^{N} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.15}$$

(для л ю б о г о фиксированного номера N и для всех номеров n).

Переходя в (11.15) к пределу при $n \to \infty$, мы получим, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k^2 \leqslant M^2$ для любого номера N, а, это и означает, что последовательность $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ представляет собой некоторый элемент l^2, который мы обозначим через $\boldsymbol{\xi}$.

Остается доказать, что последовательность $\{\boldsymbol{y}_n\}$ слабо сходится к этому элементу $\boldsymbol{\xi}$, т. е. доказать, что для любого элемента $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ пространства l^2 справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} (\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{a})$ или, что то же самое, соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_{nk} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k.$$

В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_{nk} = \xi_k$, и в силу теоремы о почленном переходе к пределу (см. теорему 1.6) достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{nk} \cdot a_k \tag{11.16}$$

сходится равномерно относительно всех номеров n. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ вытекает существование такого номера m_0, что

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{M^2} \tag{11.17}$$

для всех $m \geqslant m_0$ и всех натуральных p $(p = 1, 2, \ldots)$.

Применяя к остатку ряда (11.16) неравенство Коши–Буняковского для сумм [1])

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk} a_k\right| \leqslant \left[\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}^2 \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2\right]^{1/2}$$

и используя неравенства (11.14) и (11.17), мы получим, что

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk} a_k\right| < \varepsilon$$

для всех $m \geqslant m_0$, всех натуральных p и сразу для всех номеров n. Но это и означает, что ряд (11.16) сходится равномерно относительно всех номеров n. Теорема доказана.

Доказанная теорема находит многочисленные применения. В частности, она широко применяется в теории вариационных методов решения задач математической физики.

§ 2. Пространство L^2

1. Простейшие свойства пространства L^2. С пространством L^2 мы уже знакомы из п. 7 § 4 гл. 8, посвященного изучению классов L^p при любом $p \geqslant 1$.

Напомним, что пространством $L^2(E)$ называется множество всех функций $\{f(x)\}$ таких, что каждая функция $f(x)$ измерима на множестве E, а каждая функция $f^2(x)$ суммируема (т. е. интегрируема в смысле Лебега) на множестве E. При этом мы не различаем эквивалентных на множестве E функций, рассматривая их как один элемент $L^2(E)$.

Кратко называют $L^2(E)$ *пространством функций с суммируемым* (на множестве E) *квадратом*.

Сразу же отметим, что все интегралы в этом параграфе понимаются в смысле Лебега, а под множеством E понимается измеримое множество положительной конечной меры на бесконечной прямой, хотя вся излагаемая нами теория без каких-либо осложнений переносится на случай произвольного множества положительной меры E в пространстве любого числа n измерений.

В п. 7 § 4 гл. 8 было установлено, что пространство $L^2(E)$ является линейным нормированным пространством с нормой любого элемента $f(x)$ вида

$$\|f\| = \Bigl(\int_E f^2(x)\,dx\Bigr)^{1/2}. \tag{11.18}$$

[1]) Это неравенство установлено в дополнении 1 к гл. 10 вып. 1.

Пространство $L^2(E)$ существенно отличается от всех других пространств $L^p(E)$ При $p \neq 2$, тем, что $L^2(E)$ является евклидовым пространством со скалярным произведением любых двух элементов $f(x)$ и $g(x)$ вида [1])

$$(f,\, g) = \int\limits_E f(x) g(x)\, dx. \tag{11.19}$$

Справедливость в $L^2(E)$ всех четырех аксиом скалярного произведения [2]) легко следует из независимости произведения $f(x)g(x)$ от порядка сомножителей, из линейных свойств интеграла и из условия эквивалентности нулю измеримой, суммируемой и неотрицательной функции $f^2(x)$.

Заметим еще, что из (11.18) и (11.19) вытекает, что (как и во всяком евклидовом пространстве) норма и скалярное произведение в L^2 связаны соотношением

$$\|f\| = \sqrt{(f,\, f)}.$$

Наконец, напомним, что в п. 7 § 4 гл. 8 доказано, что пространство $L^2(E)$ является полным [3]).

Перейдем теперь к выяснению более глубоких свойств пространства $L^2(E)$.

2. Сепарабельность пространства L^2. Рассмотрим сначала произвольное линейное нормированное пространство R.

Определение 1. *Множество M элементов линейного нормированного пространства R называется всюду плотным (или плотным в R), если для любого элемента f пространства R из множества M можно выделить последовательность элементов $\{f_n\}$, сходящуюся по норме R к f.*

Определение 2. *Линейное нормированное пространство R называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество элементов M.*

Целью настоящего пункта является доказательство сепарабельности пространства L^2.

Теорема 11.4. *Множество непрерывных на E функций является всюду плотным в $L^2(E)$.*

---

[1]) Определение евклидова пространства и скалярного произведения см. в § 1 гл. 10.

[2]) Аксиомы скалярного произведения можно найти в § 1 гл. 10.

[3]) Напомним, что линейное нормированное пространство R называется полным, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\}$ элементов этого пространства (т. е. для последовательности $\{f_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geqslant n} \|f_m - f_n\| = 0$, существует элемент f пространства R, к которому сходится в R эта последовательность.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(E)$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, вводя две неотрицательные функции

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

легко убедиться в справедливости теоремы для любой функции $f \in L_2$ при условии, что для неотрицательных функций она доказана.

Кроме того, мы можем предположить, что $f(x)$ всюду принимает конечные значения. Итак, пусть $f(x) \in L_2(E)$ и $0 \leqslant \leqslant f(x) < \infty$.

Рассмотрим для каждого номера n последовательность непересекающихся множеств [1]

$$E_n^k = E\left[\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right] \qquad (k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots).$$

Тогда, очевидно, для любого номера $n\,(n = 1, 2, \ldots)$ сумма указанных множеств по всем $k = 0, 1, \ldots$ дает множество E, т. е. $E = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_n^k$.

Построим последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на множестве E, для каждого номера n положив $f_n(x) = k/2^n$ для x, принадлежащего E_n^k. Таким образом, каждая функция $f_n(x)$ представляет собой «ступенчатую» на множестве E функцию (принимающую не более чем счетное число значений).

Далее очевидно, что для всех номеров n и всех точек x множества E справедливо неравенство

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < 1/2^n,$$

из которого следует, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве E. Положим $\Psi_n(x) = \min\{n,\, f_n(x)\}$.

Каждая функция $\Psi_n(x)$ принимает на множестве E лишь конечное число значений, причем последовательность $\{\Psi_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ всюду на E. Так как, кроме того, всюду на множестве E справедливо неравенство $0 \leqslant f(x) - \Psi_n(x) \leqslant f(x)$, из которого следует, что $[f(x) - \Psi_n(x)]^2 \leqslant f^2(x)$ всюду на E, то в силу следствия из теоремы 8.19 последовательность $[f(x) - \Psi_n(x)]^2$ сходится к нулю в $L^1(E)$, т. е. последовательность $\Psi_n(x)$ сходится к $f(x)$ в $L^2(E)$.

---

[1]) Напомним, что символ $E\,[f$ удовлетворяет условию $A]$ обозначает множество всех точек E, для которых функция $f(x)$ удовлетворяет условию A.

Остается доказать, что каждую функцию $\Psi_n(x)$ можно приблизить по норме $L^2(E)$ непрерывной функцией с любой степенью точности. Напомним, что каждая функция $\Psi_n(x)$ принимает лишь конечное число значений, т. е. имеет вид $\Psi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k\omega_k(x)$, где a_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — постоянные числа, а $\omega_k(x)$ — так называемые характеристические функции множеств E_k:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{на множестве } E_k, \\ 0 & \text{вне множества } E_k. \end{cases}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы, достаточно построить последовательность непрерывных функций, сходящуюся в $L^2(E)$ к функции $\omega(x)$ вида

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{на множестве } E_0, \\ 0 & \text{вне множества } E_0, \end{cases}$$

где E_0 — некоторое содержащееся в E измеримое множество.

Для множества E_0 и для любого номера n найдутся содержащее E_0 открытое множество G_n и содержащееся в E_0 замкнутое множество F_n такие, что мера разности $G_n - F_n$ меньше $1/n$ [1]. Обозначим символом $\widetilde{F}_n$ дополнение множества G_n и положим

$$\varphi_n(x) = \frac{\rho(x, \widetilde{F}_n)}{\rho(x, \widetilde{F}_n) + \rho(x, F_n)},$$

где символ $\rho(x, F)$ обозначает расстояние от точки x до множества F.

Очевидно, что каждая функция $\varphi_n(x)$ непрерывна на E, равна единице на F_n, равна нулю на $\widetilde{F}_n$ и всюду удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$. Отсюда для нормы разности $\varphi_n(x) - \omega(x)$ мы получим следующую оценку:

$$\|\varphi_n - \omega\|^2_{L^2(E)} = \int\limits_E [\varphi_n(x) - \omega(x)]^2\,dx \leqslant \int\limits_{G_n \setminus F_n} dx < \frac{1}{n}, \qquad (11.20)$$

которая завершает доказательство теоремы.

Докажем теперь следующую *основную* теорему.

Теорема 11.5. *Для любого ограниченного измеримого множества E пространство $L^2(E)$ сепарабельно.*

Доказательство. Сначала проведем доказательство для случая, когда множество E представляет собой сегмент $[a, b]$.

---

[1] В силу определения измеримости множества E_0 и следствия из теоремы 8.5 (см. п. 2 § 2 гл. 8).

Докажем, что в этом случае в качестве счетного всюду плотного множества в $L^2[a,\, b]$ можно взять множество M всех многочленов с рациональными коэффициентами [1].

Согласно теореме 11.4 любую функцию $f(x)$ из $L^2([a,\, b])$ можно приблизить с любой степенью точности по норме $L^2([a,\, b])$ непрерывной функцией. Далее, согласно теореме Вейерштрасса 1.18, всякую непрерывную на сегменте $[a,\, b]$ функцию можно равномерно на этом сегменте (а стало быть, и по норме $L^2([a,\, b])$) приблизить с любой степенью точности алгебраическим многочленом с вещественными коэффициентами.

Наконец, очевидно, что алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами можно равномерно на $[a,\, b]$, а стало быть, и по норме $L^2([a,\, b])$ приблизить с любой степенью точности многочленом с рациональными коэффициентами. Тем самым для случая, когда множество E представляет собой сегмент $[a,\, b]$ доказательство теоремы завершено.

Пусть теперь E — произвольное ограниченное измеримое множество. Так как множество E ограничено, то найдется сегмент $[a,\, b]$, содержащий множество E.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(E)$. Продолжим эту функцию на сегмент $[a,\, b]$, положив ее равной нулю вне E. Остается заметить, что так продолженная функция $f(x)$ принадлежит классу $L^2([a,\, b])$, и поэтому, согласно доказанному выше, может быть приближена с любой степенью точности по норме $L^2([a,\, b])$ (и тем более по норме $L^2(E)$) многочленами с рациональными коэффициентами. Стало быть, и в этом случае многочлены с рациональными коэффициентами образуют всюду плотное в $L^2(E)$ множество. Теорема полностью доказана.

3. Существование в L^2 замкнутой ортонормированной системы, состоящей из счетного числа элементов. Для построения в L^2 замкнутой ортонормированной системы элементов будем исходить из существования в L^2 счетного всюду плотного множества элементов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n,\, \ldots$

Мы докажем, что замкнутая ортонормированная система может быть построена с помощью конечных линейных комбинаций [2] элементов всюду плотного множества $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n,\, \ldots$

Такой способ построения ортонормированной системы обычно называют *процессом ортогонализации*.

---

[1] То, что такое множество M счетно, вытекает из счетности всех рациональных чисел и из счетности числа всех многочленов различной степени.

[2] Говорят, что элемент Ψ_n является линейной комбинацией элементов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m$, если найдутся вещественные числа $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m$ такие, что $\Psi_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m$.

Будем считать, что среди элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ нет линейно зависимых [1] элементов (иначе при последовательном увеличении номера n мы удалили бы из совокупности $\{f_n\}$ каждый элемент f_n, являющийся линейной комбинацией элементов $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$).

Построим систему попарно ортогональных ненулевых элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ таких, что для любого номера n каждый из элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ является линейной комбинацией элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и, наоборот, каждый из элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ является линейной комбинацией элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ [2].

Докажем методом математической индукции, что указанная система элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ может быть последовательно определена с помощью соотношений

$$\Psi_1 = f_1, \tag{11.21}$$

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & \ldots & (f_1, \Psi_{n-1}) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & \ldots & (f_2, \Psi_{n-1}) & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_n, \Psi_1) & (f_n, \Psi_2) & \ldots & (f_n, \Psi_{n-1}) & f_n \end{vmatrix} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2. \tag{11.22}$$

Ясно, что элемент Ψ_1, определяемый соотношением (11.21), является ненулевым (ибо в противном случае для любого номера n оказались линейно зависимыми элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Таким образом, при $n = 1$ выполнены все указанные выше требования. Предположим теперь, что система $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, построенная с помощью соотношений (11.21), (11.22), удовлетворяет всем указанным выше требованиям, и убедимся, что тогда этим требованиям удовлетворяет и построенная с помощью тех же соотношений система $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$.

Из (11.22) ясно, что элемент Ψ_n представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и, таким образом, является ненулевым (иначе бы оказалась нулевым элементом указанная линейная комбинация, т. е. элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ оказались бы линейно зависимыми).

Далее, поскольку элементы $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ линейно выражаются через $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ и поскольку минор стоящего в правом нижнем углу определителя (11.22) элемента f_n равен

[1] Это означает, что ни один из элементов f_n совокупности $\{f_k\}$ не является линейной комбинацией конечного числа других элементов этой совокупности.

[2] На языке линейной алгебры это означает, что линейная оболочка, натянутая на элементы $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, совпадает с линейной оболочкой, натянутой на элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

$\|\Psi_{n-1}\|$ [1]) и поэтому отличен от нуля, из равенства (11.22) следует, что и элемент f_n линейно выражается через Ψ_1, Ψ_2, ..., Ψ_n.

Наконец, из (11.22) сразу вытекает, что элемент Ψ_n ортогонален каждому из элементов Ψ_1, Ψ_2, ..., Ψ_{n-1}. В самом деле, если k — любой из номеров 1, 2, ..., $n-1$, то, умножая обе части (11.22) скалярно на Ψ_k, мы получим в правой части определитель, k-й и n-й столбцы которого одинаковы. Из равенства нулю такого определителя следует, что $(\Psi_n, \Psi_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Тем самым индукция завершена, и система $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ $\ldots, \Psi_n, \ldots$, удовлетворяющая указанным требованиям, построена.

Положив теперь для каждого номера n $\varphi_n = \Psi_n/\|\Psi_n\|$, мы получим ортонормированную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

Замкнутость построенной нами системы $\{\varphi_n\}$ сразу вытекает из того, что каждый элемент всюду плотного множества $\{f_n\}$ является линейной комбинацией конечного числа элементов системы $\{\varphi_n\}$.

Из счетности всюду плотного множества элементов $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n, \ldots$ вытекает, что построенная нами замкнутая ортонормированная система содержит *не более чем счетное* число элементов. Но число элементов этой системы *не может быть конечным*, ибо это означало бы, что пространство L^2 является конечномерным [2]).

Тем самым мы окончательно доказали существование в L^2 замкнутой ортонормированной системы, состоящей из счетного числа элементов.

Заметим в заключение, что замкнутую ортонормированную систему элементов L^2 часто называют ортонормированным базисом [3]).

4. Изоморфизм пространств L^2 и l^2 и следствия из него. В пространстве $L^2(E)$, точно так же, как и в пространстве l^2, вводятся понятия слабой сходимости последовательности элементов и слабой компактности множества элементов.

---

[1]) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно записать равенство (11.22) для номера $(n-1)$ и умножить его скалярно на Ψ_{n-1}.

[2]) То что размерность пространства $L^2(E)$ равна бесконечности, сразу вытекает из того, что для любого наперед заданного номера n в этом пространстве существует n линейно независимых элементов $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

[3]) Система элементов $\{\varphi_n\}$ называется базисом пространства $L^2(E)$, если любому элементу f пространства $L^2(E)$ однозначно соответствует разложение этого элемента в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ с постоянными коэффициентами c_n, сходящийся к элементу f по норме пространства $L^2(E)$.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ элементов пространства $L^2(E)$ называется слабо сходящейся к элементу $f(x)$ этого пространства, если для любого элемента $g(x)$ пространства $L^2(E)$ справедливо соотношение*

$$(f_n, g) \to (f, g) \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_E f_n(x) g(x)\, dx \to \int\limits_E f(x) g(x)\, dx \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Так же элементарно, как и для случая l^2, доказывается, что из сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по норме $L^2(E)$ вытекает слабая сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$. Конечно, слабая сходимость элементов $L^2(E)$ не влечет за собой сходимости по норме $L^2(E)$ (примером может служить любая ортонормированная последовательность элементов пространства $L^2(E)$).

Определение 2. *Бесконечное множество M элементов пространства $L^2(E)$ называется слабо компактным, если из любой принадлежащей множеству M последовательности элементов $\{f_n(x)\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

В полной аналогии с тем, как это было сделано для пространства l^2, в пространстве L^2 вводится понятие линейного непрерывного функционала.

Определение 3. *Функционал $l(f)$, определенный на элементах f пространства $L^2(E)$, называется линейным, если для любых двух элементов f и g пространства $L^2(E)$ и для любых вещественных чисел α и β справедливо равенство $l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g)$.*

Договоримся там, где это будет удобно, называть элементы f пространства $L^2(E)$ точками этого пространства.

Определение 4. *Функционал $l(f)$, определенный на элементах f пространства $L^2(E)$, называется непрерывным в точке f_0 этого пространства, если для любой последовательности $\{f_n\}$ элементов $L^2(E)$, сходящейся по норме $L^2(E)$ к элементу f_0, числовая последовательность $l(f_n)$ сходится к $l(f_0)$.*

Определение 5. *Функционал $l(f)$ называется просто непрерывным, если он непрерывен в каждой точке f пространства $L^2(E)$.*

Как и для случая l^2, легко доказать, что если линейный функционал в $L^2(E)$ непрерывен хотя бы в одной точке $L^2(E)$, то он непрерывен всюду на $L^2(E)$, т. е. просто непрерывен.

Естественно возникает вопрос о перенесении на случай пространства $L^2(E)$ доказанных для пространства l^2 теоремы 11.2 об общем виде линейного непрерывного функционала и теоремы 11.3 о слабой компактности всякого ограниченного (по норме) множества.

Мы установим глубокую связь между пространствами L^2 и l^2, которая позволит нам сразу же установить справедливость для пространства L^2 только что упомянутых теорем.

Введем следующее фундаментальное понятие.

Определение 6. *Два произвольных евклидовых пространства R и R' называются изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что при условии, что элементы x' и y' пространства R' являются образами элементов x и y пространства R, выполняются следующие требования: 1) элемент $x'+y'$ пространства R' является образом элемента $x+y$ пространства R; 2) при любом вещественном λ элемент $\lambda x'$ пространства R' является образом элемента λx пространства R; 3) скалярные произведения (x', y') и (x, y) равны друг другу.*

В курсе линейной алгебры устанавливается, что все n-мерные евклидовы пространства изоморфны между собой и изоморфны пространству E^n.

Главной целью настоящего пункта является установление изоморфизма бесконечномерных евклидовых пространств $L^2(E)$ и l^2. Но прежде всего мы докажем следующую замечательную теорему.

Теорема 11.6 (теорема Рисса–Фишера). *Пусть $\{\varphi_n\}$ — произвольная ортонормированная система в $L^2(E)$ [1]. Тогда для любой последовательности вещественных чисел $(c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n, \ldots)$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, т. е. являющейся элементом l^2 найдется и притом единственная функция $f(x)$ из пространства $L^2(E)$ такая, что $c_n = (f, \varphi_n) =$ $= \int\limits_E f(x)\varphi_n(x)dx$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 = \int\limits_E f^2(x)dx$.*

Доказательство. Положим $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$. Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна, так как при $m \geqslant n$ справедливо

[1] Ни полнота, ни тем более замкнутость этой системы не предполагается.

равенство $\|f_m - f_n\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{m} c_k^2$ и по условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится. Но тогда в силу полноты пространства $L^2(E)$ (установленной еще в п. 7 § 4 гл. 8), найдется элемент f пространства $L^2(E)$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f \right\| = 0. \tag{11.23}$$

Из последнего соотношения и из тождества Бесселя (10.17), установленного в § 1 гл. 10 [1]), вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2.$$

Докажем, что $(f,\, \varphi_k) = c_k$ для любого номера k. Для этого заметим, что в силу ортонормированности системы $\{\varphi_k\}$ при всех $n \geqslant k$ справедливо равенство

$$(f_n,\, \varphi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l \varphi_l,\, \varphi_k \right) = \sum_{l=1}^{n} c_l (\varphi_l,\, \varphi_k) = c_k, \tag{11.24}$$

и учтем, что в силу неравенства Коши–Буняковского

$$|(f_n,\, \varphi_k) - (f,\, \varphi_k)| = |(f_n - f,\, \varphi_k)| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\|f_n - f\| \cdot \|\varphi_k\|} = \sqrt{\|f_n - f\|}$$

и в силу (11.23) справедливо соотношение

$$(f_n,\, \varphi_k) \to (f,\, \varphi_k) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11.25}$$

Из (11.24) и (11.25) получаем, что $(f,\, \varphi_k) = c_k$ для любого номера k.

Остается доказать, что f является *единственным* элементом $L^2(E)$, удовлетворяющим всем условиям теоремы. Пусть g — любой другой элемент $L^2(E)$, удовлетворяющий всем условиям теоремы. Из неравенства Коши–Буняковского $|(f_n - f,\, g)| \leqslant \sqrt{\|f_n - f\|} \cdot \sqrt{\|g\|}$ и из (11.23) следует, что

$$(f_n - f,\, g) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11.26}$$

[1]) Указанное тождество Бесселя справедливо для любой ортонормированной системы в произвольном евклидовом пространстве.

Но из равенства $(g,\, \varphi_k) = c_k$ и из аксиом скалярного произведения вытекает, что

$$(f_n - f,\, g) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f,\, g\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} c_k(g,\, \varphi_k) - (f,\, g) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - (f,\, g),$$

так что в силу (11.26)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f,\, g). \tag{11.27}$$

Из (11.27) и из соотношений $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|g\|^2$ получим, что

$$\|f - g\| = (f - g,\, f - g) = \|f\|^2 - 2(f,\, g) + \|g\|^2 = 0.$$

Но это означает, что разность $f - g$ представляет собой нулевой элемент $L^2(E)$, т. е. $f = g$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Если ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ замкнута или хотя бы полна, то единственность элемента f будет иметь место и без требования $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ (см. по этому поводу теорему 10.8).

Опираясь на теорему Рисса–Фишера, докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 11.7. *Пространства $L^2(E)$ и l^2 изоморфны.*

Доказательство. Выберем в пространстве $L^2(E)$ замкнутую ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$ и поставим в соответствие каждому элементу f пространства $L^2(E)$ элемент $\boldsymbol{c} = (c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n,\, \ldots)$ пространства l^2, координаты c_k которого имеют вид $c_k = (f,\, \varphi_k)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$. В силу теоремы 11.6 такое соответствие является взаимно-однозначным.

Остается доказать, что если элементам f и g пространства $L^2(E)$ отвечают соответственно элементы $\boldsymbol{c} = (c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n,\, \ldots)$ и $\boldsymbol{d} = (d_1,\, d_2,\, \ldots,\, d_n,\, \ldots)$ пространства l^2, то 1) элементу $f + g$ отвечает элемент $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = (c_1 + d_1,\, c_2 + d_2,\, \ldots,\, c_n + d_n,\, \ldots)$; 2) при любом вещественном λ элементу λf отвечает элемент $\lambda\boldsymbol{c} = (\lambda c_1,\, \lambda c_2,\, \ldots,\, \lambda c_n,\, \ldots)$; 3) справедливо равенство

$$(f,\, g) = (\boldsymbol{c},\, \boldsymbol{d}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k, \tag{11.28}$$

называемое обычно обобщенным равенством Парсеваля.

1) и 2) сразу вытекают из свойств скалярного произведения [1]. Докажем равенство (11.28). В силу замкнутости системы $\{\varphi_k\}$ для каждой из функций f, g и $f+g$ справедливы равенства Парсеваля

$$(f,\, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g,\, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \tag{11.29}$$

$$(f+g,\, f+g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2. \tag{11.30}$$

Вычитая (11.29) из (11.30), получим

$$2(f,\, g) = 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема позволяет рассматривать l^2 как координатную форму записи элементов пространства $L^2(E)$. Эта теорема позволяет перенести на $L^2(E)$ все утверждения, установленные для l^2, и наоборот. В частности, из теоремы 11.7 вытекают следующие утверждения.

1°. Пространство l^2 является полным.

2°. Любое ограниченное по норме $L^2(E)$ множество, содержащее бесконечное число элементов $L^2(E)$, является слабо компактным.

3°. Для каждого линейного непрерывного функционала $l(f)$, определенного на элементах f пространства $L^2(E)$, существует один и только один элемент g пространства $L^2(E)$ такой, что для всех элементов f пространства $L^2(E)$ справедливо равенство $l(f) = (f,\, g)$, причем

$$\|l\| = \sup_{f \in L^2(E)} \frac{|l(f)|}{\|f\|} = \|g\|\,.$$

С точки зрения квантовой механики теорема 11.7 является математическим обоснованием эквивалентности «матричной механики» Гейзенберга и «волновой механики» Шредингера, первая из которых использовала в качестве математического аппарата координатное пространство l^2, а вторая — пространство функций с интегрируемым квадратом L^2.

Теорема (11.7) естественно, наводит на мысль о том, что оба пространства l^2 и L^2 являются лишь двумя различными кон-

---

[1] Так, для доказательства 1) достаточно заметить, что $(f+g,\, \varphi_k) = (f,\, \varphi_k) + (g,\, \varphi_k) = c_k + d_k$.

кретными реализациями одного и того же абстрактного пространства, к рассмотрению которого мы теперь и переходим.

§ 3. Абстрактное гильбертово пространство

1. Понятие абстрактного гильбертова пространства. Гильбертово пространство H, с которым мы уже познакомились в виде двух его конкретных реализаций l^2 и L^2, вводится аксиоматически как совокупность элементов X, Y, Z, ... любой природы, удовлетворяющих определенной системе аксиом.

Перечислим все аксиомы, которым должны удовлетворять элементы абстрактного гильбертова пространства H.

I. а) Аксиома о существовании правила, посредством которого любым двум элементам X и Y пространства H ставится в соответствие элемент этого пространства Z, называемый суммой X и Y.

б) Аксиома о существовании правила, посредством которого любому элементу X пространства H и любому вещественному числу λ ставится в соответствие элемент пространства H, называемый произведением X на λ.

в) Восемь аксиом линейного пространства [1].

II. а) Аксиома о существовании правила, посредством которого любым двум элементам X и Y пространства H ставится в соответствие число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (X, Y).

б) Четыре аксиомы скалярного произведения [2].

---

[1] Указанные восемь аксиом можно найти в любом курсе линейной алгебры. Ради удобства перечислим эти аксиомы.

1°. $X + Y = Y + X$ (для любых элементов X и Y).

2°. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (для любых элементов X, Y и Z).

3°. Существует элемент $\mathbf{0}$ такой, что $X + \mathbf{0} = X$ для любого элемента X.

4°. Для каждого элемента X существует элемент X' такой, что $X + X' = \mathbf{0}$.

5°. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)\cdot X$ для любого элемента X и любых вещественных чисел α и β.

6°. $1 \cdot X = X$ для любого элемента X.

7°. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$ для любого элемента X и любых вещественных чисел α и β.

8°. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ для любых элементов X и Y и любого вещественного числа α.

[2] Аксиомы скалярного произведения можно найти в § 1 гл. 10. Ради удобства перечислим эти аксиомы.

1°. $(X, Y) = (Y, X)$ для любых элементов X и Y.

2°. $(X + Y, Z) = (X, Z) + (Y, Z)$ для любых элементов X, Y и Z.

3°. $(\alpha X, Y) = \alpha(X, Y)$ для любых элементов X и Y и для любого вещественного числа α.

4°. $(X, X) > 0$ для всякого ненулевого элемента X, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

III. Аксиома о полноте пространства H относительно нормы, определяемой равенством $\|X\| = \sqrt{(X,\, X)}$ [1].

IV. Аксиома о существовании в H любого наперед взятого числа линейно независимых элементов.

V. Аксиома о существовании в H счетного всюду плотного (в смысле нормы H) множества элементов.

Иными словами, *гильбертовым пространством H называется всякое линейное евклидово полное бесконечномерное сепарабельное пространство.*

В гильбертовом пространстве H вводятся: 1) понятия сходимости последовательности элементов по норме и слабой сходимости (говорят, что последовательность элементов $\{X_n\}$ слабо сходится к элементу X, если для любого элемента Y справедливо соотношение $(X_n,\, Y) \to (X,\, Y)$ при $n \to \infty$); 2) понятие слабой компактности множества M элементов H (которое определяется как возможность выделения из любой последовательности элементов M слабо сходящейся подпоследовательности); 3) понятия линейного и непрерывного функционалов $l(X)$, определенных на элементах X пространства H (функционал $l(X)$ называется линейным, если $l(\alpha X + \beta Y) = \alpha l(X) + \beta l(Y)$ для любых элементов X и Y пространства H и любых вещественных чисел α и β; функционал $l(X)$ называется непрерывным в «точке» X_0, если $l(X_n) \to l(X_0)$ для любой последовательности $\{X_n\}$ элементов H, для которой $\|X_n - X_0\| \to 0$; просто непрерывным называется функционал $l(X)$, непрерывный в каждой точке X пространства H).

В полной аналогии с тем, как это было сделано в п. 3 § 2 для пространства L^2, для абстрактного гильбертова пространства H доказывается существование замкнутой ортонормированной системы элементов $\{\Phi_n\}$ (для этого производится процесс ортогонализации счетного всюду плотного множества элементов H).

Для абстрактного гильбертова пространства H (так же, как и для L^2) справедлива теорема Рисса–Фишера: если $\{\Phi_n\}$ — произвольная ортонормированная система в H, а $(c_1,\, c_2,\, \ldots \, \ldots,\, c_n,\, \ldots)$ — произвольная последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то в H найдется и притом единственный элемент X такой, что $c_k = (X,\, \Phi_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|X\|^2$.

[1] Определение полноты линейного нормированного пространства см. в п. 7 § 4 гл. 8.

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 11.6 только тем, что во всех рассуждениях вместо элементов пространства L^2 следует брать элементы H.

Теорема Рисса–Фишера позволяет установить следующую фундаментальную теорему.

Теорема 11.8. *Все гильбертовы пространства изоморфны друг другу.*

Достаточно доказать, что всякое гильбертово пространство H изоморфно пространству l^2, а для этого достаточно повторить доказательство теоремы 11.7, заменяя во всех рассуждениях элементы L^2 элементами H.

Из теоремы 11.8 сразу же вытекают следующие утверждения.

1°. *Любое ограниченное по норме H множество, содержащее бесконечное число элементов H, является слабо компактным.*

2°. *Для каждого линейного непрерывного функционала $l(X)$, определенного на элементах H гильбертова пространства H, существует один и только один элемент Y этого пространства такой, что для всех элементов X пространства H справедливо равенство $l(X) = (X, Y)$, причем $\|l\| = \sup\limits_{X \in H} \dfrac{|l(X)|}{\|X\|} = \|Y\|$.*

Замечание. Можно доказать, что всякое слабо компактное множество M бесконечного числа элементов H является ограниченным (по норме H). Иными словами, можно доказать, *что ограниченность содержащего бесконечное число элементов подмножества M пространства H является необходимым и достаточным условием слабой компактности этого подмножества.*

2. Эквивалентность понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Согласно теореме 10.7 в любом евклидовом пространстве (а стало быть, и в любом гильбертовом пространстве) всякая замкнутая ортонормированная система является полной. Сейчас мы докажем, что в гильбертовом пространстве справедливо и обратное утверждение.

Теорема 11.9. *Всякая полная ортонормированная система элементов произвольного гильбертова пространства является замкнутой.*

Доказательство. Пусть $\{\Phi_n\}$ — произвольная полная ортонормированная система элементов H, а Ψ — любой элемент H. Достаточно доказать, что n-я частичная сумма S_n ряда Фурье элемента Ψ по системе $\{\Phi_n\}$ сходится к этому элементу Ψ по норме H.

Пусть $c_k = (\Psi,\, \Phi_k)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится [1] и так как (в силу аксиом скалярного произведения и ортонормированности системы $\{\Phi_n\}$) при любом $m \geqslant n$

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k \right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k,\, \sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k \right) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2,$$

то последовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной.

Но тогда в силу полноты пространства H найдется элемент этого пространства Ψ_0 такой, что

$$\|S_n - \Psi_0\| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{11.31}$$

Остается доказать, что $\Psi_0 = \Psi$. Для этого достаточно доказать, что элементы Ψ и Ψ_0 имеют одинаковые коэффициенты Фурье [2]. Фиксируем произвольный номер k. При любом $n \geqslant k$ в силу ортонормированности системы $\{\Phi_n\}$ и аксиом скалярного произведения

$$(S_n,\, \Phi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l \Phi_l,\, \Phi_k \right) = \sum_{l=1}^{n} c_l (\Phi_l,\, \Phi_k) = c_k. \tag{11.32}$$

С другой стороны, так как на основании неравенства Коши–Буняковского

$$|(S_n,\, \Phi_k) - (\Psi_0,\, \Phi_k)| = |(S_n - \Psi_0,\, \Phi_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|S_n - \Psi_0\| \cdot \|\Phi_k\|} = \sqrt{\|S_n - \Psi_0\|},$$

то из (11.31) вытекает, что

$$(S_n,\, \Phi_k) \to (\Psi_0,\, \Phi_k) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из этого соотношения и из (11.32) получим, что $(\Psi_0,\, \Phi_k) = c_k = (\Psi,\, \Phi_k)$. Теорема доказана.

Следствие. *В гильбертовом пространстве H полнота ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.*

Замечание. Для неполного евклидова пространства теорема 11.9, вообще говоря, несправедлива.

---

[1] Сходимость этого ряда вытекает, например, из неравенства Бесселя (см. теорему 10.10).

[2] В самом деле, совпадение всех коэффициентов Фурье элементов Ψ и Ψ_0 означало бы, что элемент $\Psi - \Psi_0$ ортогонален ко всем Φ_n и, стало быть, в силу полноты системы Φ_n является нулевым.

Этот факт мы продемонстрируем следующим примером [1].

Рассмотрим евклидово пространство C^0 всех непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций $f(x)$ со скалярным произведением, определяемым равенством

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Конечно, это пространство не является полным [2] (а стало быть, и гильбертовым). Построим в этом пространстве полную ортонормированную систему элементов, не являющуюся замкнутой. Процесс построения этой системы проведем в два шага.

1°. Сначала докажем, что в гильбертовом пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ существует полная ортонормированная система $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ такая, что функция $\varphi_0(x)$ является разрывной на сегменте $[-\pi, \pi]$, а все функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются непрерывными на этом сегменте. Положим

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при} \quad -\pi \leqslant x < 0, \end{cases} \tag{11.33}$$

$$\Psi_{2n}(x) = \frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{2}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Psi_{2n-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}} & \text{при} \qquad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Сразу же заметим, что функция $\Psi_0(x)$ является разрывной на сегменте $[-\pi, \pi]$, а все остальные функции $\Psi_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) непрерывны на этом сегменте. Кроме того, легко проверить, что функция $\Psi_0(x)$ ортогональна на сегменте $[-\pi, \pi]$ каждой из функций $\Psi_n(x)$ (при всех $n = 1, 2, \ldots$).

Убедимся в том, что система $\{\Psi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) хотя и не является ортонормированной в $L^2[-\pi, \pi]$ системой, тем не менее является полной в том смысле, что любой элемент $f(x)$

[1] Этот пример нам сообщил Ш. А. Алимов.

[2] Достаточно фиксировать какую-либо кусочно-непрерывную (но не строго непрерывную) на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $f_0(x)$ и заметить, что (в силу следствия 2 из п. 3 § 3 гл. 10) последовательность частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f_0(x)$ сходится к этой функции по норме $L^2[-\pi, \pi]$. На основании полноты пространства $L^2[-\pi, \pi]$ указанная последовательность частичных сумм является фундаментальной. Хотя каждый элемент указанной последовательности представляет собой непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию, предел ее в $L^2[-\pi, \pi]$ — функция $f_0(x)$ — не принадлежит C^0.

пространства $L^2[-\pi,\pi]$, ортогональный ко всем $\Psi_n(x)$ (при $n = 0, 1, 2, \ldots$), эквивалентен тождественному нулю.

В самом деле, пусть $f(x)$ — любой элемент пространства $L^2[-\pi,\pi]$, ортогональный ко всем $\Psi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Из ортогональности $f(x)$ ко всем элементам $\{\Psi_{2n-1}(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вытекает, что на сегменте $[-\pi, 0]$ функция $f(x)$ ортогональна системе $\left\{\dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и, стало быть, в силу полноты этой системы на $[-\pi, 0]$ (установленной в замечании 1 п. 2 § 3 гл. 10) функция $f(x)$ эквивалентна нулю на $[-\pi, 0]$.

В таком случае из ортогональности $f(x)$ всем элементам $\Psi_{2n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ вытекает, что на сегменте $[0, \pi]$ функция $f(x)$ ортогональна системе $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\dfrac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и в силу полноты указанной системы на сегменте $[0, \pi]$ (установленной в том же самом замечании 1 п. 2 § 3 гл. 10) функция $f(x)$ эквивалентна нулю и на сегменте $[0, \pi]$.

Таким образом, функция $f(x)$ эквивалентна нулю на всем сегменте $[-\pi, \pi]$.

Итак, система $\{\Psi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ является полной в $L^2[-\pi, \pi]$. Применяя процесс ортогонализации к системе Ψ_1, $\Psi_2, \Psi_3, \ldots, \Psi_n, \ldots$, мы получим ортогональную систему Ψ_0, $\overline{\Psi}_1$, $\overline{\Psi}_2, \ldots, \overline{\Psi}_n, \ldots$ Остается нормировать эту последнюю систему, т. е. положить [1] $\varphi_0 = \Psi_0$, $\varphi_n = \dfrac{\overline{\Psi}_n}{\|\overline{\Psi}_n\|}$ (при $n = 1, 2, \ldots$).

Мы получим полную ортонормированную систему $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, нулевой элемент которой $\varphi_0(x) = \Psi_0(x)$ определяется формулой (11.33) и представляет собой разрывную на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию, а все остальные элементы которой, будучи линейными комбинациями непрерывных функций, являются непрерывными на $[-\pi, \pi]$.

2°. Возвратимся теперь к рассмотрению пространства C^0 всех непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций и докажем, что система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ является в этом пространстве полной, но не является в C^0 замкнутой.

Сначала убедимся в том, что система $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ полна в C^0. Пусть Ψ — произвольный элемент C^0, ортогональный ко всем φ_n при $n = 1, 2, \ldots$, т. е. такой, что

$$(\Psi, \varphi_n) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.34}$$

[1] Мы учитываем, что $\|\Psi_0\| = 1$.

Тогда функция
$$f = \Psi - \varphi_0(\Psi, \varphi_0) \tag{11.35}$$
является элементом $L^2[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условиям [1])
$$(f, \varphi_n) = 0 \text{ при всех } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.36}$$
В силу полноты системы $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в $L^2[-\pi, \pi]$ из (11.36) вытекает, что f — нулевой элемент, а тогда из (11.35) и из того, что функция $\Psi(x)$ непрерывна, а функция $\varphi_0(x)$ разрывна на $[-\pi, \pi]$, вытекает, что $(\Psi, \varphi_0) = 0$. Последнее равенство в соединении с (11.34) означает, что Ψ — нулевой элемент, т. е. доказывает полноту в C^0 системы $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Докажем теперь, что система $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не является замкнутой в C^0. Пусть P — полином вида $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ с совершенно произвольными коэффициентами a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В силу ортонормированности системы $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и в силу аксиом скалярного произведения
$$\|\varphi_0 - P\| = \sqrt{(\varphi_0 - P, \varphi_0 - P)} = \sqrt{\|\varphi_0\|^2 + \|P\|^2} \geqslant 1. \tag{11.37}$$
Так как множество непрерывных функций всюду полно в $L^2[-\pi, \pi]$, то для элемента φ_0 найдется непрерывная функция $f(x)$ такая, что
$$\|\varphi_0 - f\| < 1/2. \tag{11.38}$$
Но из (11.37) и (11.38) вытекает, что $\|f - P\| > 1/2$ для совершенно произвольного полинома P (с любыми коэффициентами), а это и означает, что элемент f пространства C^0 нельзя приблизить по норме $L^2[-\pi, \pi]$ линейной комбинацией элементов $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. означает, что система $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не является замкнутой в C^0.

§ 4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

1. Понятие линейного непрерывного оператора. Пусть H — произвольное гильбертово пространство. Ради удобства будем обозначать элементы этого пространства малыми латинскими буквами x, y, z, …

Если известно правило, посредством которого каждому элементу x пространства H ставится в соответствие некоторый

[1]) В самом деле, при $n = 1, 2, \ldots$ (11.36) сразу вытекает из (11.34) и из ортогональности φ_0 ко всем φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Равенство $(f, \varphi_0) = 0$ вытекает из (11.35), из аксиом скалярного произведения и из того, что $(\varphi_0, \varphi_0) = 1$.

элемент этого пространства y, то говорят, что в H определен оператор A, действующий из H в H, и пишут, что $y = Ax$.

Определение 1. *Оператор A называется линейным, если для любых элементов x и y пространства H и для любых вещественных чисел α и β справедливо равенство*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay.$$

Как и для случая функционала, мы (там, где это удобно) будем называть элементы пространства H точками этого пространства.

Определение 2. *Произвольный действующий из H в H оператор A называется непрерывным в точке x_0 пространства H, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов H, сходящейся по норме H к элементу x_0, соответствующая последовательность $\{Ax_n\}$ сходится по норме H к элементу Ax_0.*

Определение 3. *Оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке x пространства H.*

Определение 4. *Произвольный действующий из H в H оператор A называется ограниченным, если существует постоянная C такая, что для всех элементов x пространства H справедливо неравенство $\|Ax\| \leqslant C\,\|x\|$.*

Сформулированные нами определения 1–4 полностью аналогичны соответствующим определениям 1–4 для функционала, сформулированным в п. 2 § 1 этой главы.

Эта аналогия позволяет нам привести без доказательства следующее утверждение: *действующий из H в H линейный оператор A является непрерывным тогда и только тогда, когда он является ограниченным.*

Доказательство этого утверждения абсолютно идентично доказательству теоремы 11.1.

Для линейного непрерывного оператора A (так же, как для линейного непрерывного функционала) вводится понятие нормы.

Определение 5. *Нормой линейного непрерывного оператора A называется точная верхняя грань отношения $\|Ax\| \,/\, \|x\|$ на множестве всех элементов $x \neq \mathbf{0}$ пространства H* (или (что то же самое) *точная верхняя грань величины $\|Ax\|$ на множестве всех элементов x пространства H, норма $\|x\|$ которых равна единице*).

Норму линейного непрерывного оператора A будем обозначать символом $\|A\|$. Итак, по определению

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \|Ax\|. \tag{11.39}$$

Всюду в дальнейшем в этом параграфе рассматриваются линейные непрерывные операторы.

Приведем пример линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2[a \leqslant t \leqslant b]$ и предположим, что нам задана некоторая функция двух переменных $K(t, s)$, определенная и непрерывная в квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$. Докажем, что интегральный оператор A, определяемый на элементах $x(t)$ пространства $L^2[a \leqslant t \leqslant b]$ равенством

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds, \tag{11.40}$$

является линейным и непрерывным. Линейность этого оператора непосредственно вытекает из линейного свойства интеграла.

Для доказательства непрерывности оператора (11.40) достаточно доказать его ограниченность, для чего достаточно установить конечность его нормы (11.39). Обозначим через M число

$$M = \left[\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds\right]^{1/2} \tag{11.41}$$

и убедимся в том, что $\|A\| \leqslant M$. В силу неравенства Коши–Буняковского и определения нормы

$$|Ax(t)|^2 \leqslant \int_a^b K^2(t, s)\,ds \int_a^b x^2(s)\,ds = \|x\|^2 \int_a^b K^2(t, s)\,ds.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t в пределах от a до b и воспользовавшись обозначением (11.41), будем иметь

$$\|Ax\| \leqslant M\,\|x\|\,.$$

Но это и означает ограниченность оператора A и справедливость для его нормы неравенства $\|A\| \leqslant M$. Отметим, что для некоторых интегральных операторов (11.40) $\|A\|$ в точности равна M.

2. Понятие сопряженного оператора. Введем теперь важное понятие сопряженного оператора.

Предположим, что в гильбертовом пространстве H задан произвольный действующий из H в H линейный непрерывный оператор A.

Фиксируем произвольный элемент y пространства H и рассмотрим (определенный на всех элементах x пространства H) функционал $f(x) = f_y(x) = (Ax, y)$. Очевидно, что этот функционал является линейным и непрерывным. По теореме Рисса об общем виде линейного функционала найдется единственный элемент $h = h_y$ пространства H такой, что для всех элементов x пространства H справедливо равенство $f(x) = (x, h)$.

Стало быть, каждому элементу y пространства H мы поставили в соответствие один и только один элемент этого пространства h такой, что $f_y(x) = (x,\, h)$, т. е. мы определили в H некоторый оператор A^* такой, что $h = A^*y$. Указанный оператор A^* и называют оператором, сопряженным к оператору A.

Иными словами, мы приходим к следующему определению.

Определение 1. *Оператор A^* называется сопряженным к действующему из H в H оператору A, если для любых элементов x и y пространства H справедливо равенство*

$$(Ax,\, y) = (x,\, A^*y). \tag{11.42}$$

Из приведенных нами рассуждений следует, что для каждого линейного непрерывного оператора A существует и притом только один сопряженный оператор A^*.

Непосредственно из определения 1 вытекает, что если для оператора A^* существует сопряженный оператор $(A^*)^*$, то справедливо равенство $(A^*)^* = A$.

Мы сейчас убедимся в том, что для случая, когда оператор A является линейным и непрерывным, оператор A^* также является линейным и непрерывным (а поэтому для A^* существует сопряженный оператор и справедливо равенство $(A^*)^* = A$, позволяющее называть операторы A и A^* взаимно сопряженными).

Теорема 11.10. *Оператор A^*, сопряженный к линейному непрерывному оператору A, также является линейным и непрерывным, причем нормы операторов A^* и A связаны соотношением*

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{11.43}$$

Доказательство. Линейность оператора A^* сразу вытекает из соотношений (11.42) и из аксиом скалярного произведения. Остается доказать ограниченность оператора A^* и равенство (11.43). В силу равенства (11.42), соотношения $\|Ay\| \leqslant \leqslant \|A\|\,\|y\|$ [1]) и неравенства Коши–Буняковского для любых элементов x и y пространства H справедливо неравенство

$$|(A^*x,\, y)| = |(x,\, Ay)| \leqslant \|x\| \cdot \|Ay\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Взяв в этом неравенстве в качестве y элемент A^*x, мы получим, что для любого элемента x пространства H справедливо неравенство

$$\|A^*x\|^2 = (A^*x,\, A^*x) \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^*x\|$$

или $\|A^*x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$.

[1]) Указанное соотношение, справедливое для любого элемента y пространства H, вытекает из определения нормы линейного непрерывного оператора A.

Последнее неравенство означает, что оператор A^* является ограниченным и что его норма $\|A^*\|$ удовлетворяет условию

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{11.44}$$

Доказанные нами линейность и ограниченность (или, что то же самое, непрерывность) оператора A^* обеспечивают существование сопряженного к нему оператора $(A^*)^* = A$. Повторяя для этого оператора проведенные выше рассуждения, мы получим вместо (11.44) неравенство

$$\|A\| \leqslant \|A^*\|. \tag{11.45}$$

Из (11.44) и (11.45) вытекает равенство (11.43). Теорема доказана.

Определение 2. *Произвольный действующий из H в H оператор A называется* с а м о с о п р я ж е н н ы м, *если для A существует сопряженный оператор A^*, совпадающий с оператором A (т. е. если для любых элементов x и y пространства H справедливо равенство $(Ax,\, y) = (x,\, Ay)$).*

В качестве примера снова рассмотрим интегральный оператор (11.40) с некоторой непрерывной на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$ функцией $K(t,\, s)$ (эту функцию принято называть я д р о м интегрального оператора (11.40)).

Убедимся в том, что сопряженным к оператору A, определяемому равенством (11.40), является интегральный оператор A^*, определяемый равенством

$$A^*x(t) = \int_a^b K(s,\, t)x(s)\, ds \tag{11.46}$$

(под $K(s,\, t)$ в (11.46) следует понимать ту же функцию, что и в (11.40), но в (11.46), в отличие от (11.40), эта функция интегрируется по первому аргументу).

Из (11.40) и (11.46) вытекает, что для любых элементов $x(t)$ и $y(t)$ пространства $L^2[a,\, b]$ справедливы равенства

$$(Ax,\, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,\, s)x(s)\, ds \right) y(t)\, dt, \tag{11.47}$$

$$(x,\, A^*y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,\, s)y(t)\, dt \right) x(s)\, ds. \tag{11.48}$$

Правые части равенств (11.47) и (11.48) отличаются только порядком интегрирования по переменным t и s и поэтому совпадают [1]. Стало быть, совпадают и левые части равенств (11.47)

[1] В самом деле, для непрерывных функций $x(t)$ и $y(t)$ равенство правых частей (11.47) и (11.48) очевидно. Но тогда, в силу теоремы 11.4 и неравенства Коши–Буняковского, указанное равенство справедливо и для произвольных элементов $x(t)$ и $y(t)$ пространства $L^2[a,\, b]$.

и (11.48), а это и означает, что оператор A^*, определяемый равенством (11.46), является сопряженным к оператору A, определяемому равенством (11.40).

Из соотношений (11.40) и (11.46) следует, что интегральный оператор A, определяемый равенством (11.40), является самосопряженным тогда и только тогда, когда для всех t и s из $[a, b]$ справедливо равенство $K(t, s) = K(s, t)$. Ядро $K(t, s)$, удовлетворяющее указанному равенству, называется симметричным.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 11.11. *Норма $\|A\|$ линейного непрерывного самосопряженного оператора A представляет собой точную верхнюю грань величины $|(Ax, x)|$ на множестве всех элементов x пространства H, имеющих равную единице норму, т. е. норма A определяется равенством*

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in H}} |(Ax, x)|. \tag{11.49}$$

Доказательство. Обозначим через μ величину, стоящую в правой части (11.49) (существование указанной точной верхней грани не вызывает сомнений). Чтобы доказать, что $\mu = \|A\|$, достаточно доказать два неравенства $\mu \leqslant \|A\|$ и $\mu \geqslant \|A\|$.

Первое из этих неравенств сразу вытекает из того, что на основании определения нормы оператора и неравенства Коши–Буняковского для всех элементов x пространства H, для которых $\|x\| = 1$,

$$|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leqslant \|A\|.$$

Остается доказать неравенство $\mu \geqslant \|A\|$. Так как оператор A является линейным, то для каждого элемента x пространства H справедливо неравенство [1])

$$|(Ax, x)| \leqslant \mu \cdot \|x\|^2. \tag{11.50}$$

Далее из аксиом скалярного произведения и из самосопряженности линейного оператора A (т. е. из равенства $(Ax, y) = (x, Ay)$) вытекает, что для любых элементов x и y пространства H справедливо равенство

$$4(Ax, y) = (A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y).$$

Из этого равенства и из (11.50) вытекает, что

$$4|(Ax, y)| \leqslant \mu \cdot \|x + y\|^2 + \mu \|x - y\|^2 = 2\mu(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

[1]) Ибо для каждого элемента $x_0 = \dfrac{1}{\|x\|} \cdot x$, имеющего норму, равную единице, справедливо неравенство $|(Ax_0, x_0)| \leqslant \mu$.

Из последнего неравенства следует, что для произвольных элементов x и y пространства H, для которых $\|x\| = \|y\| = 1$,

$$|(Ax,\, y)| \leqslant \mu. \tag{11.51}$$

Положив в (11.51) $y = Ax/\,\|Ax\|$, получим, что для всех элементов x, для которых $\|x\| = 1$, справедливо неравенство $(Ax,\, Ax)/\,\|Ax\| \leqslant \mu$, а стало быть, и неравенство $\|Ax\| \leqslant \mu$. Тем самым $\|A\| \leqslant \mu$. Теорема доказана.

3. Понятие вполне непрерывного оператора.

Определение. *Действующий из H в H оператор A называется вполне непрерывным, если он отображает каждое ограниченное (по норме) множество элементов H в компактное множество.*

Иными словами, оператор A называется вполне непрерывным, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов H такой, что $\|x_n\| \leqslant C = \text{const}$, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ такая, что соответствующая подпоследовательность $\{Ax_{n_k}\}$ сходится по норме H.

Напомним, что линейный оператор A является непрерывным тогда и только тогда, когда он является ограниченным, т. е. тогда и только тогда, когда он всякое ограниченное (по норме H) множество отображает снова в ограниченное. Поскольку компактное множество является ограниченным [1], то всякий вполне непрерывный оператор является непрерывным. К этому следует добавить, что не всякий непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным. Например, тождественный оператор E вида $Ex = x$ является непрерывным, но не является вполне непрерывным: достаточно рассмотреть отображение ограниченного множества, не являющегося компактным.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть A — действующий из H в H линейный вполне непрерывный оператор. Пусть далее $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов H, слабо сходящаяся к элементу x_0 и такая, что $\|x_n\| = 1$ для всех номеров n. Тогда последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к элементу Ax_0 по норме H.*

Доказательство. Так как оператор A является линейным и вполне непрерывным [2], то, согласно предыдущему пункту, существует сопряженный оператор A^* и для каждого элемента x_n и произвольного элемента y справедливо равенство $(Ax_n,\, y) = (x_n,\, A^*y)$. Из этого равенства и из слабой сходимости $\{x_n\}$ к x_0 получаем, что при $n \to \infty$ для любого элемента y

[1] См. п. 3 § 1.

[2] А стало быть, и непрерывным.

пространства H $(Ax_n, y) \to (x_0, A^*y) = (Ax_0, y)$, а это означает, что последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу Ax_0.

Докажем теперь, что последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 и по норме H.

Предположим, что $\{Ax_n\}$ не сходится к Ax_0 по норме H. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для некоторой подпоследовательности элементов $\{x_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ будет справедливо неравенство

$$\|Ax_{m_k} - Ax_0\| \geqslant \varepsilon. \qquad (11.51')$$

В силу того, что оператор A является вполне непрерывным и в силу условия $\|x_n\| = 1$ из последовательности $\{x_{m_k}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_p}\}$ $(p = 1, 2, \dots)$ такую, что соответствующая подпоследовательность $\{Ax_{n_p}\}$ сходится по норме H. Так как в силу доказанного выше подпоследовательность $\{Ax_{n_p}\}$ слабо сходится к элементу Ax_0, то эта подпоследовательность и по норме H сходится также к элементу Ax_0. Но этому противоречит неравенство (11.51′), справедливое для всех номеров m_k (и тем более для всех номеров n_p).

Полученное противоречие доказывает лемму.

З а м е ч а н и е. Доказанная лемма является следствием более общего утверждения: *действующий из H в H оператор A является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда он любую слабо сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ элементов H отображает в последовательность $\{Ax_n\}$, сходящуюся по норме H.*

Доказательство этого утверждения мы приводить не будем.

Убедимся теперь в том, что интегральный оператор A, определяемый равенством (11.40) (с непрерывным в квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ ядром $K(t, s)$) является вполне непрерывным оператором.

Пусть $\{x_n(t)\}$ — произвольная последовательность элементов $L^2[a, b]$, ограниченная по норме $L^2[a, b]$, т. е. такая, что для всех номеров n

$$\|x_n(t)\| \leqslant C. \qquad (11.52)$$

Достаточно доказать, что соответствующая последовательность функций $y_n(t) = Ax_n(t)$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a, b]$. (Тогда из этой последовательности, в силу теоремы Арцела 1.12, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на $[a, b]$ и тем более по норме $L^2[a, b]$). Из (11.52) и из неравенства Коши–Буняковского вытекает неравенство

$$|y_n(t)| = \left|\int_a^b K(t, s)x_n(s)\,ds \leqslant \left[\int_a^b K^2(t, s)\,ds\right]^{1/2} \cdot \|x_n\|\right.,$$

доказывающее равномерную ограниченность последовательности $\{y_n(t)\}$ на $[a,\, b]$ [1].

Далее заметим, что из непрерывности и вытекающей из нее равномерной непрерывности ядра $K(t,\, s)$ на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times$ $\times\, [a \leqslant s \leqslant b]$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|K(t_1,\, s) - K(t_2,\, s)| < \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \tag{11.53}$$

при всех s из $[a,\, b]$ и всех t_1 и t_2 из $[a,\, b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$.

Из (11.52) и (11.53) и из неравенства Коши–Буняковского получим, что

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)| \leqslant \int\limits_a^b |K(t_2,\, s) - K(t_1,\, s)| \cdot |x_n(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \int\limits_a^b |x_n(s)|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \cdot \|x_n\| \cdot \sqrt{\int\limits_a^b ds} = \varepsilon$$

при всех t_1 и t_2 из $[a,\, b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$.

Последнее неравенство доказывает равностепенную непрерывность последовательности $\{y_n(t)\}$ на $[a,\, b]$ и в силу сказанного выше завершает доказательство того, что оператор (11.40) является вполне непрерывным.

4. Существование собственных значений у линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Определение. *Вещественное число λ называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой элемент x пространства H, удовлетворяющий условию $Ax = \lambda x$.*

При этом указанный элемент x называется собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Если оператор A является линейным, то из условия, что x является собственным элементом A, отвечающим собственному значению λ, вытекает, что, каково бы ни было отличное от нуля вещественное число α, элемент αx также является собственным элементом A, отвечающим собственному значению λ. Поэтому все собственные элементы линейного оператора A естественно считать нормированными, т. е. удовлетворяющими условию $\|x\| = 1$.

Важность понятия собственных элементов заключается в том, что действие на них оператора сводится к умножению на некоторую постоянную λ.

[1] Достаточно заметить, что ядро $K(t,\, s)$ непрерывно на квадрате $[a \leqslant$ $\leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$.

Не у каждого оператора A существуют собственные значения [1].

Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 11.12. *У всякого действующего из H в H линейного самосопряженного вполне непрерывного оператора A существует хотя бы одно собственное значение λ, удовлетворяющее условию $|\lambda| = \|A\|$. Среди всех собственных значений оператора A это собственное значение является наибольшим по модулю.*

Доказательство. Обозначим через M и m соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани скалярного произведения $(Ax,\, x)$ на множестве всех элементов x пространства H, удовлетворяющих условию $\|x\| = 1$, т. е. положим

$$M = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in H}} (Ax,\, x), \quad m = \inf_{\substack{\|x\|=1\\ x\in H}} (Ax,\, x). \tag{11.54}$$

Ради определенности будем рассматривать случай $|M| > |m|$ (случай $|M| \leqslant |m|$ рассматривается совершенно аналогично).

Так как $|M| > |m|$, то $M > 0$. Докажем, что число $\lambda = M$ является собственным значением оператора A.

По определению точной верхней грани найдется последовательность $\{x_n\}$ элементов H такая, что $(Ax_n,\, x_n) \to \lambda$ и $\|x_n\| = 1$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена (по норме H), то в силу теоремы о слабой компактности любого ограниченного (по норме H) бесконечного множества найдется подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к некоторому элементу x_0 пространства H. Эту подпоследовательность

[1] Например, интегральный оператор (11.40) при $a = 0$, $b = \pi$, $K(x,\, s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin{(n+1)x} \sin{ns}$ не имеет ни одного собственного значения. В самом деле, пусть $\varphi(x)$ — произвольный элемент $L^2[0,\, \pi]$, для которого $\int\limits_0^{\pi} K(x,\, s)\varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$, и пусть $\{b_n\}$ — коэффициенты Фурье в разложении $\varphi(x)$ по полной ортонормированной на $[0,\, \pi]$ системе $\left\{\dfrac{\sqrt{2}\sin{nx}}{\sqrt{\pi}}\right\}$. Если $\lambda = 0$, то из обобщенного равенства Парсеваля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \sin{(n+1)x} = 0$, откуда следует, что все $b_n = 0$ и $\varphi(x) = \mathbf{0}$. Если же $\lambda \neq 0$, то из равенства $\int\limits_0^{\pi} K(x,\, s)\varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$ и из свойств ядра $K(x,\, s)$, обеспечивающих равномерную сходимость ряда Фурье функции $\varphi(x)$, мы получим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \sin{(n+1)x} = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin{nx}$. Так как $\lambda \neq 0$, то из последнего равенства вытекает, что все $b_n = 0$ и $\varphi(x) = \mathbf{0}$.

мы перенумеруем заново, т. е. снова обозначим ее через $\{x_n\}$. Итак, $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу x_0 пространства H. Но тогда (в силу леммы из предыдущего пункта) последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 по норме H.

Так как оператор A является самосопряженным, то справедливо равенство $(Ax_n,\, x_0) = (x_n,\, Ax_0)$, из которого вытекает соотношение

$$(Ax_n,\, x_n) - (Ax_0,\, x_0) = (A(x_n - x_0),\, (x_n + x_0)). \tag{11.55}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим из (11.55)

$$|(Ax_n,\, x_n) - (Ax_0,\, x_0)| \leqslant \|x_n + x_0\| \cdot \|Ax_n - Ax_0\| \to 0$$

(ибо последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 по норме H, а $\|x_n\| = 1$).

Таким образом, мы доказали, что

$$(Ax_n,\, x_n) \to (Ax_0,\, x_0). \tag{11.56}$$

Из (11.56) и из того, что $(Ax_n,\, x_n) \to \lambda$, вытекает, что

$$(Ax_0,\, x_0) = \lambda. \tag{11.57}$$

Убедимся теперь в том, что $\|x_0\| = 1$. В силу неравенства Коши–Буняковского для любого элемента y справедливо неравенство $|(x_n,\, y)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y\| = \|y\|$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая слабую сходимость $\{x_n\}$ к x_0, получим, что $|(x_0,\, y) \leqslant \|y\|$ (для любого элемента y). Из последнего неравенства при $y = x_0$ получим, что $\|x_0\| \leqslant 1$. Чтобы доказать, что $\|x_0\| = 1$, достаточно убедиться в том, что предположение о выполнении неравенства $0 < \|x_0\| < 1$ ведет к противоречию.

Пусть $0 < \|x_0\| < 1$. Положим $y_0 = x_0/\,\|x_0\|$. Тогда $\|y_0\| = 1$ и в силу линейности оператора и соотношения (11.57)

$$(Ay_0,\, y_0) = \frac{1}{\|x_0\|^2}(Ax_0,\, x_0) = \frac{\lambda}{\|x_0\|^2} > \lambda,$$

а это (в силу того, что $\lambda = M$) противоречит (11.54). Итак, $\|x_0\| = 1$.

Докажем теперь, что x_0 — собственный элемент, отвечающий собственному значению λ.

Пользуясь определением нормы элемента, аксиомами скалярного произведения, равенством (11.57) и определением нормы оператора, будем иметь

$$\|Ax_0 - \lambda x_0\|^2 = (Ax_0 - \lambda x_0,\, Ax_0 - \lambda x_0) =$$
$$= \|Ax_0\|^2 - 2\lambda(Ax_0,\, x_0) + \lambda^2\,\|x_0\|^2 = \|A\|^2 - \lambda^2.$$

В силу теоремы 11.11 правая (а стало быть, и левая) часть последнего соотношения равна нулю. Но это и означает, что $Ax_0 = \lambda x_0$, т. е. означает, что x_0 является собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ.

В случае $|M| \leqslant |m|$ рассуждения аналогичны, но λ следует положить равным m.

Нам еще остается доказать, что если существуют другие собственные значения, то собственное значение λ, удовлетворяющее условию $|\lambda| = \|A\|$, является наибольшим среди них по модулю. Пусть λ_1 — какое-либо другое собственное значение и x_1 — отвечающий ему нормированный собственный элемент. Тогда $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и, стало быть, $(Ax_1, x_1) = \lambda_1$. Но при этом из соотношения [1]

$$|\lambda| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax, x)|$$

сразу же вытекает, что $|\lambda| \geqslant |\lambda_1|$. Теорема полностью доказана.

С помощью доказанной теоремы рассмотрим так называемое *интегральное уравнение Фредгольма второго рода*, т. е. соотношение

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s) x(s)\, ds, \tag{11.58}$$

из которого при заданном ядре $K(t, s)$ определяется отличная от тождественного нуля функция $x(t)$ и те значения числового параметра μ, при которых такая функция существует. Те значения числового параметра μ, для которых существуют неравные тождественному нулю решения $x(t)$ интегрального уравнения (11.58), называются *собственными значениями* этого уравнения. При этом каждое отвечающее данному собственному значению ненулевое решение уравнения (11.58) называется *собственной функцией* этого уравнения.

Величины, обратные собственным значениям интегрального уравнения (11.58), принято называть *характеристическими числами* этого уравнения.

Очевидно, если ввести в рассмотрение интегральный оператор A, определяемый равенством (11.40), то собственные значения этого оператора A являются характеристическими числами интегрального уравнения (11.58), а отвечающие этим собственным значениям собственные элементы оператора A являются собственными функциями интегрального уравнения (11.58).

В пп. 1–3 доказано, что если ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ и симметрично, то оператор (11.40) является линейным самосопряженным и вполне непрерывным.

[1] Это соотношение вытекает из (11.54) и из того, что $\lambda = M$ при $|M| > |m|$ и $\lambda = m$ при $|M| \leqslant |m|$.

По теореме 11.12 интегральное уравнение (11.58) с таким ядром $K(t, s)$ имеет хотя бы одно характеристическое число. Чтобы указанное интегральное уравнение имело хотя бы одно собственное значение, следует потребовать, чтобы оно имело хотя бы одно отличное от нуля характеристическое число, для чего к требованиям непрерывности и симметричности ядра $K(t, s)$ следует присоединить условие необращения ядра $K(t, s)$ в тождественный нуль [1].

Итак, мы приходим к следующему фундаментальному утверждению: *если ядро $K(t, s)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода* (11.58) *непрерывно в квадрате* $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$, *симметрично и не равно тождественно нулю, то это уравнение имеет хотя бы одно собственное значение.*

Замечание. Можно было бы доказать, что сформулированное утверждение справедливо и при замене требования непрерывности ядра $K(t, s)$ на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ более слабым требованием существования конечного интеграла

$$\int_a^b \int_a^b K(t, s)\,dt\,ds.$$

(Достаточно убедиться, что при выполнении этого более слабого требования интегральный оператор (11.40), действующий из $L^2[a, b]$ в $L^2[a, b]$, продолжает оставаться вполне непрерывным).

5. Основные свойства собственных значений и собственных элементов линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора. В заключение выясним основные свойства собственных значений и собственных элементов произвольного действующего из H в H линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора.

$1°$. *Собственные элементы x_1 и x_2, отвечающие двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны.*

[1] Условие необращения непрерывного ядра $K(t, s)$ в тождественный нуль является необходимым н достаточным условием существования у интегрального оператора A, определяемого равенством (11.40), ненулевых собственных значений. В самом деле, в силу теоремы 11.12 $\|A\| = \lambda$, где λ — наибольшее по модулю собственное значение оператора A, так что достаточно доказать, что $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $K(t, s)$ не равно тождественно нулю. Если $K(t, s) \equiv 0$, то ясно, что $\|A\| = 0$. Если же, наоборот, $\|A\| = 0$, то оператор A, определяемый равенством (11.40), отображает в нулевой элемент все ненулевые элементы пространства $L^2[a, b]$ и, в частности, отображает в тождественный нуль все элементы $\{x_n(t)\}$ какой-либо полной ортонормированной системы в $L^2[a, b]$. Но это и означает что $K(t, s) \equiv 0$.

В самом деле, на основании свойств скалярного произведения, равенств $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_1 x_2$ и свойства самосопряженности оператора A, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 - x_2) = (\lambda_1 x_1,\, x_2) - (x_1,\, \lambda_2 x_2) = \\ = (Ax_1,\, x_2) - (x_1,\, Ax_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из полученного равенства следует, что $(x_1,\, x_2) = 0$.

2°. Одному и тому же собственному значению λ может отвечать несколько собственных элементов оператора A. Докажем, однако, что *любому ненулевому собственному значению λ может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных элементов* [1].

Предположим, что некоторому $\lambda \neq 0$ отвечает бесконечное число линейно независимых собственных элементов. Производя процесс ортогонализации и нормировки этих элементов, мы получим бесконечную ортонормированную систему элементов $\{x_n\}$ пространства H, каждый из которых является собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению $\lambda \neq 0$. Так как для любого элемента y пространства H справедливо неравенство Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n,\, y)^2 \leqslant \|y\|^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,\, y) = 0 = (\mathbf{0},\, y)$, т. е. последовательность собственных элементов $\{x_n\}$ слабо сходится к нулевому элементу $\mathbf{0}$. Но при этом из условия вполне непрерывности оператора A и из леммы п. 3 вытекает, что соответствующая последовательность $\{Ax_n\}$ сходится по норме H к элементу $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. В силу соотношения $Ax_n = \lambda x_n$ мы получим, что $|\lambda| = \|Ax_n\| \to 0$ (при $n \to \infty$), а это означает, что $|\lambda| = 0$ и противоречит условию $\lambda \neq 0$. Полученное противоречие и доказывает, что каждому $\lambda \neq 0$ может отвечать лишь конечное число собственных элементов.

Проведенные нами рассуждения показывают также, что *все собственные элементы* (как отвечающие одному и тому же собственному значению λ, так и отвечающие различным λ) *можно считать попарно ортогональными* (*и имеющими нормы, равные единице*).

3°. Докажем теперь, что *если оператор A имеет бесконечно много собственных значений, то любая выделенная из собственных значений последовательность $\{\lambda_n\}$ является бесконечно малой.*

---

[1] Нулевому собственному значению $\lambda = 0$ может отвечать и бесконечное число собственных элементов. Например, у интегрального оператора (11.40) с ядром $K(t,\, s)$, тождественно равным нулю, каждый элемент какой-либо ортонормированной системы $\{x_n(t)\}$ элементов $L^2[a,\, b]$ является собственным элементом, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — любая последовательность собственных значений, $\{x_n\}$ — соответствующая последовательность собственных элементов, которую мы (в силу рассуждений, проведенных при доказательстве свойства 2°) можем считать ортонормированной. Записывая для любого элемента y пространства H неравенство Бесселя по системе $\{x_n\}$, мы убедимся, что последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к нулевому элементу. Так как оператор A является вполне непрерывным, то из леммы п. 3 вытекает, что последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к нулевому элементу по норме H. Но тогда равенство $Ax_n = \lambda_n x_n$ влечет за собой соотношение

$$|\lambda_n| = \|Ax_n\| \to 0 \qquad (\text{при } n \to \infty).$$

Доказанное свойство позволяет утверждать, что *собственные значения линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора, кроме точки нуль, не имеют на числовой оси других предельных точек* [1].

Это означает, что *все собственные значения можно занумеровать в порядке невозрастания их модулей, так что будут справедливы неравенства*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots ,$$

причем $|\lambda_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

В частности, все установленные нами свойства справедливы для собственных функций и характеристических чисел интегрального уравнения Фредгольма второго рода (11.58) с непрерывным на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ и симметричным ядром $K(t,\, s)$.

[1] Для любого $\varepsilon > 0$ вне интервала $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ может лежать лишь конечное число собственных значений.

ГЛАВА 12

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этой главе будут изложены важные для приложений сведения о кривых и поверхностях.

§ 1. Векторные функции

1. Понятие векторной функции [1]**.** Введем понятие векторной функции m переменных.

Если каждой точке M из множества $\{M\}$ точек m-мерного евклидова пространства E^m ставится в соответствие по известному закону некоторый вектор $\boldsymbol{r}$ [2]*, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$.* При этом множество $\{M\}$ называется областью задания функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$. Если $p = m$, то, как и в случае $m = 2$ или $m = 3$ (см. п. 1 § 2 гл. 6), говорят, что на множестве $\{M\}$ задано векторное поле, определяемое векторной функцией $\boldsymbol{r}(M)$.

Вектор $\boldsymbol{r}(M)$, соответствующий данной точке M из множества $\{M\}$, будем называть частным значением векторной функции в точке M. Совокупность всех частных значений функции $\boldsymbol{r}(M)$ называется множеством значений этой функции.

Если $\{M\}$ — множество точек на данной прямой и $\{u\}$ — множество координат этих точек, то векторная функция $\boldsymbol{r}(M)$ может, очевидно, рассматриваться как векторная функция одной скалярной переменной u:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u).$$

Если же $\{M\}$ — множество точек m-мерного пространства и $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — координаты точки M, то $\boldsymbol{r}(M)$ представляет собой векторную функцию скалярных аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

---

[1] Некоторые сведения о векторных функциях были даны в п. 6 § 1 гл. 5 вып. 1 этого курса.

[2] Вектор $\boldsymbol{r}$ принадлежит, вообще говоря, p-мерному евклидову пространству E^p, поэтому определяется p координатами $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

Замечание. Пусть $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}(M)$. Очевидно, задание векторной функции $\boldsymbol{r}(M)$ эквивалентно заданию p скалярных функций $r_1(M), r_2(M), \ldots, r_p(M)$.

Пусть векторы $\boldsymbol{r}(M)$ принадлежат евклидову пространству E^p. Будем считать, что начала всех этих векторов совпадают с началом выбранной в E^p декартовой системы координат. В этом случае точечное множество концов векторов $\boldsymbol{r}(M)$ называют годографом функции $\boldsymbol{r}(M)$. Годограф векторной функции одной скалярной переменной представляет собой, вообще говоря, линию. Годографом векторной функции двух переменных будет поверхность.

2. Предельное значение векторной функции. Непрерывность. В полной аналогии с обычными функциями для векторных функций вводятся понятия предельного значения и непрерывности.

Предварительно введем понятия сходящейся последовательности и предела последовательности векторов.

Последовательность $\{\boldsymbol{a}_n\}$ называется сходящейся к вектору $\boldsymbol{a}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство [1]

$$|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

При этом вектор $\boldsymbol{a}$ называется пределом последовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$.

Символически существование предела $\boldsymbol{a}$ последовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$ записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}.$$

Замечание. Если $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ и $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ — соответственно координаты векторов $\boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{a}$, то из сходимости последовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$ к $\boldsymbol{a}$ вытекает сходимость числовых последовательностей $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \ldots, \{a_{pn}\}$ соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Отметим также, что из сходимости указанных числовых последовательностей соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots, a_p$ следует сходимость последовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$ векторов с координатами $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ к вектору $\boldsymbol{a}$ с координатами $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Справедливость замечания вытекает из следующих очевидных неравенств [2]:

$$|a_{kn} - a_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| \leqslant |a_{1n} - a_1| + |a_{2n} - a_2| + \ldots + |a_{pn} - a_p|.$$

Рассмотрим векторную функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$, определенную на множестве $\{M\}$ точек m-мерного евклидова пространства, и

[1] Модулем $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$ с координатами $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ называется число $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2}$.

[2] Вектор $\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{a_{1n} - a_1, a_{2n} - a_2, \ldots, a_{pn} - a_p\}$.

точку A, быть может, и не принадлежащую множеству $\{M\}$, но обладающую тем свойством, что в любой окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от A.

Определение 1. *Вектор* $\boldsymbol{b}$ *называется* *п р е д е л ь н ы м з н а ч е н и е м* *векторной функции* $\boldsymbol{r}(M)$ *в точке* A *(или* *п р е д е л о м* $\boldsymbol{r}(M)$ *при* $M \to A$*), если для любой сходящейся к* A *последовательности* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ *точек множества* $\{M\}$*, элементы* M_n *которой отличны от* A [1] $(M_n \neq A)$*, соответствующая последовательность* $\boldsymbol{r}(M_1)$, $\boldsymbol{r}(M_2)$, $\ldots$, $\boldsymbol{r}(M_n)$, $\ldots$ *значений функции* $\boldsymbol{r}(M)$ *сходится к вектору* $\boldsymbol{b}$.

Для обозначения предельного значения $\boldsymbol{b}$ функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ в точке A используется следующая символика:

$$\lim_{M\to A} \boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{b} \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{u_1\to a_1\\ u_2\to a_2\\ \cdots\\ u_m\to a_m}} \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \boldsymbol{b},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — координаты точки A.

Мы не будем приводить определения предельного значения векторной функции на языке «$\varepsilon - \delta$», не будем приводить его и для случая, когда точка M стремится к бесконечности. Эти определения формулируются в полной аналогии с соответствующими определениями для скалярных функций.

Пусть точка A принадлежит к области задания векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ и любая окрестность этой точки содержит отличные от A точки области задания функции.

Определение 2. *Векторная функция* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ *называется* *н е п р е р ы в н о й* *в точке* A*, если предельное значение этой функции в точке* A *существует и равно частному значению* $\boldsymbol{r}(A)$.

Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ называется непрерывной на множестве $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

3. Производная векторной функции. В § 1 гл. 5 вып. 1 этого курса говорилось о производной векторной функции одной скалярной переменной. Для удобства еще раз сформулируем это понятие.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ — векторная функция скалярной переменной u. Зафиксируем значение u аргумента и придадим аргументу u такое произвольное приращение $\Delta u \neq 0$, что величина $u + \Delta u$ принадлежит области задания функции. Рассмотрим вектор

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u).$$

[1] Это требование объясняется, в частности, тем, что функция $\boldsymbol{r}(M)$ может быть не определена в точке A.

На рис. 12.1 этот вектор совпадает с вектором $\overline{MP}$. Умножив вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ на число $1/\Delta u$, мы получим новый вектор

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}[\boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u)], \tag{12.1}$$

коллинеарный прежнему. Вектор (12.1) представляет собой среднюю скорость изменения векторной функции на сегменте $[u,\, u+ + \Delta u]$.

Производной векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ *в данной фиксированной точке* u *называется предел при* $\Delta u \to 0$ *разностного отношения* (12.1) (при условии, что предел существует).

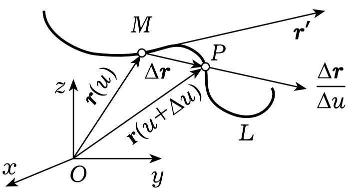


Рис. 12.1

Производная векторной функции обозначается символом $\boldsymbol{r}'(u)$ или $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{du}$.

Из геометрических соображений [1]) видно, что производная векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ представляет собой вектор, касательный к годографу этой функции. Выясним связь производной векторной функции с производными ее координат. Для простоты ограничимся случаем, когда значения $\boldsymbol{r}(u)$ векторной функции представляют собой векторы трехмерного пространства. Пусть $\{x(u),\, y(u),\, z(u)\}$ — координаты векторной функции $\boldsymbol{r}(u)$. Очевидно, координаты разностного отношения (12.1) равны

$$\frac{x(u + \Delta u) - x(u)}{\Delta u}, \quad \frac{y(u + \Delta u) - y(u)}{\Delta u}, \quad \frac{z(u + \Delta u) - z(u)}{\Delta u}.$$

Согласно замечанию п. 2 этого параграфа, координаты производной $\boldsymbol{r}'(u)$ равны производным $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ координат функции $\boldsymbol{r}(u)$. Поэтому вычисление производной векторной функции сводится к вычислению производных ее координат.

З а м е ч а н и е 1. Векторная функция $\boldsymbol{r}(u)$ представляет собой закон движения материальной точки по годографу L этой функции, если при этом переменную u рассматривать как время. Поэтому производная $\boldsymbol{r}'(u)$ равна скорости движения точки по кривой L.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что правила дифференцирования различных произведений векторных функций (скалярного, векторного, смешанного) идентичны правилам дифференцирования произведений обычных функций. Это вытекает из того, что координаты производной векторной функции равны производным координат самой функции и из выражения указанных произведений через координаты сомножителей.

[1]) Эти соображения подтверждаются утверждением в п. 2 § 2 этой главы.

Приведем правила дифференцирования произведений векторных функций:

$$\{\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\boldsymbol{s}(u) + \boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}'(u),$$

$$\{[\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)]\}' = [\boldsymbol{r}'(u)\boldsymbol{s}(u)] + [\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}'(u)],$$

$$\{\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)\boldsymbol{t}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\boldsymbol{s}(u)\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}'(u)\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)\boldsymbol{t}'(u).$$

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании векторных функций нескольких скалярных переменных. Так как в дальнейшем нами будут использоваться векторные функции двух скалярных переменных u и v, то мы ограничимся лишь этим случаем.

Пусть векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ задана в некоторой окрестности G точки $M_0(u_0, v_0)$ (рис. 12.2). Рассмотрим в плоскости uv некоторое направление, определяемое единичным вектором $\boldsymbol{a}$ с координатами $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Проведем через точку M_0 ось $\boldsymbol{l}$, направление которой совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, возьмем на этой оси точки $M(u, v)$ и обозначим через l величину направленного отрезка M_0M указанной оси. Координаты (u, v) точки M определяются равенствами

$$u = u_0 + l\cos\alpha, \quad v = v_0 + \sin\alpha.$$

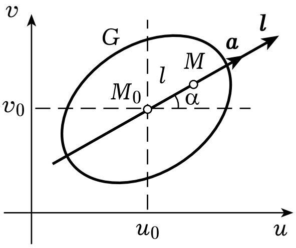


Рис. 12.2

На указанной оси $\boldsymbol{l}$ (функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$), очевидно, является векторной функцией одной переменной величины l. *Если эта функция имеет в точке $l = 0$ производную по переменной l, то эта производная называется* п р о и з в о д н о й п о н а п р а в л е н и ю $\boldsymbol{l}$ *от функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ в точке $M_0(u_0, v_0)$ и обозначается символом* $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$.

З а м е ч а н и е 3. Если направление $\boldsymbol{l}$ совпадает с направлением координатной оси u (оси v) (на рис. 12.2 эти направления указаны штриховыми линиями), то соответствующая производная по направлению называется частной производной векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ и обозначается символом $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ или $\boldsymbol{r}_u$ $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right.$ или $\left.\boldsymbol{r}_v\right)$. Если частная производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $M(u, v)$, то она представляет собой в этой окрестности векторную функцию. Эта функция может иметь в свою очередь частную производную, например, по аргументу u. Естественно эту частную производную называть второй частной производной по аргументу u и обозначать $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$

(или $\boldsymbol{r}_{uu}$). Аналогично определяются другие частные производные различных порядков.

Геометрический смысл производной по направлению выясняется из следующих рассуждений. Годографом векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ будет, вообще говоря, поверхность S (рис. 12.3). Когда точка $M(u, v)$ перемещается по оси l, то конец P вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ описывает на поверхности S линию L, которая может рассматриваться как годограф векторной функции одной переменной l. Поэтому производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ по направлению $\boldsymbol{l}$ представляет собой вектор, касательный к L в точке P_0.

Если направление $\boldsymbol{l}$ совпадает с направлением координатной оси u, то при перемещении точки M по соответствующей оси, проходящей через M_0, конец вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ описывает на поверхности S линию, называемую *координатной линией u* (на рис. 12.3 обозначена штриховой линией). Таким образом,

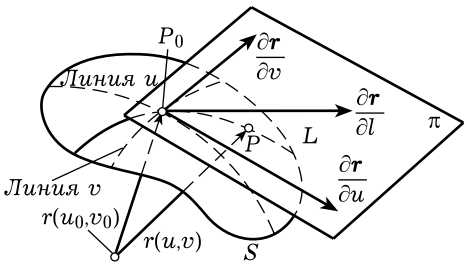


Рис. 12.3

частная производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ представляет собой вектор, касательный к координатной линии u. Частная производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ представляет собой вектор, касательный к координатной линии v.

4. Дифференцируемость векторной функции. Будем называть приращением (или полным приращением) векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ в точке $M(u, v)$ (соответствующим приращениям Δu и Δv аргументов) следующее выражение:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v).$$

Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ называется дифференцируемой в точке $M(u, v)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\Delta u + \boldsymbol{b}\Delta v + \boldsymbol{\alpha}\Delta u + \boldsymbol{\beta}\Delta v, \tag{12.2}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — некоторые не зависящие от Δu и Δv векторы, а $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — бесконечно малые при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ векторные функции [1]), равные нулю при $\Delta u = \Delta v = 0$ [2]).

Замечание 1. Если векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ дифференцируема в точке $M(u, v)$, то, очевидно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны соответственно частным производным $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ в данной точке.

Замечание 2. Пусть векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ дифференцируема в точке $M(u, v)$ и $\boldsymbol{l}$ — некоторая ось, проходящая через M в плоскости uv и составляющая угол α с осью u. Тогда производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ по направлению $\boldsymbol{l}$ существует и может быть найдена по формуле

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cos\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \sin\alpha. \tag{12.3}$$

В самом деле, для направления $\boldsymbol{l}$ имеем $\Delta u = l\cos\alpha$, $\Delta v = l\sin\alpha$ (рис. 12.4). Подставляя эти значения Δu и Δv в соотношение (12.2) и используя соотношение $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l} = \lim\limits_{l\to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{l}$ убедимся в справедливости формулы (12.3).

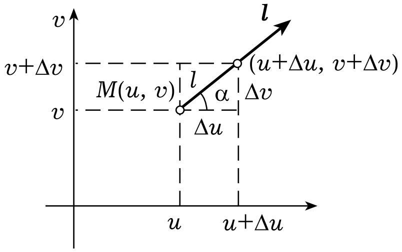


Рис. 12.4

Замечание 3. Мы убедились, что в случае дифференцируемости функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ справедлива формула (12.3). Из этой формулы следует, что все векторы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ расположены в плоскости векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$. Плоскость, проходящую через точку годографа функции $\boldsymbol{r}(u, v)$, отвечающую точке $M(u, v)$, и параллельную векторам $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ естественно назвать касательной плоскостью к поверхности S, представляющей собой годограф. На рис. 12.3 плоскость π представляет собой касательную плоскость к поверхности S в точке P_0.

5. Формула Тейлора для векторных функций. Формула Тейлора для функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ с центром разложения

[1]) Векторная функция $\boldsymbol{\alpha}(\Delta u, \Delta v)$ называется бесконечно малой, если ее предел при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ равен нулю (нулевому вектору).

[2]) Мы не приводим определение дифференцируемости векторной функции одной скалярной переменной. Оно может быть сформулировано в полной аналогии с соответствующим определением для скалярных функций одной переменной.

в точке $M(u, v)$ и с остаточным членом в форме Пеано имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\, v+\Delta v) = \boldsymbol{r}(u,\, v) + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial v}\Delta v + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u^2}\Delta u^2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u\, \partial v}\Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial v^2}\Delta v^2\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u^n}\Delta u^n + n\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u^{n-1}\partial v}\Delta u^{n-1}\Delta v + \ldots + \frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial v^n}\Delta v^n\right) + \\ + \boldsymbol{R}_n(\Delta u,\, \Delta v), \quad (12.4)$$

где остаточный член $\boldsymbol{R}_n(\Delta u,\, \Delta v)$ представляет собой вектор, порядок малости которого выше чем ρ^n $(\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$ [1]$)$.

В справедливости формулы (12.4) можно убедиться, представляя каждую из координат вектора $\boldsymbol{r}(u,\, v)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и записывая затем выражение для $\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\, v+\Delta v)$ с помощью разложения по базисным векторам (коэффициентами разложения и будут координаты этого вектора).

6. Интегралы от векторных функций. Мы уже отмечали, что векторная функция определяется своими координатами, которые представляют собой скалярные функции. Это позволяет перенести на случай векторных функций операцию интегрирования.

Пусть, например, векторная функция $\boldsymbol{r}(u)$ задана на сегменте $[a,\, b]$, и пусть ее координаты $r_1(u)$, $r_2(u)$, $r_3(u)$ представляют собой интегрируемые на сегменте $[a,\, b]$ функции. Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — базисные векторы, то естественно положить по определению

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(u)\, du = e_1 \int_a^b r_1(u)\, du + e_2 \int_a^b r_2(u)\, du + e_3 \int_a^b r_3(u)\, du.$$

Отметим, что интеграл для функции $\boldsymbol{r}(u)$ может быть определен и непосредственно, как предел интегральных сумм для функции $\boldsymbol{r}(u)$.

В полной аналогии с рассмотренным случаем могут быть введены и кратные интегралы от векторных функций. Заметим, что основные формулы и правила интегрирования скалярных функций могут быть перенесены на случай интегралов от векторных функций.

[1]) Порядок малости вектора определяется как порядок малости его модуля.

§ 2. Некоторые сведения из теории кривых

1. Регулярные кривые. В § 1 гл. 11 вып. 1 этого курса говорилось о понятии кривой и о способах ее задания. Одним из способов задания кривой был указан параметрический способ, заключающийся в том, что координаты переменной точки кривой задаются как функции скалярной переменной — параметра. Считая эти координаты координатами вектора, ведущего из начала координат в точку кривой, мы получим векторную функцию, годографом которой является данная кривая. Таким образом, мы можем задавать кривую при помощи векторной функции одной скалярной переменной, и этот способ равнозначен параметрическому способу задания кривой.

Пусть кривая L задается посредством векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ [1]. Допустим, что параметр t с помощью соотношения $t = f(u)$, где $f(u)$ — строго возрастающая и непрерывная функция, заменяется другим параметром u. При этом функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ превращается в новую функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(f(u))$ параметра u. Таким образом, можно получить различные параметризации одной и той же кривой.

Будем называть кривую L *регулярной* (k раз дифференцируемой) без особых точек, если эта кривая допускает такую параметризацию с помощью параметра t, что векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ для некоторого целого $k \geqslant 1$ k раз дифференцируема и $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ для всех значений параметра t. При $k = 1$ кривая называется *гладкой*.

В этой главе мы будем рассматривать регулярные кривые без особых точек и те параметризации этих кривых, для которых $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$.

2. Касательная к кривой. Пусть L — кривая и P — фиксированная точка на ней (рис. 12.5). Проведем хорду PM кривой. Прямая PQ, к которой стремится хорда PM [2] при $M \to P$, называется *касательной* к L в точке P.

Справедливо следующее утверждение.

Гладкая кривая L без особых точек имеет в каждой точке P касательную.

Докажем, что касательной будет прямая PQ, проходящая через точку P параллельно вектору $\boldsymbol{r}'(t)$ (напомним, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$). В самом деле, вектор $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ параллелен хорде PM (см. рис. 12.5) и при $\Delta \to 0$ стремится к $\boldsymbol{r}'(t)$. Отсюда вытекает, что угол между

[1] Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ называется обычно *радиусом-вектором* кривой L.

[2] Будем говорить, что прямая PM стремится к прямой PQ при $M \to P$, если угол между этими прямыми стремится к нулю.

прямой PM и прямой PQ стремится к нулю при $M \to P$. Поэтому прямая PQ является касательной к кривой L. Утверждение доказано.

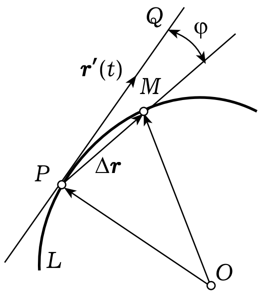


Рис. 12.5

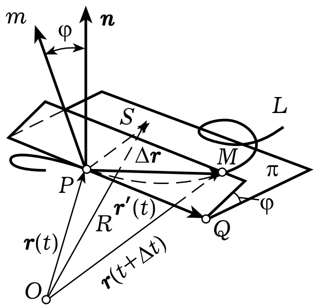


Рис. 12.6

Выведем векторное уравнение касательной к кривой L в точке P. Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор переменной точки Q на касательной в точке P. Вектор $\overline{PQ} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{r}'(t)$, и поэтому $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t)$. Отсюда мы получаем искомое уравнение касательной

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t), \tag{12.5}$$

в котором роль параметра играет величина u, а t — фиксированное значение параметра на кривой L, определяющее точку P.

3. Соприкасающаяся плоскость кривой. Пусть PQ — касательная в точке P к кривой L (рис. 12.6). Через касательную PQ и точку M кривой проведем плоскость PQM. Плоскость π, к которой стремится плоскость PQM [1] при $M \to P$, называется *соприкасающейся плоскостью к кривой* L в точке P.

Справедливо следующее утверждение.

Регулярная (по крайней мере дважды дифференцируемая) кривая L без особых точек имеет соприкасающуюся плоскость в каждой точке, в которой векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ не коллинеарны.

Докажем, что соприкасающейся плоскостью будет плоскость π, проходящая через касательную PQ параллельно вектору $\boldsymbol{r}''(t)$. Очевидно, вектор

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)] \tag{12.6}$$

будет вектором нормали к плоскости π, а вектор

$$\boldsymbol{m} = \frac{2}{\Delta t^2}[\boldsymbol{r}'(t)\Delta\boldsymbol{r}], \quad \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t), \tag{12.7}$$

[1] Будем говорить, что плоскость PQM стремится к плоскости π при $M \to P$, если угол между этими плоскостями стремится к нулю.

(см. рис. 12.6) будет вектором нормали к плоскости PQM. Так как кривая L дважды дифференцируема, то по формуле Тейлора

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\Delta t^2, \tag{12.8}$$

где α — бесконечно малая при $\Delta t \to 0$ векторная функция. Из формул (12.6)–(12.8) вытекает, что

$$\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)] + 2[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}, \tag{12.9}$$

где $\boldsymbol{\beta} = 2[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{\alpha}]$ — бесконечно малая при $\Delta t \to 0$ векторная функция. Из соотношения (12.9) следует, что при $M \to P$ вектор $\boldsymbol{m}$ стремится к $\boldsymbol{n}$, а следовательно, стремится к нулю и угол φ между плоскостями PQM и π. Поэтому плоскость π является соприкасающейся плоскостью к кривой в точке P. Утверждение доказано.

Выведем векторное уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор переменной точки S этой плоскости. Векторы $\overline{PS} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ параллельны соприкасающейся плоскости и поэтому $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t)$. Отсюда мы получаем искомое уравнение соприкасающейся плоскости

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t), \tag{12.10}$$

в котором u и v — аргументы векторной функции $\boldsymbol{R}$, а t — фиксированное значение параметра на кривой L, определяющее точку P.

Получим уравнение соприкасающейся плоскости в другой форме. Так как векторы $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$, $\boldsymbol{r}''(t)$ компланарны, то вектор $\boldsymbol{R}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t))\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t) = 0. \tag{12.11}$$

Если X, Y, Z — координаты вектора $\boldsymbol{R}$ (координаты переменной точки S плоскости π), а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}(t)$, то в координатной форме уравнение (12.11) запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{12.12}$$

Уравнение (12.12), очевидно, представляет собой уравнение соприкасающейся плоскости.

З а м е ч а н и е. Соприкасающаяся плоскость определена нами геометрически с помощью предельного перехода, и поэтому в случае ее существования она будет единственна. Отсюда и из доказанного в этом пункте утверждения вытекает, что если в данной точке π кривой существует соприкасающаяся плоскость, то при любой параметризации кривой вектор $\boldsymbol{r}''(t)$ параллелен этой плоскости. Если рассматривать параметр t как время, то $\boldsymbol{r}''(t)$ будет вектором ускорения при движении точки по кривой L по закону $\boldsymbol{r}(t)$. Таким образом, при любом способе движения по кривой вектор ускорения в данной точке расположен в соприкасающейся плоскости кривой в этой точке. Поэтому соприкасающуюся плоскость называют также *плоскостью ускорений.*

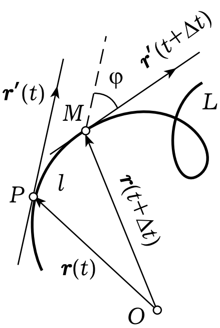


Рис. 12.7

Прямая, проходящая через точку P кривой L перпендикулярно касательной в этой точке, называется *нормалью.* Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью кривой, а нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, — бинормалью кривой. Вывод уравнений этих прямых предоставляется читателю.

4. Кривизна кривой. Пусть P — произвольная фиксированная точка регулярной кривой L без особых точек и M — точка этой кривой, отличная от P. Обозначим через φ угол между касательными в точках P и M, а через l — длину дуги PM [1]) (рис. 12.7).

Кривизной k_1 кривой L в точке P называется предел отношения φ/l при $l \to 0$ (т. е. при $M \to P$).

Справедливо следующее *утверждение.*

Регулярная (дважды дифференцируемая) кривая L без особых точек имеет в каждой точке определенную кривизну k_1.

Перейдем к доказательству этого утверждения. Пусть точки P и M кривой отвечают соответственно значениям t и $t + \Delta t$ параметра.

Вычислим $\sin\varphi$ и l. Так как кривая L регулярна, то $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ в любой точке L, и поэтому

$$\sin\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)|}, \tag{12.13}$$

$$l = \int\limits_t^{t+\Delta t} |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau = |\boldsymbol{r}'(\tau^*)|\Delta t = |\boldsymbol{r}'(t)|\Delta t + \delta\Delta t, \tag{12.14}$$

где $\delta \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Отметим, что при преобразованиях выражения для l мы воспользовались формулой среднего значения для интеграла и непрерывностью функции $\boldsymbol{r}'(t)$.

---

[1]) Так как кривая L регулярна, то любая ее дуга PM спрямляема.

Преобразуем выражение (12.13) для $\sin\varphi$. По формуле Тейлора

$$\boldsymbol{r}'(t+\Delta t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}''(t)\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t, \qquad \boldsymbol{\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0.$$

С помощью этой формулы выражение (12.13) для $\sin\varphi$ принимает следующий вид:

$$\sin\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2 + \gamma}\Delta t, \tag{12.15}$$

где $\beta \to 0$ и $\gamma \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Обращаясь к формулам (12.14) и (12.15) и используя при $\varphi \neq 0$ тождество

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\frac{\sin\varphi}{l}$$

$\left(\text{при } \varphi = 0 \text{ отношение } \frac{\varphi}{l} \text{ равно нулю}\right)$, получим

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3 + \mu}, \tag{12.16}$$

где β и μ стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$. Так как $\varphi \to 0$ при $\Delta t \to \to 0$, то $\frac{\varphi}{\sin\varphi} \to 1$ при $\Delta t \to 0$. Поэтому из соотношения (12.16) следует, что при $\Delta t \to 0$, т. е. при $M \to P$, предел $\frac{\varphi}{l}$ существует и равен $\frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$. Утверждение доказано.

Итак, при условиях утверждения кривизна k_1 существует и может быть найдена по формуле

$$k_1 = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{12.17}$$

З а м е ч а н и е. Если в качестве параметра на кривой выбрана длина дуги l, так что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$, то $|\boldsymbol{r}'(l)| = 1$ и вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{r}'(l)$ [1]. В этом случае, очевидно, формула (12.17) примет следующий вид:

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(l)|. \tag{12.18}$$

[1]) Если длина дуги является параметром, то из формулы $\Delta l = \int\limits_l^{l+\Delta l} |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau$ в силу произвольности l и Δl следует, что $|\boldsymbol{r}'(l)| = 1$ в любой точке кривой. Дифференцируя соотношение $\boldsymbol{r}'^2(l) = 1$, получим $2\boldsymbol{r}'(l)\boldsymbol{r}''(l) = 0$, т. е. вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{r}'(l)$.

5. Кручение кривой. Пусть P — произвольная фиксированная точка регулярной кривой L без особых точек и M — точка этой кривой, отличная от P. Обозначим через φ угол между соприкасающимися плоскостями в точках P и M, а через l — длину дуги PM.

Абсолютным кручением $|k_2|$ кривой L в точке P называется предел отношения φ/l при $l \to 0$ (т. е. при $M \to P$).

Справедливо следующее *утверждение.*

Регулярная (трижды дифференцируемая) кривая L без особых точек имеет в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, определенное абсолютное кручение.

Перейдем к доказательству этого утверждения.

Пусть точки P и M кривой L отвечают соответственно значениям t и $t+\Delta t$ параметра. Нормали к соприкасающимся плоскостям в P и M определяются векторами $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ и $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ [1]. По формуле Тейлора с учетом равенства $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''] = 0$ получим

$$[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P + ([\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''])_P\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t = \\ = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P + [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''']_P\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t, \quad (12.19)$$

где $\boldsymbol{\alpha} \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Для вычисления предела φ/l при $l \to 0$ нам понадобится значение синуса угла φ между нормалями к соприкасающимся плоскостям в точках P и M. Для этой цели найдем модуль векторного произведения $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ и $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ и произведение модулей этих векторов. С помощью (12.19) получим

$$[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M] = [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P([\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P + [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''']_P\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t)].$$

Отсюда, используя распределительное свойство векторного произведения и известную формулу $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$ для двойного векторного произведения, найдем

$$[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M] = \boldsymbol{r}'_P(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')_P\Delta t + \boldsymbol{\beta}\Delta t,$$

где $\boldsymbol{\beta} = [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P\boldsymbol{\alpha}]$, и поэтому $\boldsymbol{\beta} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Из последнего выражения для $[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M]$ получаем следующую формулу:

$$|[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M]| = |\boldsymbol{r}'_P||(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')_P|\Delta t + \gamma\Delta t, \quad (12.20)$$

где $\gamma \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Путем аналогичных рассуждений получается также следующая формула:

$$|[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P| \cdot |[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M| = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P^2 + \mu\Delta t, \quad (12.21)$$

где $\mu \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

[1] Выражения $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ и $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ означают, что векторное произведение $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']$ вычислено в точках P и M соответственно.

Из формул (12.20) и (12.21) получаем нужное нам выражение для $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{(|\boldsymbol{r}'|\cdot|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')| + \gamma)\Delta t}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2 + \mu\Delta t}.$$

Отметим, что в этом выражении значения производных векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$ вычислены в точке P.

Обращаясь к выражению (12.14) для l, используя только что полученную формулу для $\sin\varphi$ и известный предел $\dfrac{\varphi}{\sin\varphi} \to 1$ при $\varphi \to 0$, мы убедимся, что предел $\dfrac{\varphi}{l}$ при $l \to 0$ существует и равен $\dfrac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}$.

Итак, в условиях утверждения абсолютное кручение $|k_2|$ существует и может быть найдено по формуле

$$|k_2| = \frac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}. \tag{12.22}$$

Определим *кручение* k_2 кривой с помощью равенства

$$k_2 = +\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}. \tag{12.23}$$

Докажем, что *кручение k_2 не зависит от выбора параметризации кривой и поэтому является определенной геометрической характеристикой данной кривой* [1].

Перейдем к другой параметризации кривой при помощи параметра τ.

Обозначая дифференцирование по параметру τ точкой, получим по правилу дифференцирования сложной функции следующие формулы:

$$\boldsymbol{r}' = \dot{\boldsymbol{r}}\tau',$$

$$\boldsymbol{r}'' = \ddot{\boldsymbol{r}}{\tau'}^2 + \{\text{члены, линейно выражающиеся через } \dot{\boldsymbol{r}}\},$$

$$\boldsymbol{r}''' = \dddot{\boldsymbol{r}}{\tau'}^3 + \{\text{члены, линейно выражающиеся через } \dot{\boldsymbol{r}} \text{ и } \ddot{\boldsymbol{r}}\}.$$

Из этих формул вытекают соотношения

$$(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''') = \left(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}}\right){\tau'}^6, \quad [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2 = \left[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\right]^2{\tau'}^6.$$

Таким образом,

$$k_2 = \frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2} = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})}{[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}]^2}.$$

Мы убедились, что k_2 не зависит от выбора параметризации кривой.

---

[1] Абсолютная величина $|k_2|$ определена геометрически. Поэтому от параметризации может зависеть лишь знак выражения $\dfrac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}$.

6. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. В п. 3 этого параграфа мы ввели понятия нормали и бинормали кривой. Эти прямые вместе с касательной являются ребрами трехгранного угла, называемого естественным трехгранником. Пусть параметром l на кривой L является длина дуги. Тогда $\boldsymbol{r}'(l) = \boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной к L. Выберем единичный вектор $\boldsymbol{n}$ главной нормали коллинеарным вектору $\boldsymbol{r}''(l)$ [1], а в качестве единичного вектора бинормали возьмем вектор

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{tn}]. \tag{12.24}$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ образуют правую тройку, т. е. $(\boldsymbol{tnb}) > 0$. Векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ являются функциями длины дуги. Найдем разложения производных $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ этих функций по векторам $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'(l)$, то $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{r}''(l)$. Поэтому вектор $\boldsymbol{t}'$ коллинеарен $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}' = \alpha\boldsymbol{n}.$$

Согласно замечанию п. 4 этого параграфа $\alpha = k_1$ $(\alpha = |\boldsymbol{t}'| = |\boldsymbol{r}''(l)| = k_1)$, и поэтому

$$\boldsymbol{t}' = k_1\boldsymbol{n}. \tag{12.25}$$

Обратимся теперь к вектору $\boldsymbol{b}$. Так как этот вектор единичный, то вектор $\boldsymbol{b}'$ ортогонален $\boldsymbol{b}$. Докажем, что вектор $\boldsymbol{b}'$ ортогонален также и $\boldsymbol{t}$. Дифференцируя тождество $(\boldsymbol{bt}) = 0$, получим $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{bt}') = 0$. Так как, согласно (12.25), $(\boldsymbol{bt}') = k_1(\boldsymbol{bn}) = 0$, то $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) = 0$, а это и означает, что вектор $\boldsymbol{b}'$ ортогонален $\boldsymbol{t}$. Из проведенных рассуждений вытекает, что вектор $\boldsymbol{b}'$ коллинеарен $\boldsymbol{n}$, т. е

$$\boldsymbol{b}' = \beta\boldsymbol{n}. \tag{12.26}$$

Докажем, что $\beta = -k_2$. Пусть φ — угол между соприкасающимися плоскостями кривой в точках, отвечающих значениям параметра l и $l + \Delta l$. Очевидно, угол между векторами $\boldsymbol{b}(l)$ и $\boldsymbol{b}(l+\Delta l)$ также равен φ, поскольку вектор $\boldsymbol{b}$ ортогонален соприкасающейся плоскости. Поэтому, учитывая, что $\lim\limits_{\Delta l\to 0} \dfrac{\varphi}{\Delta l} = k_2$, получим

$$|\boldsymbol{b}'| = \lim_{\Delta l\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{b}(l+\Delta l) - \boldsymbol{b}(l)}{\Delta l}\right| = \lim_{\Delta l\to 0}\left|\frac{\varphi}{\Delta l}\right| = |k_2|.$$

Следовательно, так как $|\beta| = |\boldsymbol{b}'|$, справедливо соотношение $|\beta| = |k_2|$. Пусть векторы $\boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{n}$ одинаково направлены. Из формулы

[1] Согласно замечанию п. 4 этого параграфа вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{t}$ и лежит в соприкасающейся плоскости кривой.

(12.26) следует, что в этом случае $\beta = |\boldsymbol{b}'|$, т. е. $|\beta| > 0$. Ясно, что в этом случае векторы $\boldsymbol{r}'(l)$, $\boldsymbol{r}''(l)$ и $\boldsymbol{r}'''(l)$ образуют тройку противоположного смысла по отношению к тройке $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ (рис. 12.8), и поэтому $(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''') < 0$, т. е. $k_2 < 0$. Так как $\beta > 0$ и $|\beta| = |k_2|$, то $\beta = -k_2$. В случае, когда векторы $\boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{n}$ противоположно направлены, рассуждая аналогично, легко убедиться, что $\beta < 0$, а $k_2 > 0$. Так как $|\beta| = |k_2|$, то и в этом случае $\beta = -k_2$. В случае, если $\beta = 0$, равенство $\beta = -k_2$ очевидно. Итак, мы доказали, что

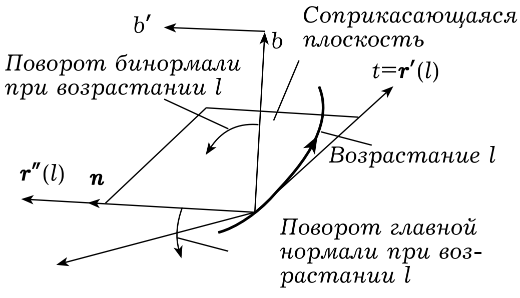


Рис. 12.8

$$\beta = -k_2. \tag{12.27}$$

Из формул (12.26) и (12.27) вытекает нужное нам выражение для $\boldsymbol{b}'$

$$\boldsymbol{b}' = -k_2\boldsymbol{n}. \tag{12.28}$$

Найдем теперь выражение для $\boldsymbol{n}'$. Используя правило дифференцирования векторного произведения и формулы (12.25) и (12.28), получим

$$\boldsymbol{n}' = [\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}]' = [\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}] + [\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}'] = -k_2[\boldsymbol{n}\boldsymbol{t}] + k_1[\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}] = -k_1\boldsymbol{t} + k_2\boldsymbol{b}.$$

Объединяя в одну таблицу формулы (12.25), (12.28) и только что найденное выражение для $\boldsymbol{n}'$, получим следующие формулы, называемые *формулами Френе*[1]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= k_1\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}' &= -k_1\boldsymbol{t} + k_2\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}' &= -k_2\boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Формулы Френе называют также основными формулами теории кривых.

Из формул Френе следует, что если известны кривизна k_1 и кручение k_2 кривой L, то могут быть найдены производные векторных функций $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ (т. е. скорости изменения этих функций). Это, естественно, наводит на мысль о том, что кривизна и кручение определяют кривую L, что действительно имеет место. Именно, справедливо следующее утверждение.

[1]) Жан Френе — французский математик (1801–1880).

Пусть $k_1(l)$ и $k_2(l)$ — любые дифференцируемые функции, причем $k_1(l) > 0$. Тогда существует единственная с точностью до положения в пространстве кривая, для которой $k_1(l)$ и $k_2(l)$ являются соответственно кривизной и кручением.

Мы не будем доказывать это утверждение. Отметим лишь, что доказательство основывается на теореме существования и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Так как, согласно сформулированному утверждению, кривизна $k_1(l)$ и кручение $k_2(l)$ полностью определяют кривую, то систему уравнений

$$k_1 = k_1(l), \quad k_2 = k_2(l)$$

обычно называют натуральными (*внутренними*) уравнениями кривой.

§ 3. Некоторые сведения из теории поверхностей

В гл. 5 мы познакомились с рядом важных сведений о поверхностях: нами было введено понятие поверхности, понятие регулярной и гладкой поверхности без особых точек, понятия касательной плоскости и нормали к поверхности.

В этом параграфе мы укажем еще ряд важных свойств регулярных поверхностей.

1. Первая квадратичная форма поверхности. Измерения на поверхности. Пусть Φ — регулярная поверхность без особых точек, $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор этой поверхности. Как известно, в этом случае $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Первой квадратичной формой I поверхности Φ называется выражение

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2. \tag{12.30}$$

Наименование «квадратичная форма» связано с тем, что выражение

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\, du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v\, du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2\, dv^2$$

представляет собой *квадратичную форму от дифференциалов* du и dv.

Первая квадратичная форма является положительно определенной формой: она обращается в нуль только при $du = dv = 0$, а для остальных значений du и dv положительна. Действительно, если $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, то $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv = 0$. Поэтому, если du и dv одновременно не обращаются в нуль, то из равенства $\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv = 0$ следует, что $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллинеарны, т. е. $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] = 0$, а этого не может быть, так как по условию $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$. Для коэффициентов первой квадратичной формы используются обозначения

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G. \tag{12.31}$$

С помощью этих обозначений выражение (12.30) для первой квадратичной формы может быть записано в следующем виде:

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{12.32}$$

Итак, *на регулярной поверхности* Φ, *определяемой радиусом-вектором* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, *определена первая квадратичная форма* I *посредством соотношения* (12.32). При этом коэффициенты указанной формы могут быть вычислены по формулам (12.31).

С помощью первой квадратичной формы можно проводить измерения на поверхности: вычислять длины дуг линий и углы между линиями, измерять площади областей.

Пусть L — регулярная линия на поверхности Φ, определяемая параметрическими уравнениями [1])

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{12.33}$$

причем $u(t)$ и $v(t)$ — дифференцируемые функции с непрерывными производными.

Известно, что длина l дуги кривой L, определяемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, может быть найдена по формуле

$$l = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{12.34}$$

(см. формулу (11.21) вып. 1).

Так как $|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \boldsymbol{r}'(u(t), v(t))\,dt = |d\boldsymbol{r}(u, v)|$, то из формулы (12.34) получаем

$$l = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'|\,dt = \int\limits_{L} |\,d\boldsymbol{r}(u, v)| = \int\limits_{L} \sqrt{d\boldsymbol{r}^2} = \int\limits_{L} \sqrt{\mathrm{I}} \tag{12.35}$$

(последние три интеграла в (12.35) представляют собой криволинейные интегралы первого рода). Итак, зная первую квадратичную форму, можно вычислять с помощью (12.35) длины.

[1]) Ясно, что задание u и v в виде функций (12.33) некоторого параметра t определяет на поверхности кривую, задаваемую векторной функцией $\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. Вопрос о том, любая ли гладкая линия L на поверхности Φ может быть задана параметрическими уравнениями вида (12.33), решается утвердительно, например, следующим образом. Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — параметрические уравнения L. Тогда u и v как функции параметра t могут быть определены из уравнений $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$, $z(t) = z(u, v)$. Решение вида (12.33) гарантируется условием $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] \neq 0$, из которого следует: например, что $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$. Последнее условие гарантирует разрешимость системы $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$ относительно u и v.

Перейдем теперь к измерениям углов на поверхности.

Пусть поверхность Φ задана посредством векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

Направление $du : dv$ на поверхности Φ в ее точке P определяется как направление вектора $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ в этой точке [1].

Рассмотрим в точке P два направления $du : dv$ и $\delta u : \delta v$. Угол φ между этими направлениями определяется по известной из аналитической геометрии формуле для косинуса угла φ между векторами $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ и $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v$:

$$\cos\varphi = \frac{(d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r})}{\sqrt{d\boldsymbol{r}^2}\sqrt{\delta\boldsymbol{r}^2}}.$$

Из этой формулы, учитывая соотношения (12.31), получаем для $\cos\varphi$ следующее выражение:

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \quad (12.36)$$

Угол между кривыми L_1 и L_2 на поверхности Φ, пересекающимися в точке P, определяется как угол между направлениями касательных к L_1 и L_2 в точке P. Отметим, что если кривая на поверхности определяется параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, то направление $du : dv$ в точке этой кривой определяется вектором

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = (\boldsymbol{r}_u u' + \boldsymbol{r}_v v')dt.$$

Итак, зная первую квадратичную форму, можно с помощью (12.36) вычислять углы между направлениями на поверхности.

Вопрос об измерении площадей областей на поверхности был подробно рассмотрен нами в гл. 5.

Напомним, что если область Π на поверхности определяется посредством задания параметров u и v в области Ω их изменения, то площадь σ области Π может быть вычислена по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

(см. формулу (5.18)).

Таким образом, зная первую квадратичную форму, можно измерять площади областей на поверхности.

Все факты, которые могут быть получены путем измерений на поверхности с помощью первой квадратичной формы относятся к так называемой *внутренней геометрии поверхностей.*

Две различные поверхности могут иметь одну и ту же внутреннюю геометрию. Простейшим примером таких поверхностей

---

[1]) Очевидно, этот вектор расположен в касательной плоскости в точке P.

может служить плоскость и параболический цилиндр. Заметим, что поверхности, имеющие одинаковую внутреннюю геометрию, называются *изометричными*.

2. Вторая квадратичная форма поверхности. Пусть Φ — регулярная поверхность, определяемая радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, а $\boldsymbol{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали к этой поверхности, определяемый соотношением

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}\ ^{1)}. \tag{12.37}$$

Второй квадратичной формой II поверхности называется выражение

$$\mathrm{II} = -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n}. \tag{12.38}$$

Так как $d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ [2], то $d(d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) = 0$, т. е. $d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n}$, и поэтому вторая квадратичная форма может быть также определена с помощью соотношения

$$\mathrm{II} = d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{12.39}$$

Поскольку $d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{uu}\, du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\, du\, dv + \boldsymbol{r}_{vv}\, dv^2$, то, согласно (12.39), вторая форма может быть записана следующим образом:

$$\mathrm{II} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\, du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\, du\, dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\, dv^2. \tag{12.40}$$

Для коэффициентов второй формы используются обозначения

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = L, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = M, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = N. \tag{12.41}$$

Обращаясь к выражению (12.37) для $\boldsymbol{n}$, получим с помощью (12.41) следующие формулы для коэффициентов второй формы:

$$L = \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad L = \frac{\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{12.42}$$

3. Классификация точек регулярной поверхности. Исследуем вопрос об отклонении поверхности от касательной плоскости в данной точке.

Пусть Φ — регулярная (дважды дифференцируемая) поверхность, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — определяющий ее радиус-вектор, $\boldsymbol{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали, $P(u, v)$ — фиксированная точка поверхности, $\boldsymbol{n}_P$ — вектор $\boldsymbol{n}(u, v)$ в точке P [3], M — точка поверхности, отвечающая значениям параметров $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ (рис. 12.9).

---

[1] Так как $|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2}$, то, согласно формулам (12.31), $|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$.

[2] Вектор $d\boldsymbol{r}$ лежит в касательной плоскости к поверхности и поэтому $d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = 0$.

[3] В дальнейшем нижний индекс P вектора будет означать, что вектор берется в точке P.

Пусть N — основание перпендикуляра, опущенного из M на касательную плоскость π в точке P, h — величина, абсолютное значение которой равно расстоянию от M до π. При этом знак h положителен, если направления векторов $\overline{NM}$ и $\boldsymbol{n}_P$ совпадают, и отрицателен в противоположном случае. Очевидно,

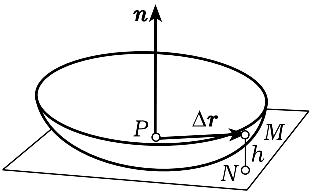


Рис. 12.9

$$h = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_P, \qquad (12.43)$$

где $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u,\, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u,\, v) = \overline{PM}$. Так как u и v — независимые переменные, то можно считать $\Delta u = du$, $\Delta v = dv$, и поэтому, используя формулу Тейлора (см. формулу (12.4)), получим

$$\Delta\boldsymbol{r} = (d\boldsymbol{r})_P + \frac{1}{2}(d^2\boldsymbol{r})_P + \boldsymbol{R}_2. \qquad (12.44)$$

В этом соотношении дифференциалы вычислены в точке P, а $\boldsymbol{R}_2$ — вектор, имеющий порядок $\boldsymbol{o}(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$. Из формул (12.43) и (12.44) получаем для h следующее выражение:

$$h = \frac{1}{2}d^2\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{n}_P + \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{n}_P. \qquad (12.45)$$

Так как $d^2\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{n}_P$ представляет собой вторую квадратичную форму II_P, вычисленную в точке P, а $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{n}_P = o(\rho^2)$, то соотношение (12.45) может быть переписано следующим образом:

$$h = \frac{1}{2}\mathrm{II}_P + o(\rho^2). \qquad (12.46)$$

Обращаясь к формуле (12.46), можно сделать предположение, что главное влияние на величину h оказывает первое слагаемое $\frac{1}{2}\mathrm{II}_P$, и поэтому пространственное строение поверхности вблизи регулярной точки определяется второй квадратичной формой в этой точке.

Следующие рассуждения подтверждают это предположение.

1°. Вторая квадратичная форма II_P является *знакоопределенной* $(LN - M^2 > 0)$.

В этом случае [1)]

$$|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2,\ A > 0.$$

Отсюда и из соотношения (12.46) вытекает, что величина h сохраняет определенный знак для всех достаточно малых значе-

[1)] Убедиться в справедливости неравенства $|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2$ можно, например, следующим образом. Имеем: $|\mathrm{II}_P| = |L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2| = |L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha|\rho^2$, где $\cos\alpha = du/\rho$, $\sin\alpha = dv/\rho$. Так как II_P — знакоопределенная форма, то выражение $|L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha|$ имеет положительный минимум A, т. е. $|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2$.

ний ρ, и поэтому в окрестности точки P поверхность располагается по одну сторону от касательной плоскости π_P в этой точке (рис. 12.10).

Точка P поверхности называется в этом случае эллиптической.

Сфера, эллипсоид, эллиптический параболоид — примеры поверхностей, каждая точка которых эллиптическая.

2°. Вторая квадратичная форма II_P является *знакопеременной* ($LN - M^2 < 0$). В этом случае в точке P на поверхности можно указать два таких различных направления $du : dv$ и $\delta u : \delta v$, что для значений дифференциалов переменных u и v, определяющих эти направления, вторая форма обращается в нуль, все же остальные направления разделяются двумя указанными на два класса. Для дифференциалов du и dv, отношение $du : dv$ которых определяет направление принадлежащее одному из этих классов, вторая форма положительна, для отношений $du : dv$, определяющих направления другого класса, — отрицательна. Поэтому поверхность вблизи точки P располагается по разные стороны от касательной плоскости π_P в этой точке (рис. 12.11).

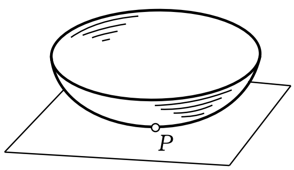


Рис. 12.10

Точка P поверхности называется в этом случае гиперболической.

Каждая точка однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида является гиперболической.

3°. Вторая квадратичная форма II_P является *квазизнакоопределенной* ($LN - M^2 = 0$). В этом случае в точке P на поверхности можно указать одно такое направление $du : dv$, что

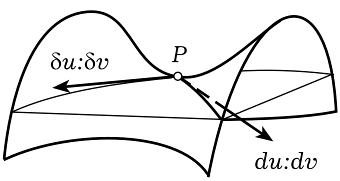


Рис. 12.11

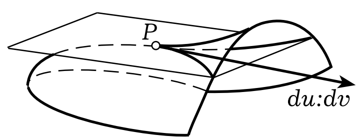


Рис. 12.12

для значений дифференциалов du и dv, определяющих это направление, вторая форма обращается в нуль. Для всех остальных значений дифференциалов вторая форма сохраняет знак [1] (рис. 12.12).

[1] В этом случае вторая форма может быть представлена в виде квадрата некоторой линейной формы дифференциалов du и dv.

Точка P поверхности называется в этом случае параболической.

Каждая точка цилиндрической поверхности — параболическая.

4°. Вторая квадратичная форма II_P равна нулю в точке P ($L = M = N = 0$). Точка P называется в этом случае точкой уплощения. На рис. 12.13 изображена поверхность с точкой уплощения.

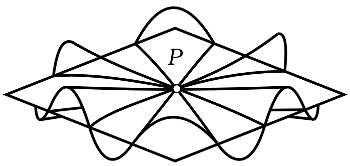


Рис. 12.13

Любая точка плоскости является точкой уплощения. Примером изолированной точки уплощения может служить точка с координатами (0, 0, 0) поверхности, задаваемой уравнением $z = x^4 + y^4$.

Отметим, что если все точки поверхности являются точками уплощения, то поверхность является плоскостью.

4. Кривизна кривой на поверхности. Пусть регулярная поверхность Φ задана посредством векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к Φ, L — регулярная кривая на Φ, имеющая в точке $P(u, v)$ направление $du : dv$.

Выберем в качестве параметра на L длину l, так что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(l), v(l)) = \boldsymbol{r}(l)$ вдоль L. В п. 6 предыдущего параграфа мы установили, что вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ направлен по главной нормали $\boldsymbol{n}_L$ к кривой L в точке P и модуль этого вектора равен кривизне k кривой L в точке P.

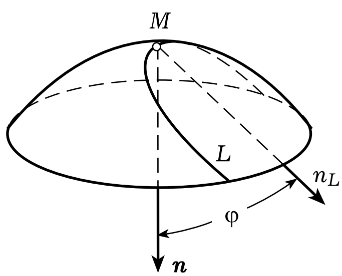


Рис. 12.14

Поэтому

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} = k\cos\varphi, \tag{12.47}$$

где φ — угол между главной нормалью $\boldsymbol{n}_L$ кривой L и нормалью $\boldsymbol{n}$ к поверхности (рис. 12.14). По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\boldsymbol{r}''(l) = \boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v''.$$

Так как вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, то, подставляя найденное выражение $\boldsymbol{r}''(l)$ в левую часть (12.47) и учитывая формулы (12.41), получим

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})u'^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})v'^2 = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2. \tag{12.48}$$

Поскольку $u' = \dfrac{du}{dl}$, $v' = \dfrac{dv}{dl}$ и на кривой L справедливо равенство $dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, то из (12.47) и (12.48) следует соотношение

$$k\cos\varphi = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.49}$$

Правая часть (12.49) зависит только от отношения $du : dv$, т. е. только от направления $du : dv$. Поэтому *для всех кривых L на поверхности Φ, проходящих через точку P в данном направлении $du : dv$, выражение $k\cos\varphi$ равно некоторой постоянной k_n*:

$$k\cos\varphi = k_n = \text{const}. \tag{12.50}$$

В частности, если кривая L представляет собой так называемое нормальное сечение L_n поверхности Φ в направлении $du : dv$, т. е. линию пересечения поверхности Φ с плоскостью, проходящей через нормаль $\boldsymbol{n}$ и направление $du : dv$, то $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, и поэтому формула (12.50) примет вид

$$k = k_n.$$

Таким образом, величина k_n представляет собой кривизну нормального сечения поверхности в направлении $du : dv$ и может быть вычислена по формуле

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.51}$$

Величину k_n называют также нормальной кривизной линии L.

Отметим, что равенство (12.60) выражает содержание *теоремы Менье* [1]).

5. Специальные линии на поверхности.

1°. Асимптотические линии. Направление $du : dv$ на регулярной поверхности Φ в точке P называется асимптотическим, если нормальная кривизна в этом направлении равна нулю.

Из соотношения (12.51) следует, что направление $du : dv$ будет асимптотическим только тогда, когда для этого направления выполняется условие

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \tag{12.52}$$

Так как вторая форма обращается в нуль в гиперболических точках, параболических точках и точках уплощения поверхности, то только в этих точках имеются асимптотические направления: в гиперболической точке два асимптотических направления, в параболической точке одно асимптотическое направление, в точке уплощения любое направление является асимптотическим.

[1]) Менье — французский математик (1754–1799).

Введем понятие *асимптотической линии.*

Асимптотической линией на поверхности называется кривая, направление которой в каждой точке является асимптотическим.

Если регулярная поверхность состоит из гиперболических точек, то она покрыта двумя семействами асимптотических линий.

Например, два семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида являются асимптотическими линиями.

Если на поверхности имеются два семейства асимптотических линий, то их можно выбрать, вообще говоря, за координатные линии u и v. В этом случае вдоль линии u, например, не меняется параметр v, и поэтому на этой линии вторая форма имеет вид $\mathrm{II} = L\,du^2$. Так как в асимптотическом направлении $\mathrm{II} = 0$ (см. соотношение (12.52)), то $L = 0$. Аналогично можно убедиться, что $N = 0$. Итак, *если асимптотические линии поверхности являются координатными линиями, то вторая форма имеет вид*

$$\mathrm{II} = 2M\,du\,dv.$$

2°. Главные направления. Линии кривизны. Из формулы (12.51) видно, что нормальная кривизна в данной точке представляет собой функцию от du и dv, точнее, от отношения du/dv, т. е. от направления $du : dv$ в данной точке.

Экстремальные значения нормальной кривизны в данной точке называются главными кривизнами, а соответствующие направления — главными направлениями.

Убедимся, что в данной точке регулярной поверхности всегда имеются главные направления.

Полагая

$$\frac{du}{\sqrt{du^2+dv^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}} = \sin\alpha,$$

преобразуем выражение (12.51) для k_n к виду

$$k_n = \frac{L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha}.$$

Таким образом, в данной точке нормальная кривизна k_n представляет собой дифференцируемую функцию аргумента α, заданную на сегменте $[0,\,2\pi]$ и принимающую одинаковые значения при $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$. Поэтому в некоторой внутренней точке α этого сегмента k_n имеет локальный экстремум. Указанному значению α отвечает направление $du : dv$ на поверхности, которое, естественно, является главным. Если вести отсчет углов α от этого главного направления, то, рассуждая аналогично, мы убедимся, что по крайней мере еще для одного направления $du : dv$ достигается экстремум нормальной кривизны.

Итак, *в каждой точке регулярной поверхности имеется по меньшей мере два различных главных направления.*

Укажем способ вычисления главных кривизн в данной точке. Считая k_n функцией от du и dv, получим из соотношения (12.51), следующее тождество относительно du и dv

$$(L - k_n E)\,du^2 + 2(M - k_n F)\,du\,dv + (N - k_n G)\,dv^2 \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по du и по dv и учитывая, что производная нормальной кривизны для главного направления равна нулю, получим для du и dv, определяющих любое главное направление, соотношения

$$\begin{aligned}(L - k_i E)\,du + (M - k_i F)\,dv = 0,\\ (M - k_i F)\,du + (N - k_i G)\,dv = 0,\end{aligned} \tag{12.53}$$

в которых k_i — значение главной кривизны в направлении $du : dv$. Так как в каждой точке имеются главные направления, то система (12.53) имеет относительно du и dv ненулевые решения. Следовательно, должен быть равен нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} L - k_i E & M - k_i F \\ M - k_i F & N - k_i G \end{vmatrix} = 0. \tag{12.54}$$

Из уравнения (12.54) могут быть определены главные кривизны k_i, а затем из соотношений (12.53) — главные направления.

Уравнение (12.54) является квадратным уравнением относительно k_i, вещественными корнями которого являются главные кривизны. Поэтому могут представиться два случая:

1°. Уравнение (12.54) имеет два различных корня k_1 и k_2.

2°. Корни k_i уравнения (12.54) одинаковы. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1°. *Уравнение* (12.54) *имеет два различных корня*: k_1 *и* k_2, $k_1 \neq k_2$. Этим корням отвечают два различных главных направления. Убедимся, что *если направления координатных линий u и v в данной точке совпадают с главными, то в этой точке $F = 0$ и $M = 0$. Отметим, что обращение F в нуль означает ортогональность главных направлений.*

Итак, пусть направления координатных линий u и v в данной точке совпадают с главными направлениями. Это означает, что направления $du : 0$, $0 : dv$ являются главными, и поэтому из соотношений (12.53) вытекают равенства

$$\begin{aligned} L - k_1 = 0, &\quad M - k_1 F = 0,\\ M - k_2 F = 0, &\quad N - k_2 G = 0.\end{aligned}$$

Так как $k_1 \neq k_2$, то, очевидно, $M = 0$, $F = 0$. Отметим, что при указанном выборе координатных линий главные кривизны k_1

и k_2 могут быть найдены из соотношений

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

2°. *Уравнение* (12.54) *имеет два одинаковых корня*: $k_1 = k_2 = k$. *Убедимся, что в этом случае любое направление в данной точке является главным. Если координатные линии в данной точке ортогональны, то в этой точке* $F = 0$ *и* $M = 0$.

Мы уже отмечали, что в каждой точке имеются по крайней мере *два различных главных направления.* В рассматриваемом случае каждому из этих главных направлений отвечает одно и тоже значение k главной кривизны. Но тогда должны обратиться в нуль коэффициенты системы (12.53), т. е.

$$L - kE = 0, \quad M - kF = 0, \quad N - kG = 0.$$

Из этих равенств следует, что в данной точке коэффициенты второй формы пропорциональны коэффициентам первой формы:

$$L = kE, \quad M = kF, \quad N = kG.$$

Подставляя эти значения L, M и N в формулу (12.51), мы убедимся, что в данной точке кривизны нормальных сечений в любом направлении $du : dv$ одинаковы и равны k. Следовательно, любое направление $du : dv$ в данной точке является главным.

Если координатные линии в данной точке ортогональны, то $F = 0$, а тогда из соотношения $M - kF = 0$ следует, что и $M = 0$.

Итак, мы можем сделать следующий вывод: *в каждой точке поверхности имеются ортогональные главные направления. Если направления координатных линий совпадают с этими главными направлениями, то в этой точке* $F = 0$ и $M = 0$.

Введем понятие линии кривизны.

Линией кривизны на поверхности называется кривая, направление которой в каждой точке является главным.

На любой регулярной поверхности имеется, вообще говоря, два различных семейства линий кривизны (выше мы указывали, что в каждой точке имеются два различных главных направления).

Отметим, что если в качестве координатных линий выбрать линии кривизны, то первая и вторая форма поверхности будут иметь вид:

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + G\,dv^2,$$
$$\mathrm{II} = L\,du^2 + N dv^2,$$

поскольку $F = 0$ и $M = 0$.

3°. Геодезические линии. Геодезической линией на поверхности называется кривая, главная нормаль в каждой точке которой совпадает с нормалью к поверхности.

Две любые точки регулярной полной поверхности можно соединить геодезической линией. Если эти точки достаточно близки, то соединяющая их геодезическая будет и кратчайшей линией — любая другая линия на поверхности, соединяющая эти точки, будет иметь бóльшую длину.

Отметим, что движение точки по поверхности без воздействия внешних сил происходит по геодезической линии.

6. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса. Пусть P — фиксированная точка регулярной поверхности Φ. Будем считать, что координатные линии u и v ортогональны в данной точке и направления этих линий совпадают с главными направлениями. В п. 5 этого параграфа мы установили, что при таком выборе координатных линий в данной точке выполняются соотношения

$$F = 0, \quad M = 0, \quad L - k_1 E = 0, \quad N - k_2 G = 0.$$

С помощью этих соотношений формула (12.51) для нормальной кривизны k_n примет вид

$$k_n = \frac{k_1 E\,du^2 + k_2 G\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}.$$

Если положить

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}, \tag{12.55}$$

то, очевидно, получим следующую формулу для нормальной кривизны:

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi. \tag{12.56}$$

Формула (12.56) называется *формулой Эйлера.* С помощью этой формулы нормальная кривизна k_n в направлении $du : dv$ может быть вычислена через главные кривизны k_1 и k_2.

Очевидно, формула Эйлера и формула (12.50) дают полную информацию о распределении кривизн линий на поверхности.

З а м е ч а н и е 1. Угол φ в формуле Эйлера, значение которого может быть найдено при заданном направлении $du : dv$ по формулам (12.55), представляет собой тот угол, который составляет направление $du : dv$ с направлением координатной линии u.

Чтобы убедиться в этом, вычислим по формуле (12.36) косинус угла между направлением $du : dv$ и направлением $du : 0$ линии u. Полагая в формуле (12.36) $\delta u = du$, $\delta v = 0$, получим для искомого косинуса выражение: $\dfrac{\sqrt{E}\,du}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}$, которое совпадает с выражением для $\cos\varphi$, определенным по первой из формул (12.55).

В теории поверхностей широко используются понятия *средней и гауссовой кривизны* поверхности в данной точке.

Средней кривизной H поверхности называется полусумма $\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ главных кривизн. Гауссовой кривизной K поверхности называется произведение k_1k_2 главных кривизн.

Обращаясь к уравнению (12.54) для главных кривизн и используя свойства корней квадратного уравнения, получим следующие формулы для H и K:

$$H = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \tag{12.57}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{12.58}$$

Замечание 2. Из выражения (12.58) для гауссовой кривизны следует, что ее знак совпадает со знаком дискриминанта $LN - M^2$ второй квадратичной формы (дискриминант $EG - F^2$ первой формы всегда положителен, так как первая форма положительно определенная). Поэтому гауссова кривизна в эллиптических точках положительна, в гиперболических отрицательна и равна нулю в параболических точках и точках уплощения.

На первый взгляд создается впечатление, что гауссова кривизна K поверхности может быть найдена лишь в случае, когда известны первая и вторая квадратичные формы поверхности (см. формулу (12.58)).

На самом же деле, гауссова кривизна может быть выражена только через коэффициенты первой квадратичной формы и поэтому представляет собой объект внутренней геометрии поверхности. Этот замечательный результат был установлен Гауссом [1] и в математической литературе называется «*знаменитой теоремой Гаусса*». Докажем эту теорему.

Теорема Гаусса. *Гауссова кривизна K поверхности может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные.*

Доказательство. Обращаясь к формуле (12.58) для гауссовой кривизны K и используя выражения (12.42) для коэффициентов второй квадратичной формы, легко убедиться, что для доказательства теоремы достаточно выразить через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные следующее выражение:

$$A = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2.$$

[1] К. Ф. Гаусс — выдающийся немецкий математик (1777–1855).

Это выражение легко преобразуется к виду [1]

$$A = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2 & \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}. \tag{12.59}$$

Дифференцируя по u и v выражения

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G,$$

получим

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u = \frac{1}{2}E_u, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u = \frac{1}{2}E_v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2}G_v,$$
$$\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2}G_u, \quad \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u = F_v - \frac{1}{2}G_u.$$

Дифференцируя выражение для $\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v$ по v, а выражение $\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v$ по u и вычитая полученные результаты, найдем

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2 = -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}.$$

Подставляя найденное выражение и выражения для скалярных произведений производных в правую часть (12.59), мы убедимся в справедливости теоремы.

В заключение приведем выражение для гауссовой кривизны K через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные:

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}\right) & \frac{1}{2}E_u & \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) \\ \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right) & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} -$$
$$- \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

[1] При преобразовании используется следующее тождество:

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2 \end{vmatrix}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ПО ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

1. Задача о суммировании тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье. Предположим сначала, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим равномерную сходимость ее тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{П.1}$$

на всем сегменте $[-\pi, \pi]$. Предположим далее, что вместо точного значения тригонометрических коэффициентов Фурье a_k и b_k этой функции нам известны лишь приближенные значения $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ указанных коэффициентов Фурье. Именно этот случай весьма часто встречается в прикладных задачах.

Будем считать, что ошибки при задании приближенного значения тригонометрических коэффициентов Фурье малы в смысле нормы пространства l^2 [1]. Это означает, что справедливо неравенство

$$\frac{(a_0 - \widetilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - \widetilde{a}_k)^2 + (b_k - \widetilde{b}_k)^2 \leqslant \delta^2, \tag{П.2}$$

где δ — достаточно малое положительное число, которое мы будем называть *погрешностью* в задании коэффициентов Фурье.

Естественно возникает важная для приложений задача: по приближенным значениям коэффициентов Фурье $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ восстановить в данной фиксированной точке x функцию $f(x)$ с ошибкой $\varepsilon(\delta)$, стремящейся к нулю при $\delta \to 0$.

Покажем, что прямым суммированием ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx), \tag{П.3}$$

[1] Определение пространства l^2 и нормы его элементов см. в п. 1 § 1 гл. 11.

вообще говоря, невозможно добиться восстановления функции $f(x)$ в данной точке x ни с какой степенью точности.

Фиксируем произвольно малую погрешность $\delta > 0$ и положим $C = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$. Предположим, что погрешности в задании коэффициентов Фурье имеют следующий конкретный вид:

$$\widetilde{a}_0 - a_0 = 0,\ a_k - \widetilde{a}_k = b_k - \widetilde{b}_k = \frac{\delta}{kC\sqrt{2}} \qquad \text{при} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Для заданных с такими погрешностями коэффициентов Фурье, очевидно, будет справедливо соотношение (П.2) со знаком точного равенства. Вместе с тем при замене точного ряда Фурье (П.1) рядом Фурье с приближенно заданными коэффициентами (П.3) мы совершим ошибку, равную сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(\widetilde{a}_k - a_k)\cos kx + (\widetilde{b}_k - b_k)\sin kx].$$

В точке $x = 0$ эта ошибка равна сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{a}_k - a_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(сколь бы малой мы не фиксировали погрешность $\delta > 0$).

Таким образом, сколь бы быстро ни сходился точный тригонометрический ряд Фурье (П.1) к функции $f(x)$ и как бы мала ни была погрешность δ в соотношении (П.2), задающем степень отклонения приближенных коэффициентов Фурье от точных, прямым суммированием ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье (П.3) невозможно восстановить функцию $f(x)$ в заданной точке сегмента $[-\pi,\ \pi]$ ни с какой степенью точности.

Фактически мы доказали, что как бы мало ни было число $\delta > 0$, характеризующее уклонение друг от друга в смысле (П.2) двух совокупностей коэффициентов Фурье $\{a_k,\ b_k\}$ и $\{\widetilde{a}_k,\ \widetilde{b}_k\}$, отвечающие этим двум совокупностям прямые суммы тригонометрических рядов Фурье (П.1) и (П.3) могут как угодно сильно отличаться друг от друга.

Такого рода задачи, для которых как угодно малое уклонение в задании исходных данных (в рассмотренном нами случае такими исходными данными является совокупность коэффициентов Фурье) может вызвать как угодно большое уклонение отвечающих этим исходным данным решений (в рассмотренном нами случае под решением понимается прямая сумма тригонометрического ряда Фурье), часто встречаются в математике и в приложениях и называются некорректно поставленными задачами.

Иными словами, рассмотренная нами задача о прямом суммировании тригонометрического ряда Фурье является некорректно поставленной.

Общий метод решения широкого класса некорректно поставленных задач разработан советским математиком А. Н. Тихоновым и называется методом регуляризации [1]).

Здесь мы остановимся на методе регуляризации лишь применительно к рассмотренной нами задаче о суммировании тригонометрического ряда Фурье.

2. Метод регуляризации для задачи о суммировании тригонометрического ряда Фурье. В применении к задаче о суммировании тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье метод регуляризации приводит к алгоритму, заключающемуся в рассмотрении в качестве приближенного значения функции $f(x)$ не суммы ряда (П.3), а суммы ряда

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{a}_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx) \frac{1}{1+k^2\alpha}, \tag{П.4}$$

получающегося посредством умножения k-го члена ряда (П.3) на «регуляризирующий» множитель $\dfrac{1}{1+k^2\alpha}$, в котором параметр представляет собой величину того же порядка малости, что и погрешность δ в соотношении (П.2), задающем уклонение коэффициентов Фурье.

Для обоснования указанного алгоритма мы докажем следующую основную теорему.

Теорема А. Н. Тихонова. *Пусть функция $f(x)$ принадлежат классу $L^2[-\pi, \pi]$ и непрерывна в данной фиксированной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогда для каждого $\delta > 0$ и для α, имеющего тот же порядок малости, что и δ, сумма ряда* (П.4) *с коэффициентами $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$, удовлетворяющими соотношению* (П.2), *совпадает в данной фиксированной точке x с $f(x)$ с ошибкой $\varepsilon(\delta)$, стремящейся к нулю при $\delta \to 0$* [2]).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha = \delta$ (ибо случай $\alpha = C(\delta)\cdot\delta$, где $0 < C_1 \leqslant C(\delta) \leqslant C_2$, рассматривается совершенно аналогично). Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что в данной

[1]) За цикл работ, посвященных решению некорректно поставленных задач, академик А. Н. Тихонов удостоен в 1966 г. Ленинской премии.

[2]) Сформулированная теорема является частным случаем доказанного А. Н. Тихоновым значительно более общего утверждения.

фиксированной точке x при всех положительных δ, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant \delta_0$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\widetilde{a}_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx\right]\frac{1}{1+k^2\delta} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{П.5}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Убедимся сначала в том, что для фиксированного нами ε найдется число $\delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех положительных δ, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant \delta_1(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)\cos kx + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)\sin kx\right]\frac{1}{1+k^2\delta}\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{П.6}$$

Для установления (П.6) достаточно убедиться в том, что сумма, стоящая в левой части (П.6), стремится к нулю при $\delta \to 0+0$.

Разбивая сумму, стоящую в левой части (П.6), на две суммы, в первую из которых входят слагаемые с номерами k, удовлетворяющими условию $k < 1/\delta$, а во вторую — все остальные слагаемые, и применяя к каждой из этих двух сумм неравенство Коши–Буняковского, будем иметь [1])

$$\begin{gathered}\left|\frac{\widetilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)\cos kx + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)\sin kx\right]\cdot\frac{1}{1+k^2\delta}\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\left\{\frac{\left(\widetilde{a}_0 - a_0\right)^2}{2} + \sum_{k<1/\delta}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)^2 + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)^2\right]\right\}O\left(\frac{1}{\delta}\right)} + \\ + \sqrt{\sum_{k\geqslant 1/\delta}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)^2 + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)^2\right]\cdot\sum_{k\geqslant 1/\delta}\frac{1}{k^4\delta^2}}.\end{gathered} \tag{П.7}$$

Учитывая соотношение (П.2) и принимая во внимание, что

$$\sum_{k\geqslant 1/\delta}\frac{1}{k^4} = O(\delta^3)$$

(например, в силу интегрального признака Коши–Маклорена, см. неравенство (13.38) из гл. 13 вып. 1), мы получим, что в правой части (П.7) стоит величина $O(\sqrt{\delta}) + O(\delta^{3/2})$.

Тем самым неравенство (П.6) можно считать доказанным, и для установления неравенства (П.5) нам достаточно доказать,

[1]) При этом мы также учитываем, что $\dfrac{1}{1+k^2\delta} \leqslant 1$, $\dfrac{1}{1+k^2\delta} \leqslant \dfrac{1}{k^2\delta}$.

что для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех положительных δ, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\frac{1}{1+k^2\delta} - f(x)\right| < \frac{3}{4}\varepsilon. \tag{П.8}$$

Так как по условию функция $f(x)$ непрерывна в данной фиксированной точке x, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ можно фиксировать $\eta > 0$ такое, что для всех значений y, удовлетворяющих условию $|y - x| < \eta$, будет справедливо неравенство

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{П.9}$$

Положим теперь $\gamma = l/\sqrt{\delta}$ и рассмотрим для фиксированной нами точки x и фиксированного числа $\eta > 0$ функцию $v_x(y)$, определенную на полусегменте $x - \eta < y \leqslant x - \eta + 2\pi$ равенством [1])

$$v_x(y) = \begin{cases} \dfrac{\gamma\pi}{2} e^{-\gamma|x-y|} & \text{при} \quad x - \eta < y < x + \eta, \\ 0 & \text{при} \quad x + \eta \leqslant y \leqslant x - \eta + 2\pi \end{cases} \tag{П.10}$$

и периодически с периодом 2π продолженную на всю бесконечную прямую $-\infty < y < +\infty$.

Подсчитаем тригонометрические коэффициенты Фурье A_k и B_k функции $v_x(y)$.

Из равенства (П.10) и из условия периодичности $v_x(y)$ с периодом 2π мы получим, что [2])

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} v_x(y)\cos ky\,dy = \frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\cos ky\,dy =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\cos k(t+x)\,dt = \frac{\gamma}{2}\cos kx\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\cos kt\,dt -$$

$$- \frac{\gamma}{2}\sin kx\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\sin kt\,dt = \gamma\cos kx\int\limits_0^{\eta} e^{-\gamma t}\cos kt\,dt.$$

---

[1]) Не ограничивая общности, мы считаем, что $\eta < \pi$.

[2]) При этом мы учитываем, что все интегралы от периодической функции по отрезкам, имеющим длину, равную ее периоду, совпадают между собой, делаем замену переменной $y = t + x$ и принимаем во внимание, что

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\cos kt\,dt = 2\int\limits_0^{\eta} e^{-\gamma t}\cos kt\,dt, \qquad \int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\sin kt\,dt = 0.$$

Далее, поскольку

$$\int_0^{\eta} e^{-\gamma t}\cos kt\,dt = \left[\frac{e^{-\gamma t}(-\gamma\cos kt + k\sin kt)}{k^2+\gamma^2}\right|_{t=0}^{t=\eta} = \frac{\gamma}{k^2+\gamma^2} + c^{-\gamma\eta}\cdot\sigma_k,$$

где

$$\sigma_k = \frac{-\gamma\cos k\eta + k\sin k\eta}{k^2+\gamma^2}, \tag{П.11}$$

то, учитывая, что $\delta = 1/\gamma^2$, мы получим следующее выражение для коэффициента Фурье A_k:

$$A_k = \frac{\cos kx}{1+k^2\delta} + e^{-\gamma\eta}\cos kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k. \tag{П.12}$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$B_k = \frac{\sin kx}{1+k^2\delta} + e^{-\gamma\eta}\sin kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k. \tag{П.13}$$

Так как по условию функция $f(y)$ принадлежит классу $L^2[-\pi,\,\pi]$ и так как функция $v_x(y)$ принадлежит тому же классу при любом $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} > 0$, то справедливо обобщенное равенство Парсеваля (см. равенство (11.28))

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy = \frac{A_0a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cdot a_k + B_k\cdot b_k). \tag{П.14}$$

Из соотношений (П.12), (П.13) и (П.14) вытекает, что для доказательства неравенства (П.8) достаточно установить, что для всех достаточно малых положительных δ справедливы неравенства

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{П.15}$$

$$\left|\frac{a_0}{2}e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0 + e^{-\gamma\eta}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{П.16}$$

Продолжим функцию $f(y)$ периодически с периодом 2π на всю бесконечную прямую.

Для доказательства неравенства (П.15) заметим, что в силу 2π-периодичности функций $v_x(y)$ и $f(x)$ и в силу равенства (П.10) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\eta}^{x-\eta+2\pi} v_x(y)f(y)\,dy = \frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}f(y)\,dy =$$

$$= f(x)\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\,dy + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta}[f(y)-f(x)]e^{-\gamma|x-y|}\,dy. \qquad (\text{П.17})$$

Учитывая, что [1])

$$\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\,dy = \frac{\gamma}{2}\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|\,t\,|}\,dt = \gamma\int\limits_{0}^{\eta} e^{-\gamma t}\,dt = 1-e^{-\gamma\eta},$$

и учитывая, что для любого y из сегмента $[x-\eta,\ x+\eta]$ справедливо неравенство (П.9), мы получим с помощью соотношения (П.17), что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy - f(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma\eta}|f(x)| + \frac{\varepsilon}{4}(1-e^{-\gamma\eta}) \leqslant e^{-\gamma\eta}|f(x)| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как для каждой фиксированной точки x и для фиксированных нами чисел $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ при всех достаточно малых $\delta = 1/\gamma^2$ справедливо неравенство $e^{-\gamma\eta}|f(x)| < \varepsilon/4$, то соотношение (П.15) доказано.

Остается доказать неравенство (П.16). Из (П.11) очевидно, что для величин σ_k при всех $k = 1,\, 2,\, \ldots$ справедлива оценка

$$|\sigma_k| \leqslant 2/k. \qquad (\text{П.18})$$

Для величины σ_0 из (П.11) при всех достаточно малых $\delta = 1/\gamma^2$ получим оценку

$$|\sigma_0| \leqslant 1/\gamma \leqslant 1. \qquad (\text{П.19})$$

[1]) При вычислении указанного интеграла мы делаем замену переменной $y = t + x$.

Применяя к сумме, стоящей в левой части (П.16), неравенство Коши–Буняковского и используя оценки (П.18) и (П.19), мы получим [1])

$$\left|\frac{a_0}{2}e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0 + e^{-\gamma\eta}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{-\gamma\eta}\gamma\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right]^{1/2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]^{1/2}. \quad (\text{П.20})$$

Обе суммы, стоящие в правой части (П.20) в квадратных скобках, ограничены постоянной (не зависящей от δ). Ограниченность первой из указанных сумм сразу вытекает из неравенства Бесселя, а ограниченность второй из указанных сумм доказана в гл. 13 вып. 1.

Поскольку при любом фиксированном $\eta > 0$ $\lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\gamma\eta}\gamma =$ $= \lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\frac{n}{\delta^2}}\frac{1}{\delta^2} = 0$, то правая часть (П.20) для любого фиксированного нами $\varepsilon > 0$ меньше числа $\varepsilon/4$ при всех достаточно малых положительных δ. Теорема доказана.

3. Заключительные замечания о значении метода регуляризации. Предложенный А. Н. Тихоновым метод регуляризации имеет большое естественнонаучное значение.

Предположим, что с помощью какого-либо прибора мы измеряем частотные характеристики интересующего нас физического процесса. Из-за несовершенства прибора мы измеряем указанные частотные характеристики с некоторой ошибкой.

Естественно возникает проблема: должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом физическом процессе.

Метод регуляризации указывает путь к такой математической обработке результатов измерений частотных характеристик (т. е. коэффициентов Фурье), при которой мы получаем информацию об изучаемом физическом явлении (т. е. об искомой функции $f(x)$) с ошибкой, соответствующей ошибке в результатах измерений частотных характеристик.

[1]) При этом мы мажорируем единицей модули функций $\cos kx$ и $\sin kx$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ